

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

講義「核融合プラズマ物理の基礎 - I」

平成8年度

総合研究大学院大学 数物科学研究科 核融合科学専攻

" Lecture Note on the Fundamentals of
Fusion PLasma Physics - I "

岡本正雄

Masao Okamoto

(Received - Oct. 1, 1996)

NIFS-PROC-29

Oct. 1996

RESEARCH REPORT
NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Nagoya 464-01, Japan.

講義 「核融合プラズマ物理の基礎-I」

平成8年度

総合研究大学院大学

数物科学研究科 核融合科学専攻

岡本正雄

Lecture Note on the Fundamentals of Fusion Plasma Physics -I

Masao Okamoto

Graduate University for Advanced Studies

Synopsis

The Lecture on the "Fundamentals of Fusion Plasma Physics" was given from April to July in 1996 to the students of the Fusion Science Course, Department of Mathematical and Physical Science of the Graduate University for Advanced Studies and to other graduate students at the National Institute for Fusion Science. A transcript of the lecture is presented.

Key words: plasma physics, single particle orbit, kinetic theory, Coulomb collision, fluid description, magnetohydrodynamics, wave theory

はじめに

本稿は、平成8年4月から7月にかけて、核融合科学研究所大学院教育協力委員会主催の講義として、総合研究大学院大学数物科学研究科核融合科学専攻の学生、核融合科学研究所特別研究学生等を対象に行った核融合プラズマ物理の基礎の講義に一部修正、加筆した講義録である。受講者の学部時代の専攻が多様であるため、簡単な物理の基礎知識で理解できるよう平易に書かれている。平成8年9月からの講義の分は改めて講義録を出版する。

本稿作成にあたり、タイプや図の作成は全て長尾佳美嬢にお願いした。同嬢には大変な負担をかけたが心良く協力していただき、心から感謝したい。

目次

第I部

§1 序	1
1) プラズマの概念	1
2) 平均熱運動エネルギー	3
3) デバイ遮蔽	4
4) プラズマ振動	7
5) プラズマ・パラメータ	9
6) シース	10
§2 単一荷電粒子の運動	14
(1) 一様な場	15
1) 一様磁場	15
2) 磁気モーメント	18
3) 一様な外力場	18
(2) 非一様磁場	21
1) μ の保存	22
2) grad B ドリフト	
3) 曲率ドリフト	25
(3) 粒子軌道とトーラス	26
1) 案内中心の運動	26
2) 単純トーラス	28
(4) ミラー場	30
1) 磁気ミラー	30
2) ミラー比	32
3) フェルミ加速と断熱圧縮	33
(5) 時間的に変動する場	34
1) 時間変動する電場	35
2) 時間変動する磁場	38
§3 運動論	40
(1) ボルツマンの式	40
1) 分布関数	40
2) ボルツマンの式の導出	40
3) ブラソフの式	43

4) BBGKY の理論	43
(2) マックスウェルの式	44
(3) プラズマ振動とランダウ減衰	45
(4) ランダウ減衰の物理的描像	55
(5) 捕捉粒子	59
(6) プラズマ分散関数	60
1) プラズマ分散関数	60
2) プラズマ振動	62
3) イオン音波	63
§ 4 クーロン衝突	68
(1) クーロン衝突の特徴	68
1) 弾性散乱	68
2) 大角散乱の場合	70
3) 運動量変化	70
4) 微小角散乱の効果	72
5) エネルギー変化	74
6) 熱化プラズマ	76
(2) 衝突積分	76
(3) 熱化粒子の衝突緩和	80
(4) テスト粒子の衝突衝突	83
1) 速度空間での拡散	83
2) 拡散係数と衝突時間	86
(5) 高エネルギーイオン	88
1) 高エネルギーイオン	88
2) 高エネルギー電子	92
(6) 逃走電子	93
(7) 実効衝突周波数	95
§ 5 流体近似と電磁流体力学	100
(1) 流体近似	100
1) 流体方程式系	100
2) 古典的輸送係数	103

(2) 電磁流体力学	106
1) 1 流体運動方程式	106
2) オームの式	110
3) MHD 方程式系	113
4) 凍り付きの定理	115
(3) 磁気流体波	117
(4) 捕捉	126

§1 序

1) プラズマの概念

温度を上昇させていくと物質は固体から液体、液体から気体へとその状態を変えていく。さらに温度を上げると気体中の分子は原子となりやがて原子は電離し、正の電荷を持つ原子(イオン)と負の電荷を持つ電子の集合体となる。このような電離気体の集合体で、ある空間尺度で見たとき電氣的に準中性状態にあるものをプラズマという。プラズマは固体、液体、気体と並べて、物質の第4状態ということがある。気体を数eV(数万度)から数10eV(数10万度)に加熱すると、中性粒子の殆ど全くない電離度100%の完全電離プラズマが得られる。電離度の低いプラズマは弱電離プラズマと呼ばれ、グロー放電で作られるプラズマは電離度1%以下の弱電離プラズマである。半導体中の電子とホールもプラズマとみなす事ができ、固体中のプラズマを固体プラズマと呼ぶ事がある。地上にも宇宙空間にもプラズマ状態は多く見られるが、本講義では核融合プラズマ、特に磁場閉じ込め方式(ヘリカル系やトカマク装置など)において得られる完全電離の気体プラズマを主として考える。このようなプラズマは、プラズマ粒子の個数密度は 10^{16}m^{-3} から 10^{21}m^{-3} 程度であり、温度は数eV(数万度)から数10keV(数億度)の範囲にある。ちなみに 0°C 、1気圧の中性気体(空気)の分子密度は約 $3 \times 10^{25}\text{m}^{-3}$ であるので、気体プラズマは極めて希薄なガスと言えよう。このように気体プラズマは高温で希薄であるという事がその特徴である。

プラズマは荷電粒子から成る。真空中では、 q_1 の電荷を持つ荷電粒子と q_2 の電荷を持つ荷電粒子との間にはクーロン力

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

が働く。 r は2粒子間の距離である。クーロン力は重力と同じ遠達力であり、遠くの粒子にも作用する。ただし、二つの荷電粒子の電荷の符号により引力のみならず斥力にもな

る。気体プラズマでは粒子間に働く力はこのクーロン力が全てである。ポテンシャルエネルギーは

$$U \propto \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1.2)$$

である。気体プラズマが完全電離、あるいはある程度の電離度を維持するためには、プラズマは

熱運動エネルギー ≫ ポテンシャルエネルギー

でなければならない。また、粒子1個の体積を v 、粒子の総数を N とすると vN はプラズマ全体の体積と比べて無視できる程小さいので、プラズマはほぼ理想気体とみなせる。

クーロン力は遠達力であるので、ある粒子には周りの多くの粒子が同時に力を及ぼす。今、無限に一様に拡がったプラズマを考える。ある粒子を中心に球を描くとこの球は r^3 で大きくなり、従って考えている粒子に力を及ぼす粒子数は r^3 で増えていく。一方クーロン力は r^2 でしか減衰しないので、考えている粒子には無限個の粒子が力を及ぼす。しかし、現実には、ある粒子の周りには相対的にその粒子と異符号の粒子が集まりその粒子の作るポテンシャルを遮蔽する。この遮蔽長をデバイ長という。デバイ長内での二つの粒子間の局所的な相互作用を衝突という。プラズマ粒子の衝突過程は、二つの粒子が充分近くまで接近して大きな相互作用を及ぼし合うような大角散乱はむしろ希で、考えている粒子が周りの多くの粒子と同時に相互作用する小角、あるいは微小角散乱の衝突過程が支配的である。微小角散乱の積み重ねの結果、考えている粒子がその初期の速度方向を 90° 変えるまでの時間を(狭義の)衝突時間といい、その逆数を衝突周波数という。衝突周波数 ν はプラズマの密度 n に比例して大きくなり、温度 T の $3/2$ 乗に逆比例する($\nu \propto n/T^{3/2}$)。高温希薄な気体であるプラズマは当然衝突が少ない。 0°C 、1気圧の空気では空気分子の自由平均行程は $6 \times 10^{-8}\text{m}$ 程度、衝突周波数は $\nu \sim 5.5 \times 10^9/\text{s}$ 程度である。 $n = 10^{19}\text{m}^{-3}$ 、 $T = 100\text{eV}$ のプラズマでの電子の衝突周波数は $\nu_e \sim 4.7 \times 10^5/\text{s}$ 、 $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$ 、 $T = 10\text{keV}$ のプラズマでは $\nu_e \sim 4.7 \times 10^3/\text{s}$ 程度と極めて小さい。

衝突が少ないという事実と、熱運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりずっと大きいことから、プラズマ中では粒子は（ミクロに見ると微小に揺れ動いているが）殆ど自由に走っている（almost free streaming と呼ばれる事がある [1]）。

プラズマの著しい特徴は集団運動を引き起こす事である。これはプラズマ粒子間に働くクーロン力が遠距離まで作用する遠達力である事に起因している。一つの荷電粒子が持つクーロン力はおおよそデバイ長程度で遮蔽されるが、この事は、デバイ長より大きなスケールの集団運動が無いという事を意味するものではない。プラズマではデバイ長より大きな、あるいはずっと大きなスケールの集団運動は容易に起こる。一般に、多数の自由度を持つ粒子群が相互作用し、様々な波長の、様々な周波数の集団運動を起こす。この結果、プラズマは気体といっても多様な側面を持つ。即ち、プラズマは、単一粒子的な振る舞いをしたり、流体的振る舞いをしたりし、完全導体的、不完全導体的側面や誘電体的側面などを持つ極めて複雑な複合体であり、本質的に非線形的振る舞いをする多体系であると言える。

2) 平均熱運動エネルギー

熱平衡状態にあるプラズマはあらゆる速度の粒子を含んでおり、速度空間における粒子密度の分布はマックスウェル分布が最も確からしいと考えられている。1次元マックスウェル分布は、質量 m の粒子に対して温度を T 、速度を v_x とすると次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_M(v_x) &= n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} m v_x^2 / T\right] \\ &= n \frac{1}{\sqrt{\pi} v_T} \exp\left[-v_x^2 / v_T^2\right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

$f_M(v_x)dv_x$ は 1m^3 当たり v_x と v_x+dv_x の間の速さを持つ粒子の個数を表す。ここで

$$v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (1.4)$$

は熱速度と呼ばれ、 n は密度 [m^{-3}], m は質量 [kg], T はエネルギー単位 [J] の温度である。プラズマ物理では温度は電子ボルト [eV] 単位で表す事が多い。 $1\text{eV} = 1.6022 \times 10^{-19}$ Joule

であるので、Joule 単位の温度と eV 単位の温度との間には

$$T[\text{Joule}] = 1.6022 \times 10^{-19} T[\text{eV}]$$

の関係がある。また、絶対温度とは $1\text{eV} = 11605^\circ\text{K}$ の関係にある。

平均の熱運動エネルギーは分布関数で運動エネルギーを平均する事で定義され次のようになる。

$$E_{av} = \left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 f(v_x) dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x} = \frac{1}{2} T \quad (1.5)$$

3次元の場合、マックスウェル分布は次の式で与えられる。

$$f_M(\vec{v}) = n \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp[-v^2/v_T^2] \quad (1.6)$$

速度 \vec{v} の3成分を v_x, v_y, v_z とするとその大きさの2乗は $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。この時、平均の熱運動エネルギーは

$$E_{av} = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} T \quad (1.7)$$

となり、平均運動エネルギーは1自由度(1粒子)当たり $T/2$ である。速度の2乗平均は

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_T \quad (1.8)$$

である。電子は電子で、イオンはイオン同志で緩和し、それぞれが電子温度 T_e 、イオン温度 T_i のマックスウェル分布となる。しかし、その緩和時間は異なるので $T_e \neq T_i$ の状態がある。その後電子群とイオン群が緩和し $T_e = T_i = T$ となる。

3) デバイ遮蔽

点電荷 q が真空中に作るクーロンポテンシャル場は

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.9)$$

である。ただし $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ F/m である。この場の影響を受けてプラズマ中の荷電粒子の空間分布が一様でなくなり、この結果摂動の空間電荷が生じ、これが新しくポテンシャル場を作る。このポテンシャル場ともとの真空中のポテンシャル場の重なりとしてプラズマ中のポテンシャル場が決まる。温度 T の電子ガスを考える。電子ガスではイオンは重いため動かず一様に分布するバックグラウンドと考える（イオン質量と電子質量との比は、軽水素に対して、 $m_i/m_e = 1830$ である事に注意）。電子の密度を n_e 、イオンの密度を n_i とする。イオンの密度は一様で $n_i = n_0 = \text{const.}$ である。ある電荷 q の位置を原点にとる。電子の電荷は $q = -e$ (e は素電荷で $e = 1.6022 \times 10^{-19}$ C) である。

ポアソンの式は

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} e(n_e - n_0) \quad (1.10)$$

で与えられる。 $\delta(\vec{r})$ はデルタ関数である。電子密度 n_e はボルツマン分布

$$n_e = n_0 \exp[e\varphi(\vec{r})/T] \quad (1.11)$$

で与えられる。式 (1.11) で $e\varphi(\vec{r})$ はポテンシャルエネルギー、 T は運動エネルギーに相当する。プラズマでは、ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーと比較するとはるかに小さく

$$e\varphi(\vec{r})/T \ll 1 \quad (1.12)$$

が成り立つ。従って式 (1.11) から摂動の電子密度は

$$n_e - n_0 \cong n_0 \left(1 + \frac{e\varphi(\vec{r})}{T}\right) - n_0 = n_0 \frac{e\varphi(\vec{r})}{T} \quad (1.13)$$

となり、ポアソンの式 (1.10) は

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 T} \varphi(\vec{r}) - \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (1.14)$$

となる。ここで

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{n_0 e^2}} \quad (1.15)$$

という新しい長さの物理量を導入し、 $r = \infty$ で $\varphi = 0$ となる解を求めると

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/\lambda_D) \quad (1.16)$$

がポアソンの式の解として得られる。ある一つの電荷 q の作るポテンシャルは、周りの電子に遮蔽され、 λ_D 程度しか届かない事が分かる。 λ_D のことをデバイ長、あるいはデバイ半径という。

電子は軽いので速やかに動いて電荷 q の作るポテンシャルを遮蔽しようとする。その結果、ある電子の周りには相対的にイオンが集まり、あるイオンの周りには電子が集まり、それぞれのポテンシャル場を遮蔽する。従ってデバイ半径内では電気的中性は破られている事になり、デバイ長より大きな空間スケールでは電気的に準中性である。デバイ長の大きさを典型的な場合に求める。デバイ長は

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}\right)^{1/2} = 7.43 \times 10^{-7} (T_e [\text{eV}])^{1/2} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{10^{20}}\right)^{-1/2} \quad [\text{m}] \quad (1.17)$$

で与えられ、 $T_e = 1\text{keV}$ 、 $n_e = 5 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ の時、 $\lambda_D = 3.32 \times 10^{-5}\text{m} = 3.32 \times 10^{-3}\text{cm}$ で、 $T_e = 100\text{eV}$ 、 $n_e = 10^{16}\text{m}^{-3}$ の時、 $\lambda_D = 7.43 \times 10^{-4}\text{m} = 7.43 \times 10^{-2}\text{cm}$ である。

プラズマは λ_D より充分大きなスケールで見ると電気的に準中性であるといえる。但し、準中性と言っても電磁力がいっさい生じない程完全な中性ではない。それどころか、デバイ長より大きなスケールで電磁力が働き集団運動を起こすのが普通である。このような時、プラズマを準中性と言ってもどの程度の準中性かは考えている物理現象に依存す

る。プラズマの系の特徴的な長さを L とすると、電離気体がプラズマである条件の一つは $\lambda_D \ll L$ である。

4) プラズマ振動

集団運動の簡単な例としてプラズマ振動を考える。プラズマ粒子（電子とイオン）は初期に空間的に一様に分布しているとする。イオンは重く均一に分布したまま動かないとする。即ち電子ガスを考える。図 1.1(a) のように何らかの原因で電子群がイオン群からずれて荷電分離が生じたとする。イオン群から電子群に向かって電場 E が生ずる。この電場により電子群は加速され右から左へ動き、荷電分離を打ち消そうとする（遮蔽効果）。しかし、図 1.1(b) のように、電子群は慣性のため平衡状態となるイオン群の位置を通り過ぎ、右から左の方向に電場が生ずる。この電場を打ち消すように電子群は右に動き図 1.1(c) のように左から右に電場が生ずる。このように図 1.1(b) 及び (c) のようにもとの平衡状態の位置にあったイオン群の周りに電子群は振動する。

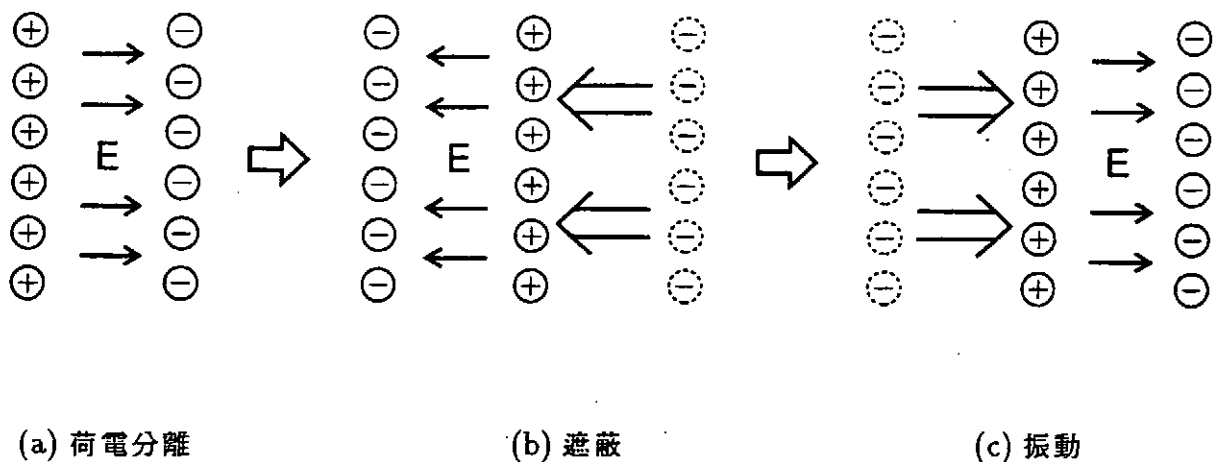


図 1.1 プラズマ振動

初期の平衡状態の電子密度を n_{e0} とする。摂動により電子群が ξ だけ動き、その結果電子密度は \tilde{n}_e だけ n_{e0} からずれるとする。 \tilde{n}_e は密度に対する連続の式

$$\tilde{n}_e + \frac{d}{dx} n_{eo} \xi = 0 \quad (1.18)$$

を満たす。ポアソンの式は

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{e}{\epsilon_0} \tilde{n}_e = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{d}{dx} n_{eo} \xi \quad (1.19)$$

となり電場は

$$E = \frac{e n_{eo}}{\epsilon_0} \xi \quad (1.20)$$

で与えられる。ξに対する運動方程式は

$$m_e \ddot{\xi} = -eE \quad (1.21)$$

であり、次のように書ける。

$$\ddot{\xi} + \omega_{pe} \xi = 0 \quad (1.22)$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_{eo} e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (1.23)$$

このように電子群は平衡位置の周りに角振動数 ω_{pe} で振動する事がわかる。これをプラズマ振動と呼び、 ω_{pe} のことをプラズマ振動数という。

電子ガスではイオンの質量を無限大としたが、これを有限としイオンの運動も許すと、プラズマ振動数は

$$\omega_{pe} = \left(\sum_a \frac{n_a q_a^2}{\epsilon_0 m_a} \right)^{1/2} \quad (1.24)$$

となる。a は粒子種を表し (a=e: 電子、a=i: イオン)、 q_a は a 種粒子の電荷数である ($q_e = -e, q_i = Z_i e$)。プラズマ振動の大きさを計算してみよう。 ω_{pe} は

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{10^{20}} \right)^{1/2} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (1.25)$$

$$f_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} \simeq 9000 \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (1.26)$$

と書け、プラズマ振動は電子密度のみの関数である事に注意しよう ($\sqrt{n_e}$ に比例する)。
 $n_e = 10^{16} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 5.64 \times 10^9 \text{s}^{-1}$ 、 $n_e = 10^{19} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 1.78 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$ 、
 $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 5.64 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$ である。このように電子プラズマ振動は非常に
 高い振動数を持つ。このような高周波振動では重いイオンはついて行けず、イオンは動か
 ないとした電子ガス・モデルは充分良い近似である事が分かる。

図 1.2 のように角周波数 ω の電磁波が真空中 (あるいは空气中) を通りプラズマに入
 射したとする。プラズマの表面には密度勾配があり、密度は空間的に変化している。プラ
 ズマ表面で電磁波はプラズマ振動を励起し、励起されたプラズマ振動は電磁波を遮蔽しよ
 うとする。 $\omega > \omega_{pe}(x_1)$ となる位置では電磁波は完全に遮蔽される事なくプラズマ中に入
 るが、 $\omega < \omega_{pe}(x_2)$ となる所では電磁波は反射されてしまう。ラジオ波が電離層で反射さ
 れ、FM 波が透過するのはこのためである。

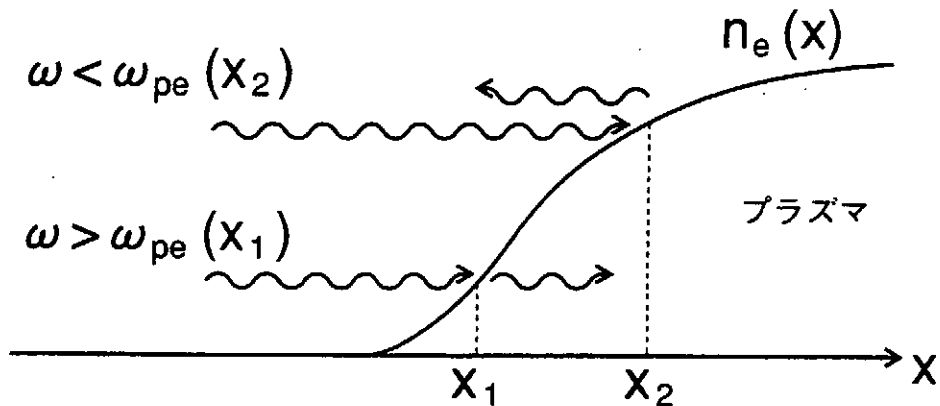


図 1.2 電磁波の透過と反射

5) プラズマパラメータ

デバイ長を半径とする球を考え、その球の中にあるプラズマ粒子数を N_D とする。即ち

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \quad (1.27)$$

ここで n は単位体積当たりの粒子密度である。 N_D の大きさは、例えば、 $T_e = 1\text{keV}$ 、 $n = 5 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ の時、 $N_D = 7.68 \times 10^6$ で非常に大きな数である。 N_D の逆数

$$g = \frac{1}{N_D} = \frac{3}{4\pi n \lambda_D^3} \quad (1.28)$$

をプラズマパラメータという。気体プラズマでは g は非常に小さな数である。 g の意味を考えよう。 g を

$$g = \frac{3}{4\pi n \lambda_D} \frac{1}{\epsilon_0 T} = \frac{3e^2}{4\pi \epsilon_0 \lambda_D} \cdot \frac{1}{T} \quad (1.29)$$

と書くと、式(1.16)より $e^2/4\pi\epsilon_0\lambda_D$ は平均ポテンシャル・エネルギー、 T は式(1.7)より平均熱運動エネルギーに相当するので

$$g \sim \frac{\text{平均ポテンシャル・エネルギー}}{\text{平均熱運動エネルギー}} \ll 1$$

と言える。つまり $g \ll 1$ は平均ポテンシャル・エネルギーが平均熱運動エネルギーよりずっと小さい事を意味している。 $g \ll 1$ は電離気体がプラズマであるための一つの条件である。

6) シース

プラズマはデバイ長より大きいスケールで見たとき準中性を保っている。デバイ長程度より小さなスケールでは中性条件が破れ、イオンの密度 n_i と電子の密度 n_e とは差が生じ電荷密度 ρ_e が生ずる。このような例としてシースを考えよう。今、プラズマが図 1.3 のように壁に接触しているとする。電子はイオンより熱速度が大きいのでイオンより早く壁に到達する。その結果、プラズマ内に正電荷のイオンを残すことになりプラズマのポテンシャルは壁に対して正となる。つまり壁でのポテンシャル φ_w はプラズマに対して負となる。壁前面でポテンシャル降下はデバイ遮蔽により、デバイ長程度に限られるであろう。壁前面でポテンシャル降下の領域をシース (sheath) という。

簡単のため図 1.3 のように一次元問題としてシースが形成される条件を考えてみる。
 $x=0$ でポテンシャルは $\varphi=0$ とする。イオンは温度零とし ($T_i=0$)、 u_0 の速さで壁に向かうとする。実際、シース (デバイ長程度) の前にプレシースが長い領域にわたり存在し、ここでの φ の降下によりイオンは壁に向かって加速される。イオンの粒子束はプラズマ中心部とシース部で連続であるので

$$n_0 u_0 = n_i(x) u(x) \quad (1.30)$$

が成立し、エネルギーの保存から

$$\frac{1}{2} m_i u_0^2 = \frac{1}{2} m_i u^2(x) + q_i \varphi(x) \quad (1.31)$$

が成立する。但し、 $q_i = Z_i e$ ($e > 0$: 素電荷) で Z_i はイオンの電荷数である。式 (1.30) と式 (1.31) から

$$n_i(x) = n_0 \left(1 - \frac{2q\varphi}{m_i u_0^2} \right)^{-1/2} \quad (1.32)$$

であり、また、電子はボルツマン分布をしているとすると

$$n_e(x) = n_0 \exp(e\varphi(x)/T_e(x)) \quad (1.33)$$

である。但し、 T_e はエネルギー単位 [J] で表してある。ポアソンの式は

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} (q_i n_i - e n_e) \quad (1.34)$$

である。ここで次の量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \chi &\equiv -\frac{e\varphi}{T_e} \\ \xi &\equiv \frac{x}{\lambda_D} \quad \left(\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2} : \text{デバイ長} \right) \\ M &= \frac{u_0}{C_s} \quad \left(C_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} : \text{音速} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Mはマッハ数である。式(1.34)は

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = Z_i \left(1 + \frac{2Z_i\chi}{M^2}\right)^{-1/2} - e^{-x} \quad (1.36)$$

となる。これは平面シースの非線形方程式で、これを $\chi \ll 1$ の時に考える。壁面上に生ずる電位、すなわちポテンシャル φ_w はその大きさは T_e/e 程度である。シースの入り口付近では電位は小さく $|e\varphi/T_e| \ll 1$ と考えてよい。従って $x \ll 1$ の仮定はシースの入り口付近を考える事になる。また、 $T_e(x) = \text{const.}$ と仮定する。 $\xi = 0$ ($x = 0$) で $\chi = 0$ ($\varphi = 0$) とする。式(1.36)に $d\chi/d\xi$ を掛けて積分すると

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^2 = M^2 \left[\left(1 + \frac{2Z_i\chi}{M^2}\right)^{1/2} - 1 \right] + e^{-x} - 1 \quad (1.37)$$

となる。但し、 $\xi = 0$ で $d\chi/d\xi = 0$ とした。($x = 0$ で電場 $E = 0$ とした。) 式(1.37)の右辺は正又は零でなければならない。 $\chi \ll 1$ として右辺を展開すると

$$\chi \left[Z_i - 1 + \frac{1}{2}\chi \left(1 - \frac{Z_i}{M}\right) \right] \geq 0 \quad (1.38)$$

が成立せねばならない。 $Z_i = 1$ の時

$$M \geq 1, \quad u_0 \geq C, \quad (1.39)$$

となる。これはシースが形成されるための必要条件でボーム条件と呼ばれる。この条件は、壁面シースポテンシャルが形成されるためには、この領域へイオンは音速以上の速さで流れ込む必要がある事を意味している。

プラズマが壁に接触していると、上述のように、壁前面にシースができるが、シースの役割は(イオン)より速く壁にやってくる電子を静電的に閉じ込めることである。エネルギーが高くシースポテンシャルを乗り越えて壁に来る電子の粒子束と壁に当たるイオンの粒子束が等しくなるようシースポテンシャルの大きさが調整され、その結果壁前面のデバイ長程度のシースを除いて、準中性のプラズマが維持される。

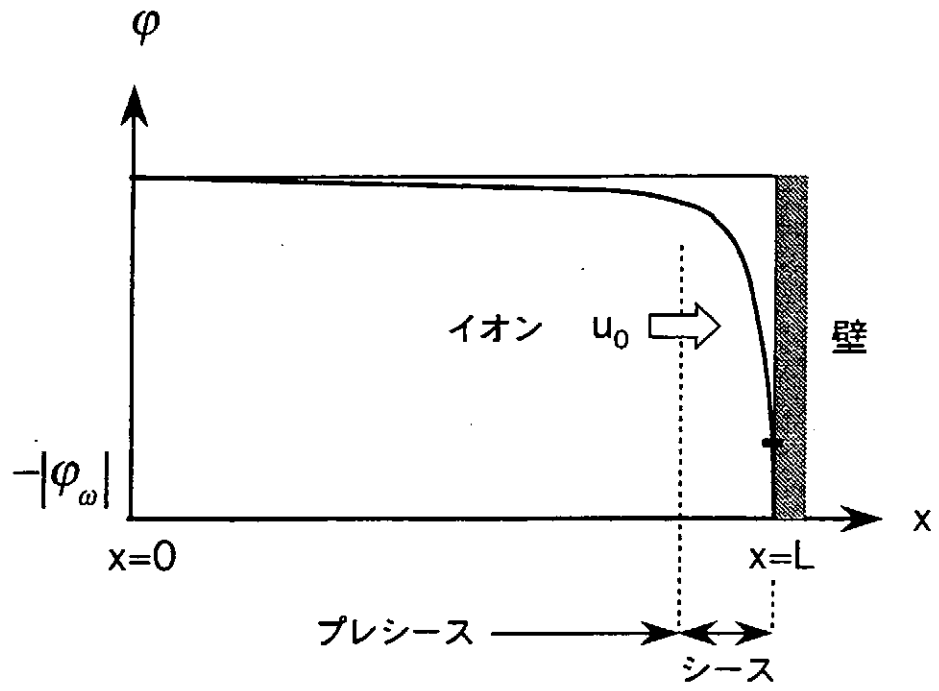


図 1.3

§2 単一荷電粒子の運動

与えられた電磁場 \vec{B}, \vec{E} の中での単一荷電粒子の運動を考える。粒子の運動は与えられた \vec{B}, \vec{E} に影響を与えないとする。a 種粒子 (a=e: 電子, a=i: イオン) に対する運動方程式は

$$m_a \frac{d\vec{v}}{dt} = q_a (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

で与えられる。 m_a は質量、 q_a は電荷 ($q_e = -e, q_i = Z_i e, e$ は素電荷で $e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{C}$) である。この方程式を典型的な場合に解く。

プラズマに外部から磁場 \vec{B} が加えられている場合を考える。電場 \vec{E} は存在しないとする。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

但し、粒子種を示す a は省略した。以下でも必要のない時は a は省略する。速度 \vec{v} を磁場 \vec{B} に平行な成分 \vec{v}_{\parallel} と垂直な成分 \vec{v}_{\perp} に分ける。

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (2.3)$$

粒子の運動エネルギーは、全エネルギー W 、垂直エネルギー W_{\perp} 、平行エネルギー W_{\parallel} 、それぞれを

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v^2 = W_{\perp} + W_{\parallel} \\ W_{\perp} &= \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \\ W_{\parallel} &= \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

と定義できる。全エネルギー W は

$$\frac{dW}{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (2.5)$$

であるので、 W = 一定である。すなわち、粒子に働く力は常に運動方向に垂直で静的磁場は仕事をしないため、粒子の運動エネルギーは保存される。

もし、静電ポテンシャル φ による電場 \vec{E} が存在するとする ($\vec{E} = -\nabla\varphi$)。式 (2.1) の両辺に \vec{v} をスカラー的に掛けると

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} = -q\vec{v} \cdot \nabla\varphi \quad (2.6)$$

となる。 $\dot{\varphi} = \dot{\vec{r}} \cdot \nabla\varphi = \vec{v} \cdot \nabla\varphi$ であることに注意すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + q\varphi \right) = 0 \quad (2.7)$$

となり

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi \quad (2.8)$$

が粒子の運動中保存されることになる。

(1) 一様な場

1) 一様磁場 \vec{B} ($\vec{E} = 0$)

磁場 \vec{B} が一様で z 方向を向いているとする。大きさを B とすると $\vec{B} = (0, 0, B)$ であり、運動方程式 (2.2) の各成分は

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

と書ける。これらの式の解は

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= (v_{\perp}/\omega_c)\sin(\omega_c t + \alpha) \\ y - y_0 &= (v_{\perp}/\omega_c)\cos(\omega_c t + \alpha) \\ z - z_0 &= v_{\parallel}t \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

と書ける。 x_0, y_0, z_0 は粒子の初期位置である。 α は任意の定数である。 v_{\perp} と v_{\parallel} は定数である。 ω_c は

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (\omega_{ce} = -\frac{eB}{m_e}, \quad \omega_{ci} = \frac{Z_i e B}{m_i}) \quad (2.11)$$

で定義され、サイクロトロン周波数と呼ばれる。但し ω_c は符号を含むことに注意する必要がある。符号を含まず、常に正の値を取るサイクロトロン周波数を

$$\Omega = \left| \frac{qB}{m} \right|, \quad (\Omega_e = \frac{eB}{m_e}, \quad \Omega_i = \frac{Z_i eB}{m_i}) \quad (2.12)$$

と定義しておく。ラーモア半径は次のように定義される。

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega}, \quad (r_{Le} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_e}, \quad r_{Li} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_i}) \quad (2.13)$$

で定義される。 v_{\parallel} と v_{\perp} は磁場に平行、及び垂直方向の粒子の初期速度の大きさである。以上から荷電粒子は磁場の方向 (z 方向) には等速運動を行い、磁場に垂直方向 ($x-y$ 平面上) には半径 r_L の円運動を行い、全体として磁力線に巻きつくらせん運動をすることがわかる。円運動の回転の方向は電子とイオンで逆向きである。円運動の中心を旋回中心、あるいは案内中心と呼び、一様磁場の場合、この中心は磁場方向に一様に進む。図 2.1 に電子、及びイオンの運動を図示する。

電子とイオンのサイクロトロン周波数の比は、 $\Omega_i/\Omega_e = Z_i m_e/m_i$ で、 $\Omega_i \ll \Omega_e$ 、すなわち Ω_e は Ω_i より質量比程度 (水素イオンの場合 1,830 倍) 大きい。もし、 v_{\perp} が同じなら、ラーモア半径の比は $r_{Li}/r_{Le} = \Omega_e/\Omega_i = m_i/(Z_i m_e)$ であるので、 $r_{Le} \ll r_{Li}$ 、すなわちイオンのラーモア半径は電子より質量比程度だけ大きい。電子群の温度を T_e 、イオン群の温度を T_i とすると、平均のラーモア半径は、それぞれ $v_{\perp} = v_T$ (熱速度) で評価してよいかから、この時は $\rho_{Li}/\rho_{Le} = (1/Z_i)(m_i T_i/m_e T_e)^{1/2}$ となり、ラーモア半径の比は $\sqrt{\text{質量比}}$ 程度となる。電子とイオンのこのような差は非常に重要でしっかり憶えておく必要がある。

サイクロトロン周波数とラーモア半径の大きさを典型的な場合に計算してみよう。電子、及びイオンに対するサイクロトロン周波数 Ω_e, Ω_i とラーモア半径 r_{Le}, r_{Li} はそれぞれ次のように書ける。但し v_{\perp} は v_T で与えられるとする。

$$\Omega_e = \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B \quad [\text{s}^{-1}] \quad (2.14)$$

$$\Omega_i = \frac{Z_i eB}{m_i} = 9.58 \times 10^7 \frac{Z_i B}{A_i} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (2.15)$$

$$r_{Le} = \frac{v_{Te}}{\Omega_e} = 3.37 \times 10^{-6} (T_e)^{1/2} \frac{1}{B} \quad [\text{m}] \quad (2.16)$$

$$r_{Li} = \frac{v_{Ti}}{\Omega_i} = 1.44 \times 10^{-4} \frac{1}{Z_i} (A_i T_i)^{1/2} \frac{1}{B} \quad [\text{m}] \quad (2.17)$$

B は Tesla 単位、 T_e, T_i は eV 単位で Z_i と A_i はイオンの電荷数、質量数である。例として、 $B = 2\text{T}$, $T_e = T_i = 500\text{eV}$ 、水素プラズマ ($A_i = 1, Z_i = 1$) を考えると、 $\Omega_e = 3.52 \times 10^{11}[\text{s}^{-1}]$, $\Omega_i = 1.92 \times 10^8[\text{s}^{-1}]$, $r_{Le} = 3.77 \times 10^{-5}[\text{m}]$, $r_{Li} = 1.61 \times 10^{-3}[\text{m}]$ である。地磁気はおよそ 0.3Gauss 、つまり、 $B = 0.3[\text{G}] = 0.3 \times 10^{-4}[\text{T}]$ で、 $A_i = Z_i = 1$ に対して、 $\Omega_e = 5.28 \times 10^6[\text{s}^{-1}]$, $\Omega_i = 2.87 \times 10^3[\text{s}^{-1}]$ となり、サイクロトロン周波数は非常に高いことがわかる。

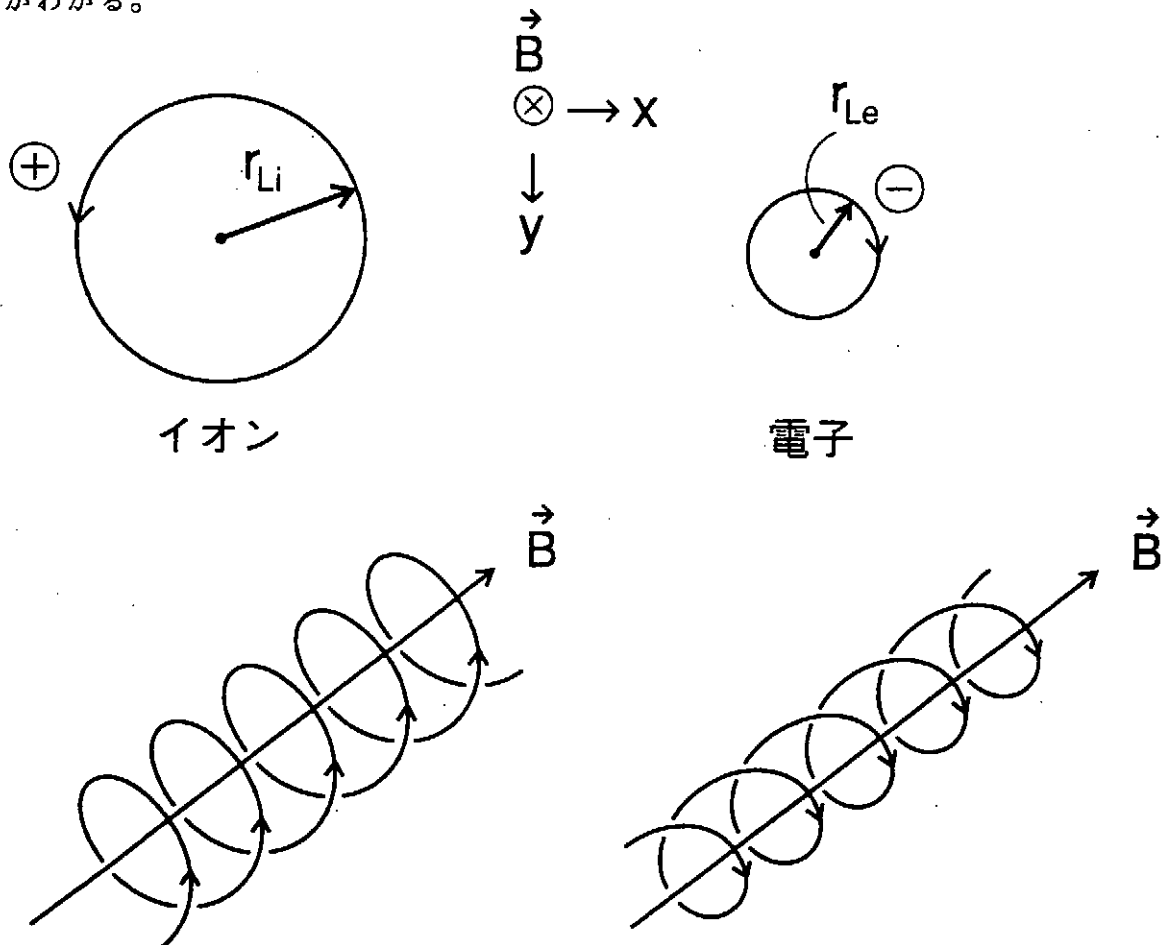


図 2.1 単一荷電粒子の一様磁場中での運動

2) 磁気モーメント

旋回運動を行う1個の荷電粒子の磁気モーメント μ は

$$\begin{aligned}\mu &= (\text{電流の大きさ}) \times (\text{面積}) \\ &= \left(q \frac{\omega_c}{2\pi}\right) \cdot (\pi r_L^2) \\ &= \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \frac{W_{\perp}}{B}\end{aligned}\quad (2.18)$$

で定義される。ベクトルの向きまで考えると

$$\vec{\mu} = -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\vec{B}}{B}\quad (2.19)$$

と定義できる。旋回運動する粒子はもとの外部磁界を打ち消そうという方向に周る。

ラーモア半径と比較して磁場がゆっくりと変動する場合は、後で示すように μ は粒子の運動中保存される。即ち、磁場の変動長を L_B とした時 $\tau_L \ll L_B$ なら μ は一定で、粒子はほぼ完全に旋回運動を行う事ができる。一様磁場中ではもちろん μ は粒子の運動の恒量である。

3) 一様な外力場

プラズマに一様な磁場 \vec{B} と一様な外力 \vec{F} が加わっている場合の単一荷電粒子の運動を考える。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}\quad (2.20)$$

である。磁力線方向の運動方程式は、 $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ と書くと

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = \vec{F}_{\parallel}\quad (2.21)$$

であり、荷電粒子は力 \vec{F}_{\parallel} を受け単純な加速運動をする。すなわち

$$v_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{m} t + v_{\parallel 0}\quad (2.22)$$

である。但し $v_{||0}$ は磁力線方向の初期速度である。磁場 \vec{B} に垂直方向の運動は

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{F}_\perp + q\vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (2.23)$$

により記述される。ここで $\vec{v}_\perp = \vec{v}_F + \vec{v}_1$ とおく。ただし \vec{v}_F は

$$\vec{v}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (2.24)$$

で定義される一様なドリフト速度である。垂直方向の運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}_F}{dt} + m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_\perp + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \times \vec{B} + q\vec{v}_1 \times \vec{B} = q\vec{v}_1 \times \vec{B} \quad (2.25)$$

となる。 $\vec{F} = \text{const.}$ の時は $d\vec{v}_F/dt = 0$ であるが、 \vec{F} が空間的に変化してもその変化がラーモア半径よりずっとゆっくりしていると $d\vec{v}_1/dt$ に比べて左辺第1項は無視できる。 \vec{v}_1 は単純な旋回運動を表しているにすぎない。これより、一様な磁場 \vec{B} と一様な外力 \vec{F} のもとの荷電粒子は、案内中心 (旋回中心) が式 (2.24) に従って磁場 \vec{B} に垂直な方向に一様な大きさをドリフトし、このドリフトしていく案内中心 (旋回中心) の周りに旋回運動 (円運動) し、 \vec{B} の平行方向には単純な等加速度運動をすることがわかる。

外力が電場の場合を考える。すなわち

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.26)$$

とする。この時、粒子の案内中心の磁場 \vec{B} を横切るドリフト速度 \vec{v}_E は式 (2.24) より

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.27)$$

となる。これを $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトという。磁力線に平行方向には単純な加速度運動

$$v_{||} = \frac{q}{m} E_{||} t + v_{||0} \quad (2.28)$$

を行う。垂直方向には案内中心が $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトで磁場を横切り、このドリフトする案内中心の周りに粒子は旋回運動をする。 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトは電荷 q 、質量 m に依存しないため、電子とイオンに対してその向きも大きさも同じである。 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトを図 2.2 に示す。

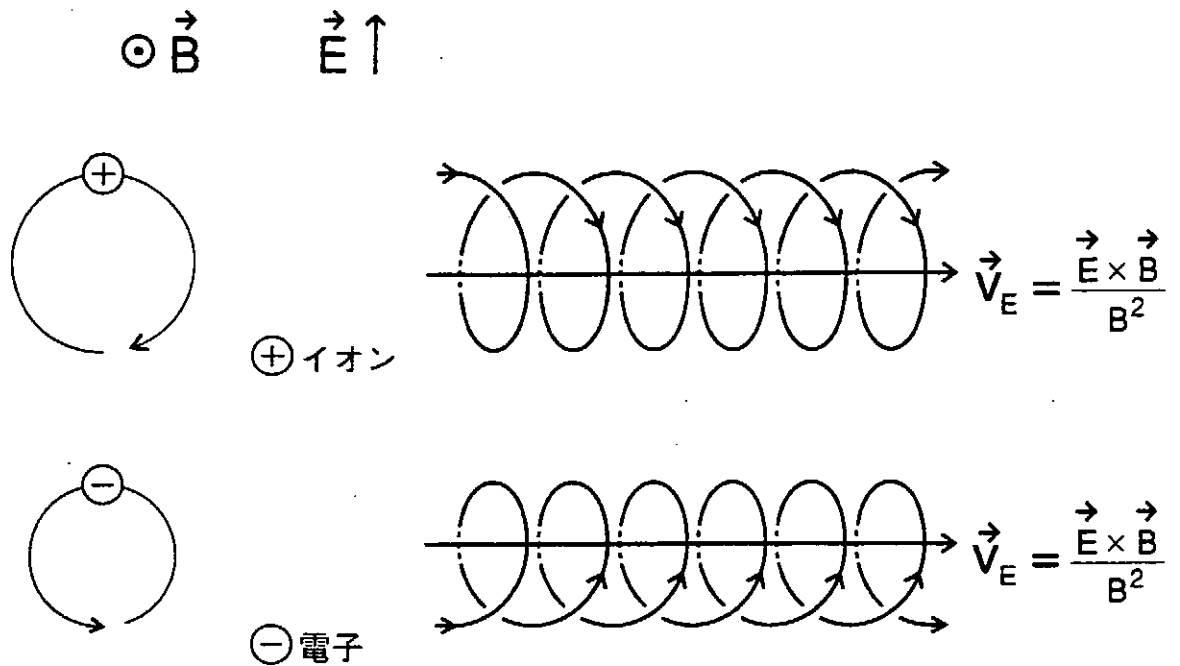


図 2.2 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフト

図 2.2 からわかるように、例えばイオンは円運動の左側で \vec{E} により加速されラーモア半径が大きくなるが、右側では減速されラーモア半径が小さくなり、その結果 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトが生ずる。電子も左側で加速、右側で減速され、案内中心はイオンと同じ方向にドリフトする。

外力が重力の場合を考える。すなわち

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (2.29)$$

とする。 \vec{g} は重力加速度である。案内中心の磁場を横切るドリフト速度 \vec{v}_g は、式 (2.24) より

$$\vec{v}_g = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{q B^2} \quad (2.30)$$

となる。これを重力ドリフト (g ドリフト) という。重力ドリフトは電荷 q にも質量 m にも依存するので、電子とイオンとでは向きは逆で、大きさは

$$\left| \frac{v_{gi}}{v_{ge}} \right| = \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{Z_i} \gg 1 \quad (2.31)$$

で、イオンの重力ドリフトの方がずっと大きい。すなわち重力ドリフトは図 2.3 の様になる。

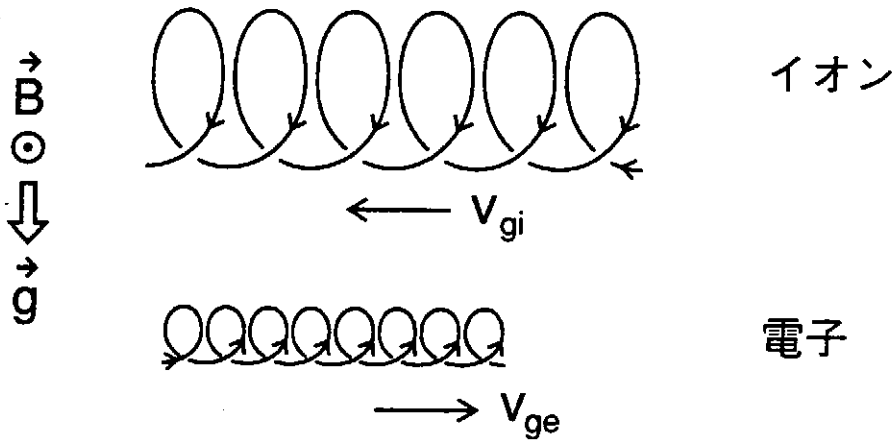


図 2.3 重力ドリフト

プラズマに加わる重力は実際には極めて小さく無視できる。磁力線が曲率を持つとき（曲がっている時）、磁力線に沿って走る粒子は遠心力を受け実効的な重力 \vec{g}_{eff} を感じる。このような時案内中心は実効的な重力により磁場に垂直方向にドリフトし、重力ドリフトが重要になる。

注意しなければならないことは、 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトは荷電分離を生じないが、重力ドリフトは荷電分離を引き起こすことである。

(2) 非一様磁場

磁場 \vec{B} が一様でなく曲率を持つ場合（曲がっている場合）や、磁場方向、あるいは磁場に垂直方向にその大きさ $B = |\vec{B}|$ が変化する場合を考える。このような時は、一般に粒子の運動方程式に対しては近似解しか得られない。磁場 \vec{B} の非一様性の特徴的長さを L とする。ラーモア半径 r_L は L よりはるかに小さい、すなわち $r_L/L \ll 1$ と仮定する。この

ような仮定のもとに粒子軌道の運動方程式を r_L/L の一次の近似まで解析する理論を第1近似軌道理論という。このとき磁気モーメント μ は次に示すように保存される。

1) μ の保存

古典力学で知られているように、ある系で何か周期運動があると、その周期で積分した作用積分 $\oint pdq$ は運動の恒量である。但し p 、 q は周期運動の一般化運動量及び一般化座標である。もし、系が変化するものとするとも運動は周期的でなくなる。しかし、その変化が、変化がない時の完全に周期的な運動の周期と比べて充分ゆっくりとしているなら作用積分は近似的に定義することができ、かつ運動の恒量、すなわち保存量とみなす事ができる。これを断熱不変量という。

一様磁場中での荷電粒子の旋回運動（ラーモア運動）は完全に周期的である。作用積分の p に角運動量 mrv_θ 、 q として角変数 θ をとると

$$\begin{aligned} J_\perp &= \oint mrv_\theta d\theta = \oint mr^2\dot{\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_c} m(r\dot{\theta})^2 dt = \frac{2\pi}{\omega_c} mv_\perp^2 \\ &= \frac{4\pi m}{q} \mu \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。ここで ω_c はサイクロトロン周波数、 μ は式 (2.18) で定義される磁気モーメントである。一般に磁場 \vec{B} は曲率を持ちその大きさも変化している。その空間的変化の特長的長さを L_B 、特徴的時間変化を ω とする。系がゆっくり変化している時、すなわち、 $r_L \ll L_B$ 、 $\omega \ll \omega_c$ の時は J_\perp は断熱不変量と見なせるであろう。すなわち μ は粒子の運動の恒量と見なせ保存量と考えてよい。トカマクでは、磁場の曲率や磁場の大きさの変化する特徴的長さ L_B が大半径又は小半径程度であると見なせる時、 $r_L \ll L_B$ の近似は充分成立し、 μ は非常に良い保存量になる。ヘリカル系装置においても同様である。しかし、例えばカusp場や逆転磁場配位のように系に $B=0$ の点を持つ配位では $B=0$ の点で $r_L = \infty$ となり、 μ は保存量でなくなる。

2) grad B ドリフト

磁場 \vec{B} は z 方向を向いており、 \vec{B} に垂直な方向に \vec{B} の大きさが変化している場合を考える。すなわち $\vec{B} = (0, 0, B(y))$ とする。運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \equiv \vec{F} \quad (2.33)$$

の成分は

$$\left. \begin{aligned} F_x &= qv_y B(y) \\ F_y &= -qv_x B(y) \\ F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

である。 z 方向、すなわち \vec{B} の方向は等速運動に過ぎない。 $B(y)$ を $y = 0$ の周りに展開する。

$$B(y) = B_0 + y \frac{dB}{dy} + \dots \quad (2.35)$$

ここで y はラーモア半径 r_L 程度であるので $r_L/L \ll 1$ の仮定により、右辺第2項は第1項と比較すると充分小さい。第0近似 ($B(y) = B_0$) の解、

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_{\perp}/\omega_c) \sin \omega_c t & y - y_0 &= (v_{\perp}/\omega_c) \cos \omega_c t \\ v_x &= v_{\perp} \cos \omega_c t & v_y &= -v_{\perp} \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (2.36)$$

を式 (2.34) に代入すると

$$\begin{aligned} F_x &= -qv_{\perp} \sin \omega_c t \left\{ B_0 + \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0 \right) \frac{dB}{dy} \right\} \\ F_y &= -qv_{\perp} \cos \omega_c t \left\{ B_0 + \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0 \right) \frac{dB}{dy} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。 ω_c の周期で平均すると

$$\bar{F}_x = 0, \quad \bar{F}_y = -\frac{1}{2} q r_L^2 \omega_c \frac{dB}{dy} = -\mu \frac{dB}{dy} \quad (2.38)$$

となる。grad B ドリフトよりも旋回運動の方がずっと速いのでこのような平均をしても意味がある。式 (2.38) で μ は磁気モーメントで μ は保存される。粒子の運動は旋回運動

をする部分と、外力 \bar{F}_y によるドリフトの部分からなると考えることができる。すなわち運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}_0 + \bar{F}_y \vec{e}_y \quad (2.39)$$

と書ける。 \bar{F}_y は式 (2.38) で与えられる。この式は r_L/L の 1 次までの近似で正しい。 \bar{F}_y はこの近似で一定とみなせるので、案内中心は式 (2.24) に従って

$$\vec{v}_{\nabla B} = -\frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\omega_c} \frac{1}{B} \frac{dB}{dy} = -\frac{\mu}{q} \frac{1}{B} \frac{dB}{dy} \quad (2.40)$$

の大きさを x 方向（磁場と磁場の勾配の両方向に垂直な方向）にドリフトする。この様子を図 2.4 に示す。

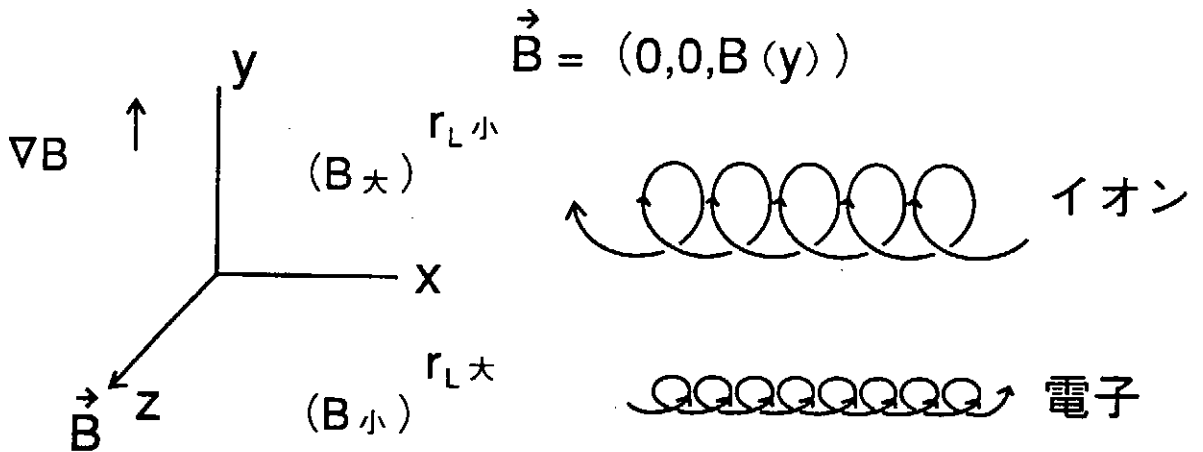


図 2.4 grad B ドリフト

一般化すると grad B ドリフトは次のように与えられる。

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\omega_c} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.41)$$

ここで ω_c は式 (2.11) で定義したサイクロトロン周波数で符号を含む。 ω_c の表式を代入すると grad B ドリフトは

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{\mu}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} = \frac{1}{2} \frac{mv_1^2}{qB} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.42)$$

と書け、 q と m とに依存していることがわかる。電子とイオンに対してドリフトの向きは丁度逆であり、大きさはイオンの grad B ドリフトの方が電子のそれよりも $m_i/(Z_i m_e)$ 倍だけ大きい。grad B ドリフトは荷電分離を生ずる。

3) 曲率ドリフト

磁力線に曲率がある場合の荷電粒子の軌道を考える。例えばトカマク装置ではトロイダル磁場は主半径を曲率半径として磁力線が曲がっている。荷電粒子の磁力線方向の速さを v_{\parallel} とする。磁力線の曲率半径を \vec{R}_c 、曲率の方向を曲率中心から外に向かうものとする(図 2.5)、粒子は遠心力

$$\vec{F}_{cf} = m v_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (2.43)$$

を感じる。ラーモア半径と比較すると R_c はずっと大きい場合を考える。このようなときは、磁気モーメント μ は保存され、旋回運動の間 \vec{F}_{cf} は一定とみなせる。従って一様な外力のある場合のドリフトの式 (2.24) より、粒子は次の式に従って磁場に垂直方向に曲率ドリフトを行う。

$$\vec{v}_C = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_{cf} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{m v_{\parallel}^2}{q B^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.44)$$

このドリフトは電荷 q と質量 m を含むので、電子とイオンとではドリフトの向きは正反対で、大きさはイオンの方が $m_i/(Z_i m_e)$ 倍だけ大きい。

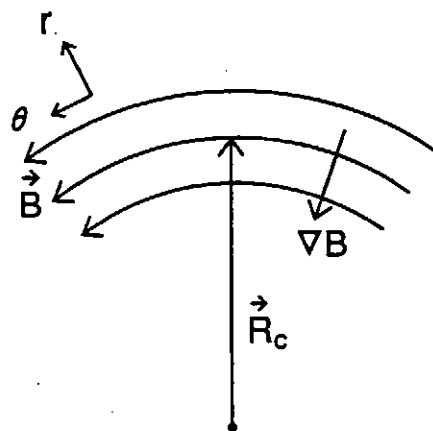


図 2.5 曲率を持つ磁場

磁力線が湾曲すると必ず ∇B が生ずる。すなわち曲率ドリフトに必ず grad B ドリフトが加わる。簡単のため真空磁場を考える。この時、 $\nabla \times \vec{B} = 0$ が成立する。円筒座標 (R, ϕ, Z) を考え \vec{B} は ϕ 成分のみ持ち $\vec{B} = (0, B_\phi, 0)$ とする。すなわち図 2.4 のように、 B_ϕ は曲率半径 R_c で湾曲しているとする。 B の勾配は、 $\nabla B = -|\nabla B| \vec{e}_R$ であり、 $(\nabla \times \vec{B})_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi) = 0$ より、 B_ϕ すなわち $|\vec{B}|$ は $|\vec{B}| = B_\phi \propto 1/R_c$ となり

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (2.45)$$

が成立する。この時 grad B ドリフトは式 (2.41) より

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 \frac{1}{qB} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 \frac{1}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.46)$$

となる。式 (2.44) のドリフトと式 (2.46) のドリフトをあわせて、真空湾曲磁場中でのドリフトは

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2 \right) \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \quad (2.47)$$

で与えられる。

ドリフト \vec{v}_B は q と m に依存するので、電子とイオンとでドリフトの向きは正反対であるため荷電分離を引き起こす。ドリフトの大きさは $m_i \gg m_e$ であるので $|v_{B_i}| \gg |v_{B_e}|$ であり、イオンの方がずっと大きい。曲率ベクトル \vec{R}_c は

$$\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = -(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} \quad (2.48)$$

であるので \vec{v}_C は

$$\vec{v}_C = \frac{m v_\parallel^2}{q B^2} \vec{B} \times (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (2.49)$$

とも書ける。

(3) 粒子軌道とトーラス

1) 案内中心の運動

一様な磁場のもとでは、荷電粒子はある磁力線の周りに旋回運動しながら磁力線に沿って等速運動する。すなわち磁力線の周りにらせん運動をし、旋回を中心、すなわち案内中

心は磁力線に沿って走るだけで磁力線に垂直方向には動かない。電場 \vec{E} が存在したり、磁場が不均一であると、粒子は磁力線を横切ってドリフトする。今、ラーモア半径 r_L が磁場の变化する空間的尺度よりずっと小さいとすると、磁気モーメント μ は保存され、粒子の運動をサイクロトロン周期で平均した案内中心の運動を論ずれば充分であることが多いだろう。このような案内中心の運動方程式は、磁場を横切るドリフトが、旋回運動と比べて充分遅ければ妥当なものとなる。案内中心の運動は、磁力線方向の運動と磁場を横切るドリフトから成るので、もし、電場 \vec{E} と磁場の曲がり、不均一が存在するとすると、真空場（電流が存在しない）では次のように書ける。

$$v_G = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{m v_{\perp}^2}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{2 B^3} + \frac{m}{q} v_{\parallel}^2 \frac{\vec{B} \times (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b}}{B^2} \quad (2.50)$$

ただし、 $\vec{b} = \vec{B}/B$ である。

プラズマ粒子は平均として熱速度 v_T の速さで走っている。粒子はおおよそ $v_{\parallel} \sim v_T$ の速さで磁力線に沿って走る。磁力線の周りにはおおよそ $v_{\perp} \sim v_T$ の速さでラーモア運動をしている。イオンについて案内中心の運動、すなわち磁場を横切るドリフトの大きさを考えてみる。イオンの熱速度は

$$v_{T_i} = \left(\frac{2T_i}{m_i} \right)^{1/2} = 1.38 \times 10^4 \left(\frac{T_i [\text{eV}]}{A_i} \right)^{1/2} \quad [\text{m/s}] \quad (2.51)$$

で与えられる。ただし A_i は考えているイオンの質量数でイオン温度 T_i はeV単位である。例として、大半径 $R = 1\text{m}$ 、小半径 $a = 0.2\text{m}$ 、 $T_e = T_i = 500\text{eV}$ 、 $B = 2\text{T}$ 、 $n_e = n_i = 3 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ 、 $Z_i = 1$ 、 $A_i = 1$ のトーラス・プラズマを考える。イオンの熱速度の大きさは、 $v_{T_i} = 3.09 \times 10^5\text{m/s}$ となる。プラズマ中のポテンシャルを Φ 、電場を E とし、 $e\Phi$ は温度の2倍程度とすると($e\Phi \sim 2T \sim 1000\text{eV}$)、電場は $E \sim \Phi/a = 5 \times 10^3\text{V/m}$ 程度で、 $E \times B$ ドリフトの大きさは、

$$v_E = \frac{E}{B} = 2.5 \times 10^3\text{m/s} \quad (2.52)$$

となる。 ∇B ドリフトの大きさは

$$|v_{\nabla B}| = \frac{m v_{\perp}^2}{q} \frac{|\vec{B} \times \nabla B|}{B^3} \sim \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{e} \frac{1}{RB} \sim \frac{T}{e} \frac{1}{RB} = 250 \text{m/s} \quad (2.53)$$

程度で、湾曲ドリフトの大きさは

$$|\vec{v}_R| = \frac{m}{q} v_{\parallel}^2 \frac{|\vec{R}_c \times \vec{B}|}{R_c^2 B^2} \sim \frac{m v_{\parallel}^2}{e} \frac{1}{RB} \sim \frac{T}{e} \frac{1}{RB} = 250 \text{m/s} \quad (2.54)$$

である。従って $v_{\parallel} \sim v_T$ であるので

$$v_{\parallel} \gg v_G \quad (2.55)$$

であることがこの例から明かである。すなわち、磁界を横切るドリフトは、磁力線に沿う粒子の運動や旋回運動と比較すると非常に遅い運動である。粒子は（周回運動をしながら）殆ど磁力線に沿って走りながら磁力線に垂直方向にゆっくりドリフトしていく。

2) 単純トーラス

磁場閉じ込め核融合装置にはいろいろな方式がある。トカマクやRFP（逆転磁場ピンチ）のような軸対称系、ヘリオトロンやステラレータ、タンデム・ミラーなどの非軸対称系に分類される。あるいはヘリカル系やトカマクのようにドーナツ状の容器にプラズマが閉じ込められるトーラス系と、ミラーやカスプ磁場を用いるオープン系とに分類できる。ここではトーラスについて考える。図2.6にトーラスを上から見た図と横断面図を示す。

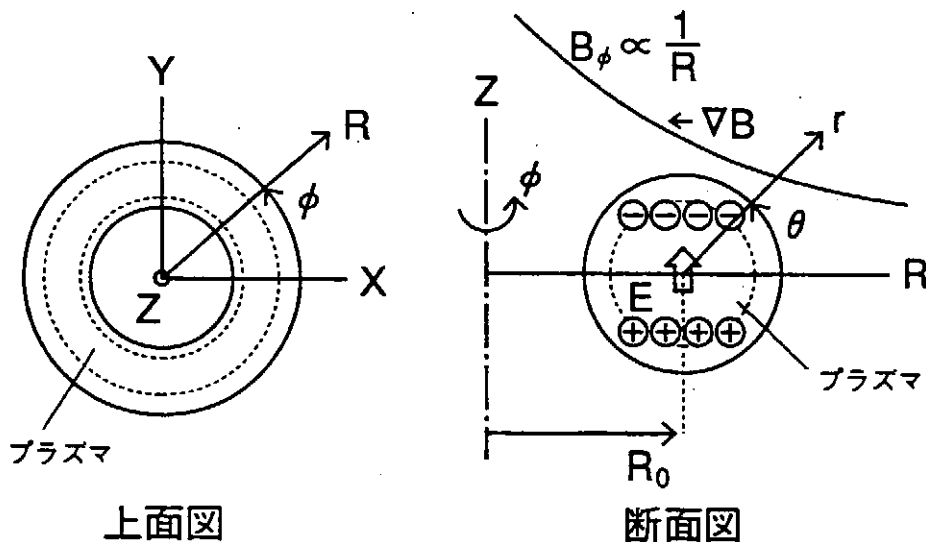


図 2.6 トーラス概念図

図 2.6 では簡単のためトーラス断面図を円とし、その中のプラズマの断面も円とした。Z 軸をトーラス中心軸と呼び、Z 軸を周る ϕ 方向をトロイダル方向、あるいはトーラス方向という。断面図においてプラズマの中心を周る θ 方向をポロイダル方向と呼ぶ。断面図においてプラズマ中心からの距離 r を小半径、また、Z 軸を中心とする円の半径 R を大半径という。ある点における r と R の比、 R/r をアスペクト比という。断面図において $r = a_p$ がプラズマの境界とすると、 a_p はプラズマ半径を表す。Z 軸からプラズマ中心までの R 方向の距離を R_0 とするとき、 R_0 をプラズマ主半径といい、 R_0/a_p をプラズマ・アスペクト比と呼ぶ。 $R > R_0$ の領域をトーラス外側、 $R < R_0$ の領域をトーラス内側と言う。

今、トーラスにはトロイダル方向にのみ磁場が存在するとしよう。このようなトーラスを単純トーラスという。Z 軸に沿って電流を流すとトロイダル磁場 B_ϕ が作れる。実際にはトーラス表面にポロイダル方向にコイルを巻き（トロイダル・コイルという）通電すると B_ϕ が生成される。今、 $-Z$ 軸に沿って電流を流すとトロイダル磁場はアンペアの周回定理により

$$\vec{B}_\phi = -\frac{B_0 R_0}{R} \vec{e}_\phi \quad (2.56)$$

となる。ここでは真空場のみを考えた。 $R = R_0$ で $B_\phi = -B_0$ となるようにこの式は表現されているが、重要なことは、 $|\vec{B}_\phi| \propto 1/R$ 、すなわち、トロイダル磁場の大きさは主半径 R に逆比例する事である。トーラスでのプラズマ閉じ込めにとって、このトロイダル磁場の不均一性は決定的なものである。単純トーラスでは磁場の曲率半径は R であり、案内中心の運動方程式 (2.50) は

$$\vec{v}_G = v_{\parallel} \vec{b} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2}{\omega_c R} \vec{e}_Z \quad (\vec{b} = -\vec{e}_\phi) \quad (2.57)$$

となる。右辺第 3 項は曲率ドリフト (v_{\parallel}^2 の項) と grad B ドリフト ($v_{\perp}^2/2$ の項) の和を表す。この式より、 ω_c は符号を持っている事に注意すると、曲率ドリフトも grad B ドリフトもイオンは $-Z$ 方向、電子は $+Z$ 方向であることがわかる。この結果、図 2.6 のように荷電分離が生じ、 $+Z$ 方向に電場 E が生成され、その結果式 (2.57) の $E \times B$ ドリフトで

イオンも電子もトーラス外向きに (R 方向) に押し出されてしまう。このように単純トーラス (トロイダル磁場のみが存在) では平衡はなくプラズマは閉じ込められない。

プラズマを容器内に閉じ込めるためには、図 2.6 のように上下に分離した電荷を短絡させてやればよい。このためにはトーラス上部 ($Z > 0$) と下部 ($Z < 0$) とで磁力線が連結していればよい。もし、ポロイダル方向 (θ 方向) に磁場 B_θ が存在すれば、 B_ϕ と B_θ とが重なりトーラス方向にらせん状の磁力線を形成する。これによりプラズマ上部に帯電した電子は磁力線に沿って走り、プラズマ下部のイオン電荷を短絡する。こうすれば Z 方向の電場も打ち消されプラズマは容器内に閉じ込められるであろう。このようにポロイダル磁場を加えて磁場にひねりを与えることを、回転変換をつくるという。トカマクではトーラス方向にプラズマ電流を流すことにより B_θ を作り回転変換を与え平衡を得ようとする。ヘリカル系では外部ヘリカル・コイルに電流を流すことにより磁場にひねりを加える。このように磁場にひねりをつけること、あるいは回転変換を与えることがトーラス装置によるプラズマ閉じ込めの原理である。

(4) ミラー場

1) 磁気ミラー

図 2.7 のように 2 つのコイルに同方向に電流を流すとミラー磁場が作れる。この磁場は θ に関して対称で、磁場 \vec{B} は殆ど z 方向を向いているが、 z 方向に沿って \vec{B} の大きさが変化する。すなわちコイル近傍で B は大きく、2 つのコイルのまん中で B は最小になる。このような磁場配位を磁気ミラー場という。ミラー場では、磁力線に沿って磁場の大きさが変化する。ミラー場で粒子がどのように振る舞うかはミラー場閉じ込め方式のみならずトーラスにおいても基本的に重要なことである。

図 2.7 のようなミラー場において、磁場 \vec{B} の大きさが磁場方向にゆっくり変化している場合を考える。すなわち、粒子の旋回運動の間、磁場は殆ど完全に一様であるとする。この時、粒子の磁気モーメント μ は運動中保存され、また、単一荷電粒子の運動エネルギー W は粒子の運動中保存される。

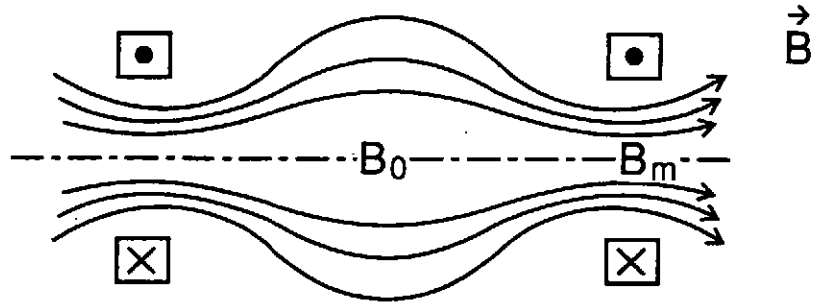


図 2.7 ミラー場

$$\begin{aligned}
 W = \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \\
 &= \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B = \text{const}
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

この式は、磁力線に沿う粒子は磁気ポテンシャル μB の中で運動している事を意味している。この式から

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \nabla_{\parallel} B
 \tag{2.59}$$

が得られる。この式で $\mu = \text{const}$ である。 ∇_{\parallel} は磁力線に沿う空間微分を表す。これは粒子が B の大きいほうに走ると進行方向と逆向きの力を受ける事を意味する。つまり、荷電粒子は B の弱い方向に向かう傾向があるといえる。

単一荷電粒子の磁場に平行方向の速度 v_{\parallel} は (静電場が存在していないとすると)

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(W - \mu B)}
 \tag{2.60}$$

で与えられる。 $W = mv^2/2$ (粒子の全運動エネルギー) は保存量で ($W = \text{const.}$)、符号 \pm は磁場に平行方向か反平行方向かを示している。粒子が B の弱い所から出発して、 B の大きい方へ向かったとする。 $\mu = \text{const.}$ であるので粒子が進むにつれ μB が大きくなり、従って v_{\parallel} が減少する。 W が一定 ($v^2 = \text{一定}$) であるので比 v_{\perp}/v_{\parallel} は大きくなる。粒子がさらに大きな B の所へ進み $W = \mu B$ になったとすると $v_{\parallel} = 0$ となりここで粒子は反射される。これがミラー場における粒子閉じ込めの原理である。

2) ミラー比

図 2.7 においてある粒子が磁場の弱い所 (B_0 近傍) から磁場 \vec{B} に完全に平行に走ったとする。この時 $\mu = 0$ で粒子は何の力も受けない。このような粒子は反射されることなくプラズマ端を通りすぎ壁に当たってしまうだろう。また、 v_{\perp}/v_{\parallel} が小さい粒子は B の大きい方へ進んで B の最大値 B_m の所に達しても $W = \mu B$ とならず ($v_{\parallel} = 0$ とならず)、そのまま逃げてしまうであろう。 v_{\perp}/v_{\parallel} が大きくある値以上であれば $B \leq B_m$ の所で $v_{\parallel} = 0$ となり、粒子は反射され閉じ込められるであろう。

図 2.7 のミラー場の中心で B は最小値 B_0 を持つとする。ここで $v_{\perp} = v_{\perp 0}$, $v_{\parallel} = v_{\parallel 0}$ の粒子が $B = B'$ ($B_0 < B' \leq B_m$) で $v_{\perp} = v'_{\perp}$, $v_{\parallel} = 0$ となり反射されるとする。 μ の保存とエネルギーの保存とより

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}m(v'_{\perp})^2}{B'} \quad (2.61)$$

$$(v'_{\perp})^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 \equiv v_0^2 \quad (2.62)$$

が成立する。これらより

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^2}{(v'_{\perp})^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \equiv \sin^2\theta \quad (2.63)$$

の関係式が得られる。 θ は B が最も弱い点におけるピッチ角である。 θ が小さすぎると B' は B_m を越え、粒子は反射されず逃げてしまう。閉じ込められる粒子の最小ピッチ角 θ_{min} は $B' = B_m$ で与えられるものである。すなわち、

$$\sin^2\theta_{min} = \frac{B_0}{B_m} \equiv \frac{1}{R_m} \quad (2.64)$$

で与えられる θ_{min} より大きな θ を持つ粒子のみが反射し閉じ込められる。 R_m のことをミラー比という。 B_0 における速度空間を図 2.8 のように書く。 v_z 軸と θ_{min} の角度をなす円錐の中の粒子はミラー場において反射されることなく逃げてしまう。この円錐をロス・コーンまたは損失円錐という。

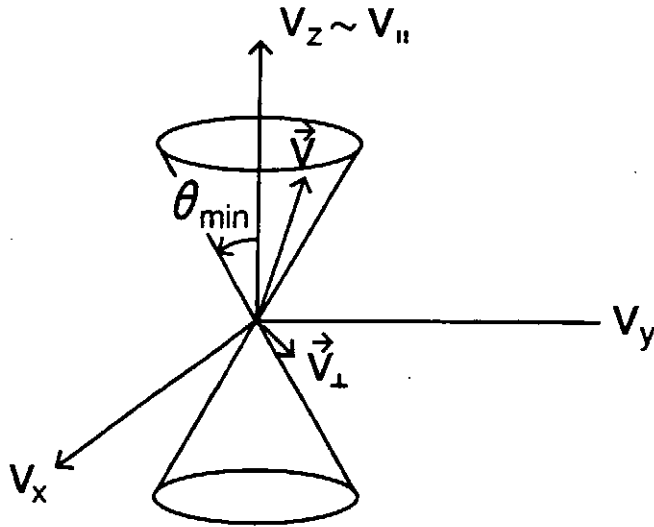


図 2.8 ロス・コーン

3) フェルミ加速と断熱圧縮

ミラー磁場は (v_{\perp} の大きい) 粒子を反射させることができるので磁気鏡と呼ばれる。二つの磁気鏡を互いにゆっくりと接近させていくと、粒子は反射されるたびに加速される。磁場の大きさは軸に沿って一定で磁気鏡の接近により変化しないとし、接近速度 $V = -dL/dt$ は粒子の磁力線方向の速さ $v_{||}$ よりずっと小さいとする。粒子は1回の周期運動ごとに $2V$ だけその速さを増す。すなわち、

$$\frac{dv_{||}}{dt} = \frac{v_{||}}{2L} \cdot 2V = -\frac{v_{||}}{L} \frac{dL}{dt} \quad (2.65)$$

これより

$$Lv_{||} = \text{const.} \quad (2.66)$$

が成立する。一方、二つの磁気鏡の間のプラズマ粒子の総数は一定、すなわち、 n を密度とすると $Ln = \text{一定}$ であるので、粒子の平行方向のエネルギーは

$$W_{||} \propto \frac{1}{L^2} \propto n^2 \quad (2.67)$$

となる。磁気鏡の接近により L が短くなるにつれ n は増加するので W_{\parallel} は大きくなっていく。これをフェルミ加速という。

圧力を p 、体積を V とすると断熱変化では

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \quad (2.68)$$

である。ここに γ は比熱比で自由度 f と

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \quad (2.69)$$

の関係がある。 $p = nT$ であり、 $nV = \text{一定}$ とすると

$$T \propto n^{\gamma-1} \quad (2.70)$$

の関係が成立する。 $W_{\parallel} = T/2$ であるのでフェルミ加速は $\gamma = 3$ 、すなわち自由度 $f = 1$ の断熱変化に相当する。今、磁場を時間的に強めていく事を考える。即ち磁場を断熱圧縮する。 $\mu = W_{\perp}/B = \text{一定}$ だとすると

$$W_{\perp} \propto B \quad (2.71)$$

に従って垂直方向のエネルギーが増加していく。粒子間に少し衝突があれば B に比例して大きくなる回旋エネルギーは熱エネルギーになりプラズマは加熱される。プラズマ粒子は磁場にほとんど巻き付いているので圧縮中 $BV = \text{一定}$ とみてよい。従って W_{\perp} は

$$W_{\perp} \propto B \propto n \quad (2.72)$$

のように増加する。式 (2.72) からこれは $\gamma = 2$ 、すなわち自由度 $f = 2$ の断熱変化とみなせる。

(5) 時間的に変動する場

この節では空間的には一様であるが、時間的に変動する電場、又は磁場が与えられている時の粒子の運動を考える。

1) 時間変動する電場

一様磁場 \vec{B} が z 方向にあるとする。 x 方向に空間的には一様であるが、時間変動する電場 $\vec{E}(t)$ が加えられているとする。すなわち、 $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{E} = (E_x(t), 0, 0)$ とする。 B は一定である。ニュートンの運動方程式 (2.1) の x, y, z 成分は

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= qE_x + qv_y B \\ m\dot{v}_y &= -qv_x B \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

となる。この式から

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_x &= \frac{\omega_c}{B} \dot{E}_x - \omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c \dot{v}_x \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

を得る。ここで ω_c は式 (2.11) で定義されるサイクロトロン周波数で符号を含む。すなわち電子に対しては $\omega_{ce} = -eB/m_e < 0$ 、イオンに対しては $\omega_{ci} = Z_i eB/m_i > 0$ である。

ここで電場 E_x は次のように時間変化するとする。

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t} \quad (2.75)$$

E_0 は一定である。式 (2.74) は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 \left(v_x + \frac{i\omega}{\omega_c} \frac{1}{B} E_x \right) \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{1}{B} E_x \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

となる。ここで次の量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_E &= -\frac{E_x}{B} \\ \tilde{v}_p &= -\frac{i\omega}{\omega_c} \frac{1}{B} E_x = \frac{i\omega}{\omega_c} \tilde{v}_E \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

これを用いると式 (2.76) は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 (v_x - \tilde{v}_p) \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 (v_y - \tilde{v}_E) \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

ここで粒子の運動を式(2.23)のように、周回運動(ジャイロ運動又はラーモア運動)とドリフト運動に分ける。

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{-i\omega_c t} + \bar{v}_p \\ v_y &= -i v_{\perp} e^{-i\omega_c t} + \bar{v}_E \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

この式から \ddot{v}_x と \ddot{v}_y を計算すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 (v_x - \bar{v}_p) - \omega^2 \bar{v}_p \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 (v_y - \bar{v}_E) - \omega^2 \bar{v}_E \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

式(2.78)は正確なものである。従って、式(2.80)において右辺の $\omega^2 \bar{v}_p$ と $\omega^2 \bar{v}_E$ が無視できる時のみ、式(2.79)のような分離が可能となる。つまり、 $\omega^2 \ll \omega_c^2$ の時のみ、 v_x, v_y をジャイロ運動と \bar{v}_p 及び \bar{v}_E のドリフト運動に分解できる。

$\omega^2 \ll \omega_c^2$ と仮定する。時間的に一様変動する電場が存在すると、粒子は電場の方向に時間変動するドリフト \bar{v}_p と受け、電場と磁場の両方に垂直な方向に時間変動する $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフト \bar{v}_E を受ける。一般化して書くと \bar{v}_p は、 a 種粒子に対して、

$$\bar{v}_{pa} = \frac{1}{\omega_{ca} B} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (\omega^2 \ll \omega_{ca}^2) \quad (2.81)$$

と書ける。 ω_{ca} は符号を持つので \bar{v}_{pa} は電子 ($a=e$) とイオン ($a=i$) とで向きが異なり、また大きさも質量比だけ異なる。従って、このドリフトは荷電分離を生じ、しかもその荷電分離は時間変動する。このドリフトを分極ドリフトと呼ぶ。分極による分極電流を計算すると

$$\begin{aligned} \vec{J}_p &= Z_i e n_i \bar{v}_{pi} - e n_e \bar{v}_{pe} \\ &= e n_e \left(\frac{1}{\omega_{ci}} \frac{1}{B} - \frac{1}{\omega_{ce} B} \right) \frac{d\vec{E}}{dt} \\ &\simeq \frac{\rho}{B^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{aligned} \quad (2.82)$$

となる。ただし、 $\rho = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n_i$ は質量密度である。電荷の分極及び分極電流は殆どイオンのみで決まっていることがわかる。これは今、 $\omega^2 \ll \omega_{ci}^2$ と仮定しているか

らである。このような低周波振動の時（プラズマ物理では ω_{ci} より低い周波数を低周波数、 ω_{ci} より高い場合を高周波数と呼ぶことが多い）、イオンは充分運動することができ、また電子は軽く殆ど各瞬間、イオンの運動に追随していきける。

今、振動数 ω はイオンサイクロトロン周波数 ω_{ci} よりずっと小さいとし ($\omega \ll \omega_{ci}$)、 ω で振動する摂動を伝搬させる媒体の誘導率をもとめよう。変位ベクトルを \vec{D} 、分極ベクトルを \vec{P} とすると、 \vec{D} 、 \vec{P} と電場 \vec{E} との関係は

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (2.83)$$

と書けるとする。 ϵ_0 は真空中の誘導率で、 ϵ は考えている媒質の誘電率である。両者の比を比誘電率という。つまり

$$\bar{\epsilon} = \kappa_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (2.84)$$

を比誘電率、又は単に誘電率 (dielectric constant) と言い、 χ_e を受電率 (susceptibility) と言う。分極電流は

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (2.85)$$

であるので、式(2.82)より \vec{P} は

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\rho}{B^2} \vec{E} \quad (2.86)$$

となる。従って、(比) 誘電率は

$$\bar{\epsilon} = \kappa_e = 1 + \chi_e = 1 + \frac{\rho}{\epsilon_0 B^2} \quad (2.87)$$

となる。後に詳述するアルフベン速度 c_A は

$$c_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (2.88)$$

で定義される。また $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ であることを考えると

$$\bar{\epsilon} = \kappa_e = 1 + \frac{c^2}{c_A^2} \quad (2.89)$$

と書ける。一般に $c_A^2 \ll c^2$ であるので (比) 誘電率は $\omega^2 \ll \omega_c^2$ の時

$$\bar{\epsilon} = \kappa_e = \frac{\rho}{\epsilon_0 B^2} = \frac{c^2}{c_A^2} \quad (2.90)$$

となり $\bar{\epsilon} \gg 1$ である。式 (2.90) は

$$\bar{\epsilon} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \quad (2.91)$$

と書き直すことができる。ただし、 $\omega_{pi}^2 = n_i(Z_i e)^2 / (\epsilon_0 m_i)$ で ω_{pi} はイオンプラズマ振動数と呼ばれる。 $\bar{\epsilon} \gg 1$ であるので一般に $\omega_{pi}^2 \gg \omega_{ci}^2$ である。(ω_{pe} と ω_{ce} の大小は一般的であるが、 $\omega_{pe} \simeq \omega_{ce}$ となることがよくある。)

2) 時間変動する磁場

磁場 \vec{B} は粒子に対して $q\vec{v} \times \vec{B}$ の力を与えるがこの力は速度 \vec{v} に対して垂直であるので磁場 \vec{B} は粒子に対して仕事をしない。しかし、磁場 \vec{B} が時間的に変動すると、 \vec{B} が、ファラデーの式をとおして電場 \vec{E} を生成し、この \vec{E} は粒子に対して仕事をすることができる。今、プラズマが一様磁場 \vec{B} の中にあるとする。ある荷電粒子はある磁力線の周りにジャイロ運動をする。簡単のため $\vec{v}_{\parallel} = 0$ とする。ニュートンの運動方程式 (2.21) と \vec{v}_{\perp} の内積を取ると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = q \vec{E} \cdot \vec{v}_{\perp} \quad (2.92)$$

が得られる。粒子の位置ベクトルを \vec{l} とすると

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (2.93)$$

である。ジャイロ運動一周期の間の運動エネルギーの変化は

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \int_0^{2\pi/\omega_c} q \vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt \quad (2.94)$$

で与えられる。ここで \vec{E} の時間変化が ω_c^{-1} と比べて充分遅いとし、また \vec{E} の空間変化はラーモア半径より充分長い場合と考えることにする。このような時、式 (2.94) は

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.95)$$

と書ける。ただし、 $d\vec{S}$ は \vec{l} のつくる面 S の面積要素である。ファラデーの式を用いると式 (2.95) は

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = -q \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.96)$$

となる。イオンに対しては $q_i = Ze > 0$, $\vec{B} \cdot d\vec{S} < 0$ であり、電子に対しては $q_e = -e < 0$, $\vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$ である。 \vec{l} に囲まれる面 S はラーモア半径 r_L を半径とする円であるので粒子が得るエネルギーは

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = |q| \dot{B} \pi r_L^2 = \frac{2\pi \dot{B}}{|\omega_c|} \mu \quad (2.97)$$

となる。ただし、 $\mu = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2/B$ は磁気モーメントである。一方、

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = \delta(\mu B) = \mu \delta B + B \delta \mu \quad (2.98)$$

が成立する。 δB はラーモア周期の間の B の変化とすると、 $\delta B = 2\pi \dot{B}/|\omega_c|$ であるので式 (2.97) と式 (2.98) とを比較すると $\delta \mu = 0$ 、すなわち磁気モーメントは保存される。これは \vec{E} の時間変化が ω_c^{-1} と比べて充分遅く、また \vec{E} の空間変化はラーモア半径より充分長いとした結果である。

面 S を通る磁束 Φ は

$$\Phi = BS = B\pi r_L^2 = \frac{2\pi m}{q} \mu \quad (2.99)$$

で与えられる。 $\mu = const.$ であるので Φ は粒子の運動中、保存量となる。式 (2.97) から明らかなように $\dot{B} > 0$ であると粒子はエネルギーを得る。この原理を応用してプラズマの断熱圧縮加熱を行うことができる。

参考文献

- [1] F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Volume 1: Plasma Physics, Plenum Press, New York 1984.
- [2] A.T. Morozov and L.S. Solov'ev, *Review of Plasma Physics* (ed. by M.A. Leontovich) Vol.2, p.201, Consultants Bureau, New York 1966.

§3 運動論

(1) ボルツマンの式

1) 分布関数

空間座標 $\vec{x} = (x, y, z)$ と速度座標 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で定義される6次元位相空間での微少体積 $d\Omega$

$$d\Omega = d\vec{x}d\vec{v} = d^3x d^3v = dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (3.1)$$

の中に含まれる粒子数を

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\Omega = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (3.2)$$

と書き、 $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ をその粒子についての分布関数と呼ぶ。微少体積 $d\Omega$ 内ではプラズマはぬりつぶされており、連続体として取り扱われる。分布関数 f は多数の粒子を含む微少体積内で平均された密度を表している。

2) ボルツマンの式の導出

分布関数 f を支配する式は一般にボルツマンの式と呼ばれる。ここではごく簡単に直感的にそれを導出する。

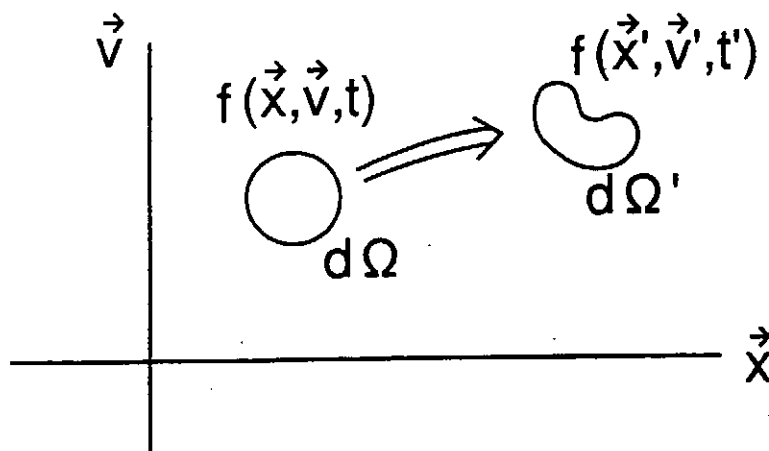


図 3.1 6次元位相空間

図 3.1 のように、時刻 t に $d\Omega$ に $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\Omega$ 個の粒子があり、粒子の運動の結果微小時間 Δt 後に $d\Omega'$ に移ったとする。このあいだ粒子間の衝突や粒子の生成、消滅がないとすると

$$f(\vec{x}', \vec{v}', t')d\Omega' = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\Omega \quad (3.3)$$

が成立するはずである。 Δt 後には

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \Delta\vec{x} \\ \vec{v}' &= \vec{v} + \Delta\vec{v} \\ t' &= t + \Delta t \\ d\Omega' &= Jd\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

が成立している。ただし、 J はヤコビアンである。 $\Delta t, |\Delta\vec{x}|, |\Delta\vec{v}|$ を微小量とし、 $f(\vec{x}', \vec{v}', t')$ を \vec{x}, \vec{v}, t の周りに展開すると

$$\begin{aligned} & f(\vec{x}', \vec{v}', t') \\ &= f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{v} + \Delta\vec{v}, t + \Delta t) \\ &\simeq f(\vec{x}, \vec{v}, t) + \Delta\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ヤコビアン J は $(\Delta t)^2$ 以上を無視すると $J = 1$ である。故に

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.6)$$

が成立し、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.7)$$

が成立する。今、粒子に加わる力 \vec{F} を電磁場とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

である。よって次の式が導ける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \nabla_v \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$$

もし $d\Omega \rightarrow d\Omega'$ の時に粒子の衝突や生成、消滅があればこの変化率を $\delta f/\delta t$ と書くと

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = \frac{\delta f}{\delta t} \quad (3.10)$$

と書ける。これをボルツマンの式という。

一般に、電子、イオン、不純物イオン等はそれぞれ質量と電荷が異なり、また緩和時間が異なるので、それぞれの粒子種 a に対する 1 体の分布関数 f_a に対してボルツマンの式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \nabla f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \frac{q_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{\delta}{\delta t} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (3.11)$$

$$(a = e, i, I, \dots)$$

粒子種 a の密度 n_a 、電荷密度 ρ_e 、電流密度 \vec{J} はそれぞれ次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} n_a(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \\ \rho_e(\vec{x}, t) &= \sum_a q_a n_a(\vec{x}, t) \\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \sum_a q_a \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ρ_e, \vec{J} がマックスウェルの式で用いられ \vec{E}, \vec{B} が決められる。この \vec{E}, \vec{B} はボルツマンの式で f_a を決める。このようにしてボルツマンの式とマックスウェルの式はお互い結合しており、一つの閉じた方程式系を形成する。ここで注意すべきことは、プラズマは微小位相空間 $d\Omega$ の中でぬりつぶされ連続体として扱われているということである。 f はスムーズな分布関数であり、従って \vec{E}, \vec{B} もスムーズな電磁場である。衝突による極端に波長の短い電場等は右辺 $\delta f/\delta t$ に押し込められている。

3) ブラソフの式

ボルツマンの式で右辺 $\delta f/\delta t$ が無視できる場合は

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{x} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a = 0 \quad (3.13)$$

となり、これをブラソフの式という。ある現象の特徴的時間が衝突時間より十分短いときこのように $\delta f/\delta t$ が無視できる。ブラソフの式には単一体としての粒子の特性は全くない。個々の粒子の単一体としての特性は m, q, n, T により特徴づけられる。ただし m は粒子の質量、 q は電荷、 n は密度、 T は熱運動エネルギーである。今、仮想的に粒子をどんどん分割していくことを考える。すなわち $m \rightarrow 0, q \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ となる極限まで粒子を分割していく。ただし、 nm, nq, nT は一定の有限値に留めておく。当然、デバイ (Debye) 半径 λ_D とプラズマ振動数 ω_p は有限である。これをローゼンブルース (Rosenbluth) チョップという [1]。この極限は粒子性のない流体極限であり、ブラソフの式はこの意味で流体極限で成立するものである。

Vlasov の式は 1 階偏微分方程式であり、その特性方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \frac{df}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

であり、これらの式とブラソフの式は等価である。この運動方程式では一つの流体要素は、すべての要素が作り出す平均の場の中で運動する事を表している。

4) BBGKY の理論

平衡状態からずれた N 々の粒子から成る統計力学系の運動論的方程式はリウビル (Liouville) の方程式で与えられる。これは $6N$ 次元位相空間における N 体の分布関数が満たす方程式である [2]。リウビル (Liouville) の式を積分すると $(N-1)$ 体分布関数に対する式を得ることができ、これを積分すると $(N-2)$ 体分布関数に対する式が得られる。こ

の手続きを繰り返すと 2 体分布関数 $f(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_2, t)$ を支配する式が得られ、最後に 1 体分布関数 $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ に対する式が得られる。このようにすると、1 体分布関数は 2 体分布関数を含み、2 体分布関数は 3 体分布関数を含むという階層方程式系が得られる。階層方程式系をプラズマパラメータ $g \ll 1$ で展開する。詳細は省略するが、 $g \rightarrow 0$ の極限で Vlasov の式が得られ、 g の 1 次までとると、ボルツマンの式が得られる。ボルツマンの式では右辺に 2 体の相関が入っている。このようにリウビル (Liouville) の式から 1 体分布関数に対する式を導く理論を BBGKY の理論という [3,4]。

(2) マックスウェルの式

電磁気学の教科書に普通に書かれているマックスウェルの式（静止状態の等方性の固体又は液体の媒体を対象としていることが多い）は次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{J}_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$\vec{J}_{ext}, \rho_{ext}$ は外部（又は真の）電流、電荷密度で、磁化電流や分極電流、分極電荷は含まれない。分極電流は $\partial \vec{D} / \partial t$ の中に、磁化電流は $\nabla \times \vec{B}$ のかわりに $\nabla \times \vec{H}$ を用いた事により陰に含まれている。電気変位 \vec{D} と電場強度 \vec{E} は誘電係数 ϵ で、磁束密度 \vec{B} と磁場強度 \vec{H} は透磁係数 μ で結ばれている。真空中の ϵ を ϵ_0 、 μ を μ_0 とすると、 $\bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_0$ を誘電率、 $\bar{\mu} = \mu / \mu_0$ を透磁率という。（ $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Farad/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henry/m）

しかし、プラズマでは分極電荷、分極電流が主役をなす事も多く、これらを全部陽に含んだ全電荷密度、全電流密度を用いる方がより直接的で便利であり扱いに誤りが生じにくい。また、プラズマ中の物理現象は全て充分速く、従って透磁率 μ は意味をなさず常に

$\mu = \mu_0$ としてよい [5]。プラズマ物理で普通使われるマックスウェル方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}) \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

のように記述される。 ρ_e は電荷密度、 \vec{J} は全電流密度を表す。 c は光速で $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ の関係がある。但し、プラズマを誘電体として扱う時は、しばしば電気変位 \vec{D} が用いられる。

気体プラズマは古典的・非相対論的物理で殆どの場合記述する事ができ、その基礎方程式系はボルツマンの式 (3.11)、マックスウェルの式 (3.16)、密度、電荷、電流を決める式 (3.12) から成る。

(3) プラズマ振動とランダウ減衰

無限に一様に拡がったプラズマを考え、そのプラズマに何か摂動を加えた時どのような波が発生し、その波がどのように減衰するか（あるいは成長するか）調べる。次の仮定をおく。a) 外部場はない ($\vec{B}_0 = 0, \vec{E}_0 = 0$)。b) 2体衝突は無視する。(速い振動を考慮するので $\omega \gg \nu$ 、従って $\nu \rightarrow 0$ の極限を考える。) c) イオンはバックグラウンドとし、その運動は考えない。つまり振動が速すぎて重いイオンはついて行けない。第0近似で $n_{e0} = Z_i n_{i0}$ である。d) 磁場の摂動 \vec{B} は無視し静電場のみ考える。これを静電近似という (§6 で述べる)。以下、ランダウの論文 [6] に従って記述する。

電子の分布関数を $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ とすると Vlasov の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.17)$$

が成立する。 f は零次と摂動分の1次に分ける。

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t) \quad (3.18)$$

f_0 は無限に広がったプラズマ電子に対する速度空間での分布関数（例えばマックスウェル分布）であり、 f_1 は摂動を受けたため生じた摂動部分の分布関数で $f_0 \gg |f_1|$ である。（加える摂動は充分小さいとする。）ブラソフの式を線形化する。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \vec{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.19)$$

\vec{E}_1 は摂動を受けた結果生じた電場で 1 次の微少量である。ポアソンの式は

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e, \quad \vec{E}_1 = -\nabla \varphi \quad (3.20)$$

から次のように与えられる。

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad (3.21)$$

ここで ρ_e は摂動を受けて分極した電荷密度で、定義式 (3.12) から

$$\begin{aligned} \rho_e &= Z_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_e d^3v \\ &= Z_i \int_{-\infty}^{\infty} f_{i0} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e0} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \\ &= Z_i e n_{i0} - e n_{e0} - e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで f_{i0} はイオンの分布関数（イオンの分布関数には摂動部分はない）、 f_{e0} は電子の分布関数で f_1 は式 (3.18) の摂動の分布関数である。 n_{e0} と n_{i0} は零時での電子とイオンの密度で零次では $Z_i n_{i0} = n_{e0}$ であるから

$$\rho_e = -e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \quad (3.23)$$

$$(d^3v = dv_x dv_y dv_z = d\vec{v})$$

結局 1 次の式は、以下簡単のため f_1 を f と書くと、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \varphi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.24)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f d^3v \quad (3.25)$$

となる。初期にある決まった非平衡な分布関数が与えられたとしてその結果生ずる摂動を上記2つの式(3.24)と(3.25)を解いて考える。摂動は多数の波数 \vec{k} を持った波の重ね合わせであるので(線形理論)、波数 \vec{k} を持つ一つの波のみ考えれば充分である。 \vec{k} は境界により決まる量で実数である(プラズマが無限に広がっていると連続スペクトルになる)。摂動 f と φ は $\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]$ に比例する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{v}, \vec{r}, t) &\propto f_{\vec{k}}(\vec{v}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ f(\vec{v}, \vec{r}, t=0) &\propto g_{\vec{k}}(\vec{v})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \varphi(\vec{r}, t) &\propto \varphi_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

\vec{k} の方向を x 軸にとる。方程式系は v_y, v_z で積分してしまうと x 方向の1次元問題となる。 $u \equiv v_x$ とし、 $f_{\vec{k}}, g_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}$ を以下(混同しない限り) f, g, φ と書くことにすると、式(3.24)と(3.25)は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + ikuf - i\frac{e}{m}k\varphi\frac{\partial f_0}{\partial u} = 0 \quad (3.27)$$

$$k^2\varphi = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f du \quad (3.28)$$

となる。これらの式をラプラス変換する。 $f(u, t)$ のラプラス変換は

$$f_p(u) = \int_0^{\infty} f(u, t)e^{-pt} dt \quad (R_e(p) > 0) \quad (3.29)$$

で定義され、この逆変換は

$$f(u, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} f_p(\vec{v})e^{pt} dp \quad (3.30)$$

で与えられ、 φ に対しても同様に定義できる。

$$\varphi_p = \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-pt} dt \quad (R_e(p) > 0) \quad (3.31)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \varphi_p e^{pt} dp \quad (3.32)$$

ラプラス変換は $R_e(p) > 0$ の時のみ定義できる。

線形化したブラソフの式 (3.27) をラプラス変換すると

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} e^{-pt} dt + iku \int_0^{\infty} f e^{-pt} dt - i \frac{ek}{m} \frac{\partial f_0}{\partial u} \int_0^{\infty} \varphi e^{-pt} dt = 0 \quad (3.33)$$

が得られる。ここで第1項は部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} e^{-pt} dt &= f e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} f p e^{-pt} dt \\ &= -f(t=0) + p f_p \\ &= -g + p f_p \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。ここで g は、 $g = f(t=0)$ 、すなわち $g = g_k(u) = f_k(u, t=0)$ で、初期に与えられる摂動の分布関数である。式 (3.34) を考慮するとラプラス変換されたブラソフの式は

$$(p + iku) f_p - ik \frac{e}{m} \varphi_p \frac{\partial f_0}{\partial u} = g \quad (3.35)$$

となり、ポアッソンの式 (3.28) から

$$k^2 \varphi_p = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_p du \quad (3.36)$$

を得る。式 (3.35) から

$$f_p(u) = \frac{1}{p + iku} \left\{ g(u) + ik \frac{e}{m} \varphi_p \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \right\} \quad (3.37)$$

が得られ、この式を式 (3.36) に代入すると

$$\varphi_p = \frac{e}{\epsilon_0 k^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{1}{p + iku} du}{1 - i \frac{e^2}{m \epsilon_0 k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \frac{1}{p + iku} du} \quad (3.38)$$

を得る。式 (3.37) と (3.38) を逆変換すると問題の答が得られる。 f_p と φ_p は p の複素平面において $R_e(p) > 0$ (右半平面) でのみ意味がある。しかし、摂動 (波) の安定、不安定を考えるためには $R_e(p) \leq 0$ の領域へ解析接続する必要がある。 u を複素数へ拡張し、 u の積分路を変化させる事により $R_e(p) \leq 0$ の左半平面へ解析接続することを考える。 u の積分路 C は $R_e(p) > 0$ の時、図 3.2(a) のように実軸に沿う。 $R_e(p) \leq 0$ では積分路 C は図 3.2(b),(c) のように積分路を取るとよい。

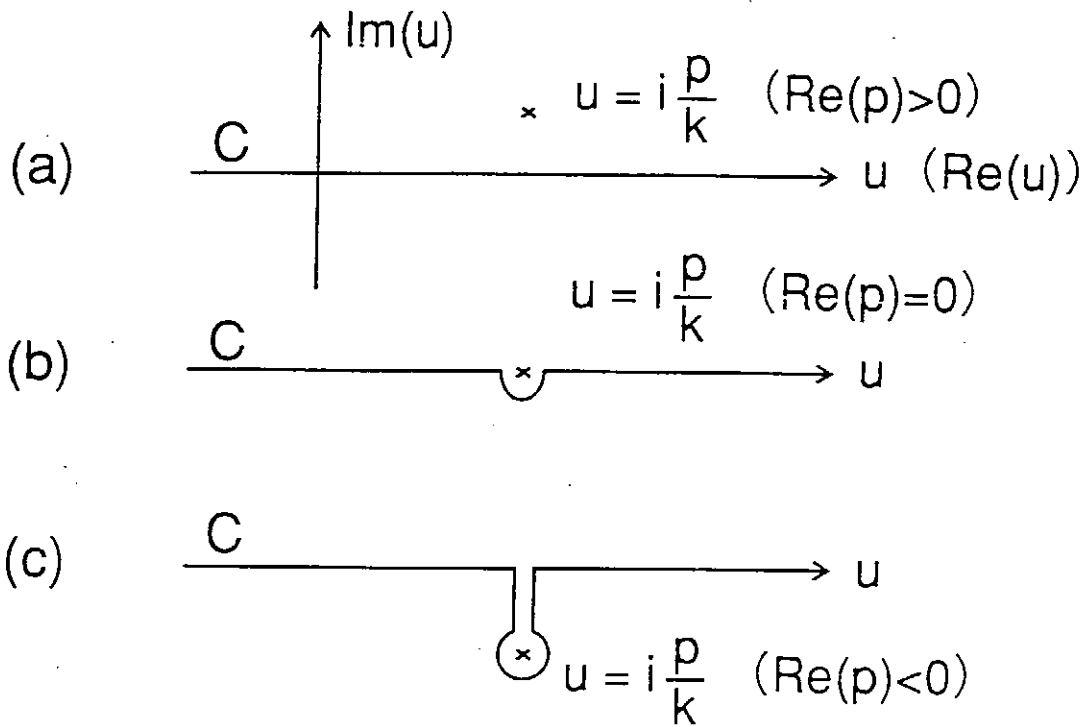


図 3.2 u の積分路

式 (3.38) における次の積分

$$I_g(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{1}{p + iku} du = \int_C g(u) \frac{1}{p + iku} du \quad (3.39)$$

では、積分路 C は $R_e(p)$ の正負に応じて上の図 (3.2) のように取る。ここで、完全に一樣なプラズマに対して初期に与える摂動分布 $g(u) = g_k(u)$ は、 u の複素平面において特異点を持たない完全関数と仮定する。 $g(u)$ が完全関数である限り、積分 $I_g(p)$ は任意の有限な p に対して正則関数となる。式 (3.38) の中のもう一つの u の積分

$$I_f(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du = \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du \quad (3.40)$$

も同様に df_0/du が任意の u に対して特異点を持たないため (例えば f_0 がマックスウェル分布の時) C に沿って u の積分を行うと $I_f(p)$ も又正則な関数となる。従って $g(u)$ が特異

点を持たない限り、 φ_p の特異点、あるいは極は式(3.38)の分母=0のみからしか出ない。
すなわち

$$1 = \frac{e^2}{\epsilon_0 m k^2} \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \quad (3.41)$$

を満たす p が極となる。式(3.41)は分散式である。(ある与えられた k に対して p が決まる。) 例えば f_0 がマックスウェル分布の時全ての極は左半平面上 ($R_e(p) \leq 0$) にある。

φ_p のラプラス逆変換は式(3.32)で与えられるが、この積分路は虚軸に沿い、かつ、全ての極を左に見るように取られている。

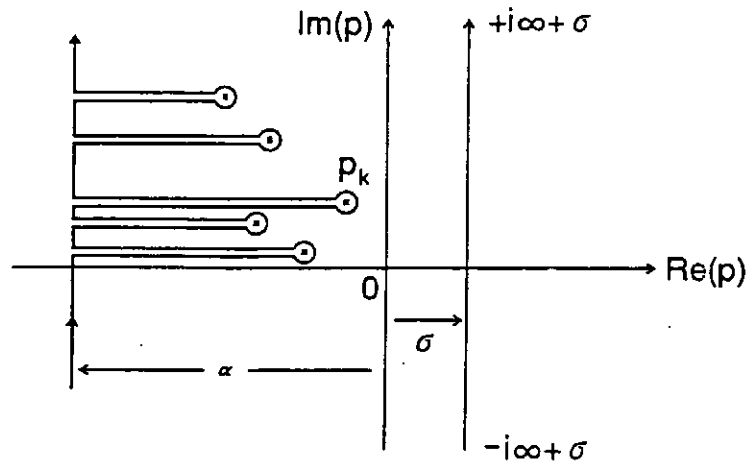


図 3.3 ラプラス逆変換の積分路

図 3.3 で \times 印は分散式(3.41)を満たす極である。再び解析接続により、積分路を上図(3.3)のように極を囲むよう変形する。極が 1 位であると

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \varphi_p e^{pt} dp = \sum_i R_i e^{p_i t} + \int_{-i\infty-\alpha}^{+i\infty-\alpha} \varphi_p e^{pt} dp \quad (3.42)$$

ここで R_i は i 番目の留数である。 α を充分大きくとると式(3.42)の第 2 項で $|R_e(p)|$ はいくらでも小さくする事ができこの積分はゼロにできる。また $t \rightarrow \infty$ の極限で右辺第 1 項

では一番大きな極 p_k の項のみ残る。従って $\varphi(t)$ は次のように振る舞う。

$$\varphi(t) = R_k e^{p_k t} \quad (3.43)$$

$p_k = -i\omega$ ($\omega = \omega_r + i\gamma$, ω_r と γ は実数) とおくと

$$\varphi(t) \propto e^{p_k t} \propto e^{-i\omega_r t + \gamma t} \quad (3.44)$$

のように振る舞う。 ω_r は振動数で、 γ は $\gamma > 0$ の時成長率、 $\gamma < 0$ なら減衰率を示す。

以上から、初期分布 $g(u)$ が u 複素平面で特異点を持たない限り、分散式 (3.41) を解いて (ある k に対する) p を得る事ができれば、問題は解決された事になる。分散式 (3.41) を次のように書く。

$$1 = i \frac{\omega_p^2}{k} \frac{1}{n_0} \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du$$

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} = \left(\frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

ω_p は電子プラズマ振動数である。分散式 (3.45) を $k \rightarrow 0$ の極限で解く。特異点 $u = ip/k$ は大きさ $|u|$ が大きく、また df_0/du は $|u| \rightarrow \infty$ でゼロになると考えてよい (例えばマックスウェル分布)。従って式 (3.45) を解く第1近似として $u = ip/k$ の特異点を無視して、実軸に沿う積分のみで評価する。 $u \ll |ip/k|$ として式 (3.45) の $1/(p + iku)$ を展開する。

$$\frac{1}{p + iku} = \frac{1}{p(1 + iku/p)} \simeq \frac{1}{p} \left(1 - i \frac{ku}{p} - \frac{k^2 u^2}{p^2} + i \frac{k^3 u^3}{p^3} \right) \quad (3.46)$$

結果から明らかになるが、 $\omega_r \gg |\gamma|$ であるので展開の条件は

$$u \ll \left| i \frac{p}{k} \right| = \left| i \frac{R_e(p) + iI_m(p)}{k} \right| = \left| \frac{\omega_r}{k} + i \frac{\gamma}{k} \right| \simeq \frac{\omega_r}{k} \quad (3.47)$$

即ち $v_T \ll \omega_r/k$ に相当する ($v_T = \sqrt{2T_e/m_e}$: 電子の熱速度)。

零次の分布としてマックスウェル分布 (1次元)

$$f_0(u) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_T} \exp(-u^2/v_T^2) \quad (3.48)$$

を考える。式 (3.45) に式 (3.46) を代入し、このマックスウェル分布を使うと

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} \left(1 - \frac{k^2 3}{p^2 2} v_T^2\right) \quad (3.49)$$

が得られる。 $1 \gg k^2 v_T^2 / p^2$ だから第 2 項の p^2 は ω_p^2 でおきかえてよい。また、 $v_T^2 / \omega_p^2 = 2\lambda_D^2$ ($\lambda_D = (\epsilon_0 T / n_0 e^2)^{1/2}$: デバイ半径) の関係を使うと分散式は (第 1 近似で)

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} + 3k^3 \lambda_D^2 \quad (3.50)$$

となる。

次に第 1 近似で無視した特異点 (極) $u = ip/k$ の寄与を考える。 $k \rightarrow 0$ の極限で $\gamma = R_e(p) \rightarrow 0$ と仮定する。(結果から γ は $k \rightarrow 0$ の時指数関数的にゼロになる。) 又、(3.50) から明かなように $k \rightarrow 0$ でも $\omega_r (= \omega_p)$ は有限の値に留まる。この仮定を保証するため積分路は図 3.4

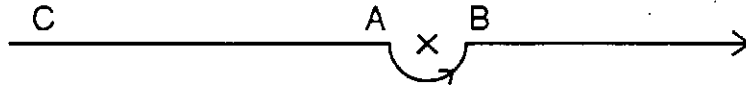


図 3.4 $k \rightarrow 0$ の極限での積分路

のように取る。点 A、B は $u = ip/k$ (×印) に充分近く、かつ、 $|I_m(u)| = |\gamma|/k$ より充分大きく取る。分散式 (3.45) は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \\ &= \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du + \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \int_{AB} \frac{df_0}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \end{aligned} \quad (3.51)$$

と書ける。ここに右辺第 1 項は特異点を除く実軸に沿う積分を示し、第 2 項は半円 AB に沿う積分を示す。第 1 項は $1/(u - ip/k)$ を展開する事により既に計算されており、式 (3.50) で与えられる。半円の積分は $\pi i \times \text{Residue}$ だから、式 (3.51) は式 (3.50) を考えると

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} + 3k^3\lambda_D^2 + \pi i \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \frac{df_0(u)}{du} \Big|_{u=ip/k} \quad (3.52)$$

が得られる。 $p = -i\omega_r + \gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ として、式 (3.52) から ω_r と γ を求める。式 (3.52) の πi の項は高次であるので、ここでは $u = ip/k = \omega_r/k$ とおいてよい。 γ^2 を無視し、式 (3.52) の実数部をとると振動数が得られる。

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \omega_p^2 + 3k^2\lambda_D^2\omega_r^2 \simeq \omega_p^2 + 3k^2\lambda_D^2\omega_p^2 \\ \omega_r &= \omega_p \left(1 + \frac{3}{2}k^2\lambda_D^2\right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここではもちろん $k^2\lambda_D^2 \ll 1$ である。即ち、今考えている波動はその波長がデバイ長よりずっと長い。

虚数部をとると

$$\gamma = \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2 n_0} \frac{1}{du} \frac{df_0(u)}{du} \Big|_{u=i\frac{\omega_r}{k}} \quad (3.54)$$

が得られる。この結果は f_0 が式 (3.48) で与えられる完全なマックスウェル分布でなくても成立する。 f_0 にマックスウェル分布を代入すると

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{k^3\lambda_D^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} - \frac{3}{2}\right) \quad (3.55)$$

となる。 $k^2\lambda_D^2 \ll 1$ なので \exp の中の $3/2$ は無視してもよい。 \vec{k} の方向を x 軸に取ったので $k > 0$ であり、 $\omega_p > 0$, $\lambda_D > 0$ だから $\gamma < 0$ である。 $\varphi(t) \propto e^{\gamma t}$ であるから Maxwell 分布の場合、プラズマ振動は必ず減衰する。これをランダウ減衰と言う。

ランダウ減衰に関して次の3点を注意しておこう。

1. ランダウ減衰は、初期の摂動分布 $g_{\vec{k}}(u)$ が複素 u 平面上に特異点を持たないと仮定した結果であり、そのため、 φ_p の特異点は分散式 (式 (3.38) の分母=0) からのみ出た。 $g(u)$ のこの仮定により分散式が解を与える。 $g(u)$ の選び方によっては分散式以外からも特異点があり、減衰しない解を得る事も可能である。

2. $f(u, t)$ は式 (3.37)

$$f_p(u) = \frac{1}{p + iku} \left\{ g(u) + \frac{ike}{m} \varphi_p \frac{df_0}{du} \right\} \quad (3.56)$$

をラプラス逆変換すると得られる。 $p + iku = 0$ に特異点がある事を考えると

$$f(u, t) \propto e^{-ikut} \quad (3.57)$$

のように e^{-ikut} に比例する項が現れる。 φ_p の極 (分散式=0) の寄与は $e^{\gamma t}$ ($\gamma < 0$) なので $t \rightarrow \infty$ で消える。しかし e^{-ikut} は振動成分なので波が完全に減衰した後もこの振動項は残る。これは初期摂動分布 $g(u)$ により受けた摂動を各々の粒子はいつまでも記憶している事を意味する。ヴラソフの式は散逸項がなく可逆的である事の帰結である。

3. 振動数 ω_r は $v_T \ll \omega_r/k$ として特異点の寄与を無視して得られ、式 (3.53) で与えられる。つまりプラズマ振動を決めるのはプラズマ全体で、減衰率 γ を決めるのは特異点近傍のわずかな粒子のみである。つまり $u \sim \omega_r/k$ の速さを持つ少数の粒子のみが波と共鳴し波を減衰させたのである。 $u \sim \omega_r/k$ 近くの共鳴粒子を除いてもプラズマ振動 (ω_r) は変わらないと考えると、もし $df_0/du > 0$ であると、式 (3.54) より $\gamma > 0$ となる成長する解が得られる。すなわち、分布のすそので $df_0/du > 0$ となっている場合はプラズマ振動は時間と共に成長する。このように不安定になる場合を逆ランダウ減衰、あるいはランダウ成長と言う。

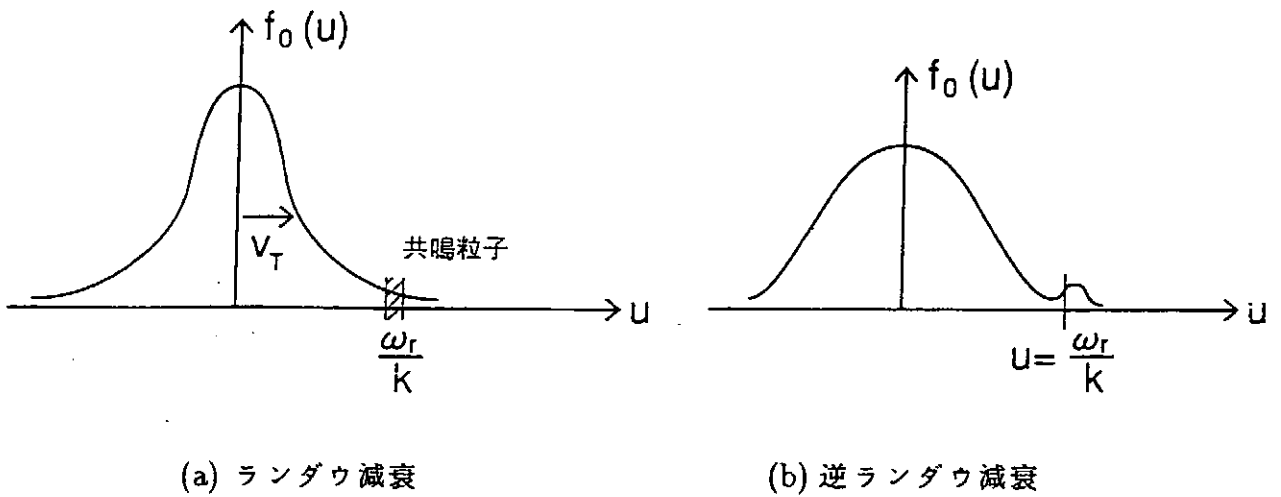


図 3.5 分布関数とランダウ減衰

(4) ランダウ減衰の物理的抽象

既に述べたようにプラズマ振動はプラズマ粒子全体で作られ、振動の減衰は、速度が $v \sim \omega_r/k$ 近傍の少数の粒子と波の共鳴により起こる。 ω_r/k は波の位相速度である。 $v \sim \omega_r/k$ の粒子は電場 E と相互作用し、 E のある位相のところで加速されエネルギーを得、別の位相のところでは逆に減衰を受けエネルギーを失う。粒子がエネルギーを得る過程では E はエネルギーを失い、粒子がエネルギーを失う過程では E はエネルギーを得る。全体として粒子がエネルギーを得ると E は減衰していき、従って波は減衰する。共鳴粒子以外の波動を作る主プラズマはこの過程に殆ど関係ない。 $v \sim \omega_r/k$ の粒子は E により加速されたり減速したりする。共鳴粒子と E の位相の関係、 $v > \omega_r/k$ の粒子数と $v < \omega_r/k$ の粒子の個数の大小などで全体のエネルギーのやりとりが決まる。

今、振動により生じた電場を

$$E = E_1 \sin(kz - \omega t) \quad (3.58)$$

とする。 $\omega \sim \omega_p$ で $E_1 \propto e^{\gamma t}$ であるが、 $\omega \gg \gamma$ とし、 ω^{-1} の時間スケールの間 $E_1 = \text{const.}$ として粒子軌道を計算し、粒子(電子のみを考える)の運動エネルギーを計算する。運動

方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = qE_1 \sin(kx - \omega t) \quad (m = m_e, \quad q = -e) \quad (3.59)$$

零次においては

$$x = v_0 t + x_0 \quad (3.60)$$

ここで多数の粒子に対して初期値 x_0 はランダムとする。1 次の式は

$$m \frac{dv_1}{dt} = qE_1 \sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) \quad (3.61)$$

であるが、 $t=0$ で $v_1=0$ として式 (3.61) を解く。 $t=0$ で $v_1 \neq 0$ なら $t=0$ で $kv_0 - \omega \simeq 0$ の粒子が大きな v_1 を持つ事になり、これは特別な初期条件になってしまう。式 (3.61) から

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{qE_1}{m} \int_0^t \sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) dt \\ &= -\frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\cos(kx_0 + kv_0 t - \omega t)}{kv_0 - \omega} - \frac{\cos(kx_0)}{kv_0 - \omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t v_1 dt \\ &= -\frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) - \sin(kx_0)}{(kv_0 - \omega)^2} - t \frac{\cos(kx_0)}{kv_0 - \omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

ここで、同様の理由により $t=0$ で $x_1=0$ とした。 $kx_1 \ll 1$ ($x_1 \ll \lambda/2\pi$) と仮定して次のオーダーを含めて計算する。

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= m \frac{d}{dt} (v_0 + v_1 + v_2) = m \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \\ &= qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) \cos(kx_1) + \cos(kx_0 + \alpha t) \sin(kx_1) \} \\ &\simeq qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) + \cos(kx_0 + \alpha t) kx_1 \} \end{aligned} \quad (3.64)$$

但し $\alpha \equiv kv_0 - \omega$ である。粒子の運動エネルギー K の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt} m(v_0 + v_1 + v_2) \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \\ &= mv_0 \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) + v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ &= v_0 qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) + \cos(kx_0 + \alpha t) kx_1 \} \\ &\quad - \frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\cos(kx_0 + \alpha t)}{\alpha} - \frac{\cos(kx_0)}{\alpha} \right\} qE_1 \sin(kx_0 + \alpha t) \end{aligned} \quad (3.65)$$

この式の x_1 に式 (3.63) を代入して初期位置 x_0 について平均する。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle_{x_0} &\simeq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{dK}{dt} \cdot dx_0 \\ &= \frac{q^2 E_1^2}{2m} \left(-\frac{\omega \sin \alpha t}{\alpha^2} + \frac{\alpha + \omega}{\alpha} t \cos \alpha t \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

このエネルギー変化に寄与するのは、 $\alpha = kv_0 - \omega \simeq 0$ の粒子、すなわち共鳴粒子である。従って $|\alpha| \ll \omega$ と考えてよい。式 (3.66) の右辺第 2 項の $(\alpha + \omega)/\alpha$ を ω/α で近似する。この時式 (3.66) は次のように書ける。

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \frac{q^2 E_1^2}{2m} v_0 \frac{d}{dv_0} \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] \quad (3.67)$$

ただし、添字 x_0 は省略した。 v_0 の分布関数 $f_0(v_0)$ で平均をとる。

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \frac{q^2 E_1^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} v_0 f_0 \frac{d}{dv_0} \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] dv_0 \quad (3.68)$$

部分積分より

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = -\frac{\epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2}{2 n_0} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 + v_0 f_0') \frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} dv_0 \quad (3.69)$$

となる。 f_0 に関する積分は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \frac{\sin \alpha t}{\alpha} dv_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \left(\frac{\alpha + \omega}{k} \right) \frac{\sin \alpha t}{\alpha} d \left(\frac{\alpha + \omega}{k} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\alpha) \frac{\sin \alpha t}{\alpha} d \frac{\alpha}{k} \\ &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} g_0 \left(\frac{x}{t} \right) \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (3.70)$$

となり $t \rightarrow \infty$ で $g_0 \rightarrow 0$ 、つまりこの積分は消える。式 (3.69) は

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = -\frac{\epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2 \omega}{2 k n_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_0' \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] dv_0 \quad (3.71)$$

となる。ただし、積分には $\alpha = kv_0 - \omega \simeq 0$ が効くので式 (3.69) の積分の中の $v_0 f_0'$ の v_0 は ω/k でおきかえた。 $t \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} = \frac{\pi}{k} \delta \left(v_0 - \frac{\omega}{k} \right) \quad (3.72)$$

が成立する事を使うと、式(3.71)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle &= -\frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \frac{\omega}{k n_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_0' \frac{\pi}{k} \delta\left(v_0 - \frac{\omega}{k}\right) dv_0 \\ &= -\frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \frac{\omega}{k^2} \pi \frac{1}{n_0} f_0' \left(v_0 = \frac{\omega}{k}\right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

これが、波と共鳴した結果、粒子が得た(あるいは失った)運動エネルギーの時間変化である。

次に波のエネルギーについて考える。§6で波のエネルギーを一般的に考察するが、今考えているプラズマ波動の持つエネルギー $\langle W_p \rangle$ は

$$\langle W_p \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{4} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (3.74)$$

で与えられる。第1項は電場の持つエネルギー $\langle W_E \rangle$ で

$$\langle W_E \rangle = \left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{4} \quad (3.75)$$

である。第2項はプラズマ粒子の波としてのエネルギー $\langle W_K \rangle$ で $\omega \simeq \omega_p$ の時

$$\langle W_p \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \quad (3.76)$$

となる。粒子が波からエネルギーをもらおうと波はその分エネルギーを失うので

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dW_p}{dt} \right\rangle = 0 \quad (3.77)$$

である。式(3.73)と式(3.76)を使うと

$$\left\langle \frac{dW_p}{dt} \right\rangle = \langle W_p \rangle \pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \omega \frac{1}{n_0} f_0' \quad (3.78)$$

となる。 $W_p \propto \exp(2\gamma t)$ であるから

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi \omega_p^2 \omega}{2 k^2 n_0} f_0' \\ &= \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2 n_0} \frac{1}{dv} \left. \frac{df_0}{dv} \right|_{v=\frac{\omega}{k}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

が求まり、ランダウの結果と一致する。

(5) 捕捉粒子

静電ポテンシャルに捕捉される粒子について考える。 $v_\phi = \omega/k$ で動く系でみる。式(3.58)の電場とその静電ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 \sin(kx) \\ \varphi &= -\varphi_1 \cos(kx) \quad (\varphi_1 = \frac{E_1}{k}) \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

と書ける。 φ_1 が充分大きいと $v \simeq 0$ (もとの系では $kv - \omega \simeq 0$)の粒子はポテンシャルに捕捉される。このような粒子を捕捉粒子という。ポテンシャルに捕捉されない v の大きな粒子を非捕捉粒子という。位相空間での粒子の運動を書くと図3.6のようになる。

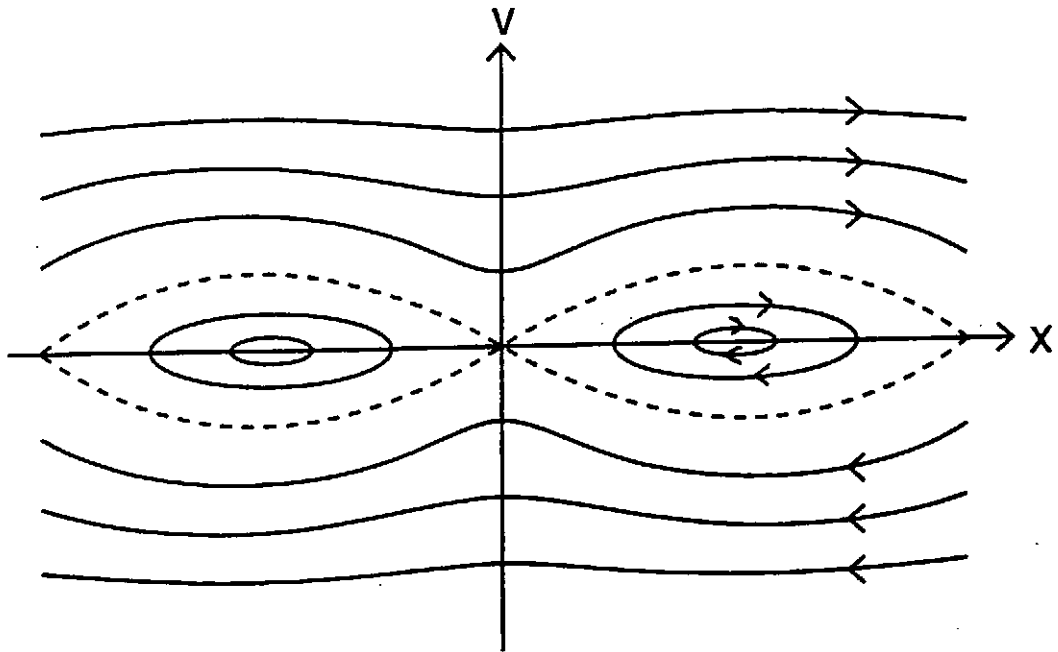


図 3.6 位相空間での捕捉粒子と非捕捉粒子

図3.6のセパトリックス(点線)内にある粒子は捕捉され、ポテンシャルの谷のなかで周期運動をする。粒子がポテンシャルの底深く捕捉され周期運動をしているとすると、 $kx \ll 1$

であるので

$$m \frac{dv}{dt} = qE_1 \sin kx \simeq qE_1 kx \quad (3.81)$$

となり、その周期運動の振動数 ω_b は

$$\omega_b = \sqrt{\frac{qkE_1}{m}} = \sqrt{\frac{q}{m} k^2 \varphi_1} \quad (3.82)$$

で与えられる。捕捉粒子は本質的に非線形的に取り扱わねばならない。ランダウ減衰は線形理論であり、粒子がポテンシャルに捕捉されてしまう前に波は減衰してしまわねば理論は成立しない。即ち、ランダウ減衰率を γ_{LD} とすると $\gamma_{LD} \ll \omega_b^{-1} = \sqrt{m/(qk^2\varphi_1)}$ がランダウ減衰の条件である。 φ_1 が大きく $\gamma_{LD}^{-1} \ll \omega_b^{-1}$ が成立しないときは非線形的取扱いが必要になる。

(6) プラズマ分散関数

1) プラズマ分散関数

プラズマ振動とランダウ減衰を論じたときと同じ条件で考える。ただし、ここではイオンの運動も考慮する。線形化されたブラソフの式とポアソンの式は次のとおりである。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a - \frac{q_a}{m_a} \nabla \varphi \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.83)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_a q_a \int_{-\infty}^{\infty} f_a d^3v \quad (3.84)$$

$$a = e, i$$

この方程式系の取扱いは既に明らかにされている。 \vec{k} を実数、 ω を複素数として

$$\left. \begin{aligned} f &\sim f_{\vec{k}\omega} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \\ \varphi &\sim \varphi_{\vec{k}\omega} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

とする。式(3.83)、(3.84)は

$$i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega) f_{\vec{k}\omega} - i \frac{q}{m} \varphi_{\vec{k}\omega} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.86)$$

$$k^2 \varphi_{\vec{k}\omega} = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ Z_i e \int_{-\infty}^{\infty} f_{i\vec{k}\omega} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e\vec{k}\omega} d^3v \right\} \quad (3.87)$$

となり、これより

$$\varphi_{\vec{k}\omega} = \frac{1}{k^3 \epsilon_0} \left\{ (Z_i e)^2 \frac{1}{m_i} \varphi_{\vec{k}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{i0}}{\partial \vec{v}}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} d^3v + e^2 \frac{1}{m_e} \varphi_{\vec{k}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \vec{v}}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} d^3v \right\} \quad (3.88)$$

を得る。 \vec{k} 方向を x 軸にとり $u \equiv v_x$ とし、 v_y, v_z で積分する。分散式は次のように与えられる。

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - \omega/k} \frac{1}{n_0} \frac{df_{0e}}{du} du + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - \omega/k} \frac{1}{n_0} \frac{df_{0i}}{du} du \quad (3.89)$$

零時の分布関数はマックスウェル分布をしていると考える。すなわち、

$$f_{0a} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{Ta}} e^{-u^2/v_{Ta}^2} \quad (v_{Ta}^2 = \frac{2T_a}{m_a}) \quad (3.90)$$

この場合、分散式 (3.89) は次のように書ける。

$$K(k, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} Z(\zeta_e) + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.91)$$

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_{e0} e^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_{Di} = \left(\frac{\epsilon_0 T_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \right)$$

$$\zeta_e = \sqrt{2} \frac{\omega}{k v_{Te}}, \quad \zeta_i = \sqrt{2} \frac{\omega}{k v_{Ti}}$$

ここで Z はプラズマ分散関数と呼ばれ、 $I_m(\zeta) > 0$ に対して

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-x^2/2}}{x - \zeta} dx \quad (3.92)$$

で定義される。これは (3) 節のラプラス変換に相当する。 x を複素数と考え積分路を図 3.2 のようにとると $I_m(\zeta) \leq 0$ へ解析接続できる。しかし、 x を実数、 $I_m(\zeta) > 0$ とした時に成立する恒等式

$$\frac{1}{x - \zeta} = i \int_0^{\infty} e^{-i(x-\zeta)t} dt \quad (I_m(\zeta) > 0) \quad (3.93)$$

を用いて、 $Z(\zeta)$ を ζ の全平面へ解析接続できる。すなわち、

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= 1 + \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x-\zeta} dx \\ &= 1 + \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i \int_0^{\infty} e^{-i(x-\zeta)t} dt \right\} e^{-x^2/2} dx \\ &= 1 - \zeta e^{-\zeta^2/2} \int_0^{\zeta} e^{y^2/2} dy + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta e^{-\zeta^2/2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

ここで x と t に関する積分の順序を入れかえ、 x の積分ではラプラスの積分を応用した。式変形の最後の結果から明らかなように、式 (3.94) は下半面 ($\text{Im}(\zeta) \leq 0$) でも用いることができ、 $Z(\zeta)$ は全平面へ解析接続された。この式 (3.94) は実際に $Z(\zeta)$ 関数を計算するのに便利である。なお、

$$W(\zeta) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x-\zeta} dx \quad (3.95)$$

をプラズマ分散関数と呼ぶ事もあり、これに対しては数表も作られている [7]。

プラズマ分散関数に対しては次の級数展開と漸近展開がしばしば使われる。

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta e^{-\zeta^2/2} + 1 - \zeta^2 + \frac{\zeta^4}{3} + \dots \quad (\zeta \ll 1) \quad (3.96)$$

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta e^{-\zeta^2/2} - \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta^4} - \dots \quad (\zeta \gg 1) \quad (3.97)$$

2) プラズマ振動

プラズマ振動を式 (3.91) から導いてみよう。このため考えている波の位相速度が電子及びイオンの熱速度よりずっと大きい場合を考える。すなわち、 $v_{Ti} \ll v_{Te} \ll \omega/k$ とする。 $\zeta_i \gg 1$, $\zeta_e \gg 1$ であるので Z に漸近展開式 (3.97) をあてはめる。そうすると分散式は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_e e^{-\zeta_e^2/2} - \frac{1}{\zeta_e^2} - \frac{3}{\zeta_e^4} \right\} \\ + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left\{ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_i e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{1}{\zeta_i^2} - \frac{3}{\zeta_i^4} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

$\zeta_i/\zeta_e = v_{Te}/v_{Ti} \gg 1$ であるので $\exp(-\zeta_i^2/2)$ の項は無視できる。また $1/\zeta_i^2$ 、 $3/\zeta_i^4$ の項も小さく結局イオンの項は落とすことができ分散式は、

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\omega}{k v_{Te}} e^{-\omega^2/k^2 v_{Te}^2} - \frac{k^2 v_{Te}^2}{2\omega^2} - \frac{3k^4 v_{Te}^4}{4\omega^4} \right\} = 0 \quad (3.99)$$

となる。 $\omega = \omega_r + i\gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ とすると分散式は

$$1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_D^3} e^{-\omega_r^2/k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 3k^2 \lambda_D^2 \simeq 0 \quad (3.100)$$

と近似でき、この式からプラズマ振動の振動数と減衰率は

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2 \right) \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

と得られる。 ω_r, γ ともすでに得たものと一致する。

3) イオン音波

プラズマ振動は非常に速い振動で重いイオンは殆どついていけなく、ただ単に第0近似で中性化の役割を果たすだけである。ここでは、ゆっくり振動し、イオンの運動が重要となる場合の例としてイオン音波を考える。低周波での運動はイオンが主な役割を果たし、電子は軽いので殆ど瞬時にイオンの運動に対して遮蔽効果を示すのみである。今考えている波の位相速度は

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te} \quad (3.102)$$

を満たすとする。分散式 (3.91)

$$K(k, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} Z(\zeta_e) + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.103)$$

において、 $\zeta_e = \sqrt{2}\omega/kv_{Te} \ll 1$ であるので $Z(\zeta_e)$ に対して級数展開の式 (3.96)、即ち

$$Z(\zeta_e) = 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_e e^{-\zeta_e^2/2} \simeq 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_e \quad (3.104)$$

を用いる。分散式は

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{Di}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.105)$$

となる。 $\omega = \omega_r + i\gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ を考える。 ζ_e 中の ω は ω_r でよい

式 (3.105) の実数部、虚数部からそれぞれ

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} = -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} R_e\{Z(\zeta_i)\} \quad (3.106)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{De}^2} = -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} I_m\{Z(\zeta_i)\} \quad (3.107)$$

が得られる。 $\zeta_i = \sqrt{2}\omega/kv_{Ti} \gg 1$ であるので

$$\begin{aligned} Z(\zeta_i) &\simeq i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_i e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{1}{\zeta_i^2} - \frac{3}{\zeta_i^4} \\ &= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\omega_r}{kv_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{k^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} - 3 \frac{k^4 v_{Ti}^4}{4\omega^4} \\ &\simeq i \sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{kv_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} (1 - 2i \frac{\gamma}{\omega_r}) - 3 \frac{k^4 v_{Ti}^4}{4\omega_r^4} \end{aligned} \quad (3.108)$$

となる。この実数部、虚数部は次のとおりである。

$$R_e\{Z(\zeta_i)\} = -\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} - \frac{3 k^4 v_{Ti}^4}{4 \omega_r^4} \quad (3.109)$$

$$I_m\{Z(\zeta_i)\} = \sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{kv_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} + 2 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \frac{\gamma}{\omega_r} \quad (3.110)$$

式 (3.106)、(3.109) から

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left(\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} + \frac{3 k^4 v_{Ti}^4}{4 \omega_r^4} \right) = 0 \quad (3.111)$$

が得られる。関係式

$$\frac{v_{Ti}^2}{\lambda_{Di}^2} = \frac{2T_i}{m_i} \frac{n_{i0} Z_i^2 e^2}{\epsilon_0 T_i} = 2\omega_{pi}^2$$

を用いると

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} + \frac{3}{4} k^2 \cdot 2\omega_{pi}^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_r^4} = 0 \quad (3.113)$$

が得られる。第1近似として左辺第4項を無視すると

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + 1/(k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (3.114)$$

となる。これを式(3.113)の最後の項に代入する。

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2} k^2 \omega_{pi}^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_r^2}} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}} \left\{ 1 + \frac{\frac{3}{2} k^2 \omega_{pi}^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^4 (1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2})} \right\} \\ &= \frac{k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} k^2 v_{Ti}^2 \frac{1}{\omega_{pi}^2} \frac{1 + k^2 \lambda_{De}^2}{k^2 \lambda_{De}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.115)$$

今、 $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi}^2 \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{pi}^2} \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \right) \\ &= k^2 \frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i} \end{aligned} \quad (3.116)$$

と近似できる。ここで音速を

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i}} \quad (3.117)$$

で定義すると、振動数は

$$\omega_r = k c_s \quad (3.118)$$

と書ける。これは位相速度が音速のイオン音波を表している。

式(3.107)、(3.110)から

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{De}^2} &= -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left(\sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k v_{Ti}} e^{-\zeta_i/2} + 2 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \frac{\gamma}{\omega_r} \right) \\ &= -\sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i/2} - 2 \frac{v_{Ti}^2}{\lambda_{Di}^2} \frac{\gamma}{\omega_r^3} \end{aligned}$$

が成立し、これから減衰率

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\lambda_{Di}^2 \omega_r^3}{2 v_{Ti}^2} \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{De}^2} - \sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i/2} \right) \\ &= -\frac{k c_s^4}{4 \omega_{pi}^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_{De}^2 v_{Te}} \left(1 + \frac{\lambda_{De}^2 v_{Te}}{\lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i/2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。関係式

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{De}^2 v_{Te}}{\lambda_{Di}^2 v_{Ti}} &= \frac{\epsilon_0 T_e n_{i0} Z_i^2 e^2}{n_{e0} e^2 \epsilon_0 T_i} \left(\frac{2T_e m_i}{m_e 2T_i} \right)^{1/2} \\ &= \frac{Z_i T_e}{T_i} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \\ \frac{\zeta_i^2}{2} &= \frac{1}{2} \frac{2\omega_r^2}{k^2 v_{Ti}^2} = \frac{k^2 c_s^2}{k^2 v_{Ti}^2}\end{aligned}\quad (3.119)$$

を使うと減衰率は

$$\frac{\gamma}{\omega_r} = -\frac{\sqrt{\pi} c_s^3}{4\omega_r^2 \lambda_{De}^2 v_{Te}} \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{-c_s^2/v_{Ti}^2} \right) \quad (3.120)$$

と表せる。第1項は電子の寄与、第2項はイオンの寄与である。

もし電子温度がイオン温度よりずっと高いとすると、すなわち、 $T_e \gg T_i$ の時音速は

$$c_s \simeq \sqrt{\frac{Z_i T_e}{m_i}} = \sqrt{\frac{Z_i T_e}{2 T_i}} v_{Ti} \quad (3.121)$$

となり、減衰率は

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\omega_r} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{Z_i T_e}{m_i} \sqrt{\frac{Z_i T_e}{m_i}} \frac{\epsilon_0 m_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0 T_e} \sqrt{\frac{m_e}{2T_e}} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{-\frac{Z_i T_e}{T_i}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} e^{-\frac{Z_i T_e}{T_i}} \right)\end{aligned}\quad (3.122)$$

となる。この式で()の中の1は電子によるランダウ減衰で、第2項はイオンによるランダウ減衰である。 $Z_i = 1, \sqrt{m_i/m_e} \simeq 43$ の時、 $T_e/T_i = 10 \sim 15$ で電子の寄与とイオンの寄与はほぼ同程度になる。 $T_e/T_i \lesssim 3$ 程度になると非常に強いイオンのランダウ減衰が生ずる。図3.7に電子とイオンの分布関数を示す。(a)では $T_e \gg T_i$ で、 $\omega/k \sim c_s$ の速度のところにはイオンは全く存在せず、従ってランダウ減衰は電子との共鳴による。(b)では $T_e \gtrsim T_i$ でイオンの分布が拡がり、 $\omega/k \sim c_s$ のところにもイオンの分布のすそのが延びてきている。ここでは電子だけでなくイオンもランダウ減衰に寄与する。しかしイオン

の方が（質量が大きいいため、あるいは $v_{Ti} \ll v_{Te}$ のため）すそのでの分布の勾配が急峻で
 共鳴する ω/k の所で $df_{\alpha i}/dv$ は大きいので、イオンによるランダウ減衰は極めて大きい。

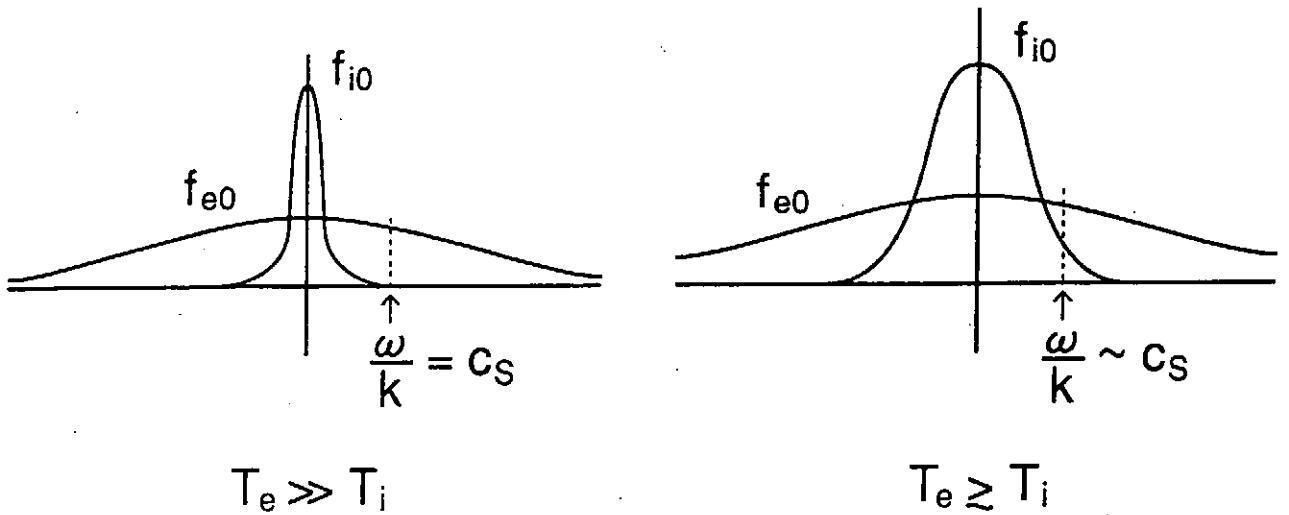


図 3.7 イオンによるランダウ減衰

参考文献

- [1] N.Rostoker and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 3, 1 (1960)
- [2] ランダウ・リフシッツ、「統計物理学」 岩波書店 1957 年 (小林秋男他共訳)
- [3] N.N.Bogoliubov, in Studies in Statistical Mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [4] D.C.Montgomery and D.A.Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [5] ランダウ・リフシッツ、「電磁気学」 東京図書 (井上健男他共訳)
- [6] L.Landau, J.Phys. (U.S.S.R.) 10, (1946) 25.
- [7] B.D.Fried and S.D.Conte, "*The Plasma Dispersion Function*", Academic Press, 1961.

§4 クーロン衝突

(1) クーロン衝突の特徴

中性子気体（例えば空気）の衝突過程では、2つの粒子が充分接近して始めて相互作用し、粒子の軌道は大きく曲げられる。これに対してプラズマ粒子の衝突は相互作用がクーロン力であり、この力は遠達力であるため、中性粒子とは全く異なる衝突過程となる。クーロン衝突の特徴は次の2点にあるといえよう。

1. 衝突周波数は、粒子の速が大きくなると急激に小さくなる。 $\nu \propto 1/v^3$
2. 衝突過程においては微小角散乱の積み重ねが支配的である。

1) 弾性散乱

質量 m_1 の粒子と質量 m_2 の粒子との弾性衝突を重心系で考える。クーロン力のような中心力場では2つの粒子は同一平面内で運動する。図 4.1 において μ は換算質量 ($1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$), b は衝突パラメータ、 χ は散乱角で、 χ は小さな b に対して大きく、大きな b に対して小さい。 χ が大きい場合を大角散乱、小さいと小角散乱、 χ が極めて小さい散乱を微小角散乱という。

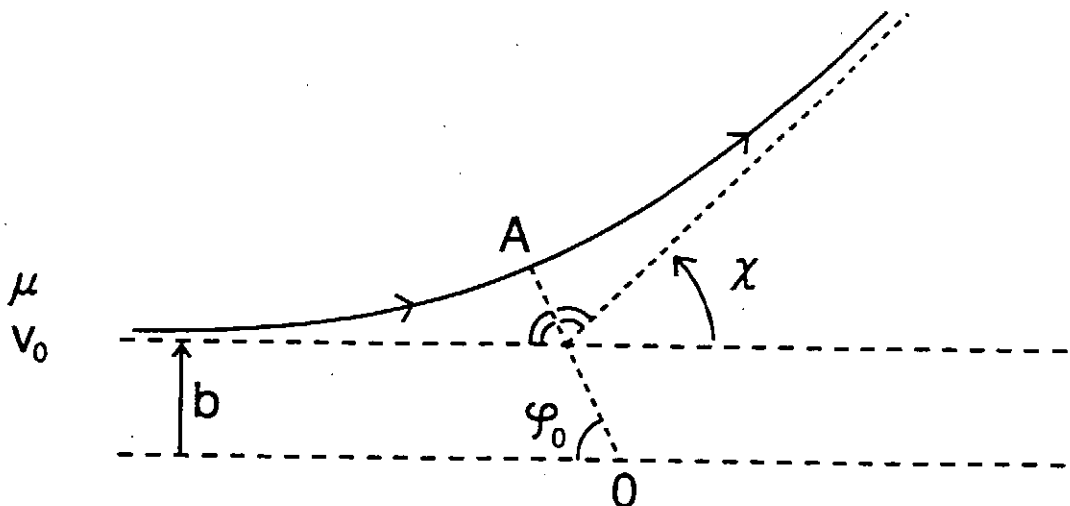


図 4.1 弾性衝突 (重心系)

散乱角 χ の方向の微小立体角 $d\omega$ 内に単位時間に散乱される電子の数を dN する。 Φ を入射束 [$s^{-1} \cdot m^{-2}$], $d\sigma$ を散乱面積 [m^2] とすると、

$$dN = \Phi d\sigma \quad (4.1)$$

である。衝突パラメータ b を使うと

$$dN = 2\pi b db \Phi \quad (4.2)$$

と書ける。散乱の断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db \\ &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \frac{b}{\sin\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

で与えられる。但し、 $d\omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ である。

クーロン場の場合を考える。2つの粒子の電荷を q, q' とするとポテンシャルは

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} \quad (4.4)$$

であり、この時散乱角は次の式で与えられる [1]。

$$\cot \frac{\chi}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\mu v_0^2 b}{qq'} \quad (4.5)$$

これより式 (4.3) の中の $db/d\chi$ が求まる。 $d\sigma$ は

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{(qq')^2}{[8\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 \sin^2(\chi/2)]^2} \quad (4.6)$$

で与えられ、これは Rutherford の式と呼ばれる [1]。

2) 大角散乱の場合

$\chi = 90^\circ$ の場合を考える。この時の衝突パラメーターを b_0 とすると

$$\cot \frac{\chi}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\mu v_0^2 b_0}{qq'} = 1, \quad (4.7)$$

すなわち、衝突パラメーターが

$$b_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\mu v_0^2}, \quad \left(\mu_0 v_0^2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 b_0} \right) \quad (4.8)$$

のとき 90° 散乱する。 90° 散乱は、入射粒子の運動エネルギーの 2 倍が、2 粒子間のクーロン・ポテンシャル・エネルギーに等しい時に起こる。このときの散乱の全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_{90^\circ} &\simeq 4\pi b_0^2 = 4\pi \left(\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{\mu v_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

となり衝突周波数は

$$\nu_d^{90^\circ} \simeq n v_0 \sigma_{90^\circ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{n q^2 q'^2}{\mu v_0^3} \propto \frac{1}{v_0^3} \quad (4.10)$$

となり入射速度 v_0 の 3 乗に逆比例して小さくなる。ただし、ここで n は場の粒子密度である。平均自由行程は

$$l_d = v_0 / \nu_d = 4\pi\epsilon_0^2 \frac{\mu v_0^4}{n (qq')^2} \quad (4.11)$$

で与えられる。

3) 運動量変化

簡単のため電子 ($-e, m_e$) とイオン ($Z_i e, m_i$) の場合を考える。 $m_e \ll m_i$ であるのでイオンは止まっていて散乱中心になっているとする。すなわち、換算質量は $\mu \simeq m_e$ とみなしてよい。

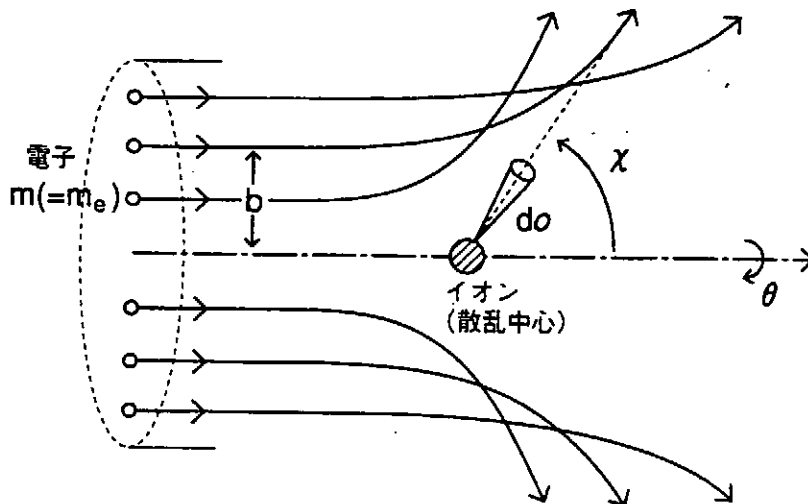


図 4.2 重いイオンによる電子の散乱

入射方向に対する入射粒子（電子）の運動量変化（減少）は、 $m_i \gg m_e$ なので散乱後 $v \simeq v_0$ であると考えてよいから、

$$\begin{aligned} \Delta P &= m_e v_0 (1 - \cos \chi) \\ &= P_0 (1 - \cos \chi) \end{aligned} \quad (4.12)$$

で与えられる。ただし、 $P_0 = m_e v_0$ は入射運動量である。すべての b (または χ) にわたっての入射方向に対する運動量変化（減少）の平均的割合は、 $\mu = m_e = m, v_0 = v$ とおいて

$$\begin{aligned} Q_m &\equiv \int \frac{\Delta P}{P_0} \frac{d\sigma}{do} do \\ &= \int_{\chi_m}^{\pi} (1 - \cos \chi) \frac{(qq')^2}{[8\pi\epsilon_0 m v^2 \sin^2(\frac{\chi}{2})]^2} 2\pi \sin \chi d\chi \\ &= \frac{(qq')^2 \cdot 2\pi}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4} \int_{\chi_m}^{\pi} \frac{(1 - \cos \chi) \sin \chi}{\sin^4(\frac{\chi}{2})} d\chi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{m v^2} \right)^2 \ln \left[\left(\sin \frac{\chi_m}{2} \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

と計算できる。 Q_m は運動量変化に対する全断面積である。積分の下限を $\chi_m = 0$ とすると明らかに Q_m は発散する。とりあえず $\chi_m \ll 1$ として χ_m は有限の値とする。 $\chi_m \ll 1$ なので $\sin\chi/2 \sim \chi/2$ とおくと入射時に対する衝突後（散乱後）の運動量変化は

$$Q_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{mv^2}\right)^2 \ln\left(\frac{2}{\chi_m}\right) = \sigma_{90^\circ} \ln\frac{2}{\chi_m} \quad (4.14)$$

となる。

4) 微小角散乱の効果

式(4.14)で与えられる運動量変化 Q_m は $\chi_m \rightarrow 0$ に対して対数的に発散してしまう。これはクーロン力が遠達力だからである。任意の衝突パラメータ b の 90° 散乱の衝突パラメータ b_0 に対する比は微小角散乱の時 (b が大きい時、すなわち χ が小さい時)

$$\begin{aligned} \tan\frac{\chi}{2} &\simeq \frac{\chi}{2} \\ \frac{b_0}{b} &= \frac{1}{\cot\frac{\chi}{2}} \simeq \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

で与えられる。 χ は b に対してゆっくりしか減少しない。従って、散乱体から充分遠くにある粒子も式(4.14)の積分に効いて、 $\chi \rightarrow 0$ で運動量変化は対数発散する。

クーロンポテンシャルはデバイ長程度で遮蔽される。従って一番大きな衝突パラメータ b はデバイ長 λ_D 程度と考えて良いだろう。すなわち

$$b_{max} = \lambda_D \quad (4.16)$$

とおく。従って、最小の散乱角 χ_m は

$$\cot\frac{\chi_m}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{mv^2\lambda_D}{qq'} \sim \frac{1}{\chi_m/2} \quad (\chi_m \ll 1) \quad (4.17)$$

$$\frac{2}{\chi_m} = 4\pi\epsilon_0 \frac{mv^2\lambda_D}{qq'} = \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (4.18)$$

で与えられ、運動量変化は次のように与えられる。

$$Q_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{mv^2}\right)^2 \ln\Lambda = \sigma_{90^\circ} \ln\Lambda \quad (4.19)$$

ただし Λ は

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (4.20)$$

と定義され、 $\ln\Lambda$ のことをクーロン対数という。運動エネルギー $mv^2/2$ の平均は $3T/2$ であるので最小のパラメータ $b_0(90^\circ \text{ 散乱})$ は

$$b_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{mv^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{3T} \quad (4.21)$$

で与えられ、これを Landau パラメータという事がある。 b_0 は、式 (4.21)、あるいは式 (4.8) から明らかなように、粒子の運動エネルギーと2粒子間の相互ポテンシャル・エネルギーとがほぼ同程度になる距離を表している。 Λ はプラズマ・パラメータ g と次のような関係にある。 $q = q' = e$ とおくと、

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}} 4\pi\epsilon_0 \frac{3T}{qq'} = 12\pi\epsilon_0^{3/2} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{ne^3}} \\ &= 12\pi n \lambda_D^3 = 9 \cdot \frac{4}{3} n \lambda_D^3 = 9N_D = \frac{9}{g} \end{aligned} \quad (4.22)$$

プラズマ・パラメータは $g = 1/N_D \ll 1$ であるので Λ は大きな量である。しかし対数依存性のため Q_m は Λ の変化に敏感ではない。

衝突周波数を粒子の進行方向の運動量変化率で定義する。電子がイオンに散乱されるときに衝突周波数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nu_s^{e-i} &\equiv n\nu Q_m \\ &= \frac{n}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{(qq')^2}{m^2 v^3} \ln\Lambda = \nu_d^{90^\circ} \ln\Lambda \end{aligned} \quad (4.23)$$

以上の簡単な論議から衝突周波数に関して以下の重要な事が分かる。

(i) $\nu_s^{e-i} \propto 1/v^3$

衝突周波数は v^3 とともに小さくなり、速い粒子ほど衝突が少ない。これは2つの粒子がお互いに速く走るほど相互作用している時間が短いためである。

(ii) $\nu^{e-i} \propto \ln \Lambda$

これは微小角散乱の積み重ねを表す。 Λ は大きな数で、 n と T に依存するが、 $\ln \Lambda$ は対数なので n や T の変化に敏感でない。 $\ln \Lambda$ は大角散乱に対する微小角散乱の割合を表すと考えてよい。典型的には $\ln \Lambda = 10 \sim 20$ である。従って、大角散乱より微小角散乱が衝突過程で支配的といえる。

5) エネルギー変化

電子とイオンの衝突を考え、この時のエネルギー変化を考える。 $m_e \ll m_i$ なのでイオンはほぼ静止しているとしてよい。図4.3のように電子(質量 m_e 、速さ v_0)が衝突パラメータ b で入射し、イオンと衝突し散乱角 χ で散乱され、静止していたイオンは角 χ' の方向に速さ v' で動く。

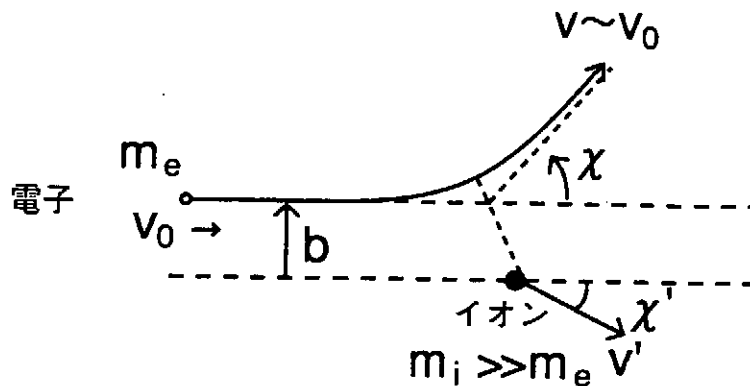


図4.3 電子とイオンの衝突

衝突後電子は大きく方向を変えるがイオンは少ししか方向を変えない。衝突前にイオンは静止しているとしてよいから運動量保存の式は

$$\begin{aligned} m_e v_0 &= m_e v_0 \cos \chi + m_i v' \cos \chi' \\ 0 &= m_e v_0 \sin \chi - m_i v' \sin \chi' \end{aligned} \quad (4.24)$$

である。また、電子の失うエネルギーはイオンの得るエネルギーに等しいから

$$\Delta E \equiv \frac{m_i}{2}(v')^2 = E_0 \frac{2m_e}{m_i}(1 - \cos\chi) \quad (4.25)$$

$$(E_0 = \frac{1}{2}m_e v_0^2)$$

であり、衝突によるエネルギーの変化 ΔE は次のように小さいことがわかる。

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 2 \frac{m_e}{m_i}(1 - \cos\chi) \ll 1 \quad (4.26)$$

電子は衝突によりその方向は変わるがエネルギー変化は小さい。従って、衝突後も電子の速さは v_0 とおいた仮定は正当化されたことがわかる。

散乱される粒子の運動エネルギーの平均損失率の断面積は

$$Q_E \equiv \int \frac{\Delta E}{E_0} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$= \int 2 \frac{m_e}{m_i}(1 - \cos\chi) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$= 2 \frac{m_e}{m_i} Q_m \quad (4.27)$$

で与えられる。 Q_m は式(4.14)で与えられる運動量平均損失率の断面積である。 $m_e \ll m_i$ だから $Q_E \ll Q_m$ でエネルギーの変化率は小さい。

エネルギー変化に相当する衝突周波数は

$$\nu_E^{e-i} = 2 \frac{m_e}{m_i} \nu_s^{e-i} \quad (4.28)$$

と定義することができ、衝突時間は

$$\tau_E^{e-i} \equiv 1/\nu_E^{e-i}, \quad \tau_s^{e-i} \equiv 1/\nu_s^{e-i} \quad (4.29)$$

$$\tau_E^{e-i} = \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_e} \tau_s^{e-i} \quad (4.30)$$

のように表すことができる。電子がイオンと衝突した時の電子の運動量変化の時間より電子とイオンがエネルギーをやり取りする時間の方がはるかに長い。 τ_s^{e-i} は電子の進行方向

の運動量変化の時間であるが、進行方向に垂直の運動量変化の時間 τ_m^{e-i} も考えられるが、両者は

$$\tau_m^{e-i} \simeq \tau_s^{e-i} \quad (4.31)$$

と全く同程度である。

6) 熱化プラズマ

局所熱平衡にあるプラズマを考え、その場所での電子温度を T_e とする。このようなプラズマ中での電子・イオン衝突は、静止しているイオンに電子が熱運動速度 v 、

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}T_e, \quad v = \left(\frac{3T_e}{m_e}\right)^{1/2} \quad (4.32)$$

で衝突し散乱されると考えてよい。標的となる場の粒子はイオンだから式(4.23)で $n = n_i$ 、また、 $qq' = q_e q_i = (-e)Z_i e = -Z_i e^2$ であるから衝突周波数は次の式で与えられる。

$$\nu_s^{e-i} = \frac{n_i}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{m_e^2 \left(\frac{3T_e}{m_e}\right)^{3/2}} = \frac{Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi 3^{3/2} \epsilon_0^2} \cdot \frac{n_i}{\sqrt{m_e T_e^{3/2}}} \quad (4.33)$$

$\ln\Lambda$ は T_e や n_e に対する依存性は弱いので本質的に衝突周波数は

$$\nu \propto \frac{n}{T^{3/2}} \quad (4.34)$$

である。 ν^{e-e} 、 ν^{e-i} 、 ν^{i-i} に対しても温度 T 、密度 n の熱化プラズマの衝突周波数はこのように n に比例し $T^{3/2}$ に逆比例する。

(2) 衝突積分

前節でプラズマのクーロン衝突の特徴を簡単な物理的考察から述べた。プラズマのクーロン衝突過程における粒子の速度分布関数の時間変化を決める方程式はLandauによって最初に与えられた[2]。Landauは中性ガスに対するBoltzmanの2体衝突積分からクーロン衝突積分項を計算した。クーロンは遠達力であるので、一つの粒子は同時に多くの粒

子と相互作用するが、これを独立の2体衝突が連続的に順次起こると仮定し、また、衝突は微小角散乱が支配的であると考へた。Boltzman の衝突積分はインパクト・パラメータ b の積分において積分の下限でも上限でも対数的に発散する。これは相互作用の力、クーロン力が遠達力だからである。この困難をなくすため、積分の下限は、微小角散乱が支配的であるとしているので式 (4.21) の b_0 とし、また、クーロン力は遠達力であるが、デバイ遮蔽のためデバイ長以上の距離では2体衝突は起こらないとし、積分の上限をデバイ長とした。このように考へ、Landau は a 種粒子に対して、b 種粒子との衝突積分を次のように得た [2]。

$$\left(\frac{\delta f_a}{\delta t}\right)_c = \sum_b C_{ab}[f_a, f_b] \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \sum_b C_{ab}[f_a, f_b] &= \frac{1}{2} \sum_b \Gamma_a m_a Z_b^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \int d^3 v' \frac{u^2 \vec{I} - \vec{u}\vec{u}}{u^3} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} \right) f_a(\vec{v}) f_b(\vec{v}') \end{aligned} \quad (4.36)$$

また、 f_a, f_b は a 種及び b 種粒子の速度分布関数である。 Γ_a は次のように定義される。

$$\Gamma_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{Z_a^2 e^4}{m_a^2} \ln \Lambda \quad (4.37)$$

クーロン対数 $\ln \Lambda$ の Λ は式 (4.20) で与えられる。式 (4.36) で、 b に関する和は衝突する相手の粒子種全てを含む。また、同種粒子間の衝突も含まれている ($b = a$)。式 (4.35)、(4.36)、(4.37) は MKS 単位で記述されている。(Γ_a は $[m^6/s^4]$ の次元を持つ。) §3 の第 (1) 節で考へた Boltzman の式の右辺で粒子の生成・消滅を考へないとすると、 $\delta f/\delta t$ には式 (4.35) の $(\delta f/\delta t)_c$ を用いてよい。

Landau の式 (4.36) は Fokker-Planck 型の式に書き改めることができる。しかし、Fokker-Planck 方程式はもっと一般的なものである。プラズマ中の粒子は2体衝突だけでなく、プラズマの集団運動や電磁場の揺動(波動)の影響により絶えず微小角散乱を受け、Brown 運動のようなランダムな運動をしていると考へられる。速度空間での拡散が Markov 過程 [3] であると仮定すると Fokker-Planck 方程式が導かれる [4,5]。この Fokker-Planck 方程式は、個々の粒子が散乱体になるだけでなく、波動も散乱体として取り入れ

ることができる。一様プラズマで外部磁場がないとすると、Fokker-Planck 方程式は、a 種粒子の分布関数の時間変化に対して次のように書ける。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\vec{A}_a f_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{D}_a f_a) \right] \quad (4.38)$$

ここで、 \vec{A}_a は動摩擦ベクトル（加速度）、 \vec{D}_a は拡散テンソルである。

Rosenbluth 等は、2 体クーロン衝突のみを考慮して、 \vec{A}_a と \vec{D}_a を計算した [6]。これらは、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \sum_b \vec{A}_{ab} \\ \vec{A}_{ab} &= -\Gamma_a Z_b^2 \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right) \int d^3 v' f_b(\vec{v}') \frac{\vec{u}}{u^3} \\ &= \Gamma_a Z_b^2 \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right) \frac{\partial h_b}{\partial \vec{b}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_a &= \sum_b \vec{D}_{ab} \\ \vec{D}_{ab} &= \Gamma_a Z_b^2 \int d^3 v' f_b(\vec{v}') \frac{u^2 \vec{I} - \vec{u}\vec{u}}{u^3} \\ &= \Gamma_a Z_b^2 \frac{\partial^2 g_b}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

ここで、 g_b, h_b は

$$\left. \begin{aligned} g_b(\vec{v}) &= \int d^3 v' f_b(\vec{v}') |\vec{v} - \vec{v}'| \\ h_b(\vec{v}) &= \int d^3 v' \frac{f_b(\vec{v}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

で与えられる。 g_b と h_b との間には

$$\left. \begin{aligned} \nabla_v^2 g_b &= 2h_b \\ \nabla_v^2 h_b &= -4\pi f_b \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

の関係がある。 ∇_v は速度空間でのラプラシアンである。 g_b, h_b は Rosenbluth ポテンシャルと呼ばれる。以上より、次の衝突積分が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} &= \sum_b C_{ab}[f_a, f_b] \\ C_{ab}[f_a, f_b] &= -\Gamma_a Z_b^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(\frac{m_a}{m_b} \frac{\partial h_b}{\partial \vec{v}} f_a - \frac{\partial^2 g_b}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

この式は、Landau の式 (4.36) と同等である。

Fokker-Planck 方程式には波動や揺動による粒子散乱の効果も原理的には含める事ができる。運動している電子を遮蔽している雲は球形ではなく歪んでいる。また、高速で走る電子はチェレンコフ放射する。このような効果を含んだ衝突積分を Balescu-Lenard の式という [7,8]。この式では、Landau の式の中の

$$\ln \Lambda (u^2 \vec{I} - \vec{u}\vec{u}) / u^3 \quad (4.44)$$

の項を

$$\frac{1}{\pi} \int d^3 k \frac{\vec{k}\vec{k} \delta(\vec{k} \cdot \vec{v} - \vec{k} \cdot \vec{v}')}{k^4 |\epsilon(\vec{k} \cdot \vec{v}, \vec{k})|^2} \quad (4.45)$$

で置き換えた形になっている。ここで、 \vec{k} は波数ベクトルで、 $\epsilon(\omega, \vec{k})$ は §3 で計算した電子プラズマの誘電率で $\epsilon(\omega, \vec{k}) = 0$ が分散式を表す。 $k \rightarrow 0$ に対して $\epsilon \sim k^{-2}$ であるので、 $k \rightarrow 0$ でも式 (4.45) は発散しない。速さが平均熱速度より充分遅い粒子に対しては $\epsilon(0, \vec{k}) = 1 + 1/(k\lambda_D)^2$ で、この時、式 (4.45) は式 (4.44) となり、クーロン対数の中にデバイ遮蔽長が人工的でなく自然と入り、Balescu-Lenard の式は Landau の式に帰着する。

Landau の式 (4.36)、あるいは Fokker-Planck 型衝突積分の式 (4.43) は次の重要な性質を備えている。すなわち、(i) 分布関数は必ず正である ($f_a(\vec{v}) > 0$)、衝突において、(ii) 粒子数の保存、(iii) モーメントの保存、(iv) エネルギーの保存が保証されている。また衝突過程においては、(v) エントロピー生成 (H 定理)、(vi) 時間依存性の無い分布は Maxwell 分布のみである事が証明できる [9]。

Landau の式には外部磁場 \vec{B} が含まれていない。衝突はデバイ長 λ_D より小さいスケールでの出来事であるので、 $\lambda_D \ll \rho_e$ なら (あるいは $\lambda_D \lesssim \rho_e$) であっても、Landau の式は $\vec{B} \neq 0$ でもそのまま使える。 $\lambda_D \gg \rho_e$ の時はクーロン積分の上限を λ_D のかわりに ρ_e で置き換えると良い。しかし、 $\ln \Lambda$ は対数依存でその影響は小さい。衝突積分に \vec{B} が影響するのは極端に磁場が大きい時だけで、普通 $\vec{B} \neq 0$ でも Landau の式はそのまま使える。

(3) 熱化粒子の衝突緩和

a 種粒子は温度 T_a (熱速度 $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$) で平均速度 \vec{V}_a の周りにマックスウェル分布になっているとし、b 種粒子は温度 T_b (熱速度 $v_{Tb} = \sqrt{2T_b/m_b}$) で平均速度 \vec{V}_b の周りにマックスウェル分布をしているとする。

$$\left. \begin{aligned} f_a(\vec{v}) &= \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_{Ta}^3} \exp[-(\vec{v} - \vec{V}_a)/v_{Ta}] \\ f_b(\vec{v}) &= \frac{n_b}{\pi^{3/2} v_{Tb}^3} \exp[-(\vec{v} - \vec{V}_b)/v_{Tb}] \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

a 種粒子と b 種粒子は衝突により緩和され一つの熱平衡状態に近づいていく。

a 種と b 種粒子間のモーメントム伝達率は

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ab} &= \int d^3v m_a \vec{v} C_{ab} \\ &= \int d^3v m_a \vec{A}_{ab} f_a(\vec{v}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

で定義される。式 (4.39) を用いると \vec{F}_{ab} は

$$\vec{F}_{ab} = -Z_b^2 \Gamma_a m_a \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right) \int d^3v h_b(\vec{v}) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} \quad (4.48)$$

で与えられる。 h_b は式 (4.41) で計算できる。 f_a と f_b は式 (4.46) で与えられているので \vec{F}_{ab} を計算できる。 $\delta \equiv |\vec{V}_a - \vec{V}_b|/v_{Ta}$, $\delta \ll 1$ と仮定して式 (4.48) を展開し一次まで計算すると

$$\vec{F}_{ab} = m_a n_a (\vec{V}_a - \vec{V}_b) / \tau_{ab} \quad (4.49)$$

が得られる。 τ_{ab} は a 種と b 種とのモーメントム伝達時間で

$$\tau_{ab}^{-1} \equiv \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{n_b Z_b^2 \Gamma_a (1 + m_a/m_b)}{(v_{Ta}^2 + v_{Tb}^2)^{3/2}} \quad (4.50)$$

と定義される。式 (4.37) の Γ_a の定義及び $m_a n_a / \tau_{ab} = m_b n_b / \tau_{ba}$ の関係より明らかに

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba} \quad (4.51)$$

が成立する。これは衝突におけるモーメントムの保存を表している。すなわち、a 種粒子が失ったモーメントムは b 種粒子が得る。式 (4.49) は a 種、b 種粒子ともマックスウェ

ル分布をしたまま緩和すると仮定して導いた。しかし、衝突は粒子の速さに強く依存し、遅い粒子は早く緩和し、速い粒子は緩和に時間がかかるため、緩和過程の間に分布はマックスウェル分布からずれる。従って、式(4.49)はあくまで近似的なものにすぎない。

エネルギー伝達率は

$$\sum_b Q_{ab} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v \frac{1}{2} m_a (\vec{v} - \vec{V}_a)^2 f_a \quad (4.52)$$

で与えられる。 $\partial f_a / \partial t$ は式(4.38)の Fokker-Planck 方程式から決められる。式(4.39)の \bar{A}_{ab} 、式(4.40)の \bar{D}_{ab} を代入し、式(4.41)を用いると Q_{ab} が計算できる。 f_a 、 f_b が $\vec{V}_a = \vec{V}_b = 0$ のマックスウェル分布であるとする

$$Q_{ab} = \frac{3n_a m_a (T_b - T_a)}{\tau_{ab} (m_a + m_b)} \quad (4.53)$$

が得られる。明らかに

$$Q_{ab} = -Q_{ba} \quad (4.54)$$

が成立する。これは、衝突におけるエネルギー保存則で、a 種粒子が(単位時間に)失ったエネルギーは b 種粒子が得たものに等しいことを意味している。

電子と一種類だけのイオンから成るプラズマを考える。今、同一種の粒子(例えば電子)がまだ充分緩和していないとする。そのときは、式(4.49)、(4.50)において、ラベル a、b を a 群の電子(あるいはイオン)と b 群の電子(あるいはイオン)と考える。そうすると電子-電子のモーメントム緩和時間 τ_e 、イオン-イオンのモーメントム緩和時間 τ_i は式(4.50)から計算できる。また、電子-イオン及びイオン-電子間のモーメントム緩和時間も計算できる。これらは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_e &\equiv \tau^{e-e} = Z_i \tau_{e-i} \\ &= \frac{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{n_e e^4 \ln \Lambda} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\tau_i \equiv \tau^{i-i} = \frac{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{Z_i^2 e^4 n_i \ln \Lambda} \quad (4.56)$$

$$\tau_{ie} = \frac{\sqrt{2}\pi\epsilon_0^2 m_e^{-1/2} m_i T_e^{3/2}}{Z_i^2 n_e e^4 \ln \Lambda} \quad (4.57)$$

以上より、熱化プラズマ中の粒子の衝突時間（モーメント緩和時間）には次の比例関係があることがわかる。

$$\tau_e : \tau_i : \tau_{ie} \simeq 1 : \frac{1}{Z_i^3} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} : \frac{1}{Z_i^2} \frac{m_i}{m_e} \quad (4.58)$$

もし $Z_i = 1, T_e = T_i$ なら

$$\tau_e : \tau_i : \tau_{ie} = 1 : \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} : \frac{m_i}{m_e} \quad (4.59)$$

である。すなわちイオン-イオン、イオン-電子の衝突時間は、電子の衝突時間に比べて質量比の平方根及び質量比だけ長い。式 (4.53) から明かなようにエネルギー緩和時間も同様である。つまり、先ず電子が緩和してマックスウェル分布になり、次にイオンが緩和し、最後に電子、イオン全て含めて緩和して全体としてマックスウェル分布になる。

プラズマ主半径 $R_0 \simeq 1\text{m}$, プラズマ小半径 $a_p \simeq 0.2\text{m}$ のトーラスを考える。作動ガスは水素プラズマ ($Z_i = 1, A_i = 1$) とする。電子衝突時間は

$$\tau_e \sim \tau_{ei} = 1.6 \times 10^{-10} \frac{1}{Z_i} T_e^{3/2} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{-1} \quad [\text{s}]$$

で与えられる。ただし、 n_e は m^3 の単位で T_e は eV 単位である。例として電子温度、イオン温度が $T_e = T_i = 500\text{eV}$ で電子密度・イオン密度が $n_e = n_i = 3 \times 10^{19} [\text{m}^{-3}]$ のプラズマを考える。この時

$$\tau_e = 5.96 \times 10^{-6} \sim 6\mu\text{s}$$

$$\tau_i \sim \sqrt{m_i/m_e} \tau_e = 2.6 \times 10^{-4} = 0.26\text{ms}$$

$$\tau_{i-e} \sim (m_i/m_e) \tau_e = 1.0 \times 10^{-2} = 10\text{ms}$$

電子の熱速度は、 $v_{Te} \simeq 6 \times 10^5 \sqrt{T_e} = 1.34 \times 10^7 \text{m/s}$ でトーラスを1周する時間は $2\pi R/v_{Te} \sim 0.5\mu\text{s}$ 程度である。イオンの方は $v_{Ti} \simeq 1.38 \times 10^4 \sqrt{T_i} = 3.0 \times 10^5 \text{m/s}$ であり、 $2\pi R/v_{Ti} \sim 20\mu\text{s}$ 程度である。電子やイオンがトーラス1周する時間と比べると衝突時間はずい分と長い。エネルギー閉じ込め時間を $\tau_E = 1 \sim 5\text{ms}$ 程度とすると、 $\tau_E < \tau_{i-e}$ であるので $T_e \neq T_i$ 、すなわち、電子とイオンとは充分緩和せずそれぞれの温度は異なるであろう。

(4) テスト粒子の衝突

1) 速度空間での拡散

プラズマの中からテスト粒子を抽出する。テスト粒子は $t=0$ で全て同じ初期速度 \vec{v}_0 を持っているとする。テスト粒子の数は統計がとれる程十分大きく、しかし、テスト粒子間の衝突は無視できる程十分小さいとする。テスト粒子は場の粒子の中を動く間に場の多くの荷電粒子と同時に相互作用を及ぼしあう。密度が希薄であるので3体の衝突は無視できる。相互作用は微小角散乱が主たるもので、同時に起こる多くの微小角散乱は、独立な2体衝突が連続して起こるものと考えてよいだろう。2体相関はデバイ長程度以下でのみ有効である。衝突過程は、速度空間における拡散が多数回の微小角散乱の累積であり、ブラウン運動と類似であるとも考えられる。図4.4のように、 $t=0$ で多数のテスト粒子を $v_x = 0, v_y = 0, v_z = v_0 > 0$ で出発させる。場の粒子と衝突の結果、テスト粒子は z 方向に減衰しながら進み、速度空間で拡散していく。

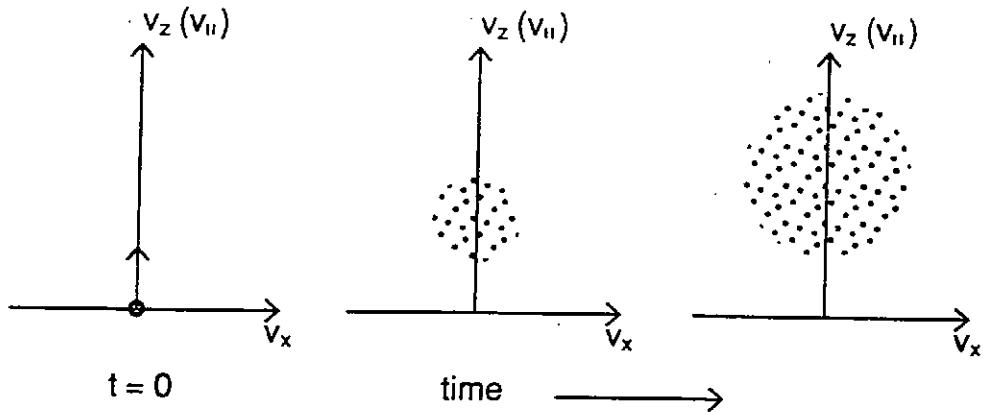


図4.4 テスト粒子の拡散

$\Delta\vec{v}$ をテスト粒子の速度が衝突により変化する量とする。2体衝突が次々に起こり、微小角散乱が積み重ねられていくと考える。 N 回の微小角散乱を受けたとする。ある一つの

テスト粒子の速度変化の x 成分 (y 成分も同じである) は N 回の変化の和

$$\begin{aligned}\Delta v_x &= (\Delta v_x)_1 + (\Delta v_x)_2 + \cdots + (\Delta v_x)_N \\ &= \sum_{j=1}^N (\Delta v_x)_j\end{aligned}\quad (4.60)$$

である。ここで、次々に起こる衝突はランダムと仮定する。 $\overline{\Delta v_x}$ を多くのテスト粒子 (それぞれが N 回衝突する) の平均と定義すると、場の粒子は等方的であるので $\overline{\Delta v_x} = 0$ である。同様に $\overline{\Delta v_y} = 0$ である。しかし、初期に $v_z \neq 0$ であるので $\overline{\Delta v_z} \neq 0$ である。また 2 乗平均は $\overline{(\Delta v_x)^2} \neq 0$ であり、さらに

$$\overline{(\Delta v_x)_1^2} = \overline{(\Delta v_x)_2^2} = \cdots = \overline{(\Delta v_x)_N^2} \neq 0 \quad (4.61)$$

と仮定できる。しかし各々の衝突は独立だから

$$\overline{(\Delta v_x)_j \cdot (\Delta v_x)_k} = 0 \quad (j \neq k) \quad (4.62)$$

が成り立つ。よって

$$\overline{(\Delta v_x)^2} = N \overline{(\Delta v_x)_j^2} \quad (4.63)$$

とおける。分散は $(\overline{(\Delta v_x)^2})^{1/2} \propto N^{1/2}$ のように N の平方根に比例する。このように衝突は速度空間での拡散を引き起こす。

また、 $\overline{\Delta v_x} = 0, \overline{\Delta v_y} = 0$ であるが、初期に $v_z \neq 0$ であるので粒子は z 方向に進み、場の粒子と衝突しながら z 方向の速さを失っていく。従って $\overline{(\Delta v_z)_j} \neq 0 (j = 1, 2, \dots, N)$ であり、 N 回の衝突後、 $\overline{\Delta v_z} = N \overline{(\Delta v_z)_j}$ となる。この過程は場の粒子からまさつ力を受ける事により、テスト粒子が初期の速度方向に減衰 (slowing-down) していく事を表す。衝突 1 回当たりの速度変化を簡単に δv と書くと、速度空間での粒子の分散及び減衰は

$$\left. \begin{aligned} \overline{(\Delta v_x)^2} &\propto N^{1/2} \delta v \\ \overline{\Delta v_z} &\propto N \delta v \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

のように振る舞う。次々に起こる衝突が一定間隔で生ずるとすると、 N は時間 t に比例する ($N \propto t$)。以上の考えで N を単位時間当たりの衝突回数と考えると、テスト粒子

の速度空間における摩擦係数及び拡散係数を定義できる。これらの係数は以下のように Fokker-Planck の式から計算できる。

テスト粒子の速度分布関数を f_t 、密度を n_t とする。テスト粒子は位置空間において一様すると f_t は Fokker-Planck の式 (4.38) に従うであろう。すなわち、

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\vec{A}_t f_t - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{D}_t f_t) \right] \quad (4.65)$$

ここで、ラベル t はテスト粒子に関する量であることを表す。 \vec{A}_t や \vec{D}_t は、式 (4.39)、(4.40) でわかるように、 b 種粒子全てに対する和を含むが、 b に関する和には t は含まれない。従って、式 (4.65) は f_t に関して線形である。 $t=0$ から短時間後でのテスト粒子の平均的な速度を $\vec{u}(t)$ とすると f_t は

$$f_t \simeq n_t \delta(\vec{v} - \vec{u}(t)) \quad (4.66)$$

$$(\vec{u}(0) = \vec{v}_0)$$

のように近似できるであろう。式 (4.66) を式 (4.65) に代入し、 \vec{v} を両辺にかけて積分すると

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{A}_t(\vec{u}) \quad (4.67)$$

が得られる。これはテスト粒子の平均速度を決める式である。ランダムな運動をするテスト粒子の拡散を考慮して

$$f_t(\vec{v}, t) = n_t F_t(\vec{w}, t) \quad (4.68)$$

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}(t)$$

とおく。 $t=0$ から短時間後、 F_t は $\vec{w}=0$ の周りに鋭いピークを持つ分布であろう。従って、 $\vec{A}_t(\vec{v})$ 、 $\vec{D}_t(\vec{v})$ の \vec{v} を \vec{u} でおきかえると Fokker-Planck の式から F_t を計算することができる。 $F_t(\vec{w}, 0) = \delta(\vec{w})$ の初期条件での解は次のように与えられる [3]。

$$F_t(\vec{w}, t) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \vec{w} \cdot M^{-1} \cdot \vec{w} \right]}{(2\pi)^{3/2} [\det M(t)]^{1/2}} \quad (4.69)$$

$$M(t) = \int_0^t d\tau \vec{D}_t(\vec{u}(\tau)) \quad (4.70)$$

M^{-1} はマトリックス M の逆マトリックスである。式 (4.69) はガウス分布である。すなわちテスト粒子は初期速度の方向に減速しながら進み、かつ、ガウス分布に従って拡散していく。式 (4.69) から $\langle (\Delta \vec{v}_\perp)^2 \rangle, \langle (\Delta v_\parallel)^2 \rangle$ が計算できる。速度空間での拡散係数は

$$2D_\perp^t(u) = \frac{d}{dt} \langle (\Delta \vec{v}_\perp)^2 \rangle \quad (4.71)$$

$$D_\parallel^t(u) = \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_\parallel)^2 \rangle \quad (4.72)$$

で定義される。ここで、 \perp は初期速度に垂直な方向、 \parallel は平行方向を示す。 $\langle \Delta v_\parallel \rangle$ の時間変化は式 (4.67) から求めることができる。

2) 拡散係数と衝突時間

場の粒子がマックスウェル分布をしている時、すなわち、場の粒子プラズマの温度を T_b 、熱速度 v_{Tb} とすると、場の粒子に対する分布関数 f_b が

$$f_b(\vec{v}) = \frac{n_b}{\pi^{3/2} v_{Tb}^3} \exp(-v^2/v_{Tb}^2), \quad v_{Tb} = \left(\frac{2T_b}{m_b}\right)^{1/2} \quad (4.73)$$

で与えられる場合を考える。このとき、拡散係数は次のように与えられる [9]。

$$D_\perp^t = \frac{\Gamma_t}{v} \sum_b n_b Z_b^2 [\Phi(x) - G(x)] \quad (4.74)$$

$$D_\parallel^t = \frac{2\Gamma_t}{v} \sum_b n_b Z_b^2 G(x) \quad (4.75)$$

で与えられる。ただし、ここで

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv v/v_{Tb} \\ G(x) &\equiv [\Phi(x) - x\Phi'(x)]/2x^2, \quad \Phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \\ \Gamma_t &\equiv \frac{Z_t^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2} \ln\Lambda \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

と定義された。 $\Phi(x)$ は誤差関数である。

運動量緩和時間 τ_m は次のように定義される。

$$2D_\perp^t = v^2/\tau_m \quad (4.77)$$

この式は τ_m の間に微小角散乱を積み重ねた結果、粒子が初期の速度方向に対して 90° 曲げられた事を意味する。つまり τ_m は粒子の軌道がおおよそ 90° 曲げられる時間でこの τ_m (あるいは τ_d とも書く)の事を運動量緩和時間、あるいは衝突偏向時間と言ひ、最も狭義の意味ではこれを普通、衝突時間と言ひ、その逆数 $\nu_m = \tau_m^{-1}$ ($\nu_d = \tau_d^{-1}$)を衝突周波数と言ふ。式(4.74)から τ_m は次のように与えられる。

$$\tau_m = \tau_d = \frac{v^2}{2D_\perp^t} = \frac{v^3}{\Gamma_t \sum_b n_b Z_b^2 [\Phi(x) - G(x)]} \quad (4.78)$$

$$\nu_m = \nu_d = \frac{1}{\tau_m} \quad (4.79)$$

減速時間 (あるいは減衰時間) τ_s は式(4.67)の \bar{A}_t から計算できる。等方なプラズマに対しては $\bar{A}_t(\vec{v}) = -\nu_s(\vec{v})\vec{v}$ と書ける。すなわち式(4.67)はマックスウェル分布(式(4.73))に対して

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\parallel} \rangle = -\nu_s v \quad (4.80)$$

$$\nu_s = \frac{2\Gamma_t}{v} \sum_b \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_t}{m_b}\right) G(x) \quad (4.81)$$

となる。 τ_s は ν_s の逆数として定義されるから減衰時間は次のように与えられる。

$$\tau_s = \frac{v}{2\Gamma_t \sum_b \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_t}{m_b}\right) G(x_b)} \quad (4.82)$$

エネルギー緩和時間 τ_E は

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta E \rangle = -\nu_E \cdot E \quad (4.83)$$

$$\left(E = \frac{1}{2} m_t v^2\right)$$

から定義される。衝突前後のエネルギー変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta E \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} m_t \{ (v + \Delta v_{\parallel})^2 + \Delta v_{\perp}^2 - v^2 \} \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} m_t \{ 2v \Delta v_{\parallel} + (\Delta v_{\parallel})^2 + (\Delta v_{\perp})^2 \} \right\rangle \\ &= -m_t \nu_s v^2 + \frac{1}{2} m_t D_{\parallel}^t + m_t D_{\perp}^t \end{aligned} \quad (4.84)$$

と計算できるから

$$\begin{aligned}\nu_E &= \frac{2\Gamma_t m_t}{v^3} \sum_b \frac{n_b Z_b^2}{m_b} \left[\Phi(x) - \left(1 + \frac{m_b}{m_t}\right) x \Phi'(x) \right] \\ \tau_E &= \nu_E^{-1}\end{aligned}\tag{4.85}$$

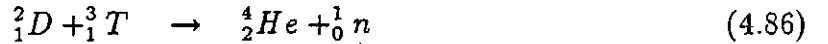
となる。\$D_{\perp}^t = 0, D_{\parallel}^t = 0\$ なら \$\nu_E = 2\nu\$, である。

以上の結果は、テスト粒子の速さは任意で成立する。もし、\$v \gg v_{T_b}\$ (\$x \gg 1\$) の場合、すなわちテスト粒子が高エネルギー粒子であるとき、あるいは \$v \ll v_{T_b}\$ (\$x \ll 1\$) のような遅い粒子の場合はそれぞれの極限で \$\tau_m, \tau_s, \tau_E\$ が求められる。

(5) 高エネルギー粒子の衝突

1) 高エネルギーイオン

中性粒子入射加熱 (NBI 加熱) でプラズマ中に発生する高エネルギーイオンや核反応



で発生する \$\alpha\$ 粒子 (発生時、3.5MeV) は、磁場にとらえられプラズマ中を運動し、プラズマのイオンや電子と衝突しながらエネルギーを失って減速していく。高エネルギーイオンが失ったエネルギーはプラズマの電子とイオンに与えられプラズマは加熱される。NBI 加熱やアルファ粒子加熱、ICRF 少数イオン加熱は、このように高エネルギーイオンを利用したものである。以下、高エネルギーイオンをテスト粒子と考え、その衝突過程を考える。

高エネルギーイオンの減速過程を考える。高エネルギーイオンの質量を \$m_t\$, 速さを \$v\$ とする。プロトンでは \$m_t = m_p, A_H = 1, Z_H = 1\$, 重水素では \$m_t = 2m_p, A_D = 2, Z_D = 1\$, アルファ粒子では \$m_t = 4m_p, A_{\alpha} = 4, Z_{\alpha} = 2\$ である。

減速時間 (減衰時間) \$\tau_s = \nu_s^{-1}\$ は次の式で定義される (式 (4.80))。

$$\frac{d}{dt} m_t v = -m_t \nu_s v,\tag{4.87}$$

これは速さあるいは運動量を失う時間であるが

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_t v^2 = -m_t v^2 \nu_s \quad (4.88)$$

も成立するのでエネルギーを失う時間は $\tau_E = \nu_E^{-1} = 2\nu_s$ である。ただし、 D_{\perp}^t , D_{\parallel}^t は今は考えない。NBI や核反応で発生する高速粒子の速さ v は

$$v_{Ti} \ll v \ll v_{Te} \quad (4.89)$$

を満たす。 $v_{Ti} = (2T_i/m_i)^{1/2}$, $v_{Te} = (2T_e/m_e)^{1/2}$ はイオン、電子の熱速度である。従って、 $x_e = v/v_{Te} \ll 1$, $x_i = v/v_i \gg 1$ である。任意の v に対しては、式 (4.81) より、

$$\begin{aligned} \nu_s &= \frac{2\Gamma_t}{v} \sum_{b=e,i} \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_t}{m_b}\right) G(x_b) \quad (4.90) \\ G(x) &= [\Phi(x) - x\Phi'(x)]/2x^2 \\ \Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

が成立する。添字 t は NBI 加熱で生成される高エネルギーイオンやアルファ粒子に関する量である事を示す。 $x_e \ll 1$ であるので $\Phi(x_e)$ を展開、 $x_i \gg 1$ であるので $\Phi(x_i)$ の漸近形を使うことができる。 $v_{Ti} \ll v \ll v_{Te}$ を満たす高エネルギー・イオンに対して

$$\nu_s \simeq n_e \Gamma_t \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{m_t}{m_e}\right) \frac{1}{v_{Te}^3} + Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{v^3} \right] \quad (4.91)$$

となる。第1項は電子との衝突、第2項はプラズマ・イオンとの衝突によるものである。 $m_t/m_e \gg 1$, $m_t \simeq m_i$ であるので電子との衝突項はイオンとの衝突項より大きく、 ν_s は第1項のみで近似できる。 ν_s の逆数は Spitzer の減速時間と呼ばれ次の式で与えられる。

$$\tau_s \equiv \left(n_e \Gamma_t \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{m_t}{m_e} \frac{1}{v_{Te}^3} \right)^{-1} \quad (4.92)$$

定数を計算すると

$$\tau_s = 6.33 \times 10^{14} \frac{A_t T_e^{3/2}}{Z_t n_e \ln \Lambda} \quad [\text{s}] \quad (4.93)$$

で与えられる。ただし、 T_e は eV 単位 n_e は m^{-3} 単位である。

高速イオンの運動エネルギーを $W \equiv \frac{1}{2}m_t v^2$ とおく。 v_s の定義式 (4.87) を使うと、 W は次のように書けることが簡単に示せる。

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -m_t v^2 \frac{1}{\tau_s} - m_t v^2 \cdot n_e \Gamma_t Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{v^3} \\ &= -\frac{2}{\tau_s} W - \frac{(m_t)^{3/2}}{\sqrt{2}} n_e \Gamma_t Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{W^{1/2}} \\ &= -\frac{2}{\tau_s} W - \frac{m_t^{3/2} v_c^3}{\sqrt{2} \tau_s} \frac{1}{W^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.94)$$

あるいは高速イオンの走る方向 x に沿って

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{\frac{m_t}{2W}} \frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau_s} \sqrt{\frac{m_t}{2}} W^{1/2} - \sqrt{\frac{m_t}{2}} \frac{m_t^{3/2} v_c^3}{\sqrt{2} \tau_s} \frac{1}{W} \quad (4.95)$$

と書ける。この式は粒子が走る方向に沿うエネルギー変化を示す。 dW/dx は次のように書ける。

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{\alpha}{W} - \beta W^{1/2} \quad (4.96)$$

これを Stix の式という。

ただし、

$$\alpha = \frac{m_t^2 v_c^3}{2 \tau_s}, \quad \beta = \frac{1}{\tau_s} \sqrt{2m_t} \quad (4.97)$$

であり、 v_c は次式で定義される。

$$v_c^3 = n_e \Gamma_t Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \tau_s \quad (4.98)$$

Stix の式では α の項はプラズマ・イオンとの衝突、 β の項はプラズマ・電子との衝突を表している。 $\alpha/W = \beta W^{1/2}$ となる $W = W_c m_t v_c^2/2$ は臨界エネルギーといい、 v_c を臨界速度という。 $v \gg v_c$ の時、 $dW/dx \sim -\beta W^{1/2}$ であり高速イオンは電子との衝突で減衰する。 $v \ll v_c$ の時、 $dW/dx \sim -\alpha W$ でプラズマ・イオンとの衝突で減衰する。高エネルギーイオンが軽水素の場合、 $W_c \sim 15T_e$ で、アルファ粒子の場合 $W_c \sim 33T_e$ となる。

高エネルギーイオンがプラズマと衝突し減衰してプラズマ・イオンと同程度のエネルギーになるまでの時間、すなわち熱化時間を考えよう。 W のエネルギーを持って入射したイオンが熱エネルギーまでに減衰する平均的な時間 τ_{th} は

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau_s}W - \frac{2}{\tau_s} \frac{W_c^{3/2}}{W^{1/2}} \quad (4.99)$$

の式を用いると簡単に計算できる。すなわち

$$\tau_{th} \equiv -\int_0^W \frac{dW}{dW/dt} = \frac{\tau_s}{3} \ln\left[1 + \left(\frac{W}{W_c}\right)^{3/2}\right] \quad (4.100)$$

が得られる。もし $W \gg W_c$ であれば $\tau_{th} = \tau_s \ln(W/W_c)/2$ と近似できる。

高エネルギーイオンが減速する過程で、イオン及び電子へどのような割合でエネルギーが分配されるのか考える。エネルギー W の入射高速イオンが熱化されるまでにプラズマ・イオンに与えるエネルギーの比率 G_i は

$$G_i = \frac{1}{W} \int_0^W \frac{(\alpha/W)dW}{\alpha/W + \beta W^{1/2}} = \frac{W_c}{W} \int_0^{W/W_c} \frac{dy}{1+y^{3/2}} \quad (4.101)$$

電子へは

$$G_e = \frac{1}{W} \int_0^W \frac{\beta W^{1/2}}{\alpha/W + \beta W^{1/2}} = \frac{W_c}{W} \int_0^{W/W_c} \frac{y^{3/2} dy}{1+y^{3/2}} \quad (4.102)$$

であり、当然

$$G_i + G_e = 1 \quad (4.103)$$

である。

例として α 粒子の場合を考える。 $W = 3.5\text{MeV} = 3.5 \times 10^6\text{eV}$ であり、 $T_e \sim 10\text{keV}$ なら $W_c = 33T_e = 3.3 \times 10^5\text{eV}$ であるので $W/W_c \sim 10$ 程度となり、エネルギー分配率は

$$G_e \simeq 0.8, \quad G_i \simeq 0.2 \quad (4.104)$$

となり、殆どのアルファ粒子のエネルギーは電子に与えられる。つまり、アルファ粒子加熱は電子加熱である。図 4.5 に高速イオンのエネルギーに対するエネルギー分配率を示す。 τ_{cx} は荷電交換損失時間である。

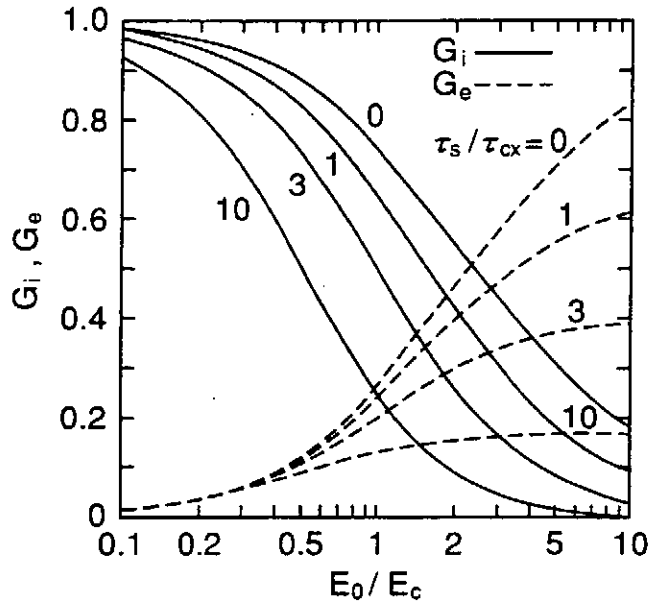


図 4.5 捕捉粒子と非捕捉粒子

実際には $v \simeq v_c$ からイオンによるピッチ角散乱が効き始め、 $v < v_c$ では速度空間で広がりながら減速していく。ピッチ角散乱はエネルギー変化に関係ない。

2) 高エネルギー電子

トーラスプラズマで電子サクロトロン共鳴加熱を行うと、共鳴点で高エネルギーの電子が生成される。生成された高エネルギー電子は磁場に捉えられ、トーラスプラズマ中を運動する間、バックグラウンドのイオンや電子と衝突しエネルギーを失っていく。失われたエネルギーはバックグラウンドのイオンや電子が得て、主プラズマの温度が上昇する。

高エネルギー電子の速さを v とすると v は

$$v_{Ti}, \quad v_{Te} \ll v \quad (4.105)$$

の条件を満たす。式 (4.76) の x は $x_e \gg 1$ 、 $x_i \gg 1$ であるので、式 (4.76) の関数 $G(x)$ 、 $\Phi(x)$ の漸近形を使うと、式 (4.81) の ν_s 、式 (4.74)、(4.75) の D_{\perp}^t 、 D_{\parallel}^t は次のように近似できる。[9]

$$\left. \begin{aligned} \nu_s &= n_e(\Gamma_t/v^2)(2+Z_i) \\ D_{\perp}^t &= n_e(\Gamma_t/v)(1+Z_i) \\ D_{\parallel}^t &= n_e(\Gamma_t/v^3)(v_{Te}^2+Z_iv_{Ti}^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

ここで上付き添字 t はテスト電子を示す。条件、式 (4.105) より $D_{\parallel}^t \ll D_{\perp}^t$ である。衝突偏向周波数 (ピッチ角散乱周波数) は

$$\nu_d = \frac{2D_{\perp}^t}{v^2} = n_e(\Gamma_t/v^3)(1+Z_i) \quad (4.107)$$

となり、減衰周波数 ν_s と同じ大きさである。従って、減衰時間と垂直方向の拡散時間は同程度で、また、バックグラウンドのイオンの寄与もバックグラウンドの電子の寄与も同程度である。これは、衝突は2粒子間の相対速度で決まるが、今の場合、条件式 (4.105) より、相対速度は、高エネルギー電子の速さ v で決まるからである。前節の高エネルギーイオンの場合は、高エネルギーイオンの速さ v が臨界速度 v_c (式 (4.98)) より大きい時は、相対速度は電子で決まり、 $v \gg v_c$ なら高エネルギーイオンの衝突過程は電子による減衰が主要過程であったのと対照的に、高エネルギー電子の衝突過程では、バックグラウンドイオンとバックグラウンド電子の寄与は同程度で、かつ速度空間における高エネルギー電子の減衰も垂直方向拡散も同じ大きさである。ただし、バックグラウンドのイオンが高エネルギー電子との衝突により得るエネルギーは、バックグラウンドの電子が得るエネルギーより m_e/m_i 倍小さい。

(6) 逃走電子

一様なプラズマに一様な電場 \vec{E} が加えられているとする。電子は電場により加速されるが、同時に他の電子やイオンと衝突してエネルギーを失う。衝突周波数は粒子の速さ v の3乗に比例して小さくなるので、エネルギーの高い高速電子は電場で加速されるとさら

に衝突頻度が小さくなる。従って、電場で常に加速を受けていると衝突頻度はますます減少し、ついには自由加速を受けるようになる電子が存在し得るだろう。このような電子の事を逃走電子 (runaway electron) という。

プラズマ中から電子を取り出しテスト粒子として考える。テスト粒子の速度を \vec{u} とすると (テスト粒子の平均速度と考えてよい)、 \vec{u} は電場 \vec{E} により加速され、式 (4.67) に従って衝突により減速する。式 (4.67) の $\vec{A}_i(\vec{u})$ は等方なプラズマでは $\vec{A}_i(\vec{u}) = -\nu_s \vec{u}$ で表すことができ、マックスウェル分布のプラズマでは ν_s は式 (4.81) で与えられる。 \vec{u} に対して

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \nu_s(\vec{u}) \vec{u} \quad (4.108)$$

が成立する。この式に \vec{u} をかけて

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_e u^2 \right) = -e \vec{E} \cdot \vec{u} - \nu_E \left(\frac{1}{2} m_e u^2 \right) \quad (4.109)$$

を得る。 $\nu_E = 2\nu_s$ である。テスト電子の速度空間の拡散を考えないとすると、 τ_E^{-1} は式 (4.84) で定義されたエネルギー緩和時間である。速さが電子全体の熱速度 $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ よりずっと大きな電子のみ考える ($u \gg v_{Te}$)。この時 ν_s は式 (4.106) で与えられるので式 (4.109) の ν_E は

$$\nu_E = \frac{2n_e \Gamma_e}{v^3} (2 + Z_i) \quad (4.110)$$

で与えられる。式 (4.109) の第1項と第2項の大きさを比較しよう。このため次の電場を定義しておく。

$$E_D = \frac{m_e v_{Te}}{e \tau_c} \quad (4.111)$$

$$\tau_c^{-1} = \frac{n_e \Gamma_e}{v_{Te}^3} \quad (4.112)$$

E_D は Dreicer 場と呼ばれる。式 (4.109) の第1項の大きさが第2項よりずっと大きくなる条件は

$$u \gg v_R \quad (4.113)$$

で与えられる。 v_R は次の式で定義される。

$$v_R = \sqrt{2 + Z_i v_{Te}} \left(\frac{E}{E_D} \right)^{-1/2} \quad (4.114)$$

式(4.113)の条件を満たす電子はどんどん加速されていくであろう。このような電子を逃走電子 (runaway electron) という。式(4.114)から明らかなように E/E_D が充分小さいと v_R は大きくなり、逃走する電子の割合は非常に少なくなる。 E/E_D がある程度以上になると v_R は減少し式(4.113)の条件を満たす電子の数が増加し、逃走電子の割合は増加するであろう。

トカマクはプラズマ中に電流を流し、ポロイダル磁場を生成することにより平衡をつくる。トカマクでは、最も簡単には誘導電場 E をトーラス方向に発生させ、これによりプラズマ電流を流す。式(4.111)で与えられる Dreicer 場 E_D は衝突周波数に比例する。もし、トカマクのプラズマ密度が低く E_D が小さいと E/E_D がある程度以上の値になり多くの電子が逃走電子になる。放電立ち上げ時、あるいは密度の低い周辺部でトカマクは逃走電子を発生させる事がある。逃走電子はトーラス方向に加速されているうちに磁気面を横切りプラズマ外に出て、最後は壁やリミターに当たり X 線を放射する。

(7) 実効衝突周波数

プラズマのクーロン衝突過程では微小角散乱の積み重ねが支配的で、ある粒子の衝突周波数は衝突する相手の粒子の密度 n に比例し、衝突する相手との相対的速さ v の 3 乗に逆比例する。 $(\nu \propto n/v^3)$ 。最も狭義の意味の衝突時間は、ある粒子の進行方向が初期のものから、微小角散乱の積み重ねの結果、 90° 曲げられるまでの衝突偏向時間で定義し、衝突周波数はその衝突時間の逆数である。初期に粒子が持っていたモーメントを初期の進行方向に失う減速時間も衝突時間と考えてよい。衝突偏向時間も減速時間も同じ大きさで、衝突周波数は n に比例し v^3 に逆比例する。これらの衝突周波数はプラズマが高温になればなる程小さくなっていくので高温プラズマでは衝突過程は重要でないように思われる。しかし、これらの衝突周波数は一般的な定義であって、考える物理過程によって

は、衝突周波数がどのような役割を果たすかで、衝突周波数を実効的に定義する必要がある。これを実効衝突周波数という。

衝突偏向時間 (deflection time) を τ_d とする。考えている粒子の速度が微小角散乱の積み重ねの結果 Δv だけ変わったとする。 $\Delta v \ll v_T$ (v_T は熱速度) とする。速度変化が Δv になるまでの時間を τ_{eff} とすると、 τ_{eff} は

$$\tau_{\text{eff}} \simeq \tau_d \left(\frac{\Delta v}{v_T} \right)^2 \quad (4.115)$$

程度になるであろう。 τ_{eff} のことを実効衝突時間といい、

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \quad (4.116)$$

を実効衝突周波数という。例として図 4.6 のような静電ポテンシャル Φ に捕捉されたイオンに対する衝突の効果を考えよう。簡単のため 1 次元的に考える。イオンの運動中、

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + e\Phi \quad (4.117)$$

は保存される。 $e > 0$ はイオンの電荷とし $\Phi > 0$ としておく。 v_0 は $\Phi = 0$ の点におけるイオンの速さである。

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{m}{2} v_0^2 - e\Phi \right)} \quad (4.118)$$

となるから、 v_c を

$$v_c = \sqrt{\frac{2e\Phi}{m}} \quad (4.119)$$

と定義すると $|v_0| > |v_c|$ のイオンはポテンシャルに捕捉されない非捕捉粒子になり、 $|v_0| < v_c$ の粒子はポテンシャルに捕捉される。静電ポテンシャル $\Phi(x)$ は粒子の運動に影響を受けないとし、また粒子衝突を考えないと、イオン粒子は捕捉粒子と非捕捉粒子の 2 つに完全に分離される。しかし、実際はどんなに小さくても衝突過程は存在する。 $|v_0| \simeq v_c$ の粒子は捕捉及び非捕捉の境界 (セパトリックスという) 近くにいるので、極くわずかなピッチ角散乱を受けるだけで $|v_0| > v_c$ から $|v_0| < v_c$ になったり、また、その逆が起こり、捕捉粒子と非捕捉粒子は入れ替わる。このような入れ替わりがある物理過程において

決定的になることがある。今の例では、捕捉粒子と非捕捉粒子が充分入れ替わるには、衝突による速度変化 Δv が v_c 程度であればよい。従って、このような場合の実効衝突周波数は

$$\nu_{\text{eff}} \simeq \nu_d \left(\frac{v_T}{v_c} \right)^2 = \nu_d \frac{T_i}{e\Phi} \quad (4.120)$$

となる。

$$\varepsilon = \frac{e\Phi}{T_i} \ll 1 \quad (4.121)$$

とすると

$$\nu_{\text{eff}} \simeq \frac{\nu_d}{\varepsilon} \quad (4.122)$$

で実効衝突周波数は通常の定義の衝突周波数よりずっと大きくなる。

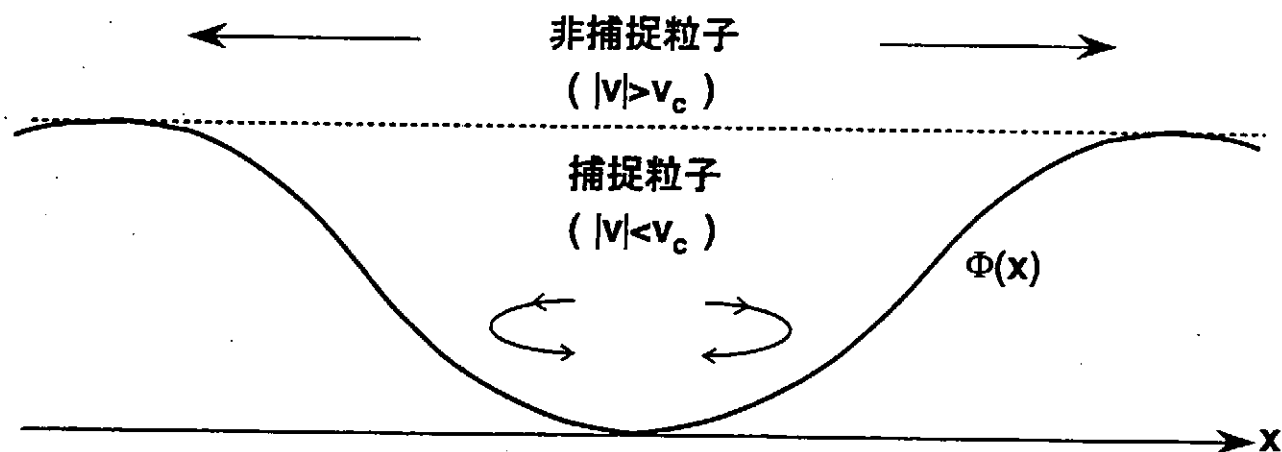


図 4.6 静電ポテンシャルに捕捉される粒子

もう一つの例としてトカマクのバナナ粒子を考えよう。§2 で述べたようにトカマク磁場はトロイダル磁場 \vec{B}_t とポロイダル磁場 \vec{B}_p とから成るが $|\vec{B}_p| \ll |\vec{B}_t|$ がトカマクの特徴である。従って、磁場強度の大きさは $B \sim B_t$ であり、もし、プラズマのベータが低く、トロイダル磁場はトロイダルコイル電流で作られるもので近似できるとすると、

$$B \simeq B_t = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + r \cos \theta} \quad (4.123)$$

で表される。ただし、§2 の図 2.5 の座標系を使った。アスペクト比 $A = R_0/r$ の逆数を ε_t とし、大アスペクト比のトカマクを考える。すなわち

$$\varepsilon_t = \frac{r}{R_0} \ll 1 \quad (4.124)$$

このようなとき、磁場強度 B は

$$B \simeq B_0(1 - \varepsilon_t \cos \theta) \quad (4.125)$$

で近似できる。 B は磁場 \vec{B} に沿って変化し、 $\theta = 0$ で $B = B_{\min} = B_0(1 - \varepsilon_t)$ 、 $\theta = \pi$ で $B = B_{\max} = B_0(1 + \varepsilon_t)$ となり、ミラー場を形成する。ミラー比は

$$\frac{B_{\max}}{B_{\min}} = \frac{1 + \varepsilon_t}{1 - \varepsilon_t} \simeq 1 + 2\varepsilon_t \quad (4.126)$$

であるので、§2 の議論より $(v_{\parallel}/v)^2 < 2\varepsilon_t$ の粒子はミラー捕捉される。これを後述するよ
うにバナナ粒子という。 $(v_{\parallel}/v)^2 > 2\varepsilon_t$ の粒子は非捕捉粒子である。捕捉粒子と非捕捉粒子
が入れ替わるためには、ピッチ角散乱で速度が $(\Delta v/v_T)^2 \simeq \varepsilon_t$ 程度変化すればよい。従っ
て、この時の実効衝突周波数は

$$\nu_{\text{eff}} \simeq \frac{\nu_d}{\varepsilon_t} \quad (4.127)$$

となる。この実効衝突周波数は後述するバナナ拡散において重要な役割を果たす。

参考文献

- [1] ランダウ・リフシッツ、「力学」東京図書、1967年(広重徹・水戸巖共訳)
- [2] L.Landau, *Physik.Z.Sowjetunion* 10 (1936) 154.
- [3] S.Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 97 (1943) 255 and *Rev. Mod. Phys.* 15 (1943) 1.
- [4] D.C.Montgomery and D.A.Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1964.

- [5] K.Nishikawa, *Lecture Note on Coulomb Collisions*, Research Report of Institute of Plasma Physics, Nagoya University, IPPJ-151, February 1973.
- [6] M.N.Rosenbluth, W.M.MacDonald, D.L.Judd, *Phys. Rev.* 107 (1957) 1.
- [7] R.Balescu, *Phys. Fluids* 3 (1960) 52.
- [8] A.Lenard, *Ann.Phys. NY* 3 (1960) 390.
- [9] F.L.Hinton, "*Collisional Transport in Plasma*", *Handbook of Plasma Physics* (ed. M.N.Rosenbluth and R.Z.Sagdeev), Vol.1, North-Holland Publishing Company, 1983.

§5 流体近似と電磁流体力学

プラズマ中で起こる物理現象は多種多様であり、時として、流体的な性質も呈する。本節では流体として振る舞うプラズマに対する流体近似の方程式を導き、さらに簡単化した1流体方程式つまり電磁流体方程式を導き、その成立条件や、基本的性質を述べる。

(1) 流体近似

1) 流体方程式系

プラズマの物理現象を記述する最も基本的な方程式は、§3で述べたようにボルツマンの式とマックスウェル方程式系である。すなわち、

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \frac{\delta f_a}{\delta t} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (5.5)$$

f_a は a 種粒子 ($a = e$: 電子、 $a = i$: 主プラズマイオン、 $a = I$: 不純物イオン、...) に対する分布関数で \vec{v}, \vec{r}, t の関数である。式 (5.4) と (5.5) におけるプラズマの電流密度 \vec{J} と電荷密度 ρ_e は

$$\vec{J} \equiv \sum_a e_a \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f_a d^3v \quad (5.6)$$

$$\rho_e = \sum_a e_a \int_{-\infty}^{\infty} f_a d^3v \quad (5.7)$$

で定義される。 \vec{J} と ρ_e が与えられるとマックスウェルの式 (5.2) ~ (5.5) から \vec{E} と \vec{B} が決まり、 \vec{E} と \vec{B} が決まるとボルツマンの式 (5.1) から f_a が求められる。式 (5.1) の右辺の $\delta f_a / \delta t$

に衝突や粒子の発生源・消滅項が含まれている場合には、これらを分布関数 f_a の関数として与えねばならない。そうすると、式 (5.1) ~ (5.5) は閉じた方程式系を形成する。しかしこれを解く事は非常に難しく、特殊な場合にしか答は得られていない。ここでは分布関数 f_a の速度モーメントに対する方程式をボルツマンの式から導く。

今、 $\delta f_a / \delta t$ は、粒子の発生や消滅はないとし、粒子間衝突のみ考える。

$$\frac{\delta f_a}{\delta t} = \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_c = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b) \quad (5.8)$$

C_{ab} は a 種粒子と b 種粒子とのクーロン 2 体衝突を表す衝突積分で、その表式は §4 で示した。ここに \sum の b は a 自身も含む。

C_{ab} は次のような粒子数、運動量、及びエネルギーの保存則を満たす。

$$\int C_{ab} d^3v = 0 \quad (5.9)$$

$$\int m_a \vec{v} C_{ab} d^3v + \int m_b \vec{v} C_{ba} d^3v = 0 \quad (5.10)$$

$$\int \frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} d^3v + \int \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} d^3v = 0 \quad (5.11)$$

これらの保存則は同種粒子間 ($b = a$) の衝突に対しても成立する。次に流体力学的変数 $n_a(\vec{r}, t)$, $\vec{v}_a(\vec{r}, t)$, $T_a(\vec{r}, t)$ を定義する

$$n_a(\vec{r}, t) = \int f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (5.12)$$

$$\vec{v}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \vec{v} f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \equiv \langle \vec{v} \rangle_a \quad (5.13)$$

$$T_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \frac{m_a}{3} (\vec{v} - \vec{v}_a)^2 f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (5.14)$$

$$\equiv \langle \frac{m_a}{3} (\vec{v} - \vec{v}_a)^2 \rangle$$

n_a は点 \vec{r} , 時刻 t における a 種粒子の密度、 \vec{v}_a は a 種粒子の平均速度 (流体としての流れ)、 T_a は a 種粒子の温度である。

$$\vec{v}' \equiv \vec{v} - \vec{v}_a, \quad \langle \vec{v}' \rangle = 0 \quad (5.15)$$

とおくと、 \vec{v}' は平均からずれた粒子のランダムな速度を示し

$$\frac{3}{2}T_a = \frac{m}{2} \langle (v')^2 \rangle. \quad (5.16)$$

で、熱運動エネルギーは $3T_a/2$ になっている。但し、式 (5.14) は熱平衡状態でのみ定義できる真の意味での温度ではなく、あくまで定義であり、一般に熱平衡状態になっていないプラズマでは式 (5.14) の定義を温度と呼ぶ。

ボルツマンの式 (5.1) の 0 次、1 次、2 次のモーメントを取る。すなわち、式 (5.1) の両辺に $1, m\vec{v}, mv^2/2$ を掛けて速度空間で積分すると、式 (5.9)、(5.10)、(5.11) を考慮して n_a, \vec{v}_a, T_a に対する流体の式が得られる。

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \vec{v}_a = 0 \quad (5.17)$$

$$m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\nabla \cdot \vec{P}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (5.18)$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{d_a T_a}{dt} + \vec{P}_a : \nabla \vec{v}_a = -\nabla \cdot \vec{q}_a + Q_a \quad (5.19)$$

ここで微分 d_a/dt は

$$\frac{d_a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla \quad (5.20)$$

で定義され、流れに沿う時間微分で対流微分と呼ばれる事がある。また式 (5.18) と (5.19) の中の $\vec{P}_a, \vec{q}_a, \vec{R}_a, Q_a$ はそれぞれ

$$\vec{P}_a \equiv n_a m_a \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle = p_a \vec{I} + \vec{\pi}_a \quad (5.21)$$

$$\vec{q}_a \equiv n_a m_a \langle \frac{1}{2} (v')^2 \vec{v}' \rangle \quad (5.22)$$

$$\vec{R}_a \equiv \sum_b \int_{-\infty}^{\infty} m_a \vec{v}' C_{ab} d^3 v = \sum_{b \neq a} \int_{-\infty}^{\infty} m_a \vec{v}' C_{ab} d^3 v \quad (5.23)$$

$$Q_a \equiv \sum_b \frac{m_a}{2} \langle (v')^2 \rangle C_{ab} d^3 v = \sum_{b \neq a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 C_{ab} d^3 v - \vec{R}_a \cdot \vec{v}_a \quad (5.24)$$

で定義される量である。 \vec{P}_a は圧力テンソルと呼ばれ

$$p_a = n_a m_a \langle (v')^2 \rangle / 3 = n_a T_a \quad (5.25)$$

は（スカラー）圧力である。もし速度分布（ \vec{v} に対するもの）が等方的であると

$$\begin{aligned} \langle v_x'^2 \rangle &= \langle v_y'^2 \rangle = \langle v_z'^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \\ \langle v_x' v_y' \rangle &= \langle v_y' v_z' \rangle = \langle v_z' v_x' \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

であるので $\vec{P}_a = p_a \vec{I}$ ($\vec{\pi}_a = 0$) となる。従って $\vec{\pi}$ は分布関数の球対称からのずれを表し、ストレステンソルと呼ばれる。 \vec{q}_a はランダムな速度による熱流束であり、 \vec{R}_a は他の粒子との衝突による摩擦力、すなわち、異種粒子間の衝突による運動量伝達率である。

$$\begin{aligned} \int m_a \vec{v} C_{aa} d^3 v &= 0 \\ \int \frac{1}{2} m_a v^2 C_{aa} d^3 v &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

であるので

$$\sum_a \vec{R}_a = 0 \quad (5.28)$$

を満たす。すなわち、電子と一種のイオンからなる2流体では

$$\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (5.29)$$

である。式(5.24)の Q_a は異種粒子 $b (\neq a)$ との衝突により発生する熱を表している。

上に示した2流体方程式は、ボルツマン方程式から厳密に導かれたものであるが、圧力テンソルの非等方成分 $\vec{\pi}_a$ や熱流束 \vec{q}_a 等が現れるため、未知変数の数が方程式の数より多い。それ故、方程式を解くことができる様にするためには、低次のモーメント（即ち流体力学的変数）により高次のモーメントの消去を行う必要がある。衝突周波数の大きな場合の $\vec{\pi}_a$, \vec{q}_a , \vec{R}_a , Q_a 等の流体力学的変数 n_a , \vec{v}_a , T_a による表式（古典輸送理論）は、ブラジンスキーによって与えられている [1]。

2) 古典的輸送係数

ブラジンスキーは衝突頻度が大きく、かつ $\omega_{ce} \tau_e \gg 1$, $\omega_{ci} \tau_i \gg 1$ の場合の輸送係数に対して以下の表示を得ている [1]。以下必要のない時は添字 a を省略する。

圧力テンソルは

$$P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (5.30)$$

で与えられる。 P はスカラー圧力で $\pi_{\alpha\beta}$ は圧力テンソルである。例えば $\pi_{yx} \sim -\varepsilon\partial v_y/\partial x$ はモーメントの y 成分の x 方向の流れを表す。ここで ε は粘性係数で $\varepsilon \sim mnD$ 程度である。ただし $D \sim \rho_e^2/\tau_e$ は粒子の拡散係数である。この拡散係数は、粒子拡散における電子のステップ巾がラーモア半径 ρ_e 程度、相関時間が衝突時間 τ_e 程度であることを考えると容易に理解できる。

摩擦力は

$$\vec{R} = \vec{R}_u + \vec{R}_T \quad (\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_u &= en_e \vec{\eta} \vec{J}, \quad \eta_{\perp} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} \\ \vec{R}_T &= -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \end{aligned}$$

で与えられる。 η は電気（比）抵抗で一般にはテンソルである。 \vec{R}_T は熱起電力で第2項は金属中の Nernst 効果に相当する [2]。

熱流束は、電子、イオンそれぞれに対して

$$\begin{aligned} \vec{q}_e &= \vec{q}_u + \vec{q}_T \\ \vec{q}_u &= 0.71 n_e T_e \vec{u}_{\parallel} + \frac{3}{2} \frac{n_e T_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \vec{u} \quad (\vec{u} = \vec{v}_e - \vec{v}_i) \\ \vec{q}_T &= -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{n_e T_e}{e B} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \\ \vec{q}_i &= -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{n_i T_i}{e B} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_i \end{aligned} \quad (5.32)$$

と与えられる。 κ_{\parallel} は磁場方向の熱拡散係数で、 $\kappa_{\perp} \sim nD$ は磁場 \vec{B} に垂直な方向の熱拡散係数である。 κ_{\parallel} の大きさは κ_{\perp} よりはるかに大きい。

熱発生は

$$\begin{aligned} Q_e &= \eta J^2 + \frac{1}{en_e} \vec{J} \times \vec{R}_T - \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \\ Q_i &= \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (5.33)$$

で与えられる。 Q_e の右辺第1項はジュール熱で、第3項はイオンとのエネルギー緩和による熱発生（又は損失）で Q_i とつり合っている。

輸送係数は、粒子拡散、熱拡散、電気抵抗、粘性に対してそれぞれ

$$\begin{aligned}
 D &\sim \nu_e \rho_e^2 = \rho_e^2 / \tau_e = \rho_i^2 / \tau_i && \text{粒子拡散係数} \\
 \kappa_{\perp} &\sim nD && \text{熱拡散係数} \\
 \eta &\sim \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} && \text{電気抵抗} \\
 \varepsilon &\sim mnD && \text{粘性係数}
 \end{aligned}$$

の程度である。これらは衝突時間程度の現象を引き起こす。電子の衝突時間は $\tau_e \propto T_e^{3/2} / n_e$ であるので、電気抵抗 η は密度 n_e に依存せず T_e のみで決まることに注意する必要がある。例として、 $B = 3\text{T}$, $T_e \sim T_i \sim 500\text{eV}$, $n \sim 5 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$, $a \sim 0.2\text{m}$ のプラズマを考える。 a はプラズマの半径である。このとき、電子の衝突時間 τ_e 、イオンの衝突時間 τ_i 、イオンのラーモア半径 ρ_i 、粒子の拡散係数はそれぞれ次のような程度の量になる。

$$\begin{aligned}
 \tau_e &= \frac{1}{\nu_e} \sim 5 \times 10^{-6}\text{s} \\
 \tau_i &\sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau_e \sim 2 \times 10^{-4}\text{s} \\
 \rho_i &= 1.02 \times 10^{-4} \sqrt{A_i} \frac{1}{Z_i} \frac{\sqrt{T_i[\text{eV}]}}{B[\text{T}]} \sim 7.6 \times 10^{-4}\text{m} \\
 D &\sim \rho_i^2 / \tau_i \sim 3 \times 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

トカマクやヘリカル系装置のプラズマで観測される粒子拡散係数はこの D の値よりはるかに大きく大雑把に言って観測される量 D_{an} は $D_{an} \gtrsim 10^4\text{cm}^2/\text{s} = 1\text{m}^2/\text{s}$ 位である。衝突による拡散よりずっと大きな拡散をすべて一般的に異常拡散といい、それに伴う輸送過程を異常輸送という。

輸送の時間尺度は、衝突過程でのみ決まる（古典的輸送）とすると今の場合、 $\tau_e \sim a^2/D \sim 13\text{s}$ で実際に観測される量（閉じ込め時間等）よりはるかに長い。又、後述の（理想）MHDの時間尺度は $\tau_{MHD} \sim \tau_A \sim a/v_A$ ($v_A = B/\sqrt{\mu_0 m_i n_i}$: アルベン速度)であり、今の例では

$v_A \sim 10^7 \text{ m/s}$ で、 $\tau_{MHD} \sim 2 \times 10^{-8} \text{ s}$ 程度になり τ_{MHD} は τ_e や τ_c のような衝突過程の時間尺度よりはるかに短い。一般にプラズマでは様々な時間尺度を持つ物理現象が生じる。プラズマ振動や電子サイクロトロン振動に関連する現象は極めて短い時間尺度で起きる。プラズマ粒子の衝突過程及びそれに伴う輸送現象は最も長い時間尺度を持つ。

(2) 電磁流体力学

1) 1 流体運動方程式

2 流体方程式系からある近似のもとに 1 流体方程式系を導こう。イオンの運動方程式と電子の運動方程式とを加えることにより 1 流体方程式の運動方程式が得られる。またイオンの運動方程式と電子の運動方程式の差をとることによりオームの式が得られる。

まず、質量密度 ρ 、流体の速度 \vec{V} 、電流密度 \vec{J} を定義する。また 1 種のイオン (電荷 $Z_i = 1$) から成るプラズマの場合についてその表現を書くと、

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_a m_a n_a = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n_i \\ \vec{V} &= \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \vec{v}_a \simeq \vec{v}_i \\ \vec{J} &= \sum_a Z_a e n_a \vec{v}_a = -e n_e \vec{v}_e + Z_i e n_i \vec{v}_i \end{aligned} \quad (5.35)$$

密度保存の式は粒子種 a に対する粒子密度保存の式

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (5.36)$$

を全ての粒子種で足し合わせ ρ と \vec{V} の定義を用いると次のように得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.37)$$

運動方程式は a 種流体に対して次のように書ける。

$$m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\nabla p_a - \nabla \cdot \vec{\pi}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (5.38)$$

この式で、右辺第1項は圧力、第2項は粘性力、第3項は電磁力、最後の項はまさつ力を表している。式(5.38)を全ての粒子種について加え合わせると1流体運動方程式が得られるが、その時次の仮定をおく。(i) 電子の慣性は無視する ($m_e \rightarrow 0$)。この時、式(5.38)の左辺の a による和は

$$\begin{aligned} \sum_a m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} &= m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + m_i n_i \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i \\ &+ m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + m_e n_e \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e \simeq \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。ここで $\rho \simeq m_i n_i$, $\vec{V} \simeq \vec{v}_i$ と近似した。(ii) 衝突が充分大きく圧力は等方的であると仮定する。すなわち粘性力は無視する。

$$\sum_a \nabla \cdot \vec{\pi}_a \rightarrow 0 \quad (5.40)$$

(iii) 準中性条件 ($n_e = Z_i n_i$) を仮定する。この仮定は後に吟味する。

$$\sum_a e_a n_a \vec{E} = (Z_i e n_i - e n_e) \vec{E} = 0 \quad (5.41)$$

電流密度 \vec{J} の定義より

$$\sum_a e_a n_a \vec{v}_a \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.42)$$

であり、また衝突における運動量保存

$$\sum_a \vec{R}_a = \vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (5.43)$$

を考慮すると運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.44)$$

となる。ただし全圧力 P は

$$P = \sum_a p_a = p_e + p_i \quad (5.45)$$

と定義した。

ここで運動方程式の $\vec{J} \times \vec{B}$ の項について考える。ローレンツ力 $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$ は $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を使うと

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} \quad (5.46)$$

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (B_x B_\beta) \\ F_y = \dots \\ F_z = \dots \end{cases}$$

であるから \vec{F} の成分 F_α は

$$F_\alpha = (\nabla \cdot T_{\alpha\beta}^B) = \frac{\partial T_{\alpha\beta}^B}{\partial x_\beta} \quad (5.47)$$

と書ける。ここで

$$T_{\alpha\beta}^B = \frac{1}{\mu_0} (B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (5.48)$$

を磁気圧力テンソルと言う。一方、 \vec{F} をベクトル形式で書き改めていくと

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + \frac{1}{\mu_0} B \vec{b} (\vec{b} \cdot \nabla) B \\ &= -\nabla_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\vec{n}}{R} \end{aligned} \quad (5.49)$$

と書ける。ただし、 $\vec{b} = \vec{B}/B$, $\vec{b} \cdot \nabla = \partial/\partial s$ で \vec{b} は磁場方向の単位ベクトル、 s は磁力線に沿う線素である。微分幾何学によると

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = -\kappa \vec{n} \equiv -\frac{1}{R} \vec{n} \quad (5.50)$$

である。 κ を曲率、 R を曲率半径という。式 (5.49) の右辺第1項は磁場の圧力の垂直方向の勾配、第2項は \vec{b} 方向の \vec{b} の変化による力 (\vec{B} に垂直方向)、すなわち張力 (テンション) である。張力は曲率中心に向かって働く。

電磁場の持つエネルギーを考える。電場の持つエネルギーは $E = 5\text{kV/m}$ の時

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (5\text{kV/m})^2}{2} = 10^{-4} = \frac{10^{-4}}{g} \text{kg/m}^2 \quad (5.51)$$

であり非常に小さい。一方磁場の持つエネルギー密度は $B = 1\text{T}$ の時

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{2\mu_0} &= \frac{1}{8\pi \times 10^{-7}} \\ &= 0.4 \times 10^5 \text{g} = 4 \times 10^4 \text{kg/m}^2 = 40 \text{Ton/m}^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

で非常に大きい。一般に電場による圧力は磁場の圧力と比較して充分無視できる。

準中性条件を仮定したがこれについて考える。電荷密度は1種類のイオン（電荷数 Z_i ）から成るプラズマでは

$$\rho_e \equiv Z_i e n_i - e n_e \quad (5.53)$$

と定義される。電子とイオンに対する連続の式に電荷を掛けて両者の差をとると

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.54)$$

が成立する。後でわかるようにオームの式は $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ であり、大きさとして $E \sim VB$ であり、また運動方程式から大きさとして $\omega \rho_e V \sim P/L \sim JB$ である。ただし、 ω は特徴的振動数である。式 (5.54) の第1項と第2項の大きさを比較すると、

$$\left| \frac{\partial \rho_e}{\nabla \cdot \vec{J}} \right| \sim \frac{\omega \rho_e}{J/L} \sim \frac{\omega}{J} L \frac{\epsilon_0 E}{L} = \epsilon_0 \frac{\omega}{J} V B = \epsilon_0 \frac{\omega J B^2}{J \omega \rho_e} = \frac{c_A^2}{c^2} \quad (5.55)$$

ここで $\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho_e$ から $\rho_e \sim \epsilon_0 E/L$ と考えた。また c は光速で、 $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ であり、 c_A は

$$c_A^2 = \frac{B^2}{\mu_0 \rho_e} \quad (5.56)$$

で定義され c_A はアルベン速度と呼ばれる。もし $c_A^2/c^2 \ll 1$ なら $|\nabla \cdot \vec{J}| \gg |\partial \rho_e / \partial t|$ であり

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.57)$$

と考えてよい。

また運動方程式に $\rho_e \vec{E}$ を残したとする。すなわち、

$$\rho_e \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \rho_e \vec{E} - \nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.58)$$

先ず ∇P と $\vec{J} \times \vec{B}$ の大きさを比較する

$$\left| \frac{\nabla P}{\vec{J} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{P}{L} \frac{1}{JB} \sim \frac{P}{L} \cdot \frac{\mu_0}{B^2/L} = \frac{P}{B^2/\mu_0} \quad (5.59)$$

プラズマ圧力と磁場の圧力の比、すなわち

$$\beta = \frac{P}{B^2/(2\mu_0)} \quad (5.60)$$

はプラズマ・ベータ値とよばれ、核融合プラズマの閉じ込めにとって重要な量である。通常この値は1より小さい。さて $\rho_e \vec{E}$ の大きさは

$$\left| \frac{\partial \rho_e / \partial t}{\nabla \cdot \vec{J}} \right| \sim \frac{\omega \rho_e}{J/L} \sim \frac{c_A^2}{c^2} \ll 1 \quad (5.61)$$

であることを使うと

$$\left| \frac{\rho_e \vec{E}}{\vec{J} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{\rho_e E}{JB} \sim \frac{\rho_e VB}{JB} = \frac{\rho_e V}{J} \ll \frac{1JV}{\omega LJ} = \frac{1V}{\omega L} \sim 1 \quad (5.62)$$

となり $\vec{J} \times \vec{B}$ と比較すると充分小さく $\rho_e \vec{E}$ の項は無視できる。方程式系では事実上 $\rho_e = 0$ とおいてよいことがわかり、式 (5.44) で与えられる運動方程式が正当化される。

2) オームの式

電子の運動方程式とイオンの運動方程式の差を取るとオームの式が得られる。その結果は電子の運動方程式から得られるものと同じである。ここでは電子の運動方程式

$$m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\nabla p_e - \nabla \cdot \vec{\pi}_e - en_e(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \vec{R}_e \quad (5.63)$$

から直接オームの式を導くことにする。そのため次の仮定をおく。(i) 慣性項を無視する ($m_e \rightarrow 0$)。即ち、慣性項の大きさは

$$\left| \frac{m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt}}{en_e \vec{v}_e \times \vec{B}} \right| \simeq \frac{m_e n_e (\omega + v_e/L) v_e}{en_e v_e B} = \frac{\omega + v_e/L}{eB/m_e} \simeq \frac{\omega}{\omega_{ce}} \ll 1 \quad (5.64)$$

と評価できる。但し、特徴的周波数を ω 、特徴的速さを v_e 、特徴的長さを L とした ($\omega \simeq v_e/L$)。考えている時間尺度は ω_{ce}^{-1} よりはるかに長いと仮定する。(ii) 衝突頻度が充

分大きく圧力はスカラーと仮定する。即ち $\nabla \cdot \vec{\pi}_e \rightarrow 0$ とする。(iii) 熱起電力の式

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \quad (5.65)$$

において磁力線に沿って電子温度は一定、即ち、 $\nabla_{\parallel} T_e = 0$ と仮定し、また $\nu_e \ll \omega_{ce}$ と仮定すると

$$\left| \frac{\nabla p_e}{\frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e} \right| \sim \frac{n_e T_e / L}{\frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{T_e}{L}} = \omega_{ce} \tau_e = \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \gg 1 \quad (5.66)$$

であるので $\vec{R}_T \rightarrow 0$ としてよい。このような仮定のもとでは電子の運動方程式 (5.63) は次のようになる。

$$\frac{1}{en_e} \nabla p_e + \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.67)$$

この式を \vec{v}_e を消去して書きかえる。 $\vec{J} = -en_e \vec{v}_e + en_i \vec{v}_i$ であるから

$$\vec{v}_e = \frac{1}{en_e} (en_i \vec{v}_i - \vec{J}) \simeq \vec{V} - \frac{1}{en_e} \vec{J} \quad (5.68)$$

$$\vec{v}_i \simeq \vec{V}$$

で、これを式 (5.67) に代入するとオームの式の別の形が得られる。

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{1}{en_e} \vec{J} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.69)$$

ここで $\vec{J} \times \vec{B}$ の項はホール効果を表し \vec{B} を横切る \vec{J} は \vec{E} を生成することを意味している。

式 (5.67)、あるいは式 (5.69) を一般化オームの式と呼ぶ。運動方程式を使って式 (5.69)

をさらに書きかえる。 $\vec{V} \simeq \vec{v}_i$ 、 $P = p_e + p_i$ であるので運動方程式は

$$e_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla p_e - \nabla p_i + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.70)$$

と書け、これを用いるとオームの式は次のようにも書ける。

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i - \frac{m_i}{Z_i e} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \eta \vec{J} \quad (5.71)$$

仮定 4 として $\omega \ll \omega_{ci}$ を仮定する。イオンの慣性項の大きさは

$$\left| \frac{\frac{m_i}{Z_i e} \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\vec{V} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{m_i}{Z_i e} \omega v_i \frac{1}{v_i B} = \frac{\omega}{\omega_{ci}} \ll 1 \quad (5.72)$$

であり小さくイオンの慣性項は式(5.71)において無視できる。従ってオームの式は

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i = \eta \vec{J} \quad (5.73)$$

となる。 ∇p_i の項の大きさを考えてみよう。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{en_e} \right| &\simeq \frac{V B e n_e}{n_i T_i / L} = \frac{m_i V Z_i e B}{m_i T_i} L \\ &= \frac{\omega_{ci}}{T_i / m_i} V L = \frac{\omega_{ci}}{v_{Ti}^2} V L = \frac{V}{v_{Ti}} \frac{1}{\rho_i} L \\ &\quad (\rho_i = v_{Ti} / \omega_{ci}) \end{aligned} \quad (5.74)$$

∇p_i の項が無視できるためには

$$\frac{V}{v_{Ti}} \gg \frac{\rho_i}{L} \quad (5.75)$$

でなければならない。 $T_i \simeq T_e$ なら $v_{Ti} \sim c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ (音速) で流体の速度は一般に音速より遅いので

$$1 \gg \frac{V}{c_s} \gg \frac{\rho_i}{L} \quad (5.76)$$

でなければ ∇p_i の項は無視できない。例えば $B = 2T$, $T_i = 100\text{eV}$, $L = 0.2\text{m}$ の時 $\rho_i = 5 \times 10^{-4}\text{m}$ 、 $\rho_i/L = 2.5 \times 10^{-3} \ll 1$ であるが条件(5.76)は必ずしも満たされない。 ∇p_i の項が無視できないときでもファラデーの式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} \\ &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{en_e} \nabla p_i \right) + \nabla \times (\eta \vec{J}) \\ &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \nabla \times (\eta \vec{J}) + \frac{1}{en_e^2} \nabla n_e \times \nabla p_i \end{aligned} \quad (5.77)$$

であるので、もし ∇n_e と ∇p_i が同方向なら $\nabla n_e \times \nabla p_i = 0$ で ∇p_i の項はファラデーの式の中で消える。後述するように n_e や p_i が磁束関数 ψ のみの関数の時は $\nabla n_e(\psi) \times \nabla p_i(\psi) = \frac{dn_e}{d\psi} \nabla \psi \times \frac{dp_i}{d\psi} \nabla \psi = 0$ となる。

∇p_i の項が無視できるとき

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.78)$$

となり、これをオームの式（オームの法則）という。電子に対する元の方程式、又はその変形を一般化されたオームの式と言う。

3) MHD 方程式系

電磁流体力学 (MHD) の方程式系を完結させるため、1 流体エネルギーの式を導こう。

α 種粒子に対するエネルギーの式

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{d_\alpha T_\alpha}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \vec{v}_\alpha = -\nabla \cdot \vec{q}_\alpha - \pi_{\alpha\alpha\beta} \frac{\partial v_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_\alpha \quad (5.79)$$

を全ての粒子種に対して和を取ると、 $|\vec{V}| \sim |\vec{v}_i| \gg |\vec{v}_e - \vec{v}_i|$ の近似の元に

$$\frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} P \vec{V} \right) + P \nabla \cdot \vec{V} = -\nabla \cdot \vec{q} + \sum Q \quad (5.80)$$

を得る。ここで \vec{q} は熱流速で、 Q は発熱を表している。式 (5.80) では

$$\left. \begin{aligned} P &= p_e + p_i = n_e T_e + n_i T_i \\ \vec{q} &= \vec{q}_e + \vec{q}_i \\ \sum Q &= -\vec{R} \cdot \vec{u} + Q_{vis} = \eta J^2 - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

である。第3式の右辺第1項はジュール加熱、第2項は粘性加熱を表す。1 流体エネルギーの式 (5.80) の左辺は

$$\frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} P \vec{V} \right) + P \nabla \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} P \right) + \frac{5}{2} P \nabla \cdot \vec{V} = P \frac{dS}{dt} \quad (5.82)$$

と書ける。 S は

$$S = \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n} \right) \propto \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) \quad (5.83)$$

で定義されるエントロピーで $\gamma = 5/3$ である。1 流体エネルギーの式 (5.80) の右辺は熱源や散逸の項で衝突拡散の時間スケール τ_D で変化する。今考えている時間スケールが $\tau \ll \tau_D$ で右辺が無視できるとすると、エネルギーの式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (5.84)$$

と断熱不変の式として書ける。

電磁流体力学に対する1流体方程式は、密度保存の式(5.37)、運動方程式(5.44)、オームの式(5.78)、エネルギーの式(5.80)とマックスウェルの式からなる。アンペールの式

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}) \quad (5.85)$$

の右辺第2項は次のように評価できる。

$$\left| \frac{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\mu_0 \vec{J}} \right| \simeq \frac{\omega E}{c^2 \mu_0 J} \sim \frac{\omega V B}{c^2 \mu_0 \omega \rho V / B} = \frac{c_A^2}{c^2} \ll 1 \quad (5.86)$$

アルベン速度 c_A は

$$c_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = 2.18 \times 10^{16} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{B[\text{T}]}{n_i^{1/2} [\text{m}^{-3}]} \text{ m/s} \quad (5.87)$$

であり、 $B = 2\text{T}$ 、 $n = 10^{19} \text{m}^{-3}$ の時、 $c_A = 1.38 \times 10^7 \text{m/s}$ で、 $B = 4\text{T}$ 、 $n = 10^{20} \text{m}^{-3}$ の時、 $c_A = 8.72 \times 10^6 \text{m/s}$ の大きさと光速と比べ充分小さい。従ってアンペールの式(5.85)において変位電流の項は無視してよい。マックスウェルの式は電磁流体力学の近似では次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned} \quad (5.88)$$

電磁流体力学(MHD)方程式系は、散逸過程として抵抗 η の項のみ残すとすると次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.89)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.90)$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.91)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P \right) + \frac{5}{2} P \nabla \cdot \vec{V} = \eta J^2 \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (5.93)$$

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (5.94)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.95)$$

以上で方程式は 15 々あり、未知数は 14 々 ($\rho, P, \vec{v}, \vec{J}, \vec{B}, \vec{E}$) ある。しかし、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ は $t = 0$ で満足させておくと以後自動的に成立する。すなわち、

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (5.96)$$

である。 $\eta \neq 0$ の時は η に対する式も与えねばならないことはいうまでもない。簡単には $\eta = \text{const.}$ として与えられる事がある。また次の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (5.97)$$

で与えられる事もある。

上記の式 (5.89) から (5.95) は $\eta = 0$ の場合を理想 MHD 方程式系、 $\eta \neq 0$ なら抵抗性 MHD 方程式系という。

4) 凍りつきの定理

理想 MHD ($\eta = 0$) の場合は、ファラデーの式とオームの式から

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (5.98)$$

が得られる。この式から次の定理が得られる。即ち、流体中に流体と共に動く任意の閉曲線を考えると、この曲線と鎖交する磁束は時間的に一定である。この定理は、完全流体の Kelvin Helmholtz の渦の定理

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\omega}), \quad \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (5.99)$$

と同じである。温度 $\vec{\omega}$ と磁場 \vec{B} が対応している。図 5.1 の様に L によりふちどられた曲面を通過する磁束 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ を考える。 Φ は閉曲線 L だけで決まり、 L により張られる曲面の形には依存しない。

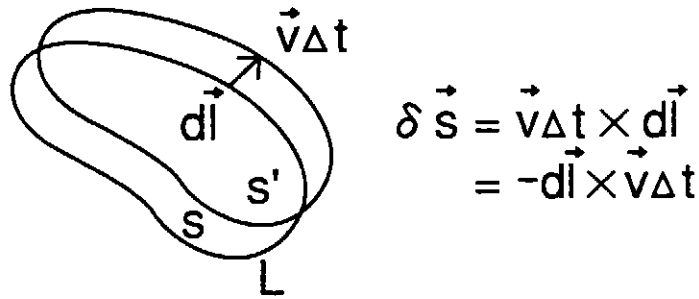


図 5.1 凍りつきの定理

Δt の間の変化 $\Delta\Phi$ を考える。閉曲線内の \vec{B} の変化と閉曲線の運動を考慮すると

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= \int_{S'} \vec{B}' \cdot dS' - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \int_{S'} (\vec{B} + \Delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot (d\vec{S} + \delta\vec{S}) - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_{\delta S} \vec{B} \cdot \delta\vec{S} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \Delta t \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \times \vec{v} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \Delta t \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

となる。

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.101)$$

となり定理が証明された。この定理は磁力線は流体に凍りついていると言って良い。

この定理を一般化オームの式の場合について考える。式 (5.67) は

$$\frac{1}{en_e} \nabla p_e + \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.102)$$

で与えられる。この式は $m_e \rightarrow 0$ とした電子の運動方程式そのものである。 $\eta = 0$ の時、ファラデーの式は

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$$

$$= \nabla \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{\nabla p_e}{en_e} \right) \quad (5.103)$$

となる。右辺第2項は

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p_e}{en_e} \right) = -\frac{1}{en_e} \nabla n_e \times \nabla p_e \quad (5.104)$$

となる。ここで $\text{rot}(\text{grad}) = 0$ を使った。今、電子の密度 n_e と電子の圧力 p_e が磁力面上で一定、即ち、磁束密度を ψ とし、 $n_e = n_e(\psi)$ 、 $p_e = p_e(\psi)$ なら $\nabla \times (\nabla p_e / en_e) = 0$ となり

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_e \times \vec{B}) \quad (5.105)$$

が成立する。つまりより一般的には磁力線は電子に凍りついていると言える。1流体モデル (MHD 方程式) と 2流体モデルの差は \vec{v}_e と \vec{v}_i の差が大きくなったとき顕著に現れる。MHD 方程式系では $\vec{v}_e \simeq \vec{v}_i$ であり、電子の流体速度とイオンの流体速度の差は電流を生ずるが、凍りつきは電子にでもイオンにでもどちらでも同じである [3]。

(3) 磁気流体波

MHD 方程式から導かれる微小振動 (線形振動) を考える。一様プラズマ ($\nabla \rho_0 = 0$, $\nabla P_0 = 0$), 一様磁場 \vec{B}_0 の場合を考える。この時磁気流体波は3つの基本波に分離できる。理想 MHD 方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.106)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.107)$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (5.108)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (5.109)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (5.110)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.111)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.112)$$

で与えられる。これらの式を線形化する。各量を平衡量と1次の摂動量に分ける。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{V}' \\ P &= P_0 + P' \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}' \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

添字0のついたものが平衡量で'のついたものが1次の摂動量である。但し、 $\vec{V}_0 = 0$ と仮定する ($\vec{V} = \vec{V}'$)。断熱の条件式から

$$\begin{aligned} P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma &= P_0 + \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \rho' + \frac{P_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \\ &= P_0 + c_s^2 \rho' + \frac{\gamma - 1}{2 \rho_0} c_s^2 \rho'^2 \end{aligned} \quad (5.114)$$

となる。ここで

$$c_s = \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (5.115)$$

は音速である。線形化した式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -c_s^2 \nabla \rho' - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times \nabla \times \vec{B}' \\ \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \\ \nabla \cdot \vec{B}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

摂動は $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ に比例するとすると式(5.116)は

$$\left. \begin{aligned} -\omega \frac{\rho'}{\rho_0} + \vec{k} \cdot \vec{V} &= 0 \\ -\omega \vec{V} &= -\vec{k} c_s^2 \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{B}') \\ -\omega \vec{B}' &= \vec{k} \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

となる。 $\vec{k} \cdot \vec{B}' = 0$ ($\nabla \cdot \vec{B}' = 0$) は自動的に満たされているが、これは、磁場の摂動は常に波の進行方向に垂直であることを意味する。また式 (5.117) から ρ' , \vec{V}' , \vec{B}' はすべて同位相である事が分かる。今、 \vec{B}_0 は z 方向を向いており、 \vec{k} の \vec{B}_0 に垂直な成分 k_{\perp} の方向を x 軸にとる。即ち、 $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ で $k_{\perp} = k_x$, $k_{\parallel} = k_z$ であるとする (図 5.2)。

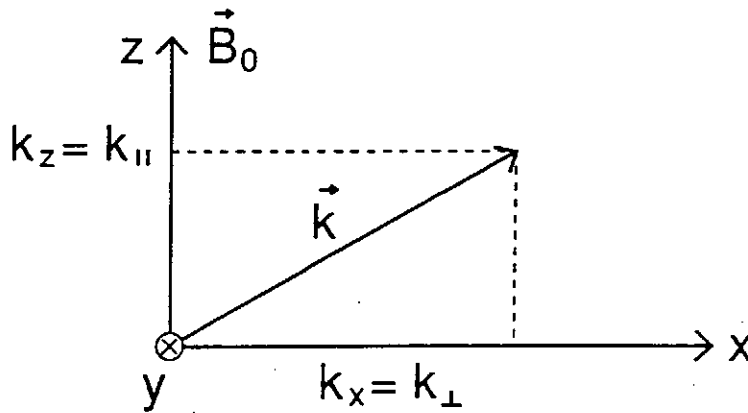


図 5.2

式 (5.117) の第 2、第 3 の式の x, y, z 成分を取る。 y 成分は (x, z) 成分と独立で

$$\left. \begin{aligned} -\omega V_y &= k_z B'_y B_0 / \mu_0 \rho_0 \\ -\omega B'_y &= k_z V_y B_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

が得られる。この式は、式 (5.117) の第 1 式、つまり密度の連続の式とは関係ない。 $k_{\parallel} = k_z$ であり、アルベン速度を

$$c_A \equiv \left(\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \right)^{1/2} \quad (5.119)$$

で定義すると、式 (5.118) から

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2 \quad (5.120)$$

となる。式 (5.117) で、非圧縮性 ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$, 即ち、 $\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$) とするとこの波のみが存在しうる。この波は、シアー・アルベン波 (あるいは単にアルベン波) と呼ばれる。

式 (5.117) の x, z 成分は

$$\omega \frac{\rho'}{\rho_0} = k_x V_x + k_z V_z \quad (5.121)$$

$$\omega B' \frac{1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = c_A k V_x \quad (5.122)$$

$$\omega V_x = c_S^2 k_x \frac{\rho'}{\rho_0} + c_A k B' \frac{1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} \quad (5.123)$$

$$\omega V_z = c_S^2 k_{\parallel} \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (5.124)$$

となり、これから

$$\omega^4 - k^2 (c_A^2 + c_S^2) \omega^2 + k_{\parallel}^2 k^2 c_A^2 c_S^2 = 0 \quad (5.125)$$

が得られ、これを満たす波を磁気音波という。磁気音波には次の2つのブランチがある。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (c_A^2 + c_S^2) \pm \left[\frac{1}{4} (c_A^2 + c_S^2)^2 - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} c_A^2 c_S^2 \right]^{1/2} \quad (5.126)$$

プラスの符号のものを速い磁気音波 (あるいは単に速波) と言い、マイナス符号のものを遅い磁気音波 (あるいは単に遅波) と言う。(シア-) アルベン波、速い磁気音波、遅い磁気音波を MHD 3 基本波という。一様磁場中の一様プラズマに対してのみ3つの基本波は完全に分離されるが、一般には基本波は結合し単純に分離できない。図 5.3 にアルベン波と磁気音波の電磁場等の分極の様子を示す。

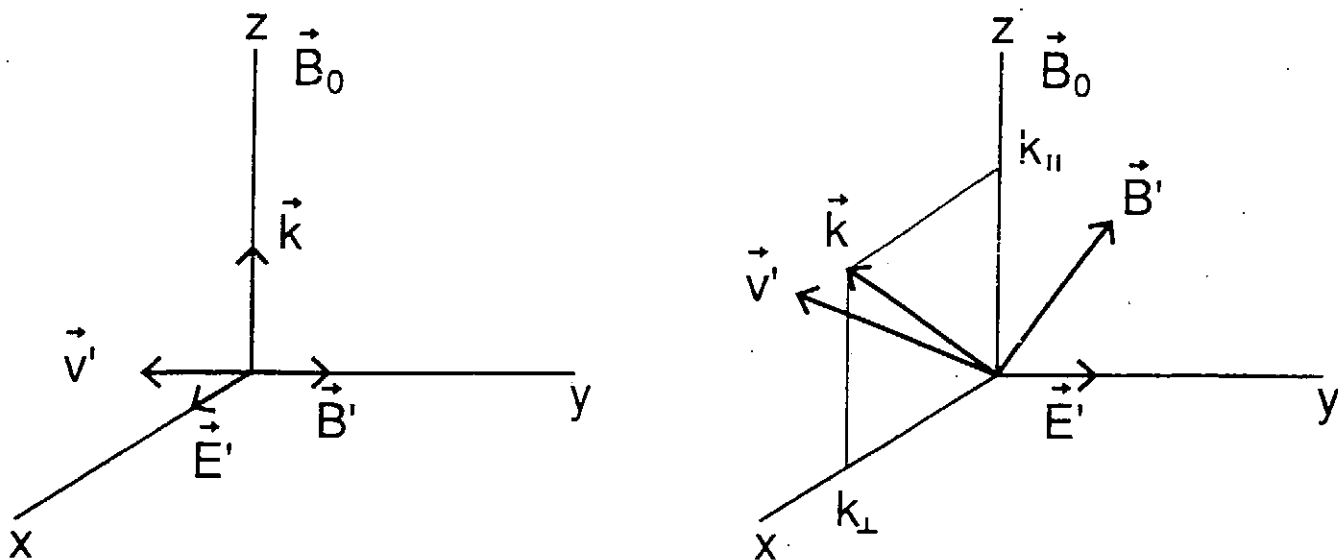


図 5.3 アルベン波と磁気音波

音速とアルベン速度の比の 2 乗は

$$\left(\frac{c_S}{c_A}\right)^2 = \frac{\gamma P_0 \mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0 B_0^2} = \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{B_0^2/2\mu_0} = \frac{\gamma}{2} \beta \quad (5.127)$$

$$\beta \equiv \frac{P_0}{B_0^2/2\mu_0} \quad (5.128)$$

である。 β はプラズマの圧力と磁場の圧力の比で、閉じ込めにとって重要な量である。図 5.4 に $\beta < 1$ の場合と $\beta > 1$ の場合について分散式を描く。図 5.4 で $\cos \theta = k_{\parallel}/k$ である。

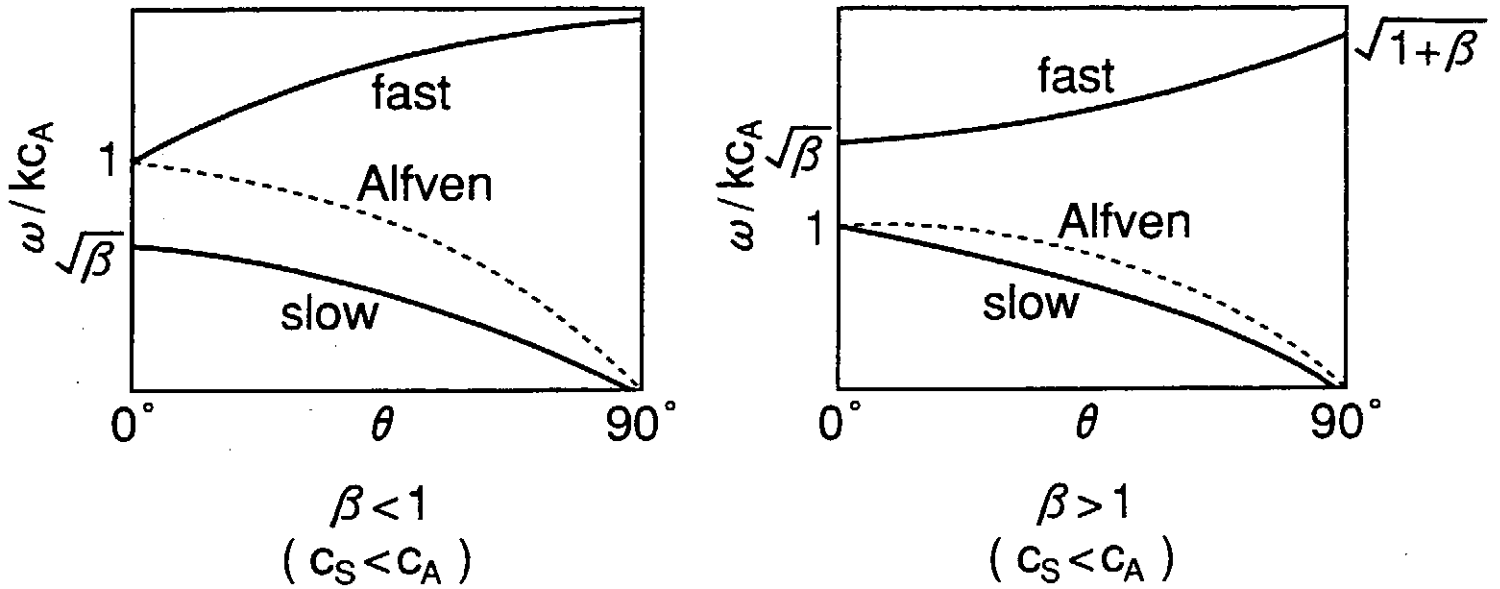


図 5.4 MHD 基本波の分散式

$c_A \ll c_s$ の時 ($\beta \gg 1$) を考える。この時の極限では $\omega = kc_s$ と $\omega = k_{\parallel}c_A$ が得られる。 $\omega = kc_s$ は式 (5.121)~(5.124) で $B' = 0, c_A = 0$ とおいた時に得られるので、これは普通の (静電的な) 音波である。 $\omega = k_{\parallel}c_A$ は式 (5.120) とは極性の異なるシアア・アルベン波である。

$c_s \ll c_A$ の場合 ($\beta \ll 1$) は、トカマクやヘリカル系装置のプラズマは低ベータで多くの場合これに相当する。速いモードは

$$\omega = kc_A \quad (5.129)$$

となりこれは圧縮性アルベン波、あるいは単に速波と呼ばれる。群速度と位相速度は等しく、 $v_g = \omega/k = c_A$ である。このモードに対しては式 (5.121)~(5.124) より

$$V_x = \frac{B'}{(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}} = c_A \frac{B'}{B_0} \quad (5.130)$$

$$V_z = \frac{c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp}}{c_A^2 k^2} V_x \quad (5.131)$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{k_{\perp} V_x}{k c_A} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{1}{c_A} c_A \frac{B'}{B_0} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{B'}{B_0} \quad (5.132)$$

であり波としての流体の運動は主として x 方向におこる ($|V_x| \ll |V_z|$)。遅いモードは

$$\omega = k_{\parallel} c_S \quad (5.133)$$

となる。 $c_S \ll c_A$ であるため磁力線方向にしか音波は伝搬できない事を示している。式

(5.121)~(5.124) より

$$\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{V_x}{c_S} \quad (5.134)$$

$$V_x = -\frac{c_S^2 k_{\parallel} k_{\perp}}{c_A^2 k^2} V_z \quad (5.135)$$

$$\frac{B'}{(\mu_0 \varrho_0)^{1/2}} = -\frac{c_S k_{\perp}}{c_A k} V_z \quad (5.136)$$

これより $|V_x| \ll |V_z|$ 、 $|B'/B_0| \ll |\varrho'/\varrho|$ であるのでこの波は殆ど縦波（静電波）である事が分かる。

MHD 基本波を平衡の位置からのずれ $\vec{\xi}$ を使って考えてみよう。速度は

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \quad (5.137)$$

で与えられ、線形化した方程式

$$\varrho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla P' + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}' \times \vec{B}_0 \quad (5.138)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.139)$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \quad (5.140)$$

$$P' = \gamma \frac{\varrho'}{\varrho_0} P_0 \quad (5.141)$$

より

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = c_S^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{\xi}) + c_A^2 \nabla_{\perp} (\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp}) + c_A^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_{\perp}}{\partial z^2} \quad (5.142)$$

が成立する。 $\xi_z = 0, \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = 0$, つまり $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ の非圧縮性プラズマを考えると $\vec{\xi}_\perp$ のみの式となる。

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial z^2} \quad (5.143)$$

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2 \quad (5.144)$$

この方程式は弦の微小振動の式と全く同じである。磁力線を弦とみたとこれを弾いたときに生ずる振動とみてよい。 $\xi_z \neq 0, \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \neq 0$ の場合は、式 (5.142) の z 成分から

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = c_S^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} + c_S^2 \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) \quad (5.145)$$

を得、式 (5.142) の垂直成分の発散をとると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = c_A^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + c_S^2 \nabla_\perp^2 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + c_S^2 \nabla_\perp^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad (5.146)$$

を得る。 $\beta \sim c_S^2/c_A^2 \ll 1$ の時 $\psi \equiv \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp$ とおくとこの式より

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_A^2 \nabla^2 \psi \quad (5.147)$$

となる。これが磁気音波 (速波、圧縮性アルベン波) である。このモードに対しては媒質の弾性は磁場の圧力から生まれ、アルベン速度 $c_A = (B_0^2/\mu_0 \rho_0)^{1/2}$ は圧力が $B_0^2/2\mu_0$ で $\gamma = 2(\gamma = f + 2/f, f = 2$ の自由度) の音波とみなせる。 $\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = 0$ を満たす振動は式 (5.145) より

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = c_S^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} \quad (5.148)$$

で通常の音波である。 β が一般の場合は式 (5.126) で与えられるとおりである。

ローレンツ力 $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$ を考える。

$$\vec{F} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (5.149)$$

一方 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ として線形化すると

$$B^2 = B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}' \quad (5.150)$$

$$e' = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (5.151)$$

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = -\vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + B_0 \frac{\partial \vec{\xi}_\perp}{\partial z} \quad (5.152)$$

となる。 \vec{F} の B_0 に対する平行成分はないから

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla_\perp \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}') + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}' \\ &= B_0^2 \nabla_\perp (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + B_0^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5.153)$$

となる。この式の右辺第1項は圧縮性による復原力を示しており、圧縮性アルベン波を発生させ、第2項は張力による復原力を示しており（シアー）アルベン波をつくる。 $F_\parallel = 0$ 、即ちローレンツ力からは磁場に平行の力は生じず、 ∇P の項が音波の駆動力である。図5.5に磁気音波、シアーアルベン波、音波の ($\beta \ll 1$ の時の) 基本波の摂動変位の様子を描いた。

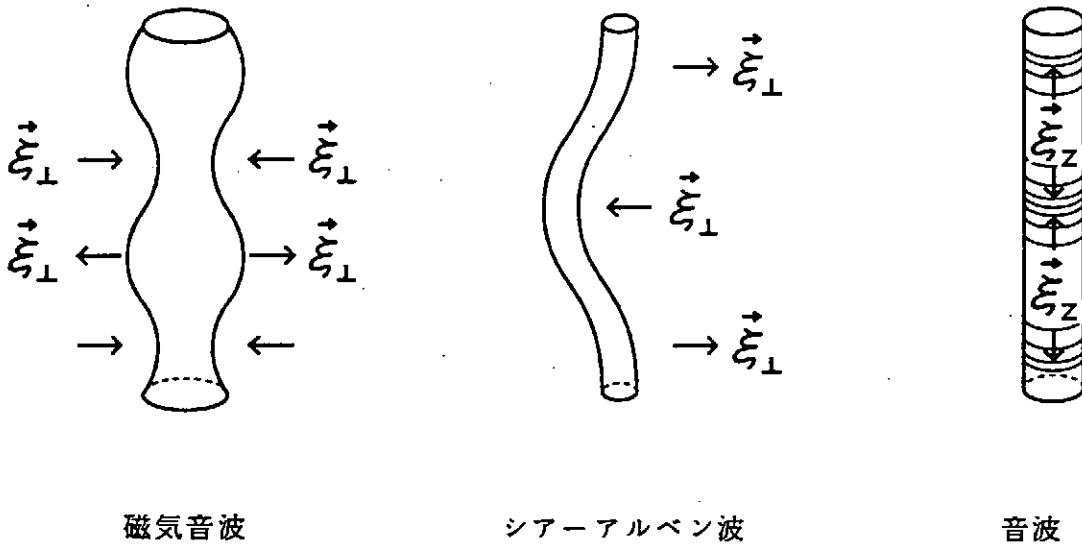


図 5.5 基本波 ($\beta \ll 1$) の摂動変位

(4) 捕足

この章では、ボルツマンの式から出発し、2流体方程式系を導き、さらに1流体方程式を導いた。式(5.89)から式(5.95)の1流体方程式は電磁流体方程式、あるいは磁気流体方程式(magnetohydrodynamics, MHD)と呼ばれる。各々のMHDの方程式の物理的意味について文献[4]で簡潔に説明されている。しかしこの文献でも指摘されているようにMHD方程式は高温の核融合プラズマを記述するのにどこまで適用できるか疑問がある。MHDではプラズマを流体として扱っている。連続体としての流体においては、粒子の衝突平均自由行程 λ_{mfp} が考えている系の特徴的長さに比べてずっと小さくなければならない。しかし、第1章でも述べたように完全電離気体としてのプラズマは希薄で、 λ_{mfp} が長く、高温の核融合プラズマでは、 λ_{mfp} は系の特徴的長さ(例えばプラズマ半径)より長い。この意味ではMHD方程式系は核融合プラズマに適用できないであろう。実際には、MHD方程式系はトーラス・プラズマに適用され、プラズマのマクロな振る舞いをかなり、あるいは非常に良く説明するのに成功してきた。文献[5]では衝突頻度の少ない(λ_{mfp} の長い)プラズマへのMHD適用について考察されている。

本章では、(i) 衝突頻度が充分高い($\lambda_{mfp} \ll a$)、(ii) イオンのラーモア半径が充分小さい($\tau_{Li} \ll a$)、(iii) 振動が充分遅い($\omega \ll \Omega_i$)という条件のもとにMHD方程式を導いた。(ii)の条件はヘリカル系やトカマク等のトーラス・プラズマでは充分満たされる。核融合プラズマでは、プラズマ周辺部やダイバータ領域などで温度が低く衝突頻度の高いプラズマが実現されることがあり、このような場合は流体モデルは良い近似になるであろう。しかし、一般に核融合プラズマでは条件(i)は満たされない。このような時のMHDの適用可能性を考えてみる。

質量保存則、式(5.89)は明らかに衝突頻度に関係なく成立する。粒子の発生・消滅がない限りこの式は正確なものである。運動方程式(5.90)では、圧力は等方的でスカラー圧力 P のみを残しストレステンソル $\vec{\pi}_0$ を無視した。衝突頻度が充分高い($\lambda_{mfp} \ll a$)時はこの近似は妥当であるが、そうでない時は妥当性に欠ける。今、プラズマに強い磁場

\vec{B} が印加されているとする。 $\vec{B} = 0$ となる点はなく、至る所で $r_{Li} \ll a$ とする。 \vec{B} に垂直な方向を考えると、プラズマ粒子は垂直方向に旋回運動 (gyro-motion) をしており、ある磁力線の周りに強く拘束されている。垂直方向には自由に動けないという意味で旋回運動は衝突の役目を果たしている。例えば粒子の衝突性拡散係数 D を考えてみる。粒子の相関時間を τ_c 、ステップ巾を Δr とすると $D \simeq (\Delta r)^2 / \tau_c$ と評価される。磁場が無い時、あるいは粒子が自由に動ける磁場方向には、イオンの平均自由行程を λ_{mfp} 、衝突時間を τ_i とすると $\Delta r \simeq \lambda_{mfp}$ 、 $\tau_c \simeq \tau_i$ であるので、 $D_{\parallel} \simeq \lambda_{mfp}^2 / \tau_c$ である。しかし、磁場に垂直方向には、衝突によるステップ巾はラーモア半径程度であるので、垂直方向の拡散係数は $D_{\perp} \simeq r_{Li}^2 / \tau_i$ のように評価される。電子に対しても同様である。つまり、垂直方向にはラーモア半径が平均自由行程に置き換えられ、旋回運動が衝突の役割を果たしていると解釈される。強い磁場の周りの旋回周波数は $\Omega_a = |e_a B / m_a|$ (サイクロトロン周波数) で、今考えている物理現象の時間尺度を ω^{-1} とすると $\omega \ll \Omega_i$ である限り、旋回は充分速い運動である。このため \vec{B} に垂直方向の圧力 P_{\perp} は等方的であると考えてよいだろう。実際、圧力の非等方成分 $\vec{\pi}_{\perp}$ を考えてみる。

$$|\vec{\pi}_e / \vec{\pi}_i| \simeq (m_e / m_i)^{1/2} \quad (5.154)$$

であるので $\vec{\pi}_{i\perp}$ のみ考えればよい。今 x をプラズマ半径方向、 y を \vec{B} の周りの方向とすると π_{yx} はモーメントの y 成分の x 方向の流れを表し

$$\left. \begin{aligned} \pi_{yx} &\simeq -\eta_{i\perp} \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \eta_{i\perp} &\simeq n_i m_i D_{\perp} = n_i m_i \frac{r_{Li}^2}{\tau_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.155)$$

のように評価される [1]。従って $\vec{\pi}_{\perp}$ の大きさは、 $r_{Li}/a \ll 1$ 、 $\Omega_i \tau_i \gg 1$ である場合には

$$\left| \frac{\vec{\pi}_{i\perp}}{P} \right| \simeq \frac{1}{\Omega_i \tau_i} \frac{r_{Li}}{a} \ll 1 \quad (5.156)$$

と評価され、 $\nabla \cdot \vec{\pi}_{i\perp}$ を無視することが正当化される。従って、垂直方向には MHD は良い近似と考えてよいだろう。

磁場 \vec{B} に沿う方向の運動は極めて複雑である。 $\vec{B} \cdot \nabla P \simeq 0$ で、また、 $\vec{B} \cdot \vec{J} \times \vec{B} = 0$ であるので、式 (5.90) で無視した平行方向の粘性力 $\vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\pi}_a$ が重要な役割を果たすようになる。これに関しては第 11 章で述べるが、 $r_{Li} \rightarrow 0$ の極限で運動方程式 (5.90) が成立するものと考えられる。

エネルギーの式 (5.92) では無視した項のうち $\nabla_{\parallel} \cdot \vec{q}_{\parallel} = \nabla_{\parallel} \cdot \kappa_{\parallel} T$ が最も重要である。電子の平行方向の熱伝導はおおよそ

$$\kappa_{e\parallel} \simeq nD_{\parallel} \simeq \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \quad (5.157)$$

で与えられ、 $\kappa_{e\parallel} \simeq \sqrt{m_i/m_e} \kappa_{i\parallel}$ である。また $\kappa_{e\parallel}/\kappa_{e\perp} \simeq \Omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ で $\kappa_{e\parallel}$ は非常に大きく、さらに T_e の上昇とともに大きな量となる。 $\nabla_{\parallel} \cdot \vec{q}_{e\parallel}$ と $\partial P/\partial t$ の大きさを比較してみると

$$\left| \frac{\nabla_{\parallel} \cdot \vec{q}_{e\parallel}}{\partial P/\partial t} \right| \simeq \frac{\kappa_{e\parallel} T_e / l_{\parallel}^2}{\omega P} \simeq \frac{\tau_e v_{Te}}{l_{\parallel}} \cdot \frac{v_{Te}}{l_{\parallel} \omega} \quad (5.158)$$

と評価できる。ここで l_{\parallel} は磁力線方向に温度が変化する特徴的長さであり、 ω は MHD の時間尺度で $\omega \simeq v_A/a$ と考えられる。但し、 $v_A = B/\sqrt{\mu_0 n_i m_i}$ はアルベン速度である。式 (5.158) で

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{Te}}{l_{\parallel} \omega} &\simeq \frac{v_{Te}}{l_{\parallel}} \frac{a}{v_A} \simeq \frac{a}{l_{\parallel}} \sqrt{\beta_e} \\ \beta_e &= \frac{n_e T_e}{B^2/2\mu_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.159)$$

であるので、 $\beta_e \ll 1$ 、かつ

$$\frac{\tau_e v_{Te}}{l_{\parallel}} \ll 1 \quad (5.160)$$

であれば $\nabla_{\parallel} \vec{q}_{e\parallel}$ は無視できるであろう。 l_{\parallel} が結合長 $2\pi qR$ 程度なら式 (5.160) は衝突頻度が充分大きい時に成立する。ただし、 q は第 7 章で定義する安全係数で、 $2\pi qR$ は、ある点から磁力線に沿ってトーラス方向に q 回周ってもとの出発点、またはその近傍にもどるまでの距離である。 $l_{\parallel} \simeq 2\pi qR$ なら、衝突の少ないプラズマでは式 (5.160) は成立しない。しかし、温度が高く衝突頻度の少ないプラズマでは、粒子は磁力線に沿って自由に流

れ、磁力線に沿う温度勾配を速やかに無くしてしまうと考えて良いだろう。つまり

$$\vec{B} \cdot \nabla T = B \nabla_{\parallel} T = 0 \quad (5.161)$$

と考えて良いだろう。この時は $l_{\parallel} \rightarrow \infty$ で式 (5.160) は成立する。

オームの式 (5.91) は、もし $\vec{V} \simeq 0$ なら $\vec{E} \simeq \eta \vec{J}$ で無視した項 $(\nabla p_e - \vec{J} \times \vec{B}) / (en_e)$ が効いてくる。 $\vec{V} \simeq 0$ の時は

$$\vec{E}' = \frac{1}{en_e} (\nabla p_e - \vec{J} \times \vec{B}) \simeq -\frac{1}{en_e} \nabla p_i \quad (5.162)$$

となる。しかし、トーラス・プラズマを考えた場合、 n_e と p_i は磁気面 ψ のみの関数であるので (第7章で述べる)、すでに述べたように $\nabla \times \vec{E}' = 0$ となり \vec{E}' は Faraday の式に入ってこない。これは静電場 $\vec{E} = -\nabla \Phi$ が Faraday の式に関係しない事と同様である。この意味ではオームの式の \vec{E} を Faraday の式に代入し、 \vec{E} を陽に表現しない方程式の方が MHD 方程式系として理解しやすい。

トーラスには磁力線方向に端がなく、粒子は磁力線に沿って何回もトーラスを周れるので粒子の速度分布関数はマックスウェル分布に近いと考えて良いだろう。この意味でも MHD 方程式はトーラス・プラズマに適用可能である。しかし、ミラー系のような端のある開放系磁場閉じ込め装置のプラズマは分布関数がマックスウェル分布から大きくずれるので MHD 方程式は適用できない。また、MHD は長波長で低周波 ($\omega \ll \Omega_i$) のマクロな物理現象に適用される。波長を λ とすると $\lambda \lesssim r_{Li}$ のような短波長モードに対しては適用できない。何故ならこの時の特徴的長さは $L \sim \lambda$ であり、 $r_{Li} \ll L$ の条件を満たさないからである。

参考文献

- [1] S.I.Braginskii, "*Transport Processes in a Plasma*", Review of Plasma Physics (ed. M.A.Leontovich), Vol.1
- [2] ランダウ・リフシッツ、「電磁気学」東京図書、1962年(井上健男他共訳)
- [3] B.B. ガドムツェフ、「プラズマ中の集団現象」岩波書店、1979年
(難波忠清・水野幸雄共訳)
- [4] 浜田繁雄、「MHD 講義」第34回プラズマ若手夏の学校テキスト(プラズマ・核融合学会) 1995年。
- [5] J.P.Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press, New York 1987.

Publication List of NIFS-PROC Series

- NIFS-PROC-1 "U.S.-Japan on Comparison of Theoretical and Experimental Transport in Toroidal Systems Oct. 23-27, 1989", Mar. 1990
- NIFS-PROC-2 "Structures in Confined Plasmas –Proceedings of Workshop of US-Japan Joint Institute for Fusion Theory Program– "; Mar. 1990
- NIFS-PROC-3 "Proceedings of the First International Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion –Next Generation Experiments in Helical Systems– Dec. 4-7, 1989" Mar. 1990
- NIFS-PROC-4 "Plasma Spectroscopy and Atomic Processes –Proceedings of the Workshop at Data & Planning Center in NIFS–"; Sep. 1990
- NIFS-PROC-5 "Symposium on Development of Intensified Pulsed Particle Beams and Its Applications February 20 1990"; Oct. 1990
- NIFS-PROC-6 "Proceedings of the Second International TOKI Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion , Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas -Theory and Computer Simulation-"; Apr. 1991
- NIFS-PROC-7 "Proceedings of Workshop on Emissions from Heavy Current Carrying High Density Plasma and Diagnostics"; May 1991
- NIFS-PROC-8 "Symposium on Development and Applications of Intense Pulsed Particle Beams, December 6 - 7, 1990"; June 1991
- NIFS-PROC-9 "X-ray Radiation from Hot Dense Plasmas and Atomic Processes"; Oct. 1991
- NIFS-PROC-10 "U.S.-Japan Workshop on "RF Heating and Current Drive in Confinement Systems Tokamaks" Nov. 18-21, 1991, Jan. 1992
- NIFS-PROC-11 "Plasma-Based and Novel Accelerators (Proceedings of Workshop on Plasma-Based and Novel Accelerators) Nagoya, Japan, Dec. 1991"; May 1992
- NIFS-PROC-12 "Proceedings of Japan-U.S. Workshop P-196 on High Heat Flux Components and Plasma Surface Interactions for Next Devices"; Mar. 1993
- NIFS-PROC-13 『NIFS シンポジウム
「核燃焼プラズマの研究を考えるー現状と今後の取り組み方」
1992年7月15日、核融合科学研究所』

1993年7月

NIFS Symposium

"Toward the Research of Fusion Burning Plasmas -Present Status and Future strategy-", 1992 July 15, National Institute for Fusion Science"; July 1993 (in Japanese)

NIFS-PROC-14 *"Physics and Application of High Density Z-pinches", July 1993*

NIFS-PROC-15 岡本正雄、講義「プラズマ物理の基礎」
平成5年度 総合大学院大学
1994年2月
M. Okamoto,
"Lecture Note on the Bases of Plasma Physics"
Graduate University for Advanced Studies
Feb. 1994 (in Japanese)

NIFS-PROC-16 代表者 河合良信
平成5年度 核融合科学研究所共同研究
研究会報告書
「プラズマ中のカオス現象」
"Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences"
Report of the meeting on Chaotic Phenomena in Plasma
Apr. 1994 (in Japanese)

NIFS-PROC-17 平成5年度 NIFS シンポジウム報告書
「核融合炉開発研究のアセスメント」
平成5年11月29日-30日 於 核融合科学研究所
"Assessment of Fusion Reactor Development"
Proceedings of NIFS Symposium held on November 29-30,
1993 at National Institute for Fusion Science" Apr. 1994
(in Japanese)

NIFS-PROC-18 *"Physics of High Energy Density Plasmas Produced by Pulsed Power" June 1994*

NIFS-PROC-19 K. Morita, N. Noda (Ed.),
"Proceedings of 2nd International Workshop on Tritium Effects in Plasma Facing Components at Nagoya University, Symposium Hall, May 19-20, 1994", Aug. 1994

NIFS-PROC-20 研究代表者 阿部 勝憲 (東北大学・工学部)
所内世話人 野田信明
平成6年度 核融合科学研究所共同研究 [研究会]
「金属系高熱流束材料の開発と評価」成果報告書
K. Abe and N. Noda (Eds.),
"Research and Development of Metallic Materials for Plasma Facing and High Heat Flux Components" Nov. 1994
(in Japanese)

- NIFS-PROC-21 世話人：森田 健治（名古屋大学工学部）、金子 敏明（岡山理科大学理学部）
「境界プラズマと炉壁との相互作用に関する基礎過程の研究」
研究会報告
K. Morita (Nagoya Univ.), T. Kaneko (Okayama Univ. Science)(Eds.)
"NIFS Joint Meeting "Plasma-Divertor Interactions" and
"Fundamentals of Boundary Plasma-Wall Interactions"
January 6-7, 1995 National Institute for Fusion Science"
Mar. 1995 (in Japanese)
- NIFS-PROC-22 代表者 河合 良信
プラズマ中のカオス現象
Y. Kawai,
"Report of the Meeting on Chaotic Phenomena in Plasma, 1994"
Apr. 1995 (in Japanese)
- NIFS-PROC-23 K. Yatsui (Ed.),
"New Applications of Pulsed, High-Energy Density Plasmas";
June 1995
- NIFS-PROC-24 T. Kuroda and M. Sasao (Eds.),
"Proceedings of the Symposium on Negative Ion Sources and Their
Applications, NIFS, Dec. 26-27, 1994", Aug. 1995
- NIFS-PROC-25 岡本 正雄
新古典輸送概論（講義録）
M. Okamoto,
"An Introduction to the Neoclassical Transport Theory"
(Lecture note), Nov. 1995 (in Japanese)
- NIFS-PROC-26 Shozo Ishii (Ed.),
"Physics, Diagnostics, and Application of Pulsed High Energy
Density Plasma as an Extreme State"; May 1996
- NIFS-PROC-27 代表者 河合 良信
プラズマ中のカオスとその周辺非線形現象
Y. Kawai ,
"Report of the Meeting on Chaotic Phenomena in Plasmas and
Beyond, 1995", Sep. 1996 (in Japanese)
- NIFS-PROC-28 T. Mito (Ed.),
"Proceedings of the Symposium on Cryogenic Systems for Large Scale
Superconducting Applications", Sep. 1996
- NIFS-PROC-29 岡本正雄
講義「核融合プラズマ物理の基礎 - I」
平成 8 年度 総合研究大学院大学 数物科学研究科 核融合科学専攻
1996年 10月
M. Okamoto

"Lecture Note on the Fundamentals of Fusion Plasma Physics - I"
Graduate University for Advanced Studies; Oct. 1996 (in Japanese)