

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

平成18年度NIFS共同研究合同作業会「MHD理論の進展とその周辺」集録
Proceedings of Joint Workshop of NIFS Cooperative Programs 2006
for MHD Theory and Related Topics

(Received - Aug. 7, 2007)

NIFS-PROC-67

Aug. 2007

RESEARCH REPORT
NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. The views presented here are solely those of the authors. This document is intended for information only and may be published in a journal after some rearrangement of its contents in the future.

Inquiries about copyright should be addressed to the Research Information Office, National Institute for Fusion Science, Oroshi-cho, Toki-shi, Gifu-ken 509-5292 Japan.

E-mail: bunken@nifs.ac.jp

<Notice about photocopying>

In order to photocopy any work from this publication, you or your organization must obtain permission from the following organization which has been delegated for copyright for clearance by the copyright owner of this publication.

Except in the USA

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)
6-41 Akasaka 9-chome, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan
Phone: 81-3-3475-5618 FAX: 81-3-3475-5619 E-mail: jaacc@mtd.biglobe.ne.jp

In the USA

Copyright Clearance Center, Inc.
222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923 USA
Phone: 1-978-750-8400 FAX: 1-978-646-8600

平成 18 年度 NIFS 共同研究合同作業会「MHD 理論の進展とその周辺」集録
Proceedings of Joint Workshop of NIFS Cooperative Programs 2006
for MHD Theory and Related Topics

Abstract

A joint workshop of NIFS cooperative programs (NIFS06KLDD006, NIFS06KDAD006, NIFS06KLHH004 and NIFS06KLHH303) for MHD theory and related topics was held from 14 September to 15 September in 2006 at National Institute of Fusion Science. The papers discussed in the workshop are collected here.

Key Words:

MHD theory, heliotron, tokamak, stability, equilibrium, simulation, eigenvalue problem, numerical scheme

序

2006年9月14日—2006年9月15日の日程で、核融合科学研究所平成18年度一般共同研究合同作業会を、「MHD理論の進展とその周辺」と題して開催した。この作業会は、一般共同研究「ベータ上昇効果を含むLHDプラズマの非線型MHD解析」NIFS06KLDD006（代表者：市口勝治）、「ジャイロ流体及びジャイロ運動論モデルに基づくプラズマ輸送とゾーナルフロー」NIFS06KDAD006（代表者：洲鎌英雄）、「高ベータプラズマにおけるMHD平衡、安定性及び輸送特性に関する研究」NIFS06KLHH004（代表者：榊原悟）、「プラズマ形状の影響とMHD平衡限界の考察」NIFS06KLHH303（代表者：鈴木康浩）の合同の作業会であり、研究会形式で行った。また、核融合科学研究所平成18年度客員教官旅費の援助も受けた。

本作業会は、MHD理論というプラズマ研究における基盤的な研究分野での学術的相互理解を目的として開催した。特に、MHD理論の理論的側面の広がり縦軸に、また対象とするプラズマ形状の広がり横軸として、有機的な議論ができるように内外の幅広い研究者にご参加いただいた。その結果、核融合プラズマでのMHD理論に関する最先端の重要な研究成果が随所で報告され、非常に活発な議論が交わされた。また、核融合研究所の共同研究という観点からみても、所内外の研究者間での、異なるアプローチからの示唆、共通問題の認識、新しいアイデアの啓発等を通じて極めて有意義であった。また、それぞれ個別の共同研究課題に対しても大きく資するものであったと思われる。そこで、本作業会での成果を今後のMHD理論研究の一助とするために、講演内容の集録を作成することとした。本集録が今後のMHD理論の共同研究の発展に大いに寄与することを祈念する。

最後に、ご多忙の中、本作業会に参加していただき、また本集録の原稿を執筆していただきました参加者の皆様に厚く御礼申し上げます。

2007年7月

合同作業会幹事：

核融合科学研究所 大型ヘリカル研究部、理論・データ解析研究系
市口 勝治

目次

1. 円柱トカマクにおける外部MHDモードの3次元非線形シミュレーション
佐藤雅彦、中島徳嘉
2. MHD 方程式に対する保存型数値解法について
三好隆博、草野完也
3. ベータ上昇効果を含むヘリオトロンプラズマのマルチスケールシミュレーション
市口勝治、B. A. Carreras
4. HINT2 コードによるLID 配位のMHD 平衡解析
鈴木康浩
5. Multi-Scale-Nonlinear Interactions among Macro-MHD Mode, Micro-Turbulence, and Zonal Flow
石澤明宏、中島徳嘉
6. Motion of the plasmoid in torus plasmas
石崎龍一、中島徳嘉
7. Properties of ballooning modes in the planar axis Heliotron configurations with a large Shafranov shift
中島徳嘉、S. R. Hudson、C. C. Hegna
8. MHD固有値問題へのHamilton-Lie摂動論の応用
徳田伸二
9. Ellipticity of axisymmetric equilibrium with flow and pressure anisotropy in single-fluid and Hall MHD
伊藤 淳、J. J. Ramos、中島徳嘉
10. 流れのあるプラズマ中での外部揺動による磁気島成長
石井康友、安積正史、A. Smolyakov

- 1 1 . ピーリング・バルーニングモードの安定性に対するプラズマ上部形状の影響に関する数値解析
相羽信行、徳田伸二、滝塚知典、栗田源一、小関隆久
- 1 2 . MHD平衡計算を考慮した簡約化MHD方程式の有限要素法による解析
中村祐司、川口哲司、大平丈夫
- 1 3 . 理想MHDと非圧縮性MHDとの比較
山田豪史、中村祐司、近藤克己
- 1 4 . 球状トカマクにおけるELMの非線形シミュレーション
水口直紀、R. Khan、林 隆也、中島徳嘉
- 1 5 . Construction of a kinetic simulation model of electromagnetic plasmas
藤堂 泰

円柱トカマクにおける外部 MHD モードの 3次元非線形シミュレーション

佐藤雅彦, 中島徳嘉
核融合科学研究所

Abstract

簡約化 MHD 方程式を用いて、円柱トカマクにおける電流勾配駆動型抵抗性壁モードの 3次元非線形シミュレーションを行った。初期段階では、 $(m, n) = (3, 1)$ モードと $(5, 2)$ モードにより、コアプラズマの周辺部において磁気面は破壊され、温度の低下が見られる。ここで、 m, n はそれぞれポロイダルモード数、トロイダルモード数である。周辺部における温度の低下領域が $q = 2$ の有理面に達すると、 $(m, n) = (2, 1)$ モードが不安定化される。これにより、最終的に $(2, 1)$ モードが最も支配的なモードとなり、プラズマは大きく変形し、ディスラプションが発生する。

1. Introduction

理想外部キンクモードは、完全導体壁をプラズマ表面に十分近づけることにより、完全に安定化することが可能である。しかし、実際の壁には有限の電気抵抗率が存在するため、不安定性を完全に安定化することができず、ゆっくり成長する抵抗性壁モードが現れる。現在の高ベータトカマクプラズマでは、抵抗性壁モードによるベータ限界が重要な問題の一つになっており、その抑制に関する研究が多くなされている。低ベータプラズマにおいても、早い電流の立ち上げにより、プラズマ周辺において電流勾配が大きくなると、抵抗性壁モードが観測されるようになる。JT-60U においては、低ベータプラズマ中で、 $m=3$ の抵抗性壁モードが発生し、その後、プラズマディスラプションが観測されていることが報告されている¹⁾。低ベータプラズマにおいては、電流勾配により抵抗性壁モードは駆動されている。低ベータ円柱トカマクにおけるシングルヘリシティを仮定したシミュレーションによれば、プラズマ内において磁気シアが存在するときは、外部モードの影響はプラズマ周辺に限定され、ディスラプションは発生しない²⁾。したがって、ディスラプションを発生させるような大きなプラズマの遥動が生ずるためには、他のヘリシティとのモードカップリングの影響が重要であると考えられる。そこで本研究では、低ベータ、円柱トカマクモデルを仮定した簡約化 MHD 方程式を用いて、電流勾配駆動型抵抗性壁モードのマルチヘリシティシミュレーションを行い、抵抗性壁モードの発生によるプラズマディスラプションの発生メカニズムについて調べた。

2. Numerical model

本研究では、低ベータ円柱トカマクを仮定し、円柱座標系 (r, θ, ζ) のもとで、以下の簡約化 MHD 方程式系を用いて非線形シミュレーションを行っている。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\phi, \psi] - \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \eta J - E \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\phi, U] + [J, \psi] - \frac{\partial J}{\partial \zeta} + \nu \nabla_{\perp}^2 U \quad (2)$$

$$J = \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (3)$$

$$U = \nabla_{\perp}^2 \phi \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = 0 \quad (5)$$

$$\eta \propto T^{-3/2} \quad (6)$$

ここで、ポロイダルフラックス ψ と流れ関数 ϕ は、

$$\mathbf{B}_\perp = -\nabla_\perp \psi \times \mathbf{e}_\zeta \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_\perp = \nabla_\perp \phi \times \mathbf{e}_\zeta \quad (8)$$

で定義され、 \mathbf{e}_ζ はトロイダル方向の単位ベクトルである。また、ポアソン括弧 $[]$ は、 $[f, g] = \nabla f \times \nabla g \cdot \mathbf{e}_\zeta$ で定義される。長さはプラズマ小半径 a で、時間はアルフベン時間 $\tau_a = R\sqrt{\mu_0\rho_0}/B_0$ で規格化され、ここで R はプラズマ大半径、 B_0 はトロイダル方向の磁場である。

抵抗性壁モードは、外部 MHD モードであるため、共鳴有理面はコアプラズマの周りにある真空領域に存在する。本研究では、擬真空モデルを用い²⁾⁻⁴⁾、真空領域を抵抗が非常に大きい低温プラズマで置き換えることにより、自由境界問題を取り扱っている。したがって、 $0 \leq r < a$ に温度の高いコアプラズマ、 $a \leq r < r_w$ に温度の低い擬真空プラズマが存在している。本研究では、プラズマ中心の抵抗値 η_0 と擬真空プラズマの抵抗値 η_w の比を $\eta_w/\eta_0 = 10^7$ と仮定している。 $r_w \leq r \leq r_w + \delta$ には抵抗値 η_w 、厚さ δ の抵抗壁を置く。ここでは、 $\eta_w/\eta_0 = 10^3$ 、 $\delta = 0.02a$ を仮定している。抵抗壁の外側の領域 $r_w + \delta < r$ には擬真空プラズマを置き、簡単のために $r = r_d$ に完全導体壁を置く。ここでは、 $r_d = 2a$ を仮定しているが、本研究で用いている平衡分布においては、線形成長率に大きな影響を与えない。

ポロイダルフラックスと渦度方程式に対しては、小半径方向に2次精度の中心差分を用い、ポロイダル、トロイダル方向にはフーリエ級数展開することにより差分化している。時間積分は、予測子・修正子法を用いている。それに対して、温度の方程式は CIP 法⁵⁾ の1種である有理 CIP 法⁶⁾ により計算を行っている。ポロイダルフラックス ψ に対しては、 $0 \leq r \leq r_d$ の全領域で解き、完全導体壁 ($r = r_d$) において $\psi(r_d) = 0$ 、磁気軸 ($r = 0$) においては、ポロイダルモード数が $m = 0$ に対しては、径方向微分の値が0、ポロイダルモード数が $m \neq 0$ に対しては、振幅が0である境界条件を課している。渦度 U 、温度 T の方程式は、 $0 \leq r \leq r_d$ の領域に対して解く。渦度、流れ関数の境界条件に関しては、磁気軸 ($r = 0$) では、ポロイダルフラックス ψ の境界条件と同じ境界条件を課し、抵抗壁の表面 ($r = r_w$) においては振幅が0であるとしている。温度 T に対しては、抵抗壁の表面 ($r = r_w$) において、 T の摂動成分、および、 $\partial T/\partial r$ 、 $\partial T/\partial \theta$ が0としている。

本研究では、ポロイダルモード数 m とトロイダルモード数 n が、 $(m, n) = (3, 1)$ モードの抵抗性壁モードを取り扱う。そのため、 $q = 3$ の有理面が擬真空プラズマ中にあるような平衡を考える (図1)。このとき、 $q = 2, 2.5$ の有理面がそれぞれ、 $r_s = 0.708a, 0.96a$ とプラズマ内に存在し、 $(m, n) = (2, 1), (5, 2)$ モードも線形不安定である。 $(m, n) = (3, 1), (5, 2), (2, 1)$ モードの線形成長率は、それぞれ、 $\gamma\tau_a = 2.3 \times 10^{-2}, 5.8 \times 10^{-3}, 3.4 \times 10^{-5}$ であり、 $(m, n) = (2, 1)$ モードの線形成長率は、 $(m, n) = (3, 1), (5, 2)$ モードの線形成長率よりも十分小さい。したがって、 $(m, n) = (3, 1), (5, 2)$ モードが成長する時間スケールにおいては、 $(m, n) = (2, 1)$ モードは線形安定であるとみなしてよいと考えることができる。

3. Numerical results

まず、 $(m, n) = (3, 1), (5, 2)$ モードに対して、それぞれシングルヘリシティを仮定した場合の計算結果を図2に示す。図2(a)では磁気エネルギーを、(b)、(c)では飽和状態における磁気面の様子を示している。このように、シングルヘリシティの場合では、コアプラズマの周辺部付近に磁気島が形成されるが、中心部の磁気面は保たれ、ディスラプションは発生しない。

次に、 $(3, 1)$ モードと $(5, 2)$ モードに同時に微小な摂動を加えて、マルチヘリシティの計算を行った。このときは、モードカップリングにより、異なるヘリシティのモードも成長

する。図3では、105個のフーリエモード数を用いて計算を行ったときの、(3,1)、(5,2)、(2,1)モードの磁気エネルギーの時間変化を示している。(3,1)モードに関しては、シングルヘリシティの結果とマルチヘリシティの結果に大きな違いはない。一方、(5,2)モードに対しては、時刻 $t = 200\tau_a$ までは、線形成長をしているが、他の高次モードが成長し、(5,2)モードのエネルギーと同じオーダーになってくると、(5,2)モードの成長が一旦止まる。その後、再び成長し、(3,1)モードの振幅に近いレベルまで成長する。その結果、プラズマ周辺部の磁気面は乱れた構造に変化する。しかしながら、図4、5で示されるように、中心部での磁気面は維持され、閉じ込めの劣化はプラズマ周辺部に限定される($t = 330\tau_a$)。 (3,1)と(5,2)モードが成長している間は、(2,1)モードは、(3,1)モードと(5,2)モードのカップリングにより、早く成長する。そして、(3,1)と(5,2)モードが飽和した後も成長を続け、最終的には、(2,1)モードがもっとも支配的なモードとなる。その結果、ポロイダル断面でみると、プラズマは $m=2$ の大きな変形をし、プラズマ全体に閉じ込めの大きな劣化をもたらすことがわかる($t = 400\tau_a$)。 (2,1)モードが不安定化される前後での、電流と、抵抗の時間変化を図6で示している。 $q = 2$ の有理面がある $r \simeq 0.7a$ での電流勾配は数倍しか変化しないが、抵抗の変化は約5桁大きくなっていることがわかる。したがって、(2,1)モードの不安定化は、プラズマ周辺での温度の低下が原因のひとつではないかと考えられる。

数値計算においては、使用するメッシュ数、フーリエモード数は有限である。よって、数値計算結果のメッシュ数、モード数に対する依存性を検証する必要がある。図2(b)では、フーリエモード数を210個用いて計算したときの磁気エネルギーの時間変化を示している。最終的に(2,1)モードが不安定化され、もっとも支配的なモードになるという結果は変わらないものの、モード数が210個の場合では、(5,2),(2,1)モードのエネルギーの挙動が異なっている。今後、さらにモード数を増やした計算をすることで、非線形挙動の検証を行う必要がある。

4. Summary

低ベータ円柱トカマクモデルを仮定した簡約化MHD方程式を用いて、 $(m, n) = (3, 1)$ の電流駆動型抵抗性壁モードの3次元非線形シミュレーションを行った。初期段階では、(3,1)モードと(5,2)モードが支配的なモードであるため、プラズマ周辺部のみで、磁気面および流れの乱れが生じ、温度が低下する。(3,1)モードと(5,2)モードが成長している間は、(3,1)モードと(5,2)モードのカップリングにより、(2,1)モードは成長する。(2,1)モードが強く不安定化されることで、(3,1)モードと(5,2)モードの飽和後も(2,1)モードは成長する。最終的には、(2,1)モードがもっとも支配的なモードとなる。その結果、(2,1)モードによるプラズマの大きな変形が生じ、大きな閉じ込めの劣化をもたらすことがわかった。(2,1)モードの不安定化の原因として、コアプラズマ周辺部の温度の低下が考えられる。今後は、さらにフーリエモード数を多く用いた計算を行うことにより、計算結果の収束性を確かめる必要がある。

References

- 1) S. Takeji *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **78**, 447 (2002).
- 2) M. Sato and N. Nakajima, Phys. Plasmas **13**, 102507 (2006).
- 3) Yu. N. Dnestrovskii *et al.*, Sov. J. Plasma Phys. **11**, 616 (1985).
- 4) G. Kurita *et al.*, Nucl. Fusion **26**, 449 (1986).
- 5) T. Yabe and T. Aoki, Comput. Phys. Commun. **93**, 1 (1996).
- 6) F. Xiao, T. Yabe and T. Ito, Comput. Phys. Commun. **93**, 1 (1996).

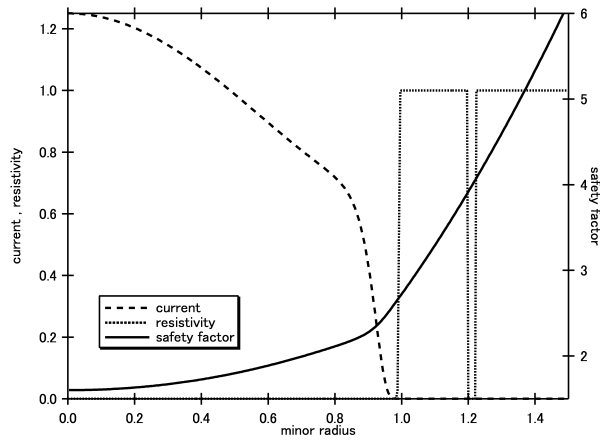


Figure 1: シミュレーションで用いた電流、抵抗、および、安全係数の平衡分布。

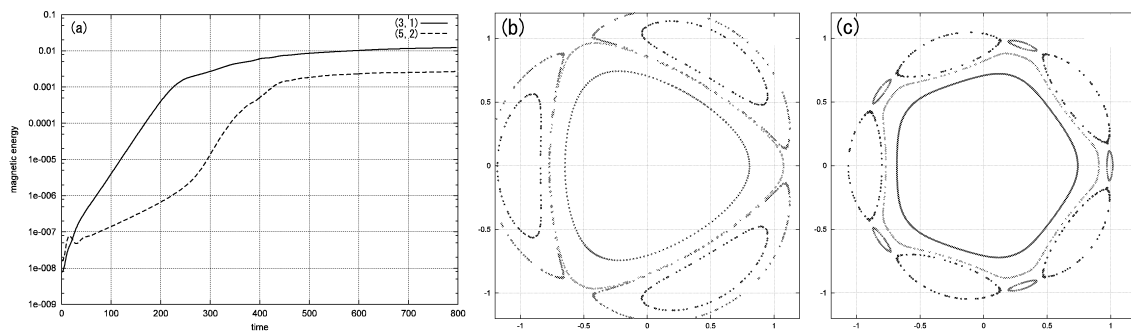


Figure 2: シングルヘリシティを仮定した場合における、(a)(3,1),(5,2) モードの磁気エネルギーの時間変化、(b)(3,1) モードに初期摂動を加えたときの飽和状態における磁気面、(c)(5,2) モードに初期摂動を加えたときの飽和状態における磁気面。

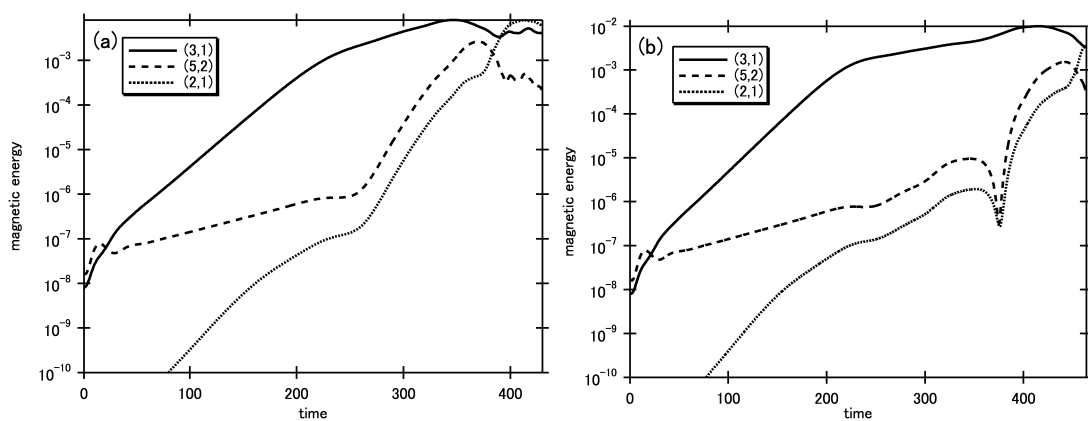


Figure 3: マルチヘリシティによる非線形シミュレーション結果。(a)105個のフーリエモード数を用いて、(b)210個のフーリエモード数を用いて得られた $(m, n) = (3, 1), (5, 2), (2, 1)$ モードの磁気エネルギーの時間変化。

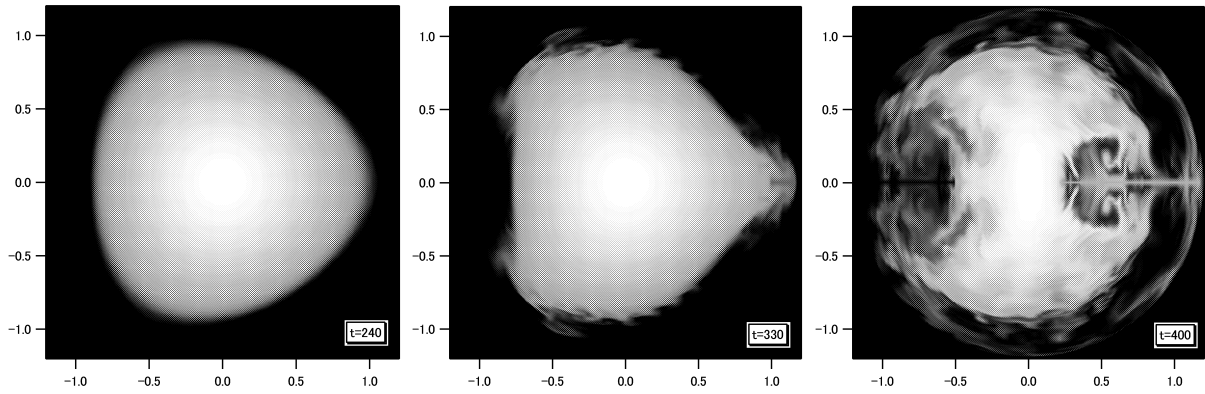


Figure 4: ポロイダル断面でみた温度分布の時間変化。左から $t = 240\tau_a$, $330\tau_a$, $400\tau_a$ での温度分布を示している。

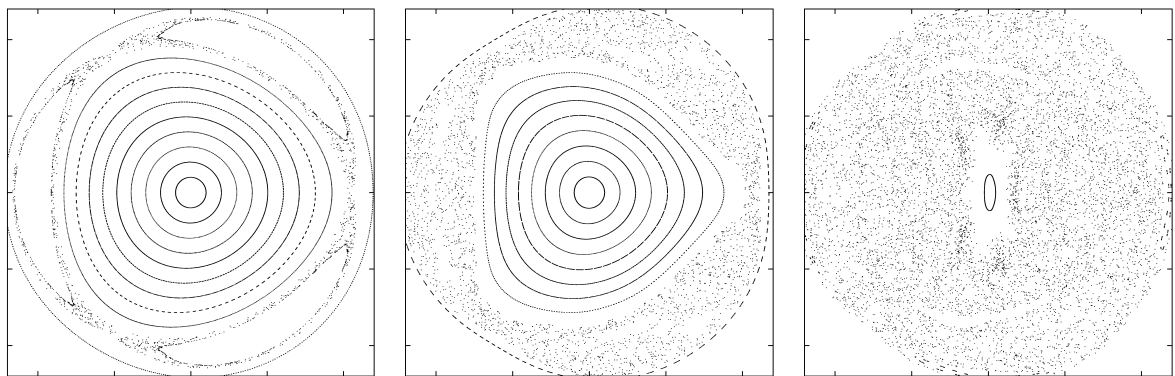


Figure 5: ポロイダル断面でみた磁気面の時間変化。左から $t = 240\tau_a$, $330\tau_a$, $400\tau_a$ での磁気面の様子。

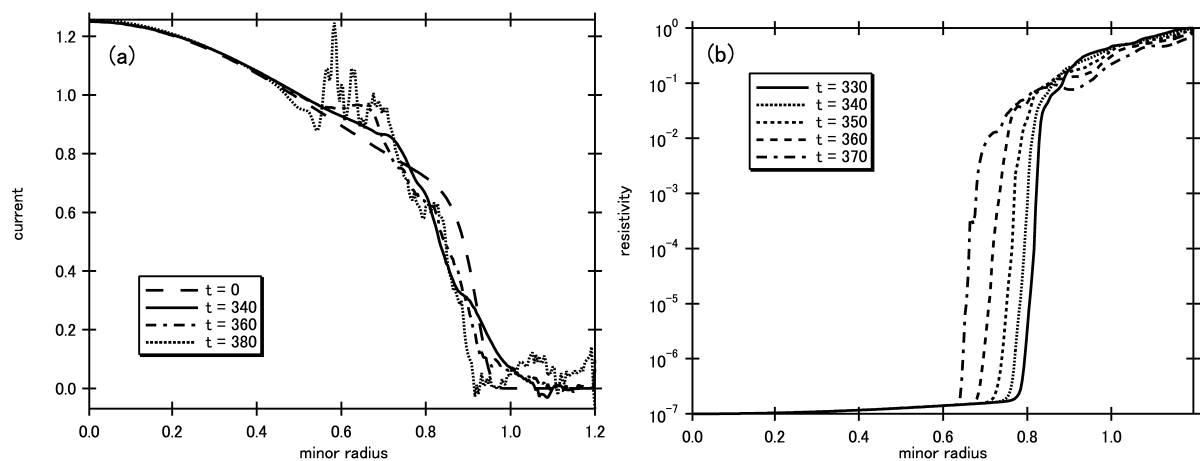


Figure 6: (a) 電流と (b) 抵抗の径方向分布の時間変化。平衡量と $(m, n)=(0, 0)$ の摂動成分の和を示している。

MHD 方程式に対する保存型数値解法について

三好隆博（広島大学大学院理学研究科）

草野完也（独立行政法人海洋研究開発機構地球シミュレータセンター）

1. はじめに

プラズマのグローバルな構造やダイナミクスの理解には高精度で安定な MHD シミュレーションが不可欠である。特に、宇宙・天体プラズマにおいては衝撃波など不連続がしばしば発生するため、近年保存型解法に基づく様々な衝撃波捕獲法が精力的に開発されてきた。しかし、保存型 MHD 解法を現実の問題に適応するためには幾つかの重要な問題点を解決する必要がある。そこで本報告では MHD 方程式に対する保存型数値解法の現状と課題及び展望についてまとめる。

2. 基礎解法

理想 MHD 方程式は非線形双曲型方程式であるため、たとえ初期値が滑らかであっても有限時間で不連続解（弱解）が発生し得る。それ故、長時間安定に数値シミュレーションを実行するためには、弱解を数値振動無く安定に捕獲できる数値解法、いわゆる衝撃波捕獲法を構築する必要がある。不連続においてはもはや微分は評価できず、弱解は MHD 方程式の積分形式（保存則）を満たす解である。したがって、基礎解法は保存形式の MHD 方程式に基づく保存型解法が適切であると考えられる。実際に、保存型解法が適合且つ安定な場合、数値解が弱解に収束することが理論的に示されている[1]。一方で、非保存型解法は適合且つ安定であっても、物理的な解に収束する保証がないことも示されている[2]。

これまでに Euler 方程式に対して衝撃波捕獲法の基礎解法として、Godunov 型解法（近似リーマン解法）[3,4,5]、流束ベクトル分離法[6,7,8]、AUSM 型解法[9,10]をはじめ数々の衝撃波捕獲法が提案されてきた。しかし、MHD 方程式は Euler 方程式に比較して極めて複雑であり、Euler 方程式に対する数値解法を単純に拡張できない。実際に、AUSM 型解法は半経験的な数値解法であり、これまでにまとまった報告はない。また、通常の流速ベクトル分離法についても、Euler 方程式と異なり流束関数の保存量に対する一次同次性がなく、解法の構築は困難である。一方、気体運動論に基づく流束ベクトル分離法は MHD 方程式に対して適応可能[11]であるが、数値解法の安定性や正值性をはじめとする基礎的性質は全く明らかでない。したがって、現状では MHD 方程式に対する衝撃波捕獲法として、近似リーマン解法が基礎面においても応用面においても主流となっている。特に、線形近似リーマン解法[12]は MHD 方程式に対する標準的解法として実問題にも多数適応されている（例えば、[13]）。線形近似リーマン解法では、局所的に方程式を線形化し（ヤコビアン $A \equiv \partial F / \partial U$ を局所的に固定し）元の方程式を各波（特性量）に対する独立した線形移流方程式に分解することにより、各波の挙動が適切に評価される。それ故、弱解を非常に鋭く且

つ安定に解像が可能である。しかし、MHD 方程式のヤコビアン及び固有ベクトルは極めて複雑であり、それらの数値的評価には非常に計算時間を要する。また、固有ベクトルが特異性を持つため適切な再正規化が必要となる[12,14]。さらに、線形近似リーマン解法では密度及び圧力の正值性を維持できないことも示されている[15]。宇宙・天体プラズマでは低密度、低圧力環境は頻出するため、現実的なパラメータ領域の数値シミュレーションを実行するためには正值性の維持は極めて重要である。そこで我々は局所線形近似とは全く異なる別の近似（HLL 型近似）を用い新たな非線形近似リーマン解法を構築した[16]。特に MHD 方程式に対する最も高解像な HLL 型数値解法は、孤立した接触不連続、接線不連続及び回転不連続が厳密に解像できるため、HLLD 近似リーマン解法（D は Discontinuities の頭文字）と呼ばれる。この手法では密度及び圧力の正值性が厳密に維持されることが理論的に証明された。また、数値実験から線形近似リーマン解法と全く同等の解像度を持ち、計算効率が高いことが示された。したがって、HLLD 近似リーマン解法は高解像、高効率且つロバストであり、線形近似リーマン解法に代わり MHD 方程式に対する標準的衝撃波捕獲法になると期待される。

3. 高次精度化

前節で示した基礎解法の空間精度は一般に低次精度（通常一次精度）であり、格子数などの制限から現実の応用問題では基礎解法のみでは不十分である（時間積分については高次の Runge-Kutta 法が利用可能[17]）。そこでセル境界における流束または変数（保存量、基本量または特性量）を近接格子から高次補間することにより、精度次数をあげることができる。ただし、単純な多項式による補間では非物理的な数値振動が発生することが知られている。そこで制限関数を導入し、全変動（Total Variation : $\Sigma |u_{i+1} - u_i|$ ）が増加しないように補間する。こうして構築される解法は TVD 法と呼ばれる[18]。特に、変数を補間して次数をあげる手法は MUSCL 法[19]と呼ばれ、実問題に広く利用されている。しかし、一方で TVD 法では滑らかな極値も数値粘性により潰してしまう。それ故、特に圧縮性乱流計算においては、TVD 条件の上位の概念に基づき ENO 法[20]や WENO 法[17]が用いられる。さらに分散誤差を減じるためコンパクト差分法[21]と WENO 法を組み合わせた手法[22,23]なども考案されている。ただし、MHD 方程式に対する応用研究は未だなされておらず、今後の研究が待たれる。

4. 多次元化

実際の物理的課題は一般には多次元問題である。衝撃波捕獲法は各次元に対して一次元衝撃波捕獲法に基づく数値流束を与えることにより多次元化される。しかし、MHD 方程式においては、衝撃波捕獲法の単純な多次元化は数値的な単磁極（ $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ ）を生成することが知られる。一旦、単磁極が生成されると、磁力線方向の非物理的な力が生じ最終的に数値計算が破綻する。したがって、MHD 方程式に対する衝撃波捕獲法の多次元化では、

数値的単磁極除去法の構築が極めて重要である。これまで提案されてきた単磁極除去法は、プロジェクション法[24]、移流・拡散法[25,26]、Constrained Transport 法 (CT 法) [27] に大別される。

プロジェクション法では数値計算の後処理として数値的単磁極を除去する。一般に、数値計算により得られる解は $\nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi$ とソレノイダル部分と非ソレノイダル部分に分離できる。プロジェクション法ではソレノイダル部分のみが物理的な意味のある解と考え、数値計算で得られた予備的解から非ソレノイダル部分を除去する。非ソレノイダル部分はポアソン方程式を解くことにより評価できる。プロジェクション法で得られる解は予備的解に対する最小補正場であることが示されている[28]。一方で、プロジェクション法では毎ステップ (もしくは数ステップ毎に) ポアソン方程式を解く必要があり、計算時間が極めて膨大である。また、磁場の数値解のみを補正するため、特に低ベータ領域においては圧力の正值性の維持が困難となる。

移流・拡散法では単磁極の存在を許容し、単磁極の移流や拡散を考慮することにより、数値的単磁極を小さい値に抑制する。Powell[25]は MHD 方程式に単磁極に関するソース項を付加することで、単磁極を流体速度 \mathbf{u} により移流、系外へ排除する手法を提案した。この手法ではソース項は陽的に評価できるため、計算の負荷は極めて少ない。しかし、ソース項を付与したため方程式は非保存形になり、結果としてジャンプ条件を満たさない場合があることが確認されている[28]。また、停留点付近では効率的に単磁極を除去できない。そこで Dedner et al. [26]は MHD 方程式に加え、新たに単磁極に関する線形スカラー移流方程式 ($\phi_t + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) と連立することにより、方程式を保存形に保ったまま単磁極をテレグラフ方程式に従い移流・拡散させる手法を提案した。この手法では単磁極は CFL 条件の許す最大の伝播速度 $\pm c_h$ で効率的に系外へ移流する。また、保存型解法であるためジャンプ条件も正しく満足する。一方で、超音速流中においてでも上流へ $\nabla \cdot \mathbf{B}$ が伝播するため、数値解が拡散的になるとの議論もある。

CT 法は磁場のソレノイダル条件を丸め誤差の精度で満足するよう誘導方程式に対してのみ特別な離散化を用いる手法である。密度、運動量など流体量をセル中心に定義するのに対して、磁場に対してはスタガード格子を採用し、セル境界面の中心に面に垂直な磁場成分を定義する。垂直磁場の時間発展は、ファラデーの法則よりセル境界面を囲む線分における電場の周回積分によって与えられる。ここで、線分には物理量が定義されていないため、電場は隣接セルから評価される。ただし、内挿する物理量やセルに対する重みについては一意ではなく、様々な手法が存在する[28]。磁場以外の流体量については 1 次元衝撃波捕獲法を用いる。CT 法では付加的な式を考慮する必要がなく、また陽的に磁場を計算するため計算効率もよい。しかし、磁場に対して特殊な離散化を用いるため、衝撃波捕獲法との整合性に関して問題がある。また、高次精度化、非構造格子に対する拡張に関しても研究の余地が残る。

各手法それぞれに大小の課題が残されるが、幾つかの課題については、現在、著者らに

より解決策を考案中である。しかし、ソレノイダル条件を自然に満足する「本質的に」多次元の MHD 衝撃波捕獲法の構築に関しては全く指針も無い状態であり、今後の革新的な研究が待たれる。

5. まとめ

本報告では MHD 方程式に対する衝撃波捕獲法の現状と課題についてまとめた。過去 20 年間の研究で基礎解法についてはほぼ完成されるに至った。計算法の高次精度化については、MHD シミュレーションでは 2 次精度または 3 次精度（実質的には 2 次精度以下）の TVD 法に留まるのが現状である。ENO 法/WENO 法などより高次の手法については応用研究が待たれる。また、多次元化においては単磁極除去法の構築が重要であり、これまでに幾つかの手法（プロジェクション法、移流・拡散法、CT 法）が提案されている。それぞれの手法に幾つかの課題が存在するが、課題の一部については遠くない将来に著者らにより解決策が提案されるであろう。

参考文献

- [1] P. D. Lax, B. Wendroff, 'Systems of conservation laws', *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 13, pp. 217-237, (1960).
- [2] T. Y. Hou, G. Le Floch, 'Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: Error analysis', *Math. Comput.* vol. 62, no. 206, pp. 497-530, (1994).
- [3] S. K. Godunov, 'A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations', *Math. Sbornik*, vol. 47, pp. 271-306, (1959) (in Russian). Translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, (1969).
- [4] P. L. Roe, 'Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes', *J. Comput. Phys.*, vol. 43, pp. 357-372, (1981).
- [5] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, D. M. Causon, 'On the choice of wave speeds for the HLLC Riemann solver', *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, vol. 18, pp. 1553-1570.
- [6] J. L. Steger, R. F. Warming, 'Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations', *J. Comput. Phys.*, vol. 40, pp. 263-293, (1981).
- [7] B. Van Leer, 'Flux vector splitting for the Euler equations', *ICASE Report 82-30*, (1982).
- [8] D. Hanel, R. Schwane, G. Seider, 'On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier-Stokes equations', *AIAA Paper 87-1105*, (1987).
- [9] M.-S. Liou, C. J. Steffen Jr., 'A new flux splitting scheme', *J. Comput. Phys.*, vol. 107, pp. 23-39, (1993).
- [10] Y. Wada, M.-S. Liou, 'An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities', *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 18, pp. 633-657, (1997).

- [11] K. Xu, 'Gas-kinetic theory-based flux splitting method for ideal magnetohydrodynamics', *J. Comput. Phys.*, vol. 153, pp. 334-352, (1999).
- [12] M. Brio, C. C. Wu, 'An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics', *J. Comput. Phys.*, vol. 75, pp. 400-422, (1988).
- [13] W. B. Manchester, T. I. Gombosi, I. Roussev, A. Ridley, D. L. De Zeeuw, I. V. Sokolov, K. G. Powell, G. T'oth, 'Modeling a space weather event from the Sun to the Earth: CME generation and interplanetary propagation', *J. Geophys. Res.*, vol. 109, A02107, (2004).
- [14] D. S. Balsara, 'Linearized formulation of the Riemann problem for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics', *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 166, pp. 119-131, (1998).
- [15] B. Einfeldt, C. D. Munz, P. L. Roe, B. Sjogreen, 'On Godunov-type methods near low densities', *J. Comput. Phys.*, vol. 92, pp. 273-295, (1991).
- [16] T. Miyoshi, K. Kusano, 'A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics', *J. Comput. Phys.*, vol. 208, pp. 315-344, (2005).
- [17] C. W. Shu, S. Osher, 'Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes', *J. Comput. Phys.*, vol. 77, pp. 439-471, (1988).
- [18] A. Harten, 'High resolution schemes for hyperbolic conservation laws', *J. Comput. Phys.*, vol. 49, pp. 357-393, (1983).
- [19] B. Van Leer, 'Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method', *J. Comput. Phys.*, vol. 32, pp. 101-136, (1979).
- [20] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy, 'Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III', *J. Comput. Phys.*, vol. 71, pp. 231-303, (1987).
- [21] S. K. Lele, 'Compact finite difference schemes with spectral-like resolution', *J. Comput. Phys.*, vol. 103, pp. 16-42, (1992).
- [22] X. Deng, H. Zhang, 'Developing high-order weighted compact nonlinear schemes', *J. Comput. Phys.*, vol. 165, pp. 22-44, (2000).
- [23] Y.-X. Ren, M. Liu, H. Zhang, 'A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws', *J. Comput. Phys.*, vol. 192, pp. 365-386, (2003).
- [24] J. U. Brackbill, D. C. Barnes, 'The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations', *J. Comput. Phys.*, vol. 35, pp. 426-430, (1980).
- [25] K. G. Powell, 'An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)', ICASE Report 94-24, (1994).
- [26] A. Dedner, F. Kemm, D. Kroner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, M. Wesenberg, 'Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations', *J. Comput. Phys.*, vol. 175, pp. 645-673, (2002).

- [27] D. S. Balsara, D. Spicer, 'A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations', J. Comput. Phys., pp. 270-292, (1999).
- [28] G. Toth, 'The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constrained in shock-capturing magnetohydrodynamic codes', J. Comput. Phys., vol. 161, pp. 605-652, (2000).

ベータ上昇効果を含むヘリオトロンプラズマのマルチスケールシミュレーション

市口勝治 (核融合科学研究所),
B. A. Carreras (*Oak Ridge National Laboratory*)

Abstract

ベータ上昇時におけるヘリオトロンプラズマのMHD的性質を解析するために、マルチスケール非線型MHD数値解析スキームを開発した。この手法では、速いタイムスケールのダイナミクスは簡約化MHD方程式に基づく非線型MHDコードで計算され、遅いタイムスケールの発展は三次元静止平衡コードで計算される。プラズマの時間発展は両者を交互に計算することによって得られる。このとき、平衡量の時間発展においては、線型補間を用いることによって滑らかに変化するようにした。このスキームを大型ヘリカル装置(LHD)に適用した結果、交換型モードによる圧力分布の自己組織化が見られた。

1. 序論

LHD実験においては、理想交換型モードが線型不安定と予想されていた領域で良好な閉じ込めが観測されている。そこで、この状況の安定化メカニズムを調べるために、簡約化MHD方程式に基づくNORMコードを開発してきた[1]。このコードを用いた最初の計算では[1, 2]、低ベータでの非線型発展と、その飽和圧力分布を用いた高ベータでの計算を行った。その結果、低ベータでの圧力分布の局所的な平坦化が、高ベータでの破壊的な現象を抑制する効果があることが得られた。

ところが、この計算では、それぞれのベータ値での計算が独立になされ、両者の間での摂動量の連続性が無かった。ベータ上昇時におけるプラズマの挙動を矛盾無く理解するためには、プラズマの連続的な時間発展を追跡する必要がある。簡約化MHD方程式の定式化においては、2章で述べるように、磁力線の平均曲率項及びプラズマ境界の位置は平衡量だけに依存する。従って、平衡を固定した非線型発展、たとえば加熱項による圧力分布上昇だけを取り入れたような時間発展法では、これらの量のベータ依存性が取り入れられないことになる。一方、圧力駆動型不安定性は、この曲率項やプラズマ位置に大きく依存する。このことから、ベータ上昇効果を簡約化方程式で取り扱うためには、摂動量の時間発展だけでなく平衡量のベータ上昇効果も同時に取り入れなければならないことになる。しかし、平衡量が10msec程度のゆっくりしたタイムスケールで変化するのに対し、MHDの摂動量は、 $0.5\mu\text{sec}$ 程度の速いタイムスケールで変化する。そこで、この両者の時間発展を取り扱うために、マルチスケールシミュレーション法を開発した。このマルチスケール手法では、三次元自由境界静止平衡コードVMEC[3]とNORMコードを交互に計算する。さらに、平衡量の線形補間を行うことによって、摂動量の連続性を高めた。この手法を、LHDプラズマに適用し、ベータ上昇時における圧力分布の連続的な変化に注目した[4]。

2. 計算コードの概要とマルチスケール手法

今回開発したマルチスケール手法では、三次元自由境界静止平衡コード VMEC と非線型 MHD 時間発展コード NORM を組み合わせて計算を行う。

2.1 NORM コードにおける簡約化 MHD 方程式の概要

本スキームでは、摂動の時間発展は NORM コードを用いて計算する。NORM コードは、ポロイダル磁場フラックス Ψ 、流れ関数 Φ 、プラズマ圧力 P に対する非線型簡約化 MHD 方程式を解くコードである。高次のトロイダル効果を含むステラレータ展開法を用いた簡約化 MHD 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \Phi + \eta J_\zeta, \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 (-\mathbf{B} \cdot \nabla J_\zeta + \nabla \Omega \times \nabla P \cdot \nabla \zeta) + \nu \hat{\nabla}_\perp^2 U, \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dt} = \kappa_\perp \Delta_* P + \epsilon^2 \kappa_\parallel \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla P). \quad (3)$$

(1) はオームの法則、(2) は渦度の方程式、(3) は圧力の発展方程式を示している。ここで、 ζ はトロイダル角を示し、また、 ∇_\perp は $\nabla_\perp = \nabla - \nabla \zeta (\partial / \partial \zeta)$ で定義される。磁気微分演算子は

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = g \frac{R_0 B_0}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \nabla \Psi \times \nabla \zeta \cdot \nabla \quad (4)$$

で与えられ、対流微分及び磁場に垂直な速度成分はそれぞれ

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla, \quad \mathbf{v}_\perp = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \nabla \Phi \times \nabla \zeta \quad (5)$$

で与えられる。係数 g は平衡トロイダル磁場における反磁性効果を示している。 $\nabla \Omega$ の項は平均磁力線曲率を表し、圧力駆動型モードを駆動する。 Ω は次式で与えられる。

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(1 + \frac{|\mathbf{B}_{eq} - \overline{\mathbf{B}_{eq}}|^2}{B_0^2} \right) \quad (6)$$

ここで、'eq' は平衡量を意味し、上付きバーはトロイダル方向に平均化された量をあらわしている。この式から、平均磁力線曲率項には摂動量が入っていないことに注意。 U 及び J_ζ は渦度及び電流密度のトロイダル成分であり、それぞれ

$$U = \hat{\nabla}_\perp^2 \Phi = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \nabla \cdot \nabla_\perp \Phi, \quad \text{and} \quad J_\zeta = \Delta_* \Psi = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \nabla \cdot \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \nabla_\perp \Psi, \quad (7)$$

で与えられる。 η 、 ν 、 κ_\perp 、 κ_\parallel はそれぞれ、電気抵抗、粘性係数、磁力線に垂直方向及び平行方向の熱拡散係数である。

この方程式に矛盾のない平衡量は VMEC で得られる三次元平衡解をトロイダル方向に平均化することによって得ることができる。平均化された平衡量や NORM コードにおける数値解析手法の詳細は、Ref.[1] を参照されたい。

2.2 VMEC コードにおける自由境界平衡計算

VMEC コードは、有限ベータでの入れ子上の磁気面を持つ三次元平衡の存在を仮定して計算する MHD 平衡計算コードであり、逆解法に基づく繰り返し計算によって解を求める。計算法の詳細については、Ref.[3] を参照されたい。ただし、注意すべき点として、自由境界条件の下での計算においては、プラズマ境界を決定するための束縛条件が必要となることが挙げられる。VMEC コードでは、あるプラズマ境界の形状が与えられると、その内側のプラズマ領域において平衡が計算される。この結果から境界上での磁場が計算され、境界外側の真空領域での磁場との圧力バランスによって、境界の位置が更新される。このとき真空領域での磁場は、ベータがゼロのときの磁場と有限ベータでのプラズマ電流の足し合わせによって決まる。この計算を繰り返すことによって自由境界条件の下での平衡が決定される。この計算において、プラズマ内部の計算を行うときには、境界形状の情報さえあれば外部磁場の情報は必要ない。つまり、任意の規格化定数を用いて内部磁場を規格化して定式化することができる。一方、外部真空磁場はゼロベータの磁場の規格化定数で規格化されている。そのため、外部真空磁場との圧力バランスを計算するためには、内部磁場と外部磁場の規格化定数との比が必要となる。そして、この比を与えることがプラズマ境界を決定する束縛条件に対応する。VMEC コードでは、この規格化定数の比を、外部磁場規格化定数で規格化された、プラズマ境界上でのプラズマ領域のトロイダルフラックスを与えることで決定している。すなわち、境界上でのトロイダルフラックスが与えられれば、プラズマ領域のポロイダル断面の面積情報から同じ規格化の下でのプラズマ内の磁場が計算できるので、それを用いて圧力バランスの計算を行っている。しかし、ベータ値を変化させて平衡計算する場合、どのように束縛条件を与えるかについては、完全には確立されていない。

最も容易に与えることができる束縛条件の与え方は、ゼロベータでのトロイダルフラックスを真空磁場配位から計算し、それを入力として固定するという方法である。この場合、ベータ値が増加するにつれて、プラズマの反磁性効果のために、外部磁場の弱いトラス外側へ移動していく。同時に、ベータ値の増加によってプラズマ内部のトロイダル磁場が減少し、そのためプラズマ領域が増加していくという結果が得られることになる。ところが、入れ子上の磁気面の存在を仮定しない HINT コードの計算では、高ベータのヘリオトロンプラズマでは、周辺領域での磁気面構造の崩壊に伴うプラズマ領域の減少が示されている。また、ヘリオトロン配位では、真空磁場配位においてセパラトリックス近傍は三次元効果のためにストキャスティックな構造を持っており、有限ベータにおいてもこの領域には平衡が存在しないであろうと考えられるのに対し、トロイダルフラックス固定での VMEC の計算では、反磁性効果によるトラス外側へ移動とプラズマ領域の拡大によって、この領域を飲み込んだような非現実的と思われる解が得られることになる。

上記の難点を解決する方法として、プラズマ境界上のある一点を固定するという束縛条件を与えることが考えられる [5]。そこで、プラズマ境界の横長断面のトラス外側の点を固定するようにしておけば、ベータ値が増加してもそれよりは外側へ移動することができなくなる。その結果、高ベータにおいて最外殻磁気面がセパラトリックスに達することはない。また、この点は、仮想リミタの働きを示すため、ベータ上昇とともにプラズマ領域が減少していくことが模擬できる。この場合、与えられた点を通る境界が得られるようにトロイダルフラックスの値を決めなければならない。そこで、まずある値のトロイダルフラックスに対する自由平衡解を求め、その境界が与えられた点を通っていない場合には、通過すると考えられるトロイダルフラックスの値を計算し再度平衡解を求める。これを繰り返せば、求め

る平衡解を決定することができる。固定点として、真空配位における横長断面の最外点を利用するのが一つの方法ではあるが、その外側の若干ストキャスティックな領域までプラズマが存在している可能性がある。そこで本研究では、実験データも鑑みて真空磁場での最外点よりも少し外側に固定点を置いて計算した。

2.3 マルチスケール手法

ここでは、平均ベータ値 $\beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max}$ の間でのベータ上昇に対するマルチスケール時間発展手法について説明する。図 1 にこの手法のフローチャートを示す。

まず最初に、全ベータ区間、 $\beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max}$ を N 個の小区間に分割する。そして、 $\beta^i \leq \beta \leq \beta^{i+1}$ の小区間についての平衡量の時間発展について考察する。その一つ前の小区間、 $\beta^{i-1} \leq \beta \leq \beta^i$ の計算が修了した時点では、後で示すように、 β^i での平衡量と摂動量の全てが計算されている。このときの圧力分布の平衡量と摂動量の ($m = 0, n = 0$) 成分を P_{eq}^i と $\tilde{P}_{0,0}^i$ で表すことにする。ここで、 m 及び n はそれぞれポロイダル及びトロイダルモード数である。そして、平均圧力分布をこの両者の和で、

$$\langle P \rangle^i = P_{eq}^i + \tilde{P}_{0,0}^i \quad (8)$$

のように定義する。ここで、圧力分布がベータ値の上昇とともに相似的に上昇すると仮定し、 β^{i+1} での圧力分布を

$$P_{eq}^{i+1} = (\beta^{i+1}/\beta^i) \langle P \rangle^i \quad (9)$$

で与えることにする。この圧力分布を用いることによって、 β^{i+1} での平衡を VMEC コードで計算することができる。以下、このベータ値での平衡量を Q_{eq}^{i+1} で総称することにする。このようにして、摂動量による圧力分布の変形を取り入れながら、平衡量の発展を追跡する。ここで重要な点は、 $\beta^{i-1} \leq \beta \leq \beta^i$ の小区間の計算が修了した時点で、 β^{i+1} での平衡が計算できていることである。

次に、小区間 $\beta^i \leq \beta \leq \beta^{i+1}$ での NORM コードによる摂動量の時間発展法について述べる。NORM コードによる摂動の時間発展中は、平衡量は固定されたままである。従って、上記のとおり VMEC で小区間ごとに平衡計算を行ったものをそのまま使用した場合、その平衡量の変化が大きいと、小区間の間での摂動量のとびが大きくなる。しかし、一方で、小区間を小さくし、VMEC 計算を頻繁に行うことは、非常に時間がかかり、実際的ではない。そこで、VMEC 計算の回数を少なくしたまま摂動量の連続性を高めるために、以下のような平衡量の線型補間近似を導入する。まず、 $\beta^i \leq \beta \leq \beta^{i+1}$ の小区間をさらに $L + 1$ の領域に分割する。そして、 j 番目 ($0 \leq j \leq L$) の領域でのベータ値 $\beta^{i,j}$ 及び平衡量 $Q_{eq}^{i,j}$ を次のように線型近似して計算する。

$$\beta^{i,j} = \beta^i + j\delta\beta^i \quad \delta\beta^i = (\beta^{i+1} - \beta^i)/L \quad (10)$$

$$Q_{eq}^{i,j} = Q_{eq}^i + j\delta Q_{eq}^i \quad \delta Q_{eq}^i = (Q_{eq}^{i+1} - Q_{eq}^i)/L \quad (11)$$

ここで、 $\beta^{i,L} = \beta^{i+1,0} = \beta^{i+1}$ 及び $Q_{eq}^{i,L} = Q_{eq}^{i+1,0} = Q_{eq}^{i+1}$ であることに注意。そうして、各領域において、ベータ値 $\beta^{i,j}$ と平衡量 $Q_{eq}^{i,j}$ を固定して、ある時間区間 $\delta t(\tau_A)$ の間、摂動量の非線型発展を追跡する。そうして、小区間 $\beta^i \leq \beta \leq \beta^{i+1}$ の計算が終了した時点で、 $\tilde{P}_{0,0}^{i+1} = \tilde{P}_{0,0}^{i,L}$

とおけば、 β^{i+1} に対して、上記で説明した VMEC での計算を行うことができる。この手法を繰り返すことによって、ベータ値の効果を取り入れた連続的な非線型ダイナミクスを議論することができる。

3. LHD プラズマのベータ上昇時における圧力分布変化

ここで開発したマルチスケール時間発展手法を、真空磁気軸が $R_{ax} = 3.6\text{m}$ の LHD プラズマに適用した。この配位の実験においては、低ベータでは、圧力分布が

$$P_{eq}^0 = P_0(1 - \rho^2)(1 - \rho^8) \quad (12)$$

と consistent であることが得られている。ここで、 ρ は規格化されたトロイダルフラックスの平方根である。ところが、図 2 に示すように、この圧力分布を固定した場合、平衡はメルシエ不安定である。そこで、この配位におけるプラズマの非線型発展をマルチスケール手法で解析した。ここで用いたパラメータは、 $\beta_{min} = 0.221\%$ 、 $\beta_{max} = 0.498\%$ 、 $N = 5$ 、 $L = 20$ $\delta t = 500\tau_A$ である。また、VMEC の平衡計算においては、正味のトロイダル電流が 0 であるという条件を採用し、自由境界束縛条件として $R_{lim} = 4.63\text{m}$ を横長断面の最外固定点とした。さらに、NORM コードの計算における散逸量として、 $S = 10^6$ 、 $\nu = 1.5 \times 10^{-4}$ 、 $\kappa_{\perp} = 1.5 \times 10^{-6}$ 、 $\epsilon^2 \kappa_{\parallel} = 1.5 \times 10^{-2}$ を仮定した。ここで、 S は磁気レイノルズ数であり、 $S = \tau_R/\tau_A$ で定義される。 τ_R 及び τ_A はそれぞれ抵抗拡散時間、アルベン時間である。また、小半径 a とイオンの質量密度 ρ_m を用いて、粘性係数 ν は $a^2 \rho_m/\tau_A$ で、また、熱拡散係数 κ_{\perp} と κ_{\parallel} は a^2/τ_A で、それぞれ規格化された量である。また、 ϵ は逆アスペクト比を表す。

初期条件として、 $\beta_{min} = 0.221\%$ で $t = 10000\tau_A$ まで非線型発展させた状態を採用し、この時刻を $t = 10000\tau_A$ とした。そしてこの状態から、マルチスケール手法に基づいてベータ値を上昇させた。図 3 はこのときのベータ値の上昇の様子を示している。破線の時刻において、VMEC コードによる平衡量の更新を行った。ベータ値の上昇は直線のように見えているが、各平衡計算時刻間の間では、線型補間がなされていることに注意。図 4 は、このときの運動エネルギーの時間変化を示している。全運動エネルギーは滑らかに変化しており、その時間変化のスケールは平衡量のジャンプの時間間隔よりもずっと長い。このことから、このマルチスケール手法が、連続性の観点においてうまく機能していることがわかる。

図 5 は全圧力分布の時間変化を示している。この図から、圧力分布がベータ値とともに上昇しながら連続的に滑らかに変化していることがわかる。この分布変化は交換型モードの非線型発展によるものである。それぞれのベータ値で不安定な有理面においてこの交換型モードが駆動されはするが、崩壊現象を引き起こすほどには自由エネルギーの蓄積が起こらず、緩やかに飽和している。このことは、図 6 に示す平均圧力分布の時間発展からも理解できる。平均圧力分布で見ると、非線型飽和した領域は圧力分布が局所的に平坦化している。そのため、その共鳴面では、ベータ値が上昇しても大きな駆動エネルギーを持ちえず、崩壊現象を生じさせるような幅の広いモード構造が抑制される。このとき、別の有理面で新たなモードが駆動されるが、それ以下のベータ値では安定であったわけであるから、ベータ値が少し上昇して不安定になっても大きな自由エネルギーの崩壊にはつながらない。このようにして、LHD プラズマでは、ベータ値の上昇とともに交換型不安定性の自由エネルギーが緩やかに解放され、崩壊現象が抑制されていると考えられる。また、この現象は交換型モードによるプラズマ圧力の自己組織化現象であると理解できる。

4. 結論

ベータ上昇時におけるプラズマの非線型MHD解析を行うために、マルチスケールシミュレーション手法を開発した。この手法では、静止平衡の計算と非線型時間発展計算を交互に繰り返すことによって、連続的なベータ上昇の状況を解析する。この場合、前者の静止平衡計算は長い時間スケールのプラズマの変化を与え、後者の非線型時間発展計算は、短い時間スケールでの不安定性の発展を与えることになる。この手法をLHDプラズマに適用した結果、交換型モードによる圧力分布プロファイルに自己組織化現象が見られた。この効果によって、LHDプラズマでは高ベータ領域への安定な発展経路が確保されているのではないかと考えられる。

謝辞

本研究は、核融合科学研究所共同研究NIFS06KLDD006、NIFS06KNXN048、NIFS06KTAT011の支援のもとで行われた。また、本研究は、日本学術振興会、科学研究費補助金、基盤研究(C)17560736の援助も受けている。

References

- [1] Ichiguchi, K., et al., *Nucl. Fusion* **43**, 1101-1109 (2003).
- [2] Ichiguchi, K., et al., *Fusion Science and Technology* **46**, 34-43 (2004).
- [3] Hirshman, S. P., et al., *Comput. Phys. Commun.* **43**, 143-155 (1986).
- [4] Ichiguchi, K., et al., *J. Plasma Physics* **72**, 1117-1121 (2006).
- [5] Ichiguchi, K., et al., *Nucl. Fusion* **36**, 1101-1109 (1996).

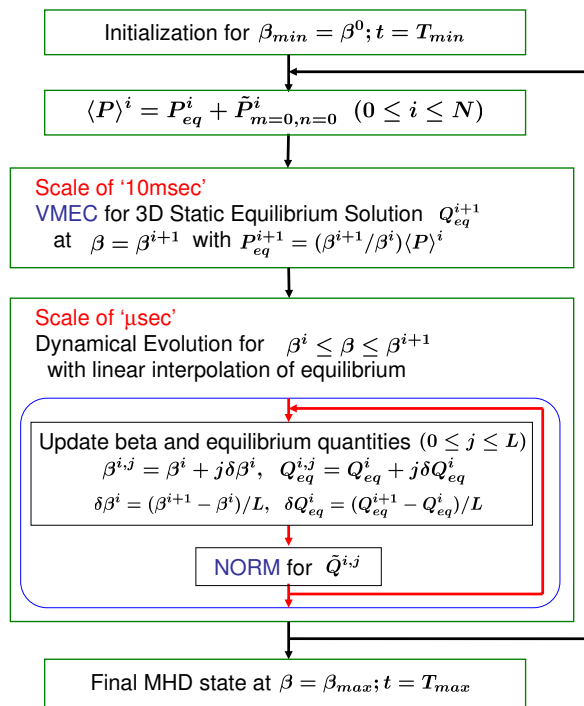


図 1 : マルチスケール手法のフローチャート。

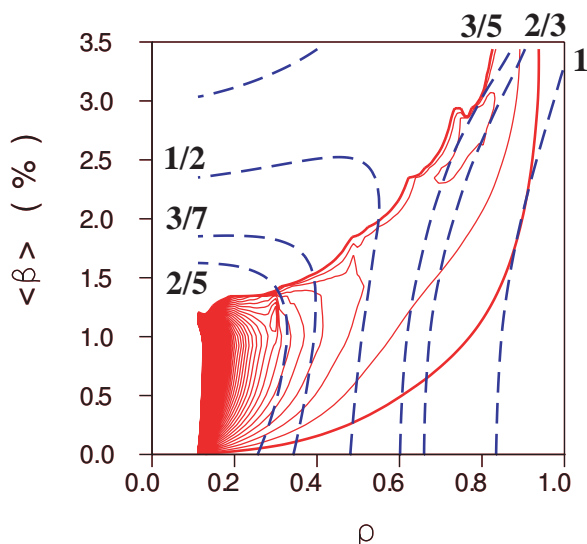


図 2 : LHD プラズマのメルシエ不安定領域。太線内が不安定領域を示し、その内部の細線はメルシエ量 D_I の等高線を示す。破線は代表的な有理面の位置を表す。数字は各有理面での回転変換の値。

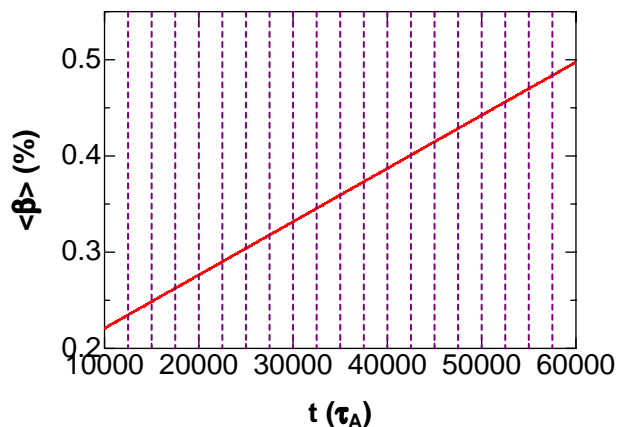


図 3 : ベータ値の時間発展。破線は VMEC 計算を行った時刻を表す。

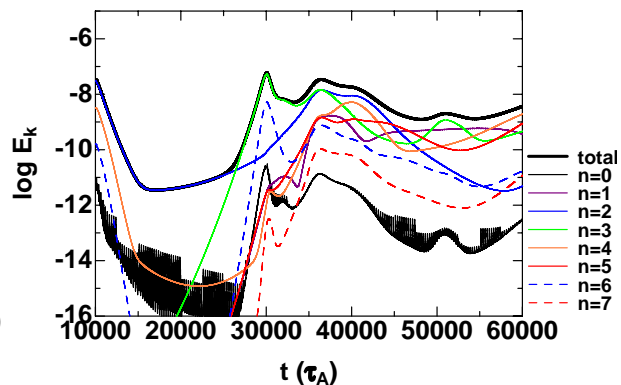


図 4 : 運動エネルギーの時間発展。

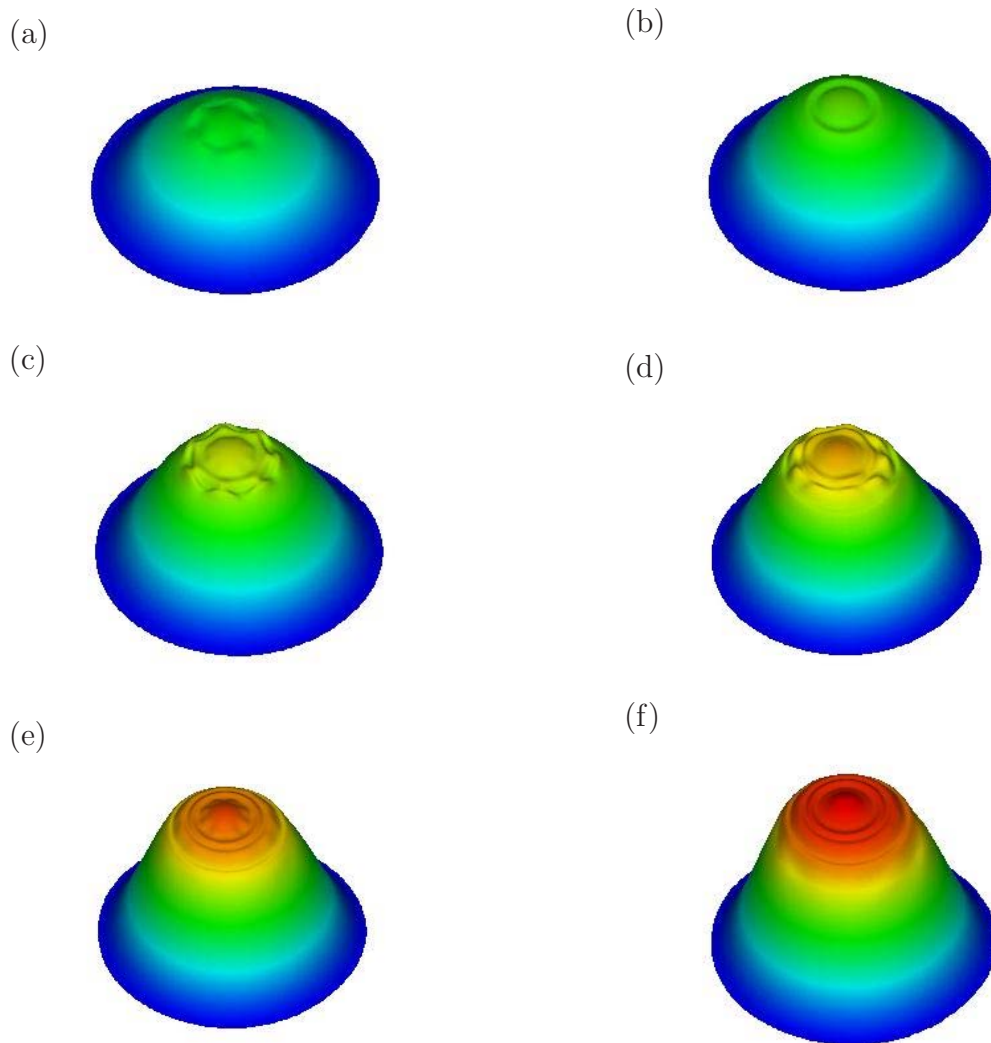


図5：圧力分布（鳥瞰図）の時間発展。(a) $t = 10000\tau_A$, (b) $t = 20000\tau_A$, (c) $t = 30000\tau_A$, (d) $t = 40000\tau_A$, (e) $t = 50000\tau_A$, (f) $t = 60000\tau_A$ 。

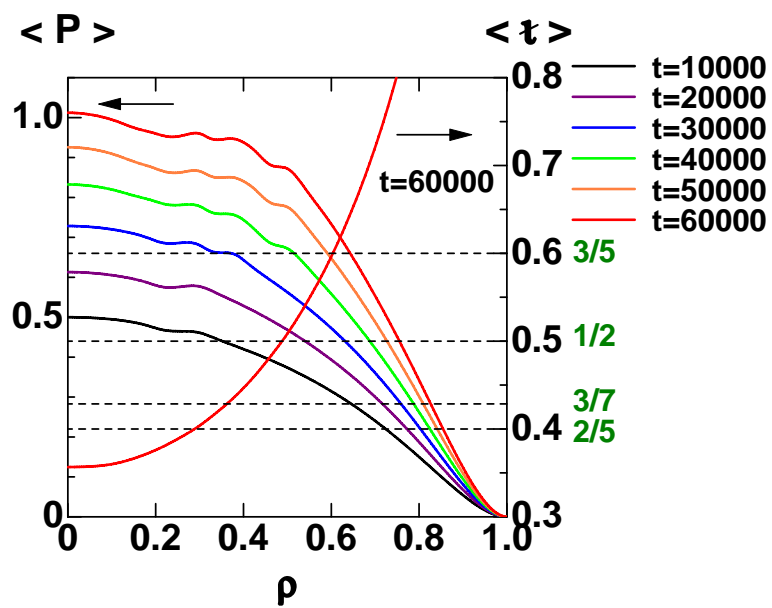


図6：平均圧力分布の時間発展。

HINT2 コードによる LID 配位の MHD 平衡解析

鈴木康浩

核融合科学研究所

概略

入れ子上の磁気面を仮定しない 3 次元 MHD 平衡計算コード HINT2 で $n/m=1/1$ の磁気島をもつ LHD 配位 (LID 配位) の MHD 平衡解析を行っている。本発表では LHD 実験第 9 サイクルで発見された LID 配位における SDC (Super Dense Core) プラズマの MHD 平衡計算結果を再構築する。

1. 序論

LHD 装置では外部摂動磁場コイルより、閉じ込め磁場中に真空中で大きな磁気島を作ることが可能である。特に、 $n/m=1/1$ の大きな磁気島を持つ配位は LID (Local Island Divertor) 実験の基本配位として理論的・実験的に解析が行われてきた[1]。LHD 実験第 9 サイクル、LID 実験においてコア領域に内部拡散障壁をもつ SDC (Super Dense Core) プラズマが発見された[2]。SDC プラズマは磁気軸位置が $R_{ax}=3.75\text{m}$ 、 $\gamma=1.254$ の配位にてもっとも高い性能が観測されている。SDC プラズマ形成の物理を理論的・実験的に考察するため、SDC プラズマ実験で得られた実験データを解析する上で、 $n/m=1/1$ の磁気島を持つ LHD プラズマの MHD 平衡解析を行うことは重要である。一方、LID 実験を進めるに当たり、LID 配位の最適化も重要な課題である。LID 装置の先端が $n/m=1/1$ の磁気島の O 点に位置することが望ましいが、実際にプラズマがある状態で $n/m=1/1$ の磁気島がどのような状態にあるか分からない。そこで、LID 装置の位置を変化させながら実験を繰り返すことにより最適な位置を割り出している。また、外部摂動磁場コイルが作る共鳴成分は $n/m=1/1$ だけではなく、 $n/m=1/2$ や $2/3$ といった他の低次共鳴成分が存在し、これらの共鳴で生成される低次の磁気島がどのように成長するかは閉じ込め配位の性能に直接影響する。このような問題を解決するために、有限ベータ効果が $n/m=1/1$ の磁気島に与える影響、また他の低次の共鳴 ($n/m=1/2$ 、 $n/m=2/3$) 与える影響を考察し、 $n/m=1/1$ の内側で決まる実効的な閉じ込め配位の境界形状の変化や磁気島幅の増減を解析することが重要である。

本研究では入れ子状の磁気面を仮定しない3次元MHD平衡計算コードHINT2[3]を用いて、 $n/m=1/1$ の磁気島を持つLHDプラズマのMHD平衡解析を行った。

2. 3次元MHD平衡計算コードHINT2

HINT2コードは、緩和法に基づいた3次元MHD平衡計算コードである。座標系として回転ヘリカル座標と呼ばれるオイラー座標を使用することにより、磁場構造に依存することなくロバストに3次元MHD平衡を求めることが出来る。緩和スキームは次の2ステップ(ステップA、ステップB)から成り立っている。

ステップAは次の方程式、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (1)$$

を満足する圧力分布を計算する。式(1)を直接解く代わりに計算グリッド点をスタート点とした磁力線を追跡し、その磁力線上の平均圧力、

$$p_{i+1} = \bar{p} \sim \int p_i dl / B / \int dl / B \quad (2)$$

を次のステップのための圧力として置き換える。ステップAの計算中、磁場 \mathbf{B} は固定されている。追跡する磁力線のスタート点は計算グリッドを採用するので、閉じた磁気面が存在する、しないにかかわらず圧力が計算される。

ステップBは次の散逸MHD方程式系、

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t &= -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0)] \\ \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3)$$

の時間発展を計算する。時間発展の計算中、圧力分布はステップAで計算されたものに固定されている。

ステップAとBを反復して計算し、 $d\mathbf{v}/dt=d\mathbf{B}/dt \sim 0$ となったとき3次元MHD平衡配位が得られる。

3. LID配位

LHD装置は1対の超伝導ヘリカルコイル、3対の超伝導ポロイダルコイルの他に、10対の常伝導摂動コイルを持つ(図1参照)。この外部摂動コイルの電流値を適切に調節することにより、 $n/m=1/1$ の磁気島を作り出すことが出来る。図1中で赤に着色されたコイル群はダイポ

ール磁場を、それ以外は
 四重極磁場を作り出す。
 $n/m=1/1$ 成分はダイポール
 磁場により作られるがトロイ
 ダルカップリングにより
 $n/m=1/2$ 成分も作り出され
 てしまう。四重極磁場は
 $n/m=1/2$ 成分を消去するた
 めに使用される。図2に、
 $R_{ax}=3.75m$ 、 $\gamma=1.254$ 、

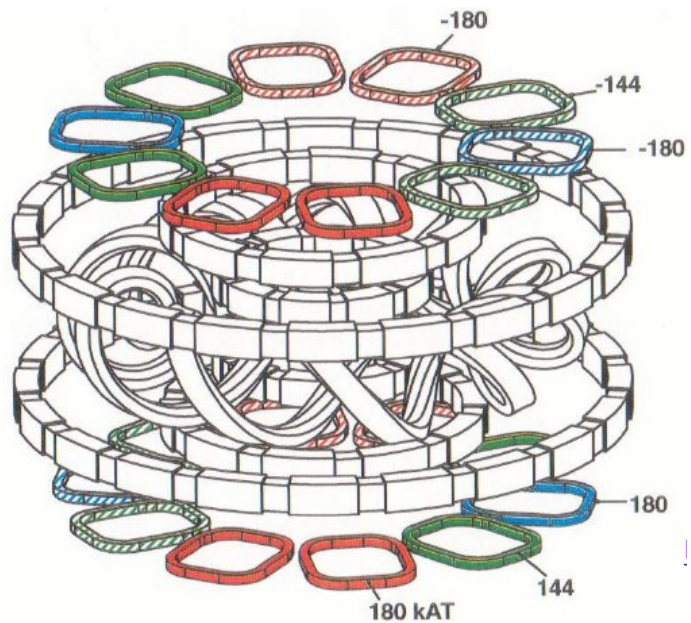


図1 LHD装置の外部コイル系。着色されているコイル系が外部摂動磁場コイル群。

$B_Q=100\%$ のLID配位の真
 空磁場配位と回転変換プ
 ロファイルを示す。図2(b)

の磁気面上でトラス外側に $n/m=1/1$ のO点が現れており、 $n/m=1/2$ の共鳴も完全に消える
 のではなく残っている。LHD磁場配位では若干のエラー磁場成分が存在する。そのエラー
 磁場成分もシミュレートしているためO点の位相が若干、地平面からずれている。

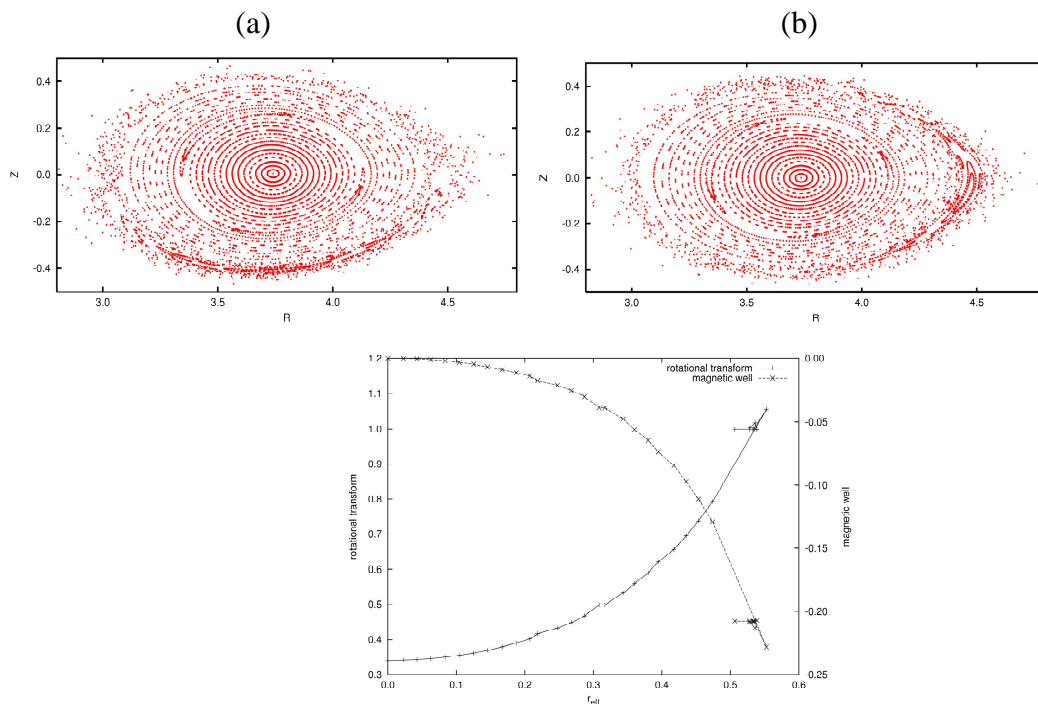


図2 $R_{ax}=3.75m$ 、 $g=1.254$ 、 $B_Q=100\%$ のLID配位。(a)は4-Oポート(トムソン散乱計測)、(b)は6-Oポート(LIDヘッド挿入位置)での磁気面である。

4. SDCプラズマのMHD平衡配位再構築

LHD実験第9サイクルにて、内部拡散障壁の形成により急峻な密度勾配を持つSDC (Super Dense Core) プラズマが発見された。SDCプラズマでは、内部拡散障壁付近から立ち上がる急峻な密度勾配の影響で、圧力勾配も変曲点を持つ。図3は、SDCプラズマの典型的ショット(#64359)の実験データから

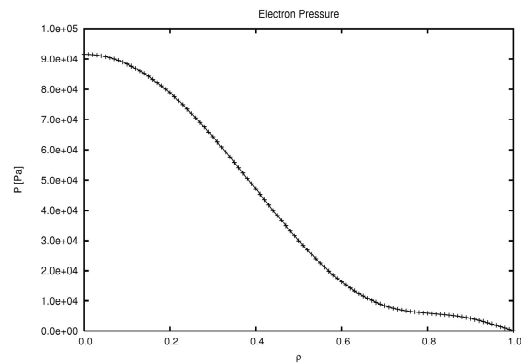


図3 SDCプラズマの典型的圧力分布。

再構築された電子圧力プロファイルである。マントル部と呼ばれる周辺部分ではなだらかなプロファイル形状を持つが、コア領域では急峻な圧力勾配を持つ。この急峻な圧力勾配は大きなシャフラノフシフトをもたらし、MHD平衡配位を特徴づけると考えられる。図4は図3で示した圧力プロファイルにより、

#64359の放電をデモンストレーションしたものである。体積平均ベータ値 $\langle\beta\rangle_{\text{dia}} \sim 1.6\%$ 、軸上ベータ値 $\beta_0 \sim 4.7\%$ である。図4(a)、(b)、(c)はそれぞれ6-Oポート上での磁力線構造と4-Oポート上での回転変換プロファイルと規格化圧力プロファイルである。図4(a)によるとシャフラノフシフトは4.1mを超えており、周辺領域の磁力線構造はストカスティック化している。n/m=1/1の磁力線構造はストカスティック構造のなかに埋没し、クリアな磁気島構造は見えなくなっている。また、回転変換プロファイルを見ると、磁気軸上の回転変換は0.5を超えている。その結果、新たなn/m=1/2共鳴が発生している。新しい共鳴の位相は元々存在した1/2

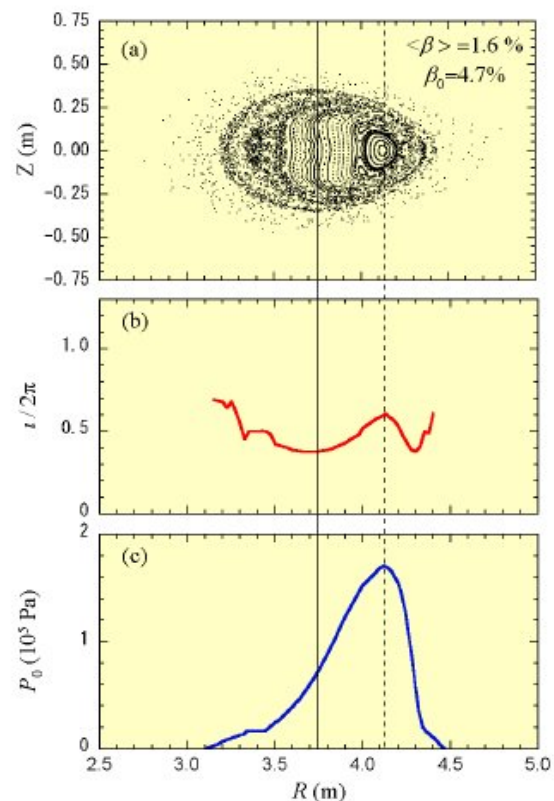


図4 SDCプラズマの典型的ショット(#64359)のMHD平衡再構築の結果。(a)6-Oポートでの磁気面構造、(b)4-Oポートでの回転変換プロファイル、(c)4-Oポートでの規格化圧力プロファイル。

共鳴と180度ずれているので、外部摂動四重極磁場により増幅された形になっている。図4(c)に示した規格化圧力プロファイルは実験結果と比較したところ、シャフラノフシフト、プロファイル形状共に良い一致を見せた。

5. まとめ

閉じた磁気面構造を仮定しない3次元MHD平衡計算コードHINT2によりLHDプラズマで発見されたSDCプラズマを考察した。実験での典型的ショットの電子圧力プロファイルを用いてSDCプラズマのMHD平衡配位再構築を行った。その結果、 $n/m=1/1$ の磁気島は有限ベータ効果によりクリアな磁気島構造を失い、周辺の磁力線構造は強くストカスティック化した。再構築したMHD平衡配位を実験結果と比較し、良い一致を見せた。よって、HINT2によるSDCプラズマのMHD平衡再構築は成功したので、実験データ解釈への寄与が期待される。

参考文献

- [1] T. Morisaki, *et al.* Journal of Nuclear Materials **337-339** (2004) 154
- [2] N. Ohyaabu, *et al.* Physical Review Letters **97** (2006) 055002
- [3] Y. Suzuki, *et al.* Nuclear Fusion **46** (2006) L19

Multi-Scale-Nonlinear Interactions among Macro-MHD Mode, Micro-Turbulence, and Zonal Flow

A. Ishizawa* and N. Nakajima

National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan.

(Dated: January 5, 2007)

This is the first numerical simulation demonstrating that macro-magnetohydrodynamic (macro-MHD) mode is excited as a result of multi-scale interaction in a quasi-steady equilibrium formed by a balance between zonal flow and micro-turbulence via reduced-two-fluid simulation. Only after obtaining the equilibrium which includes zonal flow and the turbulence caused by kinetic ballooning mode is this simulation of macro-MHD mode, double tearing mode, accomplished. In the quasi-steady equilibrium a macro-fluctuation which has the same helicity as that of double tearing mode is a part of the turbulence until it grows as a macro-MHD mode finally. When the macro-MHD grows it effectively utilizes free energy of equilibrium current density gradient because of positive feedback loop between suppression of zonal flow and growth of the macro-fluctuation causing magnetic reconnection. Thus once the macro-MHD grows from the quasi-equilibrium, it does not go back. This simulation is more comparable with experimental observation of growing macro-fluctuation than traditional MHD simulation of linear instabilities in a static equilibrium.

PACS numbers: 52.35.Py, 52.35.Qz, 52.35.Ra, 52.55.Fa

I. INTRODUCTION

Macro-magnetohydrodynamic (macro-MHD) activities substantially degrade magnetic confinements of torus plasmas by producing global fluctuations, and the evolution of these activities are observed in experiments[1]. Such macro-MHD instabilities have been analyzed by nonlinear MHD simulations of linear instabilities[2–4]. However, observations in the experiment apparently include micro-turbulence and zonal flow[5, 6], and the macro-MHD can originate from turbulent fluctuations nonlinearly. In fact, MHD activities are observed before the disruption in reversed shear plasmas with a transport barrier related to zonal flows and micro-turbulence[1], and micro-turbulence is observed in Large Helical Device plasmas that usually exhibit MHD activities[7]. In these experiments the turbulence can affect macro-MHD in several ways through multi-scale nonlinear interactions. In order to understand the growth of fluctuation observed in the experiments we have to carry out numerical simulation including not only the MHD instability but also the fluctuation of micro-turbulence and zonal flow that balances with the turbulence.

Multi-scale interactions described in Fig. 1 play key roles to understand effects of micro-turbulence on macro-MHD mode. A typical multi-scale interaction in the magnetic confinement is the interaction between micro-turbulence and zonal flow[5]. Effects of micro-turbulence on macro-MHD mode through nonlinear mode coupling are studied theoretically and numerically, and they are described by a negative eddy viscosity or by an anomalous resistivity [8–12]. On the other hand, the zonal flow caused by the turbulence can also affect the macro-

MHD instability through the shearing of its radial structure. These effects of turbulence on macro-MHD should be taken into account in numerical simulations at the same time. Our goal is to understand the mechanism of macro-scale MHD instability in the reversed shear plasmas based on the analysis of multi-scale-nonlinear interactions among macro-scale MHD, micro-turbulence, and zonal flows.

In this paper, we obtain a quasi-steady equilibrium established by a balance between micro-turbulence and zonal flow and demonstrate that a macro-scale MHD mode appears in the quasi-steady equilibrium by solving reduced two-fluid equations numerically. We also present the mechanism of macro-MHD development from fluctuations of turbulence. The new mechanism of macro-MHD instability can explain the evolution of fluctuation observed in reversed shear tokamak experiments[1]. This MHD activity spreads the micro-turbulence over the plasma because it breaks magnetic surfaces globally.

II. BASIC EQUATIONS AND LINEAR ANALYSIS

We carry out three-dimensional numerical simulations of a reduced set of two-fluid equations that extends the standard reduced two-fluid equations[13], by including temperature gradient effects[14–16]. The equations are

$$\frac{dn}{dt} = -n_{eq} \nabla_{\parallel} v_{e\parallel} + K[n_{eq} \Phi - p_e] + \mu_n \nabla_{\perp}^2 n,$$

$$n_{eq} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\nabla_{\parallel} p + \mu_v \nabla_{\perp}^2 v_{\parallel},$$

$$n_{eq} \frac{dQ}{dt} = -\nabla_{\parallel} J - K[p] + \tilde{\alpha} \nabla_{\perp} \cdot [\nabla_{\perp} \Phi, p_i] + \mu_Q \nabla_{\perp}^2 Q,$$

*Electronic address: ishizawa@nifs.ac.jp

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla_{\parallel} \Phi + \nabla_{\parallel} p_e + \eta_L v_{e\parallel} + \eta J,$$

$$\frac{dT_i}{dt} = -(\Gamma - 1)(T_{eq} \nabla_{\parallel} v_{\parallel} + \kappa_L T_i)$$

$$-T_{eq} K[(\Gamma - 1)(\Phi + T_i + T_{eq}/n_{eq}n) + \Gamma T_i] + \mu_T \nabla_{\perp}^2 T_i,$$

where $df/dt = \partial f/\partial t + \tilde{a}[\Phi, f]$, $\nabla_{\parallel} f = \epsilon \partial f/\partial \zeta - \beta \tilde{a}[\psi, f]$, $K[f] = 2\epsilon[r \cos \theta, f]$, $J = \nabla_{\perp}^2 \psi$, $Q = \nabla_{\perp}^2 \Phi$, $\psi = \psi_{eq} + \tilde{\psi}/\tilde{a}$, $\Phi = \tilde{\Phi}/\tilde{a}$, $n = n_{eq} + \tilde{n}/\tilde{a}$, $T_i = T_{eq} + \tilde{T}_i/\tilde{a}$, $T_e = \tau T_{eq}$, $p_i = n_{eq} T_{eq} + T_{eq} \tilde{n}/\tilde{a} + n_{eq} \tilde{T}_i/\tilde{a}$, $p_e = \tau n_{eq} T_{eq} + \tau T_{eq} \tilde{n}/\tilde{a}$, $p = p_i + p_e$, $v_{e\parallel} = v_{\parallel} + J/n_{eq}$, $\tilde{a} = a/\rho_i$, $\eta_L = \sqrt{\frac{\pi}{2} \tau \frac{m_e}{m_i}} |\nabla_{\parallel}|$, $\kappa_L = (\Gamma - 1) \sqrt{\frac{8T_{eq}}{\tau}} |\nabla_{\parallel}|$. In these equations n , v_{\parallel} , Φ , ψ , T_i , ρ_i , $\epsilon = a/R$, R , and a are the electron density, the parallel ion velocity, the electric potential, the flux function, the ion temperature, Larmor radius, the inverse of aspect ratio, the major radius, and the minor radius, respectively. The normalizations are $(tv_{ti}/a, r/\rho_i, \rho_i \nabla_{\perp}, a \nabla_{\parallel}, e\Phi/T_0, \psi/\beta B_0 \rho_i, n/n_0, T/T_0, v_{\parallel}/v_{ti}) \rightarrow (t, r, \nabla_{\perp}, \nabla_{\parallel}, \Phi, \psi, n, T, v_{\parallel})$. In the numerical calculations we employ 128 toroidal modes and 256 poloidal modes that distribute within $1 \leq m/n \leq q(r/a = 0.93)$, and 256 uniform grid points in the radial direction, where m and n are poloidal and toroidal mode numbers. We set $\epsilon = 0.25$, $\rho_i/a = 1/80$, the normalized dissipations $\mu_Q = \mu_n = \mu_v = \mu_T = m^4 10^{-7}$, and the normalized resistivity $\eta = 4 \times 10^{-4}$ which corresponds to $S = 1.6 \times 10^6$. As boundary conditions the plasma is assumed to be surrounded by a perfectly conducting wall.

We consider a reversed shear tokamak plasma with $\beta = 1\%$. The equilibrium q -profile, density profile, and temperature profile are $q = 1.05 + 2(r/a)^2 + 1/(3r/a + 0.01)^4$, $n_{eq} = 0.8 + 0.2 \exp(-2(r/a)^2)$, and $T_{eq} = 0.55 + 0.45(1 - (r/a)^2)^2$, respectively as drawn in Fig. 2. This equilibrium is unstable against the $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode because the q -profile has two $q = 2$ resonant surfaces[2]. The double tearing mode spreads between two resonant surfaces of $q = 2$ at $r/a = 0.38$ and 0.69 as represented by the electric potential profile in Fig. 3. The equilibrium is also unstable against the $6 < n < 22$ kinetic ballooning instabilities[17], i.e. micro-instabilities. A ballooning structure of the micro-instability appears in the bad curvature and positive shear region as shown in Fig. 3. We start the nonlinear simulation at $t = 0$ by taking the linear eigen functions of micro-instabilities with small amplitudes as the initial condition. We fix the background profiles of density and temperature during the simulation, while we do not fix the q -profile.

III. NONLINEAR EVOLUTION

Nonlinear evolution consists of three subsequent stages. The first one is growth of micro-instabilities

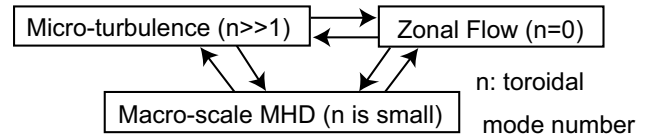


FIG. 1: Schematic of multi-scale-nonlinear interactions.

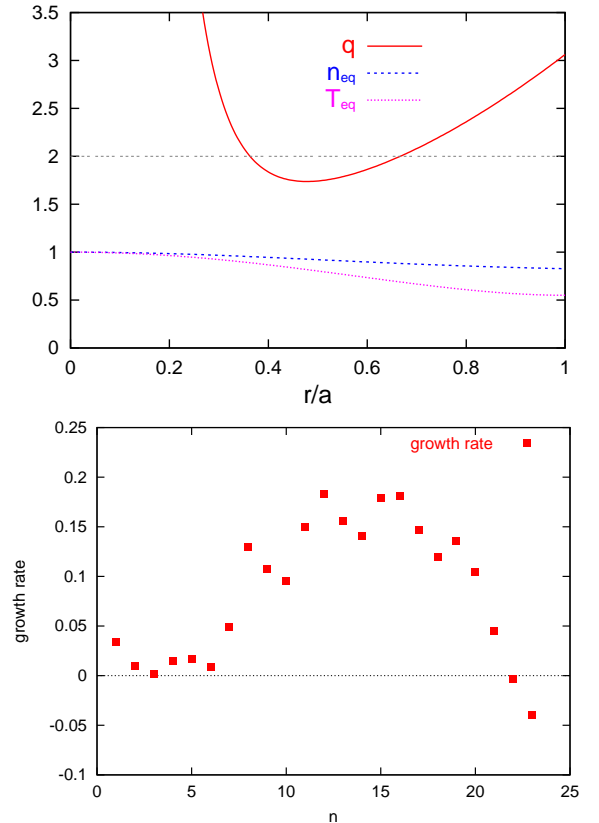


FIG. 2: Equilibrium profiles and growth rate of linear instabilities.

within $0 < t < 50$. The second one is a quasi-steady equilibrium formed by a balance between the turbulence and zonal flow within $60 < t < 140$. The third one is growth of macro-MHD mode in $150 < t$. Figure 4 shows time evolution of the magnetic energy for each toroidal mode number n . Figure 5 shows the electric potential on a poloidal section at $t = 48, 64, 80, 144, 168,$ and 184 . Figure 6 shows the equi-contour of helical flux of $m/n = 2$ on a poloidal section.

In the first stage, $0 < t < 50$, the micro-instabilities grow exponentially and nonlinear mode coupling among them drives the energy of high wave number rapidly as shown in Fig. 4. This is the energy transfer of micro-turbulence. The micro-turbulence also produces coherent structures including zonal flow with a $(m, n) = (0, 0)$ structure and $n = 1$ macro-scale-fluctuation through the energy transfer as indicated by the traces with $n = 0$ and $n = 1$ in Fig. 4.

In the second stage, $60 < t < 140$, the system reaches

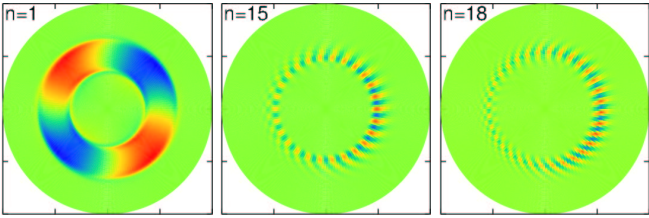


FIG. 3: The electric potential profile of eigen function on a poloidal section for instabilities: $n = 1$ double tearing mode, $n = 15$ and 18 micro-instabilities.

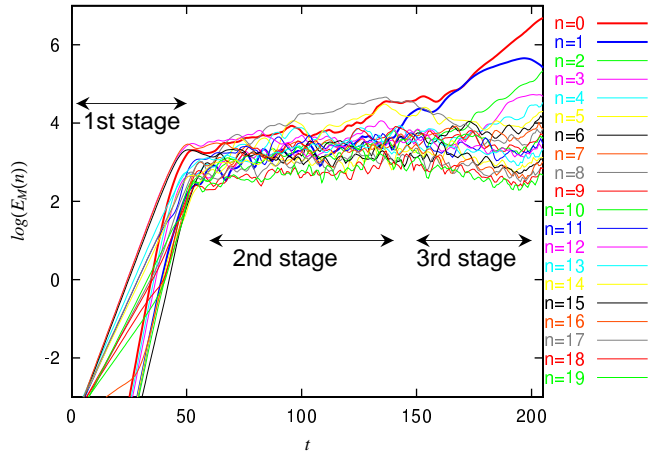


FIG. 4: Time evolution of the magnetic energy for each toroidal mode n , where the time is normalized by the ion thermal transit time. In the second stage a quasi-steady equilibrium is formed by a balance of turbulence with zonal flow. In the third stage macro-MHD instability appears.

to a quasi-steady equilibrium when the zonal flow balances with the micro-turbulence. The spatial profile of zonal flow is shown in Fig. 7(a). The zonal flow not only has $(m, n) = (0, 0)$ structure but also has $(m, n) = (1, 0)$ structure because of the geodesic acoustic mode[18]. This zonal flow twists the radial structure of the micro-instability at $t = 64$ in Fig. 5 and suppresses the growth of the instability, and then the system reaches to a quasi-steady equilibrium in $t > 60$ as shown in Fig. 4. The potential profile at $t = 80$ is a typical profile of the quasi-steady equilibrium that includes the turbulence and the zonal flow. Here we consider the $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode in this stage. There are no $m = 2$ magnetic islands at the resonant surfaces in Fig. 6 within $60 < t < 140$ and the energy of $n = 1$ mode fluctuate around the same amplitude with that of the turbulence indicated by high n mode in Fig. 4. This is because the $(m, n) = (2, 1)$ mode is a part of the turbulence, i.e. it is caused by the energy transfer from micro-turbulence that balances with the zonal flow. In addition, spatial distributions of the electric potential of $n = 1$ mode at $t = 64$ and 80 in Fig. 8 are strongly twisted by zonal flow and do not like the eigen function of double tearing mode in

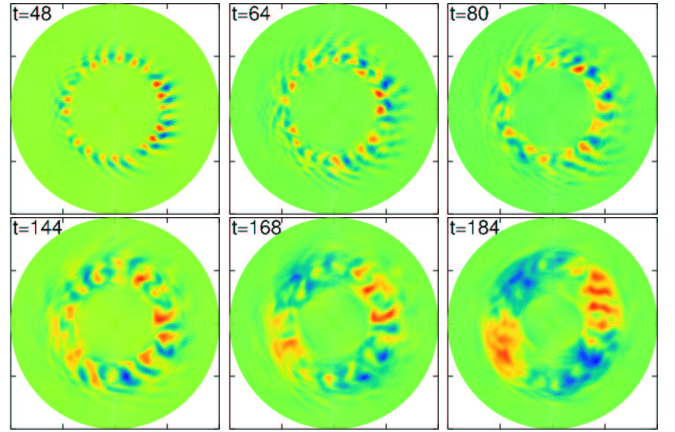


FIG. 5: Time evolution of the electric potential on a poloidal section.

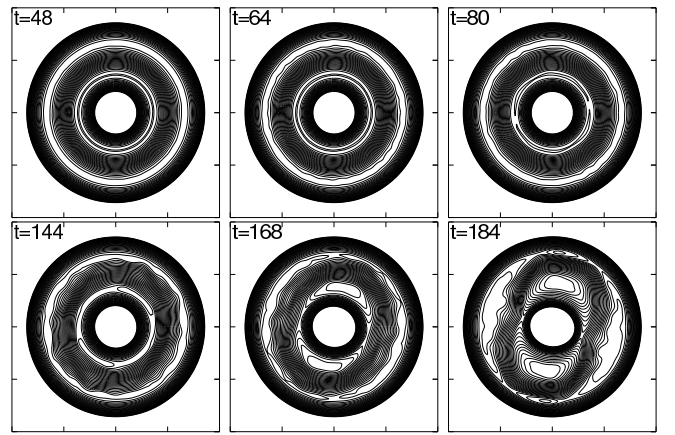


FIG. 6: Time evolution of the equi-contour of helical flux of $m/n = 2$ on a poloidal section.

Fig. 3. The zonal flow has a stabilizing effect not only on the micro-turbulence but on the tearing mode by twisting their radial structure. Hence, we have successfully obtained the quasi-steady equilibrium including fluctuation of turbulence, zonal flow, and resonant surfaces of macro-MHD instability.

In the third stage, $150 < t$, the $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode, i.e. the macro-MHD, appears. The energy of the $n = 1$ mode grows from $t \approx 150$ and dominates at $t \approx 170$ in Fig. 4. The $m = 2$ structure dominates the electric potential profile at $t = 168$ and 184 in Fig. 5. In addition, two $m = 2$ magnetic islands-chains appear at the resonant surfaces at $t = 168$ and 184 in Fig. 6.

Let us investigate the mechanism of macro-MHD instability in the third stage. The zonal flow has a stabilizing effect on the double tearing mode as explained above. This suggests that the reduction of this stabilizing effect of zonal flow can cause the macro-MHD instability. In fact, when the $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode appears and dominates at $t \approx 170$ in Figs. 4 and 5, the twisting by zonal flow vanishes and the spatial distribu-

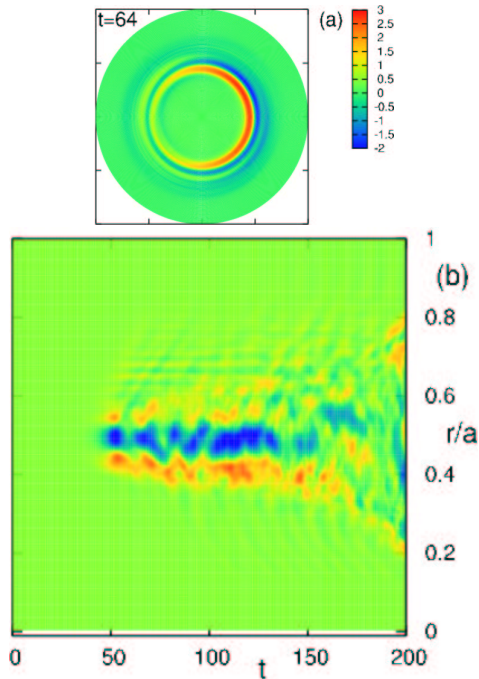


FIG. 7: (a) Spatial profile of zonal flow on a poloidal section. (b) Time evolution of zonal flow profile on a plane with $\theta = 0$.

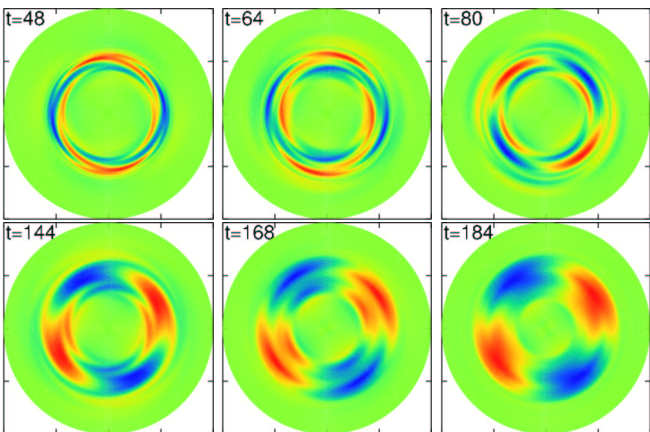


FIG. 8: Time evolution of the electric potential of $n = 1$ mode on a poloidal section.

tions at $t = 168$ and 184 in Fig. 8 are similar to the eigen function of the double tearing mode in Fig. 3. At this time the plasma can effectively release the free energy of the equilibrium current density gradient. The suppression of zonal flow is also observed at $t > 150$ in Fig. 7 (b). This reduction of zonal flow can be caused by the torque of Maxwell stress acting on the poloidal flow. The stress is induced by the interaction between two magnetic islands-chains[19], and it can weaken the shearing, thereby leading to lock the phases of two islands-chains. This phase locking is observed in the equi-contour of helical flux at $t = 168$ and 184 in Fig. 6. The phase of X-point of inner islands corresponds to the phase of the

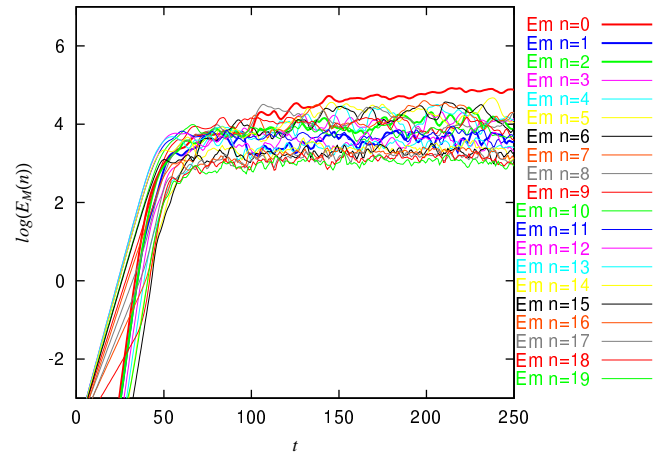


FIG. 9: Time evolution of the magnetic energy for each toroidal mode n for the equilibrium without $q = 2$ resonant surfaces.

O-point of outer islands at $t = 168$ and 184 in Fig. 6, and thus the phases of islands-chains coincide when the double tearing mode grows. On the other hand, at $t = 144$ the phase of X-point of the inner islands does not corresponds to the phase of fluctuation at the outer resonant surface, and thus there is no correspondence between phases of islands-chains at two resonant surfaces of $q = 2$ before the double tearing mode appears. Once the magnetic islands grows they can produce more strong Maxwell stress and reduce the zonal flow further. Hence, the mechanism of macro-MHD appearance is the positive feedback loop between zonal flow reduction and growth of magnetic islands-chains. This positive feedback loop enable macro-MHD mode to utilize the free energy of equilibrium current density gradient.

Here we consider effects of macro-MHD on the micro-turbulence. The macro-MHD, the tearing mode, can influence the micro-turbulence because the tearing mode breaks magnetic surfaces through global magnetic reconnection as shown in the frame $t = 168$ and 184 in Fig. 6. The radial distribution of the turbulence at $t = 184$ is broader than the distribution at $t = 80$ as shown in the electric potential profiles in Fig. 5. This expansion is also observed in the evolution of zonal flow profile at $t > 160$ in Fig. 7(b). Thus, the reconnection spreads the micro-turbulence over the plasma.

We remark that the positive feedback loop producing macro-MHD occurs only when the equilibrium has resonant surfaces of the MHD, otherwise the balanced state continues. That is confirmed by another simulation against initial equilibrium of $q_{min} > 2$. In this case, we have no growth of macro-MHD, double tearing mode, and have a steady state formed by a balance between the micro-turbulence and zonal flow as shown in Fig. 9.

IV. SUMMARY AND DISCUSSION

In summary, we have found that the macro-MHD mode, $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode, grows from the fluctuation of micro-turbulence in a quasi-steady equilibrium formed by a balance between the turbulence and zonal flow. Only after obtaining the quasi-equilibrium which includes fluctuation of the micro-turbulence, zonal flow and two resonant surfaces of $q = 2$ are we able to accomplish this simulation of macro-MHD mode. The present multi-scale simulation is more comparable to the experimental observation of growing fluctuation such as the one presented in Ref. [1] than traditional MHD simulations that describe nonlinear evolution of linear instabilities in a static equilibrium. This is because plasmas in experiments inherently include turbulent fluctuations and zonal flows and they apparently affect the growth of macro-MHD mode through multi-scale nonlinear interactions.

Here we discuss how macro-MHD mode appears in a quasi-steady equilibrium formed by a balance between micro-turbulence and zonal flow. The mechanism of macro-MHD growth is the positive feedback loop between suppression of the zonal flow and growth of magnetic fluctuation. The suppression is caused by poloidal component of torque due to Maxwell stress through nonlinear interactions between magnetic fluctuations at two resonant surfaces, and then this torque causes phase locking between the fluctuations. The fluctuations grows as macro-MHD mode further when the zonal flow is suppressed, and then the fluctuations produce more strong torque that reduces the zonal flow. This is the positive feedback loop that effectively releases the free energy of equilibrium current density gradient and produces macro-MHD instability.

Finally, we show that our numerical results can explain two features of the growing fluctuation observed in the reversed shear tokamak experiments. One is the phase

locking explained above and the other is the growth-time of fluctuations. An $n = 1$ growing fluctuation is observed before the disruption in the experiments[1]. When the fluctuation is growing, the phases of fluctuations at two resonant surfaces of $q = 3$ coincide each other, while phases are different before the growth. Thus, the observation of $n = 1$ macro-MHD fluctuations in the experiment is similar to the phase locking observed during the growth of the double tearing modes in our simulation. In addition, the fluctuation appears with growth-time 0.5 ms in this experiment. This is consistent with the growth-time of macro-MHD mode in our simulation because its growth-time is $\tau \approx 30a/v_{ti} = 300a/v_A$, that is evaluated from the line $n = 1$ in Fig. 4. The growth-time is 0.3 ms when shear Alfvén transit time a/v_A is $1 \mu\text{s}$. We remark that our simulation describes the $(m, n) = (2, 1)$ double tearing mode at $q = 2$ resonant surfaces, while the experimental observation shows the $(m, n) = (3, 1)$ double tearing mode at $q = 3$ resonant surfaces. We believe the physical mechanism of growing $(m, n) = (3, 1)$ fluctuation in the experiment is similar to that of growing $(m, n) = (2, 1)$ fluctuation in our simulation.

The formation of quasi-steady equilibrium without macro-MHD instability can give a key to resolving the difficulty in tokamak plasma operations that have $q_{min} < 2$. Controlling the positive feedback loop we can obtain a way to establish tokamak plasmas which have $q_{min} < 2$ in the experiments.

Acknowledgments

The authors would like to thank Dr. N. Miyato at JAEA for useful discussions. They also thank Prof. Sudo at NIFS for his support. A. I. is supported by the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology, Grant No. 18760642.

-
- [1] S. Takeji *et al.*, Nucl. Fusion **42**, 5 (2002).
 - [2] Y. Ishii, M. Azumi, and Y. Kishimoto, Phys. Rev. Lett. **89**, 205002 (2002).
 - [3] A. Bierwage *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 065001 (2005).
 - [4] G. T. A. Huysmans *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 245002 (2001).
 - [5] P. H. Diamond *et al.*, Plasma Phys. Controlled Fusion **47**, R35 (2005).
 - [6] W. Horton, Rev. Mod. Phys. **71**, 735 (1999).
 - [7] K. Tanaka *et al.*, Nucl. Fusion **46**, 110 (2006).
 - [8] D. Biskamp, Plasma Phys. Controlled Fusion **26**, 311 (1984).
 - [9] P. H. Diamond *et al.*, Phys. Fluids **27**, 1449 (1984).
 - [10] S.-I. Itoh, K. Itoh, and M. Yagi, Phys. Rev. Lett. **91**, 045003 (2003).
 - [11] M. Yagi *et al.*, Nucl. Fusion **45**, 900 (2005).
 - [12] C. J. McDevitt and P. H. Diamond, Phys. Plasmas **13**, 032302 (2006).
 - [13] R. D. Hazeltine, M. Kotschenreuther, and P. J. Morrison, Phys. Fluids **28**, 2466 (1985).
 - [14] B. Scott, Phys. Plasmas **7**, 1845 (2000).
 - [15] X. Garbet *et al.*, Phys. Plasmas **8**, 2793 (2001).
 - [16] N. Miyato, Y. Kishimoto, and J. Li, Phys. Plasmas **11**, 5557 (2004).
 - [17] W. M. Tang, J. W. Connor, R. J. Hastie, Nucl. Fusion **20**, 1439 (1980).
 - [18] K. Hallatschek and D. Biskamp, Phys. Rev. Lett. **86**, 1223 (2001).
 - [19] R. Fitzpatrick and T. C. Hender, Phys. Fluids **B3**, 644 (1991).

Motion of the plasmoid in torus plasmas

R. Ishizaki and N. Nakajima

National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki, Gifu 509-5292, Japan

e-mail contact of main author : ishizaki@nifs.ac.jp

Abstract. It is well known that an ablation cloud drifts to the lower field side in tokamak plasmas, which leads to a good performance on fueling in tokamak. Such a good performance, however, has not been obtained yet in the planar axis heliotron; Large Helical Device (LHD) experiments, even if a pellet has been injected from the high field side. The purpose of the study is to clarify the difference on the cloud motion between tokamak and LHD plasmas by using the MHD simulation including ablation processes. It is found in tokamaks that the drift motion is induced by a tire tube force and $1/R$ force in the major radius direction, and that the pressure and density of the plasmoid have oscillation due to fast compressional Alfvén wave. The first trial simulations on the motion of the plasmoid in a straight helical and LHD plasmas also show that the plasmoid drifts to the lower field side similarly to tokamaks. However, an plasmoid drifts inward or outward of the flux surfaces depending on the location along the magnetic field lines, since the plasmoid expands along the magnetic field with time, the magnetic field strength and the direction of the magnetic curvature change along the magnetic field lines due to both toroidicity and helicity of the helical coils, and the rotational transform is greater than that in tokamaks in the plasma periphery. Thus, it is suggested that the difference of the pellet injections between the high field and the low field sides is reduced in helical plasmas.

1. Introduction

Injecting small pellets of frozen hydrogen into torus plasmas is a proven method of fueling [1]. The physical processes are divided into the following micro and macro stages. The micro stage is the ablation of mass at the pellet surface due to the high temperature bulk plasma which the pellet encounters. The neutral gas produced by the ablation is rapidly heated by electrons and ionized to form a high density and low temperature plasma, namely a plasmoid. The macro stage is the redistribution of the plasmoid by free streaming along the magnetic field lines and by MHD processes which cause mass flow across flux surfaces. The micro stage is well-understood by an analytic method [2] and numerical simulation [3]. The drift motion of the plasmoid is investigated in the macro stage [4]. Since the plasmoid drifts to the lower field side, the pellet fueling to make the plasmoid approach the core plasma has succeeded by injecting the pellet from the high field side in tokamak. On the other hand, such a pellet fueling has not succeeded in LHD plasmas for various injection locations, say, even if the pellet is injected from the high field side [5].

The purpose of the study is to clarify the difference on the motion of the plasmoid between tokamak and helical plasmas. In order to investigate the motion of the plasmoid, the three dimensional MHD code including the ablation processes has been developed by extending the pellet ablation code (CAP) [3]. It is found through the comparison between simulation results and an analytical consideration that the drift motion to the lower field side in tokamak is induced by a tire tube force due to the extremely large pressure of the plasmoid and a $1/R$ force due to the magnetic pressure gradient and curvature in the major radius direction. It is also found that

the plasmoid dose not drift when the perturbation of the plasmoid is small. The motion of the plasmoid is investigated in a straight helical and toroidal LHD plasmas in an initial short time, from which it is found out that the plasmod drifts to the lower field side as well as in tokamaks. Consequently, the common mechanism is considered to work between tokamaks and helical configurations. However, the directions of the magnetic curvature and gradient of the magnetic field strength in the helical configurations are completely different from those of tokamaks due to the helicity of the helical coils, which leads to the difference of the experimental results between tokamaks and helical configurations.

2. Basic Equations

Since the plasmoid is such a large perturbation that the linear theory can not be applied, a nonlinear simulation is required to clarify the behavior of the plasmoid. The drift motion is considered to be a MHD behavior because the drift speed obtained from experimental data [1] is about $0.01 \sim 1.0v_A$, where v_A is an Alfvén velocity. Thus, the three dimensional MHD code including the ablation processes has been developed by extending the pellet ablation code (CAP) [3]. The equations used in code are:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\beta}{2}\nabla p + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1b)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + H, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1d)$$

All variables except time and length are normalized by ones at the magnetic axis, ρ_0 , p_0 , B_0 and v_A , where $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$. Length and time are normalized by the major radius at the center of the poloidal surface, R_0 , and Alfvén transit time, $\tau_A = R_0/v_A$, respectively. γ and $\beta = 2\mu_0 p_0/B_0^2$ are the ratio of the specific heats and plasma beta, respectively. Heat source H is given by:

$$H = \frac{dq_+}{dl} + \frac{dq_-}{dl}. \quad (2)$$

where q_{\pm} is the heat flux model dependent on electron density and temperature in the bulk plasma and the plasmoid density. l is the distance along the field line. The subscript $+$ ($-$) refers to the right (left)-going electrons. Then, the heat source can be calculated on each field line. Assuming Maxwellian electrons incident to the plasmoid, a kinetic treatment using a collisional stopping power formula leads to the heat flux model, q_{\pm} [3] which is used in construction of one of the ablation models [2]. In the tokamak simulations, the cylindrical coordinate system is used, and the rotational helical coordinate system is used in the helical calculations as shown in Ref. [6]. The boundary is assumed to be a perfect conductor. The Cubic Interpolated Pseudoparticle (CIP) method is used in the code as a numerical scheme [7].

3. Plasmoid simulations in Tokamak

MHD simulation has been carried out to clarify an essence of drift motion of the plasmoid in tokamak plasma with $\beta = 0.01$ and $R/a = 2$ as shown in Fig. 1, where β is the plasma beta, and R and a are major and minor radii, respectively. In an initial condition, a plasmoid is located at the center of the poloidal cross section as shown in Fig. 1, and peak values of density and temperature of the plasmoid are 1000 times density and 1/1000 times temperature of the bulk plasma at the magnetic axis, respectively. The plasmoid, whose half width is $0.03R$, encounters the electrons with fixed temperature 2 keV and density 10^{20} m^{-3} . Figures 2(a) and (b) show density contours in the equatorial plane at $t = 1.0$ and $6.0\tau_A$, respectively. The plasmoid is found to expand in the toroidal direction and simultaneously drifts to the lower field side. Figure 3 shows temporal evolution of peak values of the plasmoid pressure and density. The pressure reaches more than 150 times the bulk plasma pressure due to heating. On the other hand, the density decreases because the plasmoid expands along the magnetic field. Since decrease in the density reduces the energy deposit to the plasmoid, the pressure decreases after it reaches a peak value. In addition, the pressure and density have oscillation with a period of about $1.0\tau_A$ induced by the fast compressional Alfvén wave.

In order to evaluate a force inducing drift motion of a plasmoid in torus plasmas, we assume the following three conditions. (1) The bulk plasma is a uniform plasma with a vacuum toroidal magnetic field. (2) A plasmoid is given by pressure perturbation Δp , density perturbation $\Delta\rho$ and magnetic field perturbation ΔB^2 without heat source H in Eq.(1c). Although Δp and $\Delta\rho$ have positive values, ΔB^2 has a negative value because the magnetic field is reduced by a diamagnetic current. (3) Physical quantities are uniform in toroidal direction. Integrating the Eq. (1b) over the plasmoid volume, one can obtain an analytical formula on the acceleration in the major radius direction:

$$\alpha = \frac{du_R}{dt} = \frac{\Delta(\beta p/2) - \Delta(B^2/2)}{\rho R}, \quad (3)$$

where u_R is velocity of the plasmoid in the direction of the major radius. The first term in the right hand side expresses a tire tube force induced by the plasmoid pressure. The second term in it expresses a $1/R$ force in the major radius direction induced by the magnetic pressure gradient and curvature. Both forces make α increase because $\Delta(\beta p/2)$ and $\Delta(B^2/2)$ are positive and negative, respectively. Assuming those absolute values are comparable, one obtains: $\alpha \sim \beta\Delta p/\rho R$. The fact that the acceleration is proportional to $1/R$ means that the curvature of the magnetic field is one essence of the drift motion. The simulations have been carried out in the above three conditions. Note that the directions of the magnetic curvature and the gradient of the main magnetic field strength are in the major radius direction. Figure 4 shows the displacement in the major radius of the plasmoid with time. The displacement is normalized by an initial acceleration; α_0 . A thin solid line shows $\Delta R/(\alpha_0/2) = t^2$ which means the motion with a constant acceleration; α_0 . It is found that the normalized simulation results agree with the analytical formula in $t > 10$. However, since Δp decreases and R increases due to the drift motion of the plasmoid, the acceleration shown by Eq. (3) is reduced. Thus, the simulation results are found to be slightly saturated with time. Subsequently, the plasmoid stops because it reaches the boundary, namely the perfect conductor. Simulation results have the shape of stairs because the coordinates with the grid points are used as the displacement of the plasmoid. In

result, it is found that the drift motion of the plasmoid is induced by the tire tube force and $1/R$ force in the major radius direction. Although the result is obtained under the restricted conditions as shown above, the essence of the drift motion is considered to be same in the case that the pressure is induced by the heat source and the plasmoid expands along the magnetic field. There is another essential physics in Fig. 4. Only simulation indicated by 3400 dose not agree with the analytical line. Since the perturbations are small in this case, the linear theory is applicable to it unlike the other data. The linear theory predicts that the perturbation has just oscillation in stable equilibrium plasmas. Thus, small perturbations do not have the drift motion. In other words, a large perturbation violating linear theory is another essence of the drift motion.

4. Plasmoid simulations in straight helical and toroidal LHD

The motion of a plasmoid is investigated in a straight helical system consisting of uniform bulk pressure and a vacuum magnetic field. The plasmoid is assumed to be an initial pressure and density perturbations with helical symmetry, which has 10 times pressure and 1000 times density of the bulk plasma without heating source H in Eq.(1C). Figures 5(a) and (b) show contours of magnetic surface and magnetic pressure in the bulk plasma. Locations of initial perturbations are shown by circles which are at (a) lower field side and (b) higher field side than that at the magnetic axis. Figures 5(c) and (d) show temporal evolutions of the density profiles for (a) and (b), respectively. When the plasmoid drifts, density gradient ahead of it becomes steep in general. Then, it is found that the plasmoid drifts outward in (c) and inward in (d) as shown by arrows. In other words, the plasmoid drifts to the lower field side in both cases. That fact is consistent with the result in tokamaks. Figure 6 shows temporal evolution of the peak values of the pressure and density in Fig. 5(a). It is found that both the pressure and density monotonously decrease. A similar result is obtained for case in Fig. 5(b).

The motion of the plasmoid is also evaluated in toroidal LHD plasma. An initial condition of the plasmoid and heating condition are similar to ones in Sec. 3. Figures 7(a) and (b) show contours of plasma and magnetic pressures in different poloidal cross sections in LHD. Initial locations of the plasmoids are shown by circles indicated by A, B, C and D. The plasmoid indicated by A and C are located at the inner side of the torus, and those denoted by B and D are located at the outer side of it. Figure 8 shows velocities at the peak densities of the plasmoids. The plasmoids for A and D drift in the positive direction of the major radius. The plasmoid for C drifts in the negative direction of it and that for B hardly drifts. It is found that the plasmoids for A, C and D drift to the lower field side when it refers to the contour of the magnetic pressure shown in Fig. 7. The plasmoid for B dose not drift in the direction of the major radius where the magnetic pressure is almost at a saddle point. Therefore, physics mechanism that the plasmoid drifts to the lower field side is common among tokamak, straight helical and toroidal LHD. However, in helical plasmas, since (1) the distribution of magnetic field strength and the direction of the magnetic curvature change by both toroidicity as well as in tokamaks and helicity due to helical coils along the magnetic field lines and (2) the rotational transform becomes large in the plasma periphery, the plasmoid drifts inward or outward of the flux surfaces depending on the location. Thus, the difference between Figs. 5(c) and (d) may be reduced in the straight helical. In LHD, when the plasmoid density is integrated along the magnetic field lines, the difference of the velocity in the direction of the major radius as shown

in Fig. 8 may be reduced. This expectation seems to be consistent with the fact that there is no difference between the density profiles obtained by the pellet injections from various locations in LHD experiments.

5. Summary and Discussion

It is verified by simulations using the CAP code that the plasmoid with a high pressure induced by heat flux drifts to the lower field side in both tokamak and helical configurations. It is found out through comparison between simulations and analytical treatment that the such the drift is due to a tire tube force coming from a extremely large pressure of the plasmoid and $1/R$ force of magnetic curvature. It is shown that the plasmoid dose not drift but oscillates when its pressure perturbation is small, and that such a high pressure excites the fast compressional Alfvén wave. The differences of experimental results of the plasmoid motions between tokamaks and helical configurations are considered to come from the differences of the magnetic configurations of the bulk plasma. In the helical configurations, the magnetic field strength and the magnetic curvature are affected by both toroidicity and helicity of helical coils, which leads to the inward and outward drift of the plasmoid along the magnetic field lines. In order to confirm such an interpretation and to seek the ways obtaining good performance, long time simulations in the helical plasmas will be performed.

Acknowledgments

One of the authors R. I. is supported by the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology, Grant No. 15560719.

References

- [1] H. W. Müller *et al*, Nucl. Fusion **42**, 301 (2002).
- [2] Parks, P. B. & Rosenbluth, M. N. Phys. Plasmas **5**, 1380 (1998).
- [3] R. Ishizaki *et al*, Phys. Plasmas **11**, 4064 (2004).
- [4] P. B. Parks, Phys. Rev. Lett. **94**, 125002 (2005).
- [5] R. Sakamoto, in proceedings of 29th EPS conference on Plasma Phys. and Control. Fusion.
- [6] K. Harafuji *et al*, J. Comp. Phys. **81**, 169 (1989).
- [7] H. Takewaki *et al* J. Comput. Phys. **61**, 261 (1985).

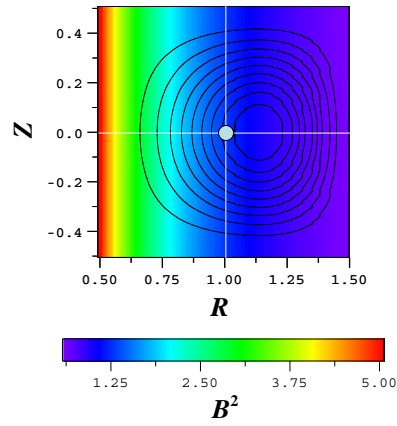


FIG. 1: *Initial location of the plasmoid on the poloidal surface in tokamak where contours of plasma and magnetic pressures are shown by lines and color, respectively.*

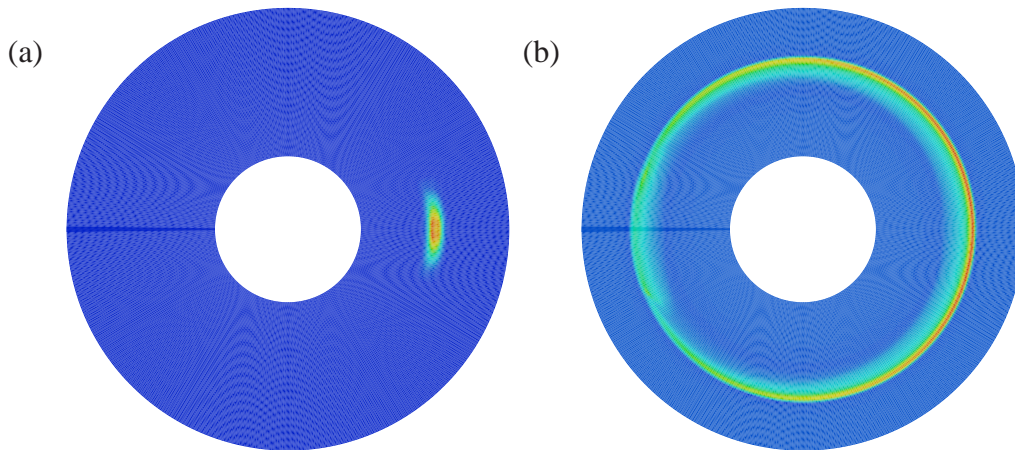


FIG. 2: *Density contours in the equatorial plane in tokamak at (a) $t = 1.0\tau_A$ and (b) $t = 6.0\tau_A$.*

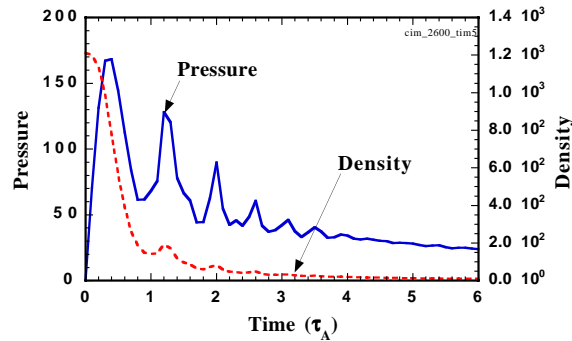


FIG. 3: *Peak values of pressure (solid line) and density (dashed line) of the plasmoid vs. time. for Fig. 2*

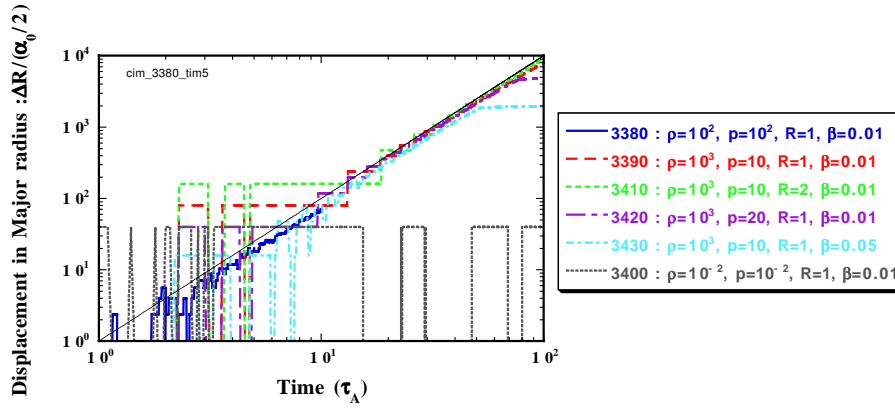


FIG. 4: Normalized displacement in the major radius of the plasmoid vs. time in uniform plasmas with the toroidal magnetic fields. $\Delta\rho$ and Δp are density and pressure perturbations. R is an initial location in the major radius. β is the plasma beta in the bulk plasma. A thin solid line shows $\Delta R/(\alpha_0/2) = t^2$.

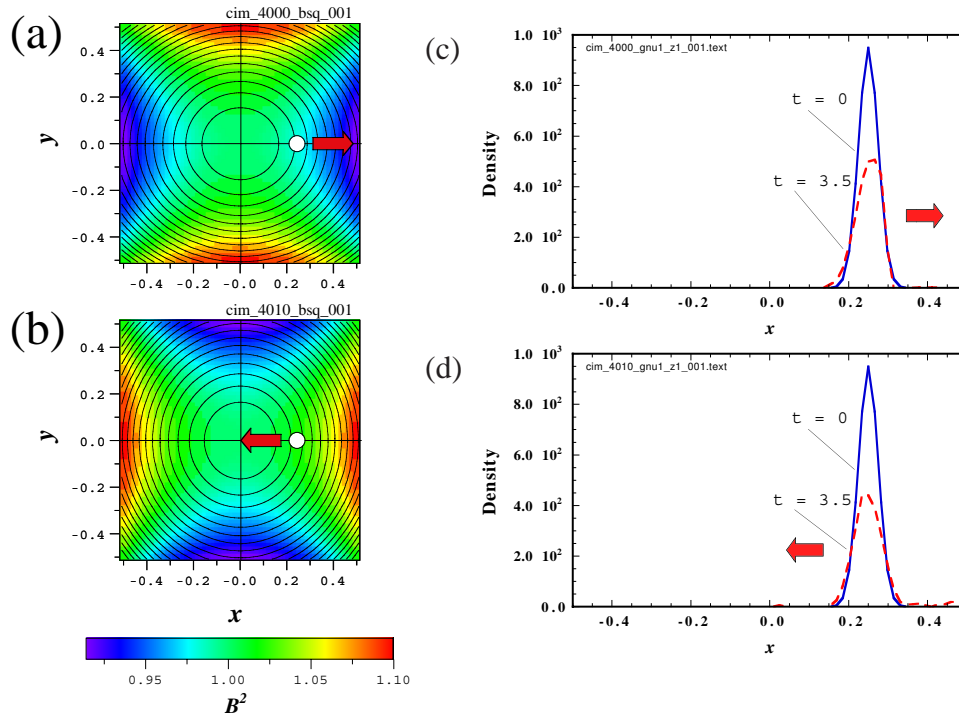


FIG. 5: Initial locations of the plasmoids at (a) lower field side and (b) higher field side than one at the magnetic axis in two different poloidal surfaces in straight helical plasma, where contours of magnetic surfaces and magnetic pressures are shown by lines and color, respectively. Density profiles (c) for (a), and (d) for (b), at $t = 0$ (solid line) and $3.5\tau_A$ (dashed line).

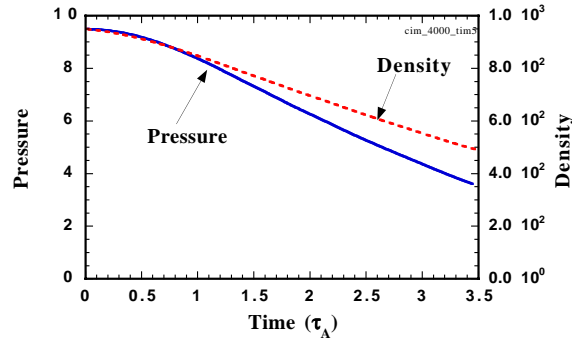


FIG. 6: Peak values of pressure (solid line) and density (dashed line) of the plasmoid vs. time for Fig. 5(a).

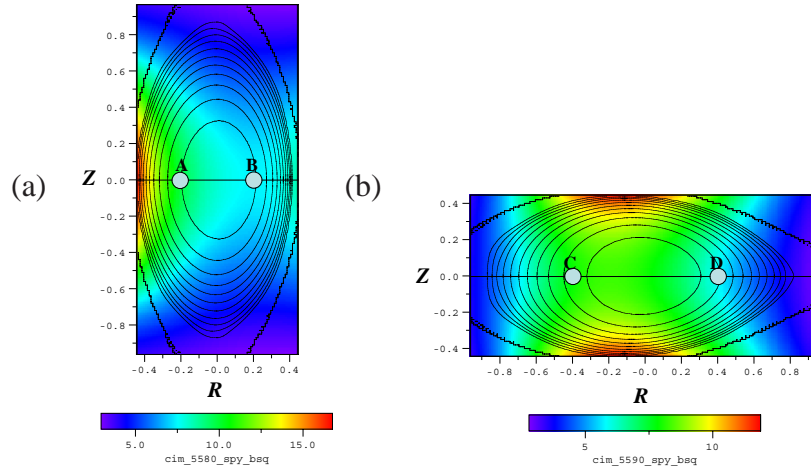


FIG. 7: Initial locations of the plasmoids at the inside (A, C) and the outside (B, D) of the torus in two different poloidal surfaces, (a) and (b) in LHD, where contours of plasma and magnetic pressures are shown by lines and color, respectively.

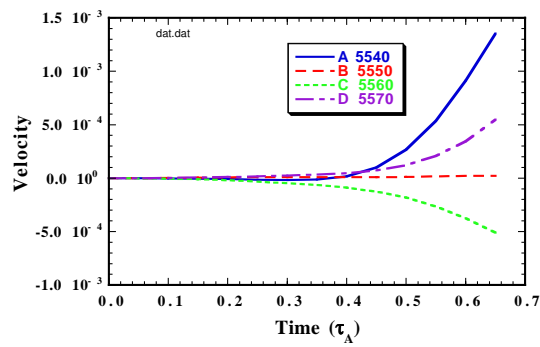


FIG. 8: Velocities at the peak densities of the plasmoids A, B, C and D in Fig. 7.

Properties of ballooning modes in the planar axis Heliotron configurations with a large Shafranov shift

N.Nakajima 1), S.R.Hudson 2), C.C.Hegna 3)

1) National Institute for Fusion Science, Oroshi-cho 322-6, Toki 509-5292, Japan

2) Princeton Plasma Physics Laboratory, P.O.Box 451, Princeton NJ 08543, USA.

3) Department of Engineering Physics, University of Wisconsin-Madison, WI 53706, USA.

e-mail contact of main author: nakajima@nifs.ac.jp

Abstract The relation of ballooning modes between in the covering space (quasi-modes) and in the configuration space (physical modes) is clarified in planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift. Based on the clarified properties of the ballooning modes, the high- β MHD equilibria in the inward-shifted LHD configurations are examined, where it is shown that the core plasma stays in the 2nd stability and the peripheral plasma stays near the marginally stable state against ballooning modes.

1 Introduction

The stability of ballooning modes is so significantly influenced by the local structure of the magnetic configuration, namely, the local magnetic shear and the local magnetic curvature, that it is fairly difficult to get the general properties of ballooning modes in the three-dimensional configurations with strong flexibility due to the external coil system. Also, there is a theoretical problem in the three-dimensional configurations that no exact way exists to construct the physical modes in the configuration space from the quasi-modes in the covering space based on the high-mode-number ballooning equation [1]. Taking account of the above difficulty, in this paper, properties of the ballooning modes have been intensively investigated in the planar axis heliotron configurations allowing a large Shafranov shift, like LHD [2]. Especially, recently established high- β plasmas with $\beta \gtrsim 3\%$, where β is the ratio of the averaged kinetic pressure to the averaged magnetic pressure, are examined taking account of the experimental observations [3].

The organization of the paper is as follows. The results of the local mode analyses in the covering space are shown in Sec.2, where the destabilization mechanism of the high-mode-number ballooning modes in the stellarator-like magnetic shear region, and the relation of the ballooning modes in the covering space (quasi-modes) to those in the configuration space (physical modes) are discussed. Since there is no exact way in the three-dimensional configurations to construct the physical modes in the configuration space from quasi-modes in the covering space, a conjecture on the physical modes is derived from the results of the quasi-modes. Such a conjecture is proved in the Sec.3 by using the global mode analyses for Mercier-unstable and Mercier-stable equilibria, separately, and also, the relation of the ballooning modes to interchange modes and effects of the boundary condition of the perturbations on the mode structure are examined. Section 4 is devoted to analyzing the MHD stability of the high- β MHD equilibria in the inward-shifted LHD configurations on the basis of the properties of the ballooning modes, where it is shown by using the equilibrium variation method that the core plasma stays in the 2nd stability and the peripheral plasma stays near the marginally stable state against ballooning modes under the equilibria states similar to the experimentally observed results. Summary and discussion are given in Sec.5.

2 Local mode analyses in the covering space

The local mode analyses of the high-mode-number ballooning modes in the covering space have been done. The destabilization mechanism of the high-mode-number ballooning modes in the stellarator-like magnetic shear, and the relation of the ballooning modes in the covering space (quasi-modes) to those in the configuration space (physical modes) are discussed. Although, in the three-dimensional configurations, the physical modes in the configuration space are not exactly constructed by using the quasi-modes in the covering space, a conjecture on the physical ballooning modes is derived from the local mode analyses in the covering space.

2.1 Destabilization mechanism

In the case of the planar axis heliotron configurations, like LHD consisting of two twisted helical coils with the same winding law and with the toroidal field period M ($= 10$ for LHD) and three set of poloidal coils with up-down symmetry, the Shafranov shift is essentially axisymmetric and also fairly large due to the low vacuum rotational transform ι (~ 0.4) near the magnetic axis. Since the local magnetic shear $\hat{s} = -\hat{s}_q$ deviates from the global magnetic shear $s = -s_q$ by the Shafranov shift, the difference between the local magnetic shear and the global magnetic shear; $\hat{s} - s = -(\hat{s}_q - s_q)$ is essential axisymmetric and large, where \hat{s} (s) and \hat{s}_q (s_q) are the local magnetic shear (global magnetic shear) in terms of ι and the safety factor $q = 1/\iota$, respectively. From those two essential characteristics of the Shafranov shift, a model equation of the local magnetic shear $\hat{s} = -\hat{s}_q$ is derived by using a stellarator expansion based on the high- β ordering. In such a case, the pressure in the whole plasma region must be treated in the high- β ordering of tokamaks, namely $\beta \sim O(\varepsilon_t)$, where $\varepsilon_t = a/R$ with the minor radius a and the major radius R , so that the radial derivative of the Shafranov shift Δ becomes the order of unity; $d\Delta/dr \equiv \Delta' \sim O(1)$. On the other hand, a model equation of the local magnetic shear in standard tokamaks is usually derived by using low- β ordering ($\beta \sim O(\varepsilon_t^2)$ and so $\Delta' \sim O(\varepsilon_t)$) in the whole plasma region except for a local region with a steep pressure gradient, where $\beta \sim O(\varepsilon_t)$ and $\Delta' \sim O(1)$. The model expression of \hat{s}_q in tokamaks is derived in such the region with a local steep pressure gradient. From differences whether the whole plasma region is treated in the high- β ordering or not, the model expression of the local magnetic shear \hat{s}_q is completely different between planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift and standard tokamaks [4]:

$$\hat{s}_q = s_q - \alpha \mathcal{F} \cos \eta, \quad \mathcal{F} = \begin{cases} 1 & : \text{tokamaks} \\ \frac{1 + 3s_q + r\beta''/\beta'}{4} & : \text{LHD} \end{cases} \quad (1)$$

where $s_q = (r/q)(dq/dr)$ and $\alpha = -R\beta'/\iota^2 (> 0)$, and $' = d/dr$, respectively. In the case of standard tokamaks with $s_q > 0$, the local magnetic shear \hat{s}_q disappears for $\alpha \sim s_q$ in the outboard of the torus ($\eta = 0$), where the magnetic curvature due to toroidicity is locally unfavorable, which leads to the destabilization of the high- n ballooning modes. In contrast with it, in the planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift, the local magnetic shear \hat{s}_q disappears in the outboard of the torus for $\alpha \sim 4s_q/(1 + 3s_q)$ near the radial position with the largest pressure gradient ($\beta'' = 0$), even in the stellarator-like magnetic shear region when the magnetic shear is fairly high ($s_q \lesssim -1$) [4]. This is the destabilizing mechanism of the high-mode-number ballooning modes in the stellarator-like magnetic shear region ($s_q < 0$), in the planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift like LHD. Note that a large Shafranov shift is needed in order to eliminate stabilizing effects by the local magnetic shear in the stellarator-like magnetic shear region. The three-dimensional properties of the ballooning modes in the planar axis heliotron configurations are mainly

brought by the local magnetic curvature. Since the shape of the poloidal cross section of LHD is a rotating elliptic, the local magnetic curvature consists of the two parts. One is due to toroidicity, and the other is due to helicity. Even in the outboard of the torus, the magnetic curvature becomes locally favorable in the vertically elongated poloidal cross section, which manifests the three-dimensional properties of the local magnetic curvature. In one toroidal turn, locally unfavorable and locally favorable magnetic curvatures alternatively appear in the outboard of the torus, in the horizontally and vertically elongated poloidal cross sections, respectively. This strong magnetic field line dependence of the local magnetic curvature leads to the existence of three-dimensional ballooning modes discussed in the following sections.

2.2 Relation between quasi-modes and physical modes

High-mode-number ballooning modes are analyzed in the covering space (ψ, η, α) , where ψ , α , and η are the label of the flux surface or the toroidal flux, the label of the magnetic field line on a specified flux surface ψ , and the coordinate along the magnetic field line specified by ψ and α , respectively. The covering space (ψ, η, α) is related to the straight field line magnetic coordinates (ψ, θ, ζ) as $\eta = \theta$ and $\alpha = \zeta - \theta/\epsilon$ (θ and ζ are poloidal and toroidal angles, respectively), and so two labels ψ and α are related to the magnetic field as $\vec{B} = \epsilon \nabla \alpha \times \nabla \psi$. By using flute-ordering with $|\vec{k}_\perp| \gg |k_\parallel|$, the incompressible quasi-modes in the covering space are assumed to have an eikonal form: $\vec{\xi}_\perp = \frac{\vec{B} \times \vec{k}_\perp}{B^2} X e^{iS - i\omega t}$, where S is the eikonal and the perpendicular wave number \vec{k}_\perp is expressed in terms of the eikonal as $\vec{k}_\perp \equiv \nabla S$, and so $S = S(\psi, \alpha)$. The slow change along a magnetic field line related to the parallel wave number k_\parallel is expressed by the function X ($k_\parallel = \nabla_\parallel X/X$), which is governed by the incompressible ballooning equation. Consequently, the functions X and ω are the solution or eigenfunction and the frequency or growth rate of the high-mode-number incompressible ballooning equation. Since the high-mode-number ballooning equation is self-adjoint, the eigenvalue corresponding to the eigenfunction X is ω^2 . The eigenfunction X and the eigenvalue ω^2 have the following parameter dependence in the three-dimensional magnetic configurations:

$$X = X(\eta|\psi, \theta_k, \alpha), \quad \omega^2 = \omega^2(\psi, \theta_k, \alpha) \quad (2)$$

where θ_k is the radial wave number defined as $\theta_k = \partial_q S / \partial_\alpha S$, which comes from the perpendicular wave number $\vec{k}_\perp = \nabla S = \partial_\alpha S \nabla \alpha + \partial_q S \nabla q = \partial_\alpha S [\nabla \alpha + \theta_k \nabla q]$ (hereafter the safety factor q is used instead of ψ). Note that the eigenfunction X and the eigenvalue ω^2 are independent of α in the axisymmetric tokamaks, because every magnetic field line in a specified flux surface is equivalent to each other in the covering space. The quasi-modes in the covering space are not physical modes in the configuration space, because they do not generally satisfy the double-periodic condition in both poloidal and toroidal directions. Thus, the relation of the quasi-modes in the covering space to the physical modes in the configuration space must be established. The physical modes in the configuration space satisfying the double-periodic condition in both poloidal and toroidal directions are considered to be constructed by superposing the quasi-modes with the same eigenvalue ω^2 . This construction becomes possible when the eikonal satisfies the double periodic condition and single-valuedness with respect to q on a level surface of the eigenvalue $\omega^2(q, \theta_k, \alpha)$ [1].

In axisymmetric tokamaks, the level surfaces of ω^2 in the three-dimensional space (q, θ_k, α) become straight cylinder with the axis in the α direction, because α is an ignorable coordinate; $\omega^2(q, \theta_k)$, so that those conditions are satisfied on a set of level surfaces of $\omega^2(q, \theta_k)$ or $\theta_k = \theta_k(q, \omega^2)$ for a set of eigenvalues ω^2 . As a result, the semi-classical quantization condition is derived:

$$\frac{1}{2\pi} \oint dq \theta_k(q, \omega^2 = \text{constant}) = \frac{2N_r + 1}{2n}, \quad (3)$$

where n and N_r are the toroidal mode number and the radial node number, respectively (note that planar level surfaces of ω^2 infinitely continuous in the θ_k direction, which appear in fairly low magnetic shear region, are omitted here). The semi-classical quantization condition Eq.(3) means that the physical modes in the configuration space can be constructed from the quasi-modes in the covering space when the eigenvalues ω^2 of the quasi-modes satisfy the semi-classical quantization condition Eq.(3) for an adequately selected toroidal mode number n and radial node number N_r . In other words, the eigenvalue of physical modes ω_{phys}^2 are distinguished by n and N_r ; $\omega_{phys}^2 = \omega_{phys}^2(n, N_r)$. This semi-classical quantization condition is also obtained by solving the ray equations on the level surfaces of eigenvalue $\omega^2(q, \theta_k)$ in the three-dimensional space (q, θ_k, α) and by requiring the eikonal to be the double periodic and the single-valued in q [1].

On the other hand, in three-dimensional configurations, the eigenvalues of the quasi-modes have α dependence, so that the solution of the ray equations does not exactly satisfy the conditions that the eikonal to be the double periodic and the single-valued in q , leading to the fact that physical modes in the configuration space are not constructed exactly from the quasi-modes in the covering space, thus only conjecture is allowed. This fact reflects that the high-mode-number ballooning modes in the three-dimensional configurations have such a strong toroidal mode coupling that the toroidal mode number n is not a good quantum number. To make such a conjecture on the physical modes, the level surfaces of ω^2 in the (q, θ_k, α) are calculated [5]. The schematic pictures of the resultant level surfaces of the unstable eigenvalues $\omega^2 (\leq 0)$ in the planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift are shown in Fig.1 together with the axisymmetric case.

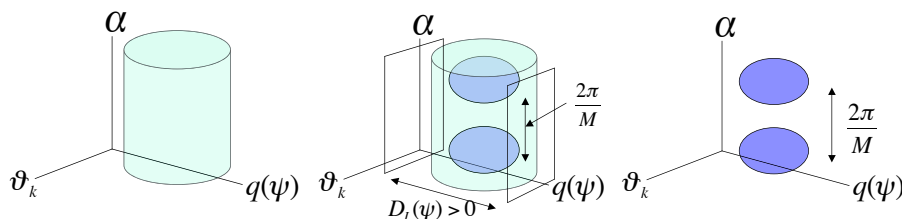


FIG. 1: The level surfaces of ω^2 for tokamaks (the first column), Mercier-unstable (the second column), and Mercier-stable (the third column) planar axis heliotron configurations with a large Shafranov shift.

In Mercier-unstable equilibria, two types of topological level surfaces coexist in the Mercier-unstable region ($D_I > 0$) with stellarator-like global magnetic shear with $s = d \ln \epsilon / d \ln r (> 0)$. One is cylindrical level surface like tokamak cases, and the other is spherical one. The latter exists inside of the former. In Mercier-stable equilibria, only spherical level surfaces exist. The spherical level surfaces are separated along the α axis with the distance of $2\pi/M$, where M is the equilibrium toroidal field period, which comes from the fact that the ballooning-unstable magnetic field lines are localized in each one toroidal field period (note that $\alpha = \zeta - \theta/\epsilon$). In the LHD case, as is mentioned in subsection 2.1, such a unstable region corresponds to the horizontally elongated poloidal cross section. Note that, independent of the topology of the level surfaces, the magnitude of ω^2 increases (the quasi-modes become more unstable) from outer level surfaces to inner level surfaces. From those results, the following conjecture on the physical finite- n ballooning modes is obtained [5]:

- Spherical level surfaces correspond to three-dimensional (3D) ballooning modes with strong toroidal mode coupling. Those modes will be destabilized for relatively high toroidal mode numbers n , namely, $n > M$ or $n \gg M$.
- Cylindrical level surfaces correspond to two-dimensional like (2D-like) ballooning modes with weak toroidal mode coupling like those in tokamaks or interchange modes. Those modes will be destabilized for relatively low n , namely, $n \lesssim M$.

- In Mercier-stable equilibria, only 3D ballooning modes with $n > M$ or $n \gg M$ might be destabilized.
- In Mercier-unstable equilibria, both 3D ballooning modes with $n > M$ or $n \gg M$ and 2D-like ballooning modes or interchange modes with $n \lesssim M$ might be destabilized. The former should have larger growth rates than the latter.
- In the cases of 2D-like ballooning modes and interchange modes, the toroidal mode number n might be a good quantum number, so that the semi-classical quantization condition given by Eq.(3) might be applicable to them.

3 Global mode analyses in the configuration space

Global mode analyses have been performed for incompressible perturbations by using cas3d code [6], in order to confirm the conjecture on finite- n ballooning modes in the configuration space. The properties of both ballooning modes and interchange modes and the relation of the ballooning modes to the interchange modes are clarified. Moreover, the effects of the boundary condition of the perturbations on the mode structure are discussed.

3.1 In Mercier-unstable equilibria

For Mercier-unstable equilibria [7], according to the recent experiments [3], currentless MHD equilibria with the pressure profile $P(s) = P(0)(1 - s)(1 - s^9)$ are newly investigated in the inward-shifted LHD configuration with the vacuum magnetic axis $R_{av} = 3.6\text{m}$ and in the standard LHD configuration with the vacuum magnetic axis $R_{av} = 3.9\text{m}$, where s is the normalized toroidal flux. As is expected from the conjecture by the high-mode-number ballooning modes analyses, the toroidal mode coupling is indeed so weak for modes with $n < M$ and with $n \sim M$ that the toroidal mode number n is used as a good quantum number. Figure 2 and figure 3 show most unstable modes with $n = -4$ and with $n = -11$, respectively, for currentless MHD equilibria with $\beta_0 = 4\%$ (upper row) and with $\beta_0 = 8\%$ (lower row) in the inward-shifted LHD configuration, where β_0 indicates the β value at the magnetic axis.

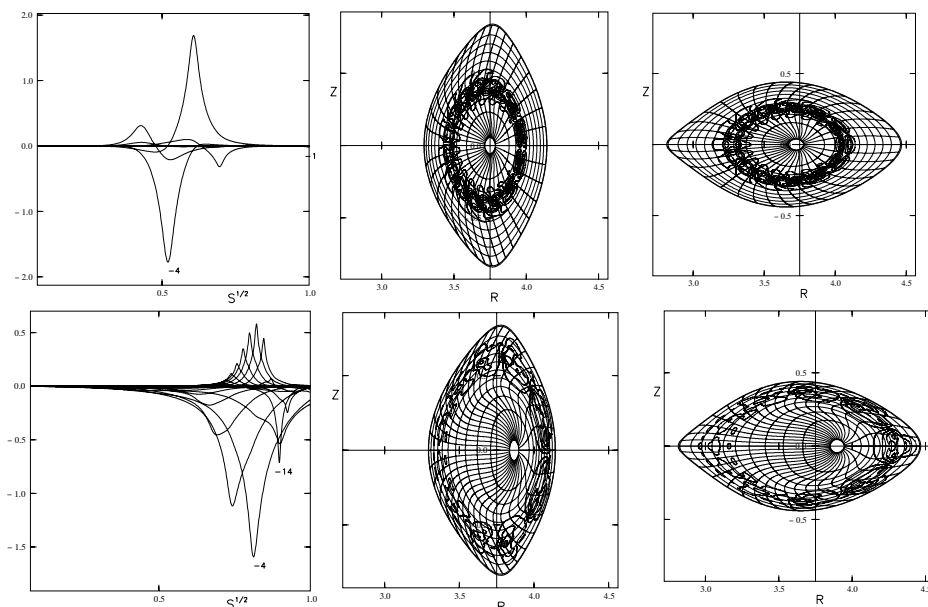


FIG. 2: Most unstable modes for $n = -4$ in the currentless MHD equilibria with $\beta_0 = 4\%$ (upper row) and with $\beta_0 = 8\%$ (lower row) in the inward-shifted LHD configuration. The first columns indicate the radial profile of dominant Fourier modes of the radial displacement $\xi^s \equiv \vec{\xi} \cdot \nabla s$ as the function of the normalized minor radius $\rho = \sqrt{s}$, and the second (third) columns denote contours of the perturbed pressure profile in the vertically (horizontally) elongated poloidal cross sections of the Boozer coordinates, where incompressible perturbations are assumed under the free boundary condition. The 2D-like ballooning mode with $n = -4$ (lower column) has weak toroidal mode coupling with $n = -14$.

As is conjectured from the local mode analyses in the covering space, interchange modes or 2D-like ballooning modes are destabilized as the most unstable modes depending on β value, for low toroidal mode numbers with $n < M$ and moderate toroidal mode numbers with $n \sim M$. As β increases, most unstable modes change from interchange modes into 2D-like ballooning modes for low toroidal mode numbers with $n < M$ and moderate toroidal mode numbers with $n \sim M$. It should be noted that which modes are destabilized as the most unstable modes between interchange modes and 2D-like ballooning modes depends strongly on the β values (in low- β , ballooning modes are not destabilized) and weakly on the magnetic configurations [7]. Properties of ballooning modes and interchange modes, and the relation between them are discussed in the next subsection.

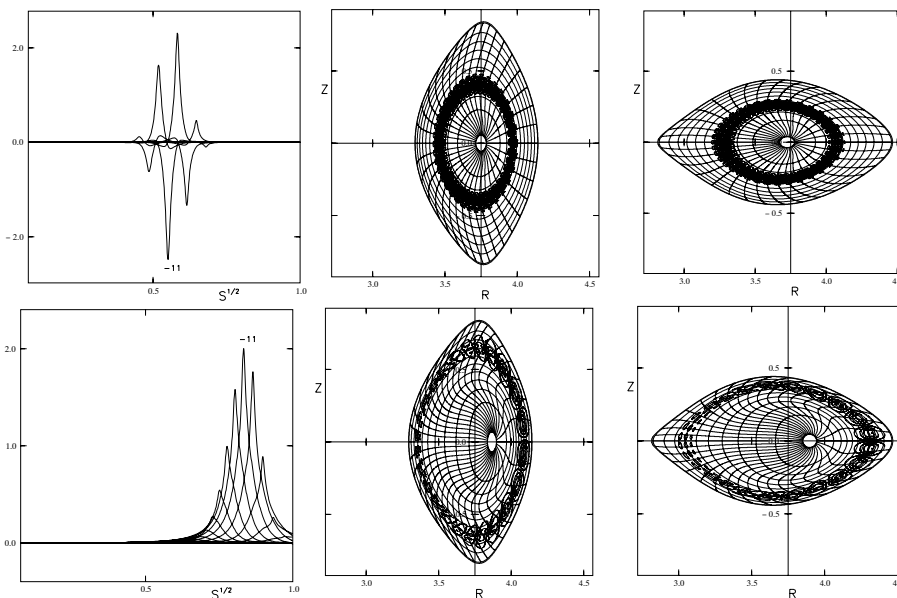


FIG. 3: Most unstable modes for $n = -11$ in the currentless MHD equilibria with $\beta_0 = 4\%$ (upper row) and with $\beta_0 = 8\%$ (lower row) in the inward-shifted LHD configuration. The first columns indicate the radial profile of dominant Fourier modes of the radial displacement ξ^s as the function of $\rho = \sqrt{s}$, and the second (third) columns denote contours of the perturbed pressure profile in the vertically (horizontally) elongated poloidal cross sections of the Boozer coordinates, where incompressible perturbations are assumed under the free boundary condition.

For $n > M$ or $n \gg M$, 3D ballooning modes with strong toroidal mode coupling are destabilized as the most unstable modes as is shown in Fig.4 in the currentless MHD equilibria with $\beta_0 = 6\%$ in the standard LHD configuration with the vacuum magnetic axis $R_{av} = 3.9\text{m}$. As is understood from the radial profiles of the dominant Fourier modes, 3D ballooning modes consist of the superposition of the 2D-like ballooning modes with a single toroidal mode number n and multiple poloidal mode numbers. It is quite clear from the contours of the perturbed pressure in the poloidal cross sections that as the dominant toroidal mode number increases,

the toroidal mode coupling becomes so significant that the 3D ballooning modes have a tendency to be localized in the flux tubes.

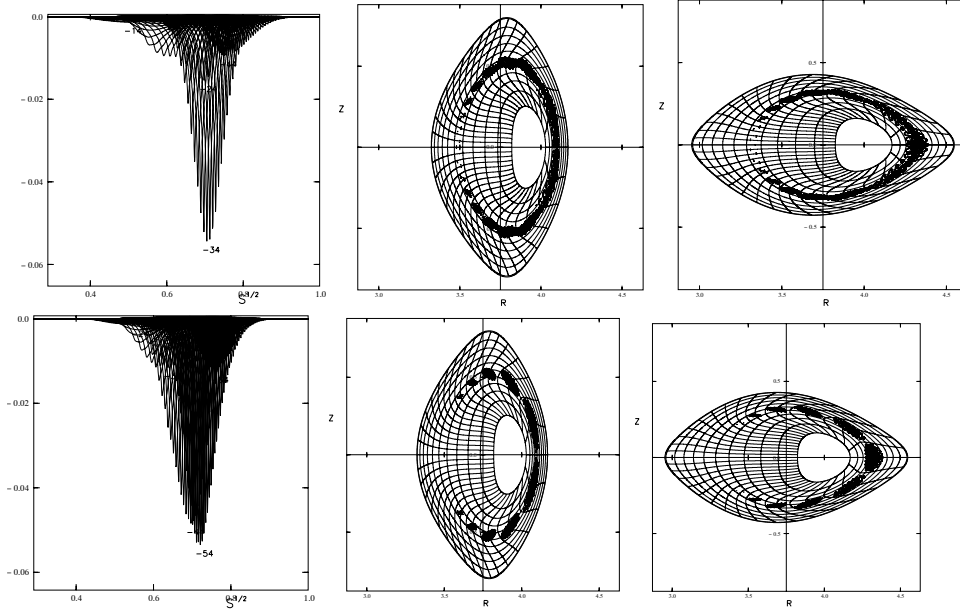
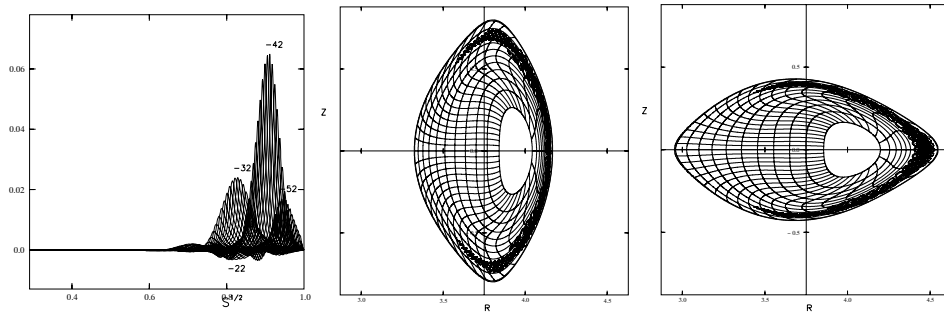


FIG. 4: Most unstable modes for $n > M$ (upper row) and $n \gg M$ (lower row) in the standard LHD configuration with the vacuum magnetic axis $R_{av} = 3.9m$. The first columns indicate the radial profile of dominant Fourier modes of the radial displacement ξ^s as the function of $\rho = \sqrt{s}$, and the second (third) columns denote contours of the perturbed pressure profile in the vertically (horizontally) elongated poloidal cross sections of the Boozer coordinates, where incompressible perturbations are assumed under the fixed boundary condition. The numbers in the first columns denote the dominant toroidal mode numbers n .

3.2 In Mercier-stable equilibria

The same types of global mode analyses have been performed for Mercier-stable equilibria in the standard LHD configuration with the vacuum magnetic axis $R_{av} = 3.9m$. In Mercier-stable currentless MHD equilibria, low- β plasmas are completely stable, and only 3D ballooning modes with strong toroidal mode coupling are destabilized as the most unstable modes at high- β as is shown in Fig.5. As well as in the Mercier-unstable equilibria, the 3D ballooning modes consist of the superposition of the 2D-like ballooning modes with a single toroidal mode number n and multiple poloidal mode numbers, and the 3D ballooning modes have a tendency to be localized in the flux tubes as the toroidal mode numbers n increase.



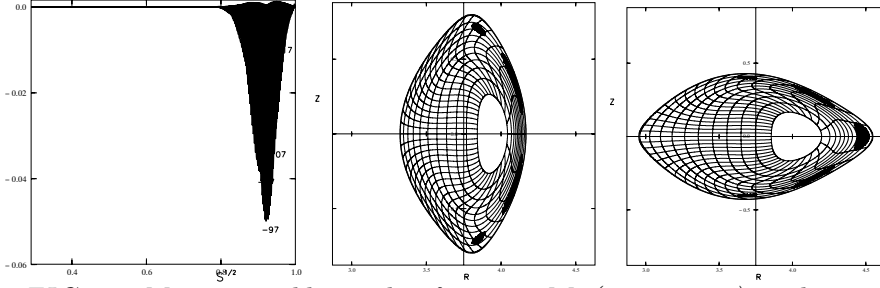


FIG. 5: Most unstable modes for $n > M$ (upper row) and $n \gg M$ (lower row) in the currentless Mercier-stable MHD equilibria with $\beta_0 = 8\%$ in the standard LHD configuration, where the pressure profile is $P(s) = P(0)(1 - s)^2$. The first columns indicate the radial profile of dominant Fourier modes of the radial displacement ξ^s as the function of $\rho = \sqrt{s}$, and the second (third) columns denote contours of the perturbed pressure profile in the vertically (horizontally) elongated poloidal cross sections of the Boozer coordinates, where incompressible perturbations are assumed under the fixed boundary condition. The numbers in the first columns denote the dominant toroidal mode numbers n .

From above global mode analyses, it might be concluded that the conjecture from the local mode analyses is confirmed for both Mercier-unstable and Mercier-stable MHD equilibria. Note that many 3D ballooning modes with different growth rates and radial structures are excited for perturbations with $n > M$ and $n \gg M$ in both high- β Mercier-unstable and Mercier-stable MHD equilibria. Whether such 3D ballooning modes will be distinguished by their mode structures will be discussed in the final section.

3.3 Relation of ballooning modes to interchange modes

In the case of 2D-like ballooning modes, as is shown in the subsection 3.1, the toroidal mode coupling is so weak that the toroidal mode number n is a good quantum number, which leads to the expectation that the semi-classical quantization condition might be applicable to them approximately. In other words, the eigenvalues ω^2 will be distinguished by both the toroidal mode number n and the radial node number N_r ; $\omega^2 = \omega^2(n, N_r)$. This expectation is qualitatively confirmed as is shown in Fig.6 for the Mercier-unstable currentless MHD equilibrium with $\beta_0 = 8\%$ used in Figs.2-3.

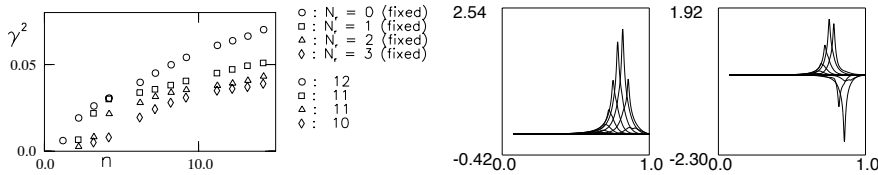
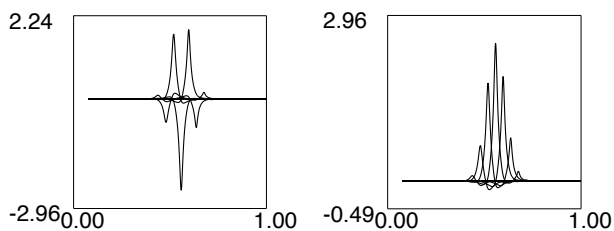


FIG. 6: The square of the growth rates $\gamma^2 = -\omega^2$ in terms of the toroidal mode number n (first column), where the eigenvalues are distinguished by the radial node number N_r for each toroidal mode number n . The circles, rectangles, triangles, and diamonds correspond to $N_r = 0, 1, 2,$ and $3,$ respectively. The unstable modes with $n \geq 6$ ($n \leq 4$) correspond to 2D-like ballooning (interchange) modes. As the examples, the radial profiles of the dominant Fourier modes of the radial displacement ξ^s with $n = 9$ are shown as the function of the normalized toroidal flux for the most unstable ballooning mode with $N_r = 0$ (second column) and for the second most unstable ballooning mode with $N_r = 1$ (third column). The square of the growth rate γ^2 corresponding to the ballooning modes with $N_r = 0$ ($N_r = 1$) is indicated by the circle (rectangle) for $n = 9$ in the first column. Here Mercier-unstable MHD equilibrium with $\beta_0 = 8\%$ in Figs.2-3 is used. In those analyses, incompressible perturbations are used under the fixed boundary condition.

The eigenvalues of the 2D-like ballooning modes with the same dominant toroidal mode number n are distinguished by the radial node number N_r . For the same radial node number N_r , the growth rates of 2D-like ballooning modes increases with the toroidal mode number n . As the radial node number N_r increases, the growth rates of the 2D-like ballooning modes with the same toroidal mode number n becomes smaller. Both dependences are consistent to the semi-classical quantum condition given by Eq.(3).

Those properties of 2D-like ballooning modes given by the semi-classical quantization condition are considered to be also seen for interchange modes. Indeed, such properties are proved by comparing the eigenvalues obtained by global mode analyses to those by local mode analyses [8]. Here, a more qualitative but more instructive and intuitive method will be used. The radial structures of the Fourier modes of the radial displacement $\xi^s \equiv \vec{\xi} \cdot \nabla s$ of the interchange modes are absolutely different from those of the 2D-like ballooning modes, as is understood from the first columns of Figs.2 and 3. However, by shifting the origin of the poloidal angle from the outboard side to inboard side of the torus, the properties of the radial localization of the interchange modes become clear [7]. Namely, in the cases of 2D-like ballooning modes (interchange modes), the Fourier modes of the radial displacement ξ^s are in phase in the outboard (inboard) of the torus. By using those properties, the interchange modes with the same toroidal mode number n are also distinguished by the radial node number N_r . The examples are shown in Fig.7, where Mercier-unstable currentless MHD equilibrium with $\beta_0 = 4\%$ is used as well as in Figs.2 and 3. In Fig.7, all the modes are interchange modes and properties expected from the semi-classical quantization condition given by Eq.(3) are clearly seen for the modes with $n \geq 6$. For the modes with $n \leq 4$, the monotony of the growth rate with respect to n is lost, because the Fourier components of such low- n modes have such a wide radial structure that their properties are not completely determined by the local structure around their rational surfaces.



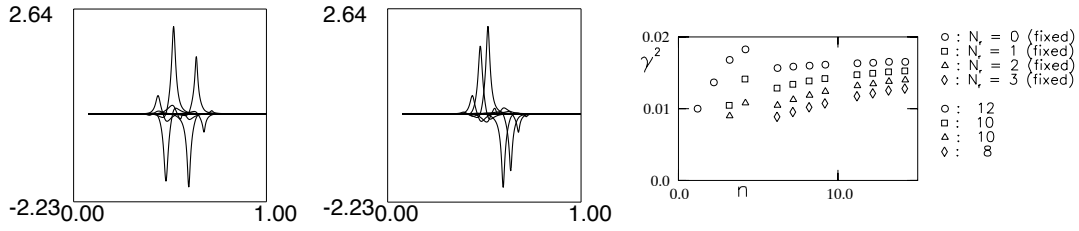


FIG. 7: The radial profiles of the dominant Fourier modes of ξ^s with $n = 9$ for the most unstable interchange mode with $N_r = 0$ are shown as the functions of the normalized toroidal flux for the original form (first row and first column) and for the form with the shift of the poloidal angle from outboard to inboard of the torus (first row and second column). The same quantities for the second most unstable interchange mode with $N_r = 1$ are shown for the original form (second row and first column) and for the form with the shift of the poloidal angle from outboard to inboard of the torus (second row and second column). The square of the growth rates $\gamma^2 = -\omega^2$ in terms of the toroidal mode number n is denoted in the third column, where the eigenvalues are distinguished by the radial node number N_r for each toroidal mode number n . The circles, rectangles, triangles, and diamonds correspond to $N_r = 0, 1, 2,$ and 3 , respectively. The square of the growth rate γ^2 corresponding to the interchange modes with $N_r = 0$ ($N_r = 1$) is indicated by the circle (rectangle) for $n = 9$ in the third column. Here Mercier-unstable MHD equilibrium with $\beta_0 = 4\%$ in Figs.2-3 and incompressible perturbations under the fixed boundary condition are used.

It is quite clear that both 2D-like ballooning modes and interchange modes are distinguished by both the toroidal mode number n and the radial node number N_r , which means that the semi-classical quantization condition is applicable to both modes.

3.4 Effects of the boundary condition of the perturbation

Effects of the boundary condition of the perturbations on the mode structure are considered in the Mercier-unstable MHD equilibria in the inward-shifted LHD configuration. Under the fixed boundary condition with $\xi^s(a) = 0$, each Fourier mode does not expand so much in the radial direction that the radial overlapping of the Fourier modes is restricted. However, under the free boundary condition with $\xi^s(a) \neq 0$, the radial overlapping is allowed in some extent, leading to the change in the mode structure from an interchange mode to a 2D-like ballooning mode, when the MHD equilibrium is slightly unstable or near the marginally stable state against ballooning modes. The ballooning modes induced by the free boundary condition are named free-boundary-induced ballooning modes. Such an example is shown in Fig.8. The effects of the free boundary condition are significant for low- n modes, since the radial extension of each Fourier mode becomes wider for lower toroidal mode number n , which is reflected in the significant differences of the growth rates of the low- n perturbations between fixed and free boundary conditions.

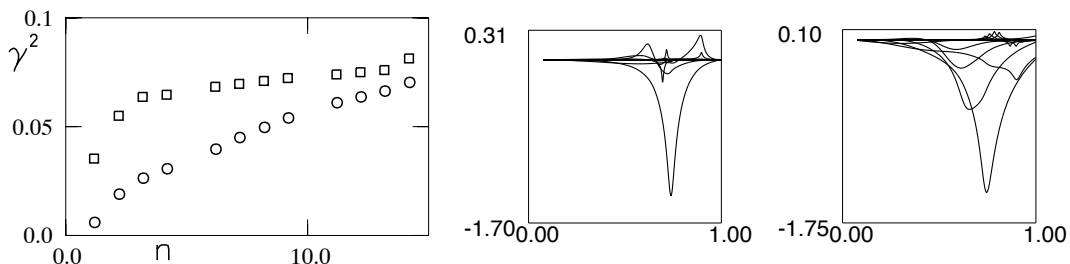


FIG. 8: The square of the growth rates γ^2 of the most unstable modes in terms of the toroidal mode number n (first column) for fixed boundary $\xi^s(a) = 0$ (circles) and for the free boundary condition $\xi^s(a) \neq 0$ (rectangles). The radial profiles of the dominant Fourier modes of ξ^s with $n = 2$ for the most unstable mode are shown as functions of the normalized toroidal flux, under the fixed boundary condition (second column) and under the free boundary condition (third column). Here Mercier-unstable MHD equilibrium with $\beta_0 = 8\%$ in Figs.2-3 is used.

Thus, it is important to use the free boundary condition for perturbations in the global mode analyses, partially because the growth rate under the free boundary condition is larger than that under the fixed boundary condition, and partially because effects of the radially global perturbations under the free boundary condition on MHD equilibrium become more significant than those by the radially localized perturbations under the fixed boundary condition.

4 MHD stability analyses of high- β equilibria in the inward-shifted LHD configurations

Based on the properties of the ballooning modes and interchange modes clarified by the local and global mode analyses, MHD stability analyses of high- β equilibria in the inward-shifted LHD configurations are performed [9]. The changes of the equilibria quantities with β are shown in Fig.9 where the currentless free boundary MHD equilibria with the pressure profile $P(s) = P(0)(1-s)(1-s^9)$ are used. The conditions for MHD equilibria, namely, free boundary condition, currentless condition, and the pressure profile reflect the experimental observations.

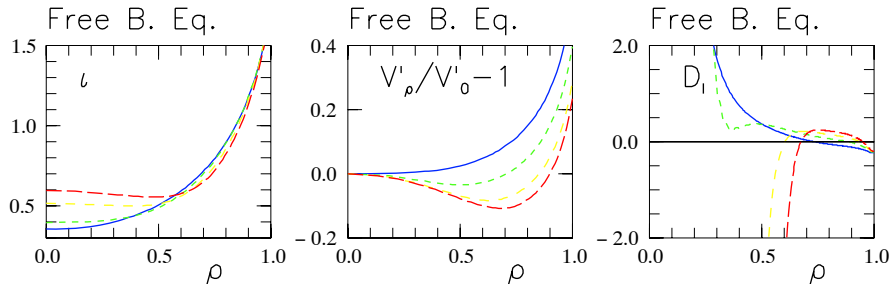


FIG. 9: The change of the radial profile of the rotational transform t (first column), of the magnetic well (second column), and of the Mercier criterion (third column) with β . The blue, green, yellow, and red curves correspond to $\beta = 1, 2, 3$ and 4% , respectively.

The key points are that Mercier criterion is significantly improved by the magnetic well formation and that the dangerous $t = 1/2$ rational surface disappears, as β increases. Those improvements are brought by the Shafranov shift of the whole plasma. The corresponding normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$ of the most unstable modes, where τ_{A0} is the poloidal Alfvén transit time at the magnetic axis, are shown in Fig.10 as functions of β under the various perturbation conditions. In any case, strong stabilization (self-stabilization) is seen as β increases. The growth rates of the most realistic perturbations, namely compressible perturbations under the free boundary condition $\xi^s(a) \neq 0$, are in the range of the ion diamagnetic frequency, so that those modes are considered to be harmless.

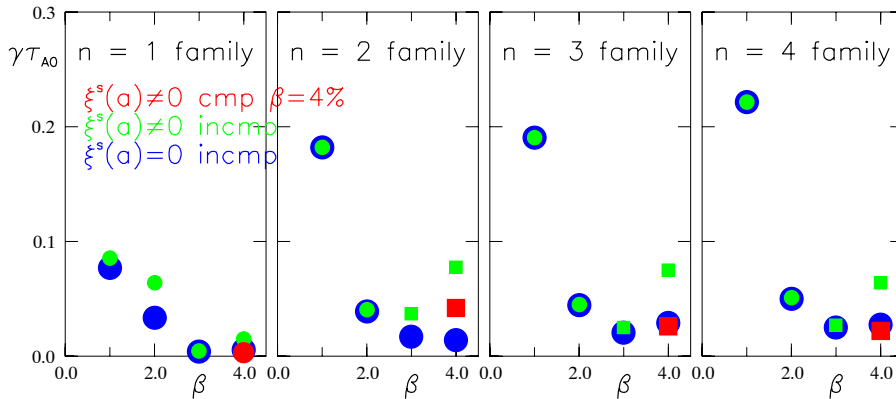


FIG. 10: The normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$ of the most unstable modes versus β for various perturbation conditions for 4 mode families. The blue (green) symbols correspond to incompressible perturbations under the fixed (free) boundary condition. The circles (rectangles) indicate interchange (free-boundary-induced ballooning) modes. The red rectangles at $\beta = 4\%$ correspond to compressible perturbations under the free boundary condition and indicate free-boundary-induced ballooning modes.

An important point is that the free-boundary-induced ballooning modes are destabilized at high- β . In order to examine this situation in detail, the method of the equilibrium profile variations [10, 11] has been applied to used MHD equilibria. This method of equilibrium profile variation is very powerful to investigate the stability margin of the MHD equilibrium against high-mode-number ballooning modes, and gives $d\epsilon/d\psi - dP/d\psi$ stability diagram corresponding to the $s - \alpha$ diagram in tokamaks. Figure 11 shows the typical examples.

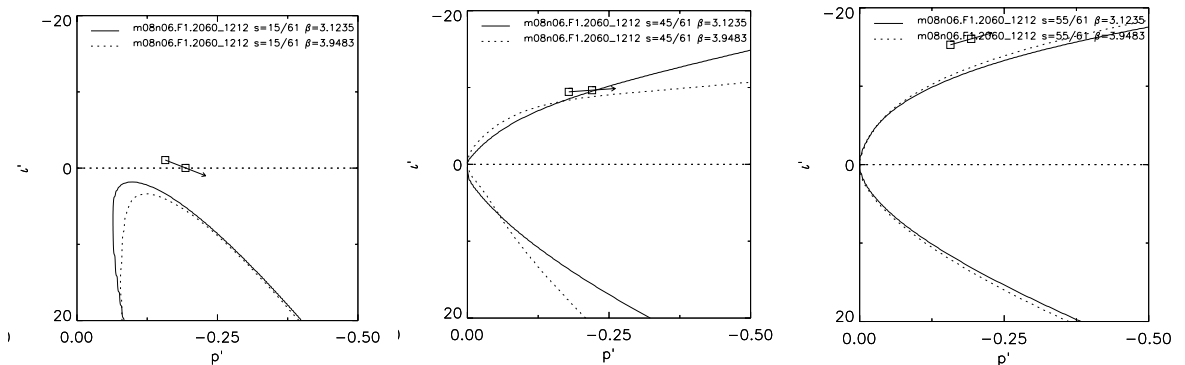


FIG. 11: $d\epsilon/d\psi - dP/d\psi$ stability diagram in the plasma core (first column), in the plasma periphery (second column), and in the plasma edge (third column). The horizontal and vertical axes correspond to $-s_q$ and α in the $s_q - \alpha$ diagram of tokamak plasmas. The solid (dashed) curves indicate the stability boundary of high-mode-number ballooning modes for $\beta = 3\%$ ($\beta = 4\%$). Two squares attached to the arrow in each graph indicate the positions of (ϵ', α) corresponding MHD equilibria at $\beta = 3\%$ and $\beta = 4\%$. The arrows denote the direction of the shift of (ϵ', α) corresponding the MHD equilibrium as β increase from $\beta = 3\%$ to $\beta = 4\%$. Used MHD equilibria are same as those in Figs.9-10.

Judging from the direction of shift of MHD equilibrium according to β value and the relative position of MHD equilibria to the stability boundary, it might be concluded that the core region stays in the second stability state, the peripheral region stays near the marginally stable state, and the edge region stays in the first stability state.

5 Summary and discussions

The researches on the ballooning modes in the planar axis heliotron configurations allowing a large Shafranov shift like LHD are summarized systematically, especially putting the stress on the high- β MHD equilibria in the inward-shifted LHD configurations. The relation of the quasi-modes in the covering space to physical modes in the configuration space and the relation between ballooning modes and interchange modes, and also effects of the boundary condition of the perturbations are clarified. Based on understanding of the properties of the ballooning modes and by using the equilibrium profile variation method, it is shown that recently achieved high- β MHD equilibria in the inward-shifted LHD configurations stay in the second stable state in the plasma core and stay near the marginally stable state in the plasma periphery.

Since the high- β plasmas in the inward-shifted LHD configurations stay near the marginally stable state in the plasma peripheral region, the point should be clarified is whether the experimentally suggested pressure profiles result from the ballooning instabilities or not.

Another interesting point is whether 3D ballooning modes are systematically distinguished or not. Figure 12 shows the example of the 3D ballooning modes, where the same Mercier-stable MHD equilibrium as that in Fig.5 is used. The typical structure of this 3D ballooning mode is that it has one radial node ($N_r = 1$) at the averaged minor radius $\rho = \sqrt{s} \sim 0.92$.

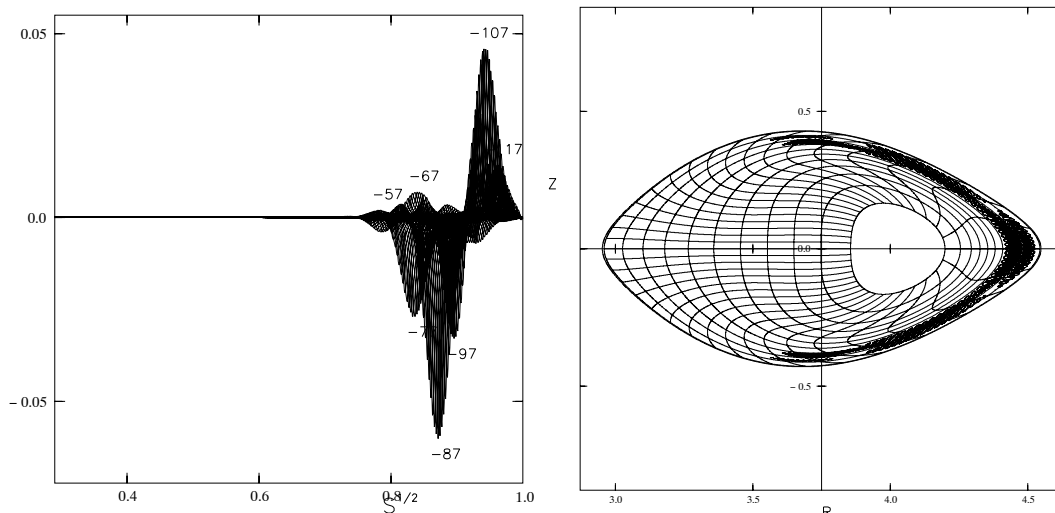


FIG. 12: 3D ballooning modes in the same MHD equilibrium as that in Fig.5. The first column indicates the radial profile of dominant Fourier modes as the function of $\rho = \sqrt{s}$ with the dominant toroidal mode numbers, and the second column denotes contours of the perturbed pressure profile in the horizontally elongated poloidal cross section, where incompressible perturbations are assumed under the fixed boundary condition.

As is mentioned in the relation to Figs.4 and 5, 3D ballooning modes consist of the superposition of the 2D-like ballooning modes. Thus, if there is a rule in the superposition, then 3D ballooning modes might be systematically distinguished by the radial node numbers N_r and the behavior of the poloidal localization, for example, the number of the poloidal nodes created by the localization in the flux tubes. This point is fairly interesting associated with the integrability condition of the two-freedom Hamiltonian system related to the ray equations of the eikonal.

Those two points will be investigated near future.

References

- [1] R.L.Dewar and A.H.Glasser, *Phys.Fluids* **26** (1983) 3038.
- [2] A.Iiyoshi, et.al, *Nucl.Fusion* **39** (1999) 1245.
- [3] O.Motojima, *et al.*, *Nucl.Fusion* **43** (2003) 1674.
- [4] N.Nakajima, *Physc.Plasmas* **3** (1996) 4545.
- [5] N.Nakajima, *Physc.Plasmas* **3** (1996) 4556.
- [6] C.Nührenberg, *Physc.Plasmas* **6** (1999) 137.
- [7] J.Chen, N.Nakajima, and M.Okamoto, *Physc.Plasmas* **6** (1999) 1562.
- [8] W.A.Cooper, D.B.Singleton, and R.L.Dewar, *Phys.Plasmas* **3** 1996 275.
- [9] N.Nakajima, S.R.Hudson, C.C.Hegna, and Y.Nakamura, IAEA20, TH5/6.
- [10] C.C.Hegna and N.Nakajima, *Physc.Plasmas* **5** (1998) 1336.
- [11] S.R.Hudson and C.C.Hegna, *Physc.Plasmas* **10** (2003) 4716.

MHD 固有値問題への Hamilton-Lie 摂動論の応用

徳田 伸二

日本原子力研究開発機構

abstract

磁気流体力学 (MHD) 理論で現れる微分方程式を変分原理 (作用積分) および Hamilton-Lie 摂動論から捉えることを議論する。方程式が通常の意味で作用積分を持たない場合でも「共役変数」を導入すれば、作用積分を作ることが出来る。非線形振動子の場合を例に、共役変数を使って Hamilton-Lie 摂動論が適用できることを示す。また、MHD 理論の例として理想 MHD ballooning mode に対するモデル方程式を取り上げる。

keywords

action integral, 1-form, Hamilton-Lie perturbation method, conjugate variables, ideal ballooning mode equation, MHD

1 序論

二つの非線形振動子

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \epsilon x^3 \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \epsilon y^3 \quad (2)$$

を例にとって議論を始める。ここで、独立変数 t は時間である。もし、 $\epsilon = 0$ であれば、両者は調和振動子を表す、同じ微分方程式に帰着するが、 $\epsilon \neq 0$ の場合、二つは性質の大変異なる微分方程式である。すなわち、方程式 (1) は Hamiltonian

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{\epsilon}{4} x^4 \quad (3)$$

を持つ Hamilton 運動を行なう。この運動の著しい特徴の一つは位相空間 (x, y) の体積が運動中に保存されることであろう。一方、方程式 (2) はこのような Hamiltonian を持たず、 (x, y) を位相空間とみなしたとき、運動によってその体積は保存されない。

次に、近似解法の観点からみると、方程式 (1) は Hamilton-Weiss 型の変分原理 (相空間 (x, y) における変分原理) を持ち [1]、それゆえ、Hamilton-Lie 摂動論 [2] という強力な解析技法が使える。そして、 $\epsilon = 0$ (非摂動状態) の場合の Hamilton 運動と $\epsilon \neq 0$ になった (摂動の加わった状態) 場合の Hamilton 運動とは「連続的に」つながっている。しかるに、方程式 (2) は Hamilton-Lie 摂動論を適用することが出来ず、従来は、たとえば、Multi-scale expansion 法 (多スケール展開法) [3] などが使われていた。そのため、非摂動状態と摂動状態とで運動の見方を不連続に変えることになる。

さて、プラズマ物理学における代表的な分野の中で、磁場中の荷電粒子運動を案内中心近似法で解析する手法についてはHamilton-Lie摂動論が構築されている[4]。しかしながら、MHD(MagnetoHydroDynamic)問題に現れる微分方程式(たとえば、ballooning mode方程式)においてはMulti-scale expansion法がよく使われ、Hamilton-Lie摂動論が使われることはないようである。この理由の一つとして、Hamilton-Lie摂動論は対象とする微分方程式がHamiltonianを持つことを前提としており、MHD問題に現れる多くの方程式は通常の古典力学におけるHamiltonianを持たないことがあげられよう。

しかしながら、Hamilton-Lie摂動論は運動の深い解析を可能とするので、MHD問題に現れる微分方程式に対してもHamilton-Lie摂動論で解析できることは大変望ましいことであろうと思われる。本稿は、「共役変数の方法(method of conjugate variables)」[5]を援用してHamilton-Lie摂動論を使うことを考察する。

次節でHamilton-Weiss型の変分原理(Courant-Hilbert[6]では変分法の標準問題と呼ばれる)を簡単に復習し、第3節で共役変数の方法を紹介する。そして、第4節でMHD理論における例としてIdeal ballooning modeに対するモデル方程式[7]を取り上げ、最後に第5節でまとめと今後の課題について述べる。

2 Hamilton-Weissの変分法

独立変数を $x := z^0$ とし、 $2N$ 次元の座標を $z = (z^j), j = 1, \dots, 2N$ とする。これらをまとめて $(z^\mu), \mu = 0, 1, \dots, 2N$ で表すことにする。 $2N + 1$ 成分からなる、 z の関数を $\gamma_\mu(z)$ とし、スカラー関数 L を

$$L := \gamma_\mu(z) dz^\mu \quad (4)$$

および、それから作られる作用積分を

$$S := \int_{x_i}^{x_f} L = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum_{j=1}^{2N} \gamma_j(z) \frac{dz^j}{dx} - h \right) dx \quad (5)$$

で与える。ここで、 L は1-形式(1-form)とも呼ばれる。また、 x_i, x_f は、それぞれ、作用積分の始点と終点を表し

$$h := -\gamma_0 \quad (6)$$

をHamiltonianと呼ぶ。この作用積分を停留にする条件から導かれるEuler-Lagrange方程式は

$$\omega_{jk} \frac{dz^k}{dx} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z^j} \quad (7)$$

$$\omega_{jk} := \frac{\partial \gamma_k}{\partial z^j} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial z^k} \quad (8)$$

である。ここで、 $\omega := (\omega_{jk})$ は $2N$ 次の歪対称行列(交代行列)であり、Lagrangeテンソルと呼ぶ。この逆行列 $J := (J^{jk})$ も歪対称であり、Poissonテンソルと呼ぶ。これを用いて、方程式(7)は dz^j/dx に関する連立1階常微分方程式(運動方程式)の形式(いわゆる正規形)

$$\frac{dz^k}{dx} = J^{jk} \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z^k} \right) \quad (9)$$

に表すことができる。特に

$$(z^j, z^{j+N}) = (q^j, p_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (10)$$

と書いたとき、1-形式が

$$L = p_j dq^j - h dx \quad (11)$$

になる場合を正準形式と呼ぶ。この場合、運動方程式(8)はいわゆる Hamilton の運動方程式

$$\frac{dq^j}{dx} = \frac{\partial h}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dx} = -\frac{\partial h}{\partial q^j} \quad (12)$$

になる。

運動方程式(9)に対応する変分原理を重視する理由はいくつか挙げられる。一つは Lagrangian L が1-形式で与えられるので、運動方程式の「形の不変性 (form invariant)」が明解であることである。たとえば、座標変換 $z \rightarrow y$ において

$$dz^\nu = \frac{\partial z^\nu}{\partial y^\mu} dy^\mu \quad (13)$$

となるときに、座標変換を行なっても1-形式 L の「値」が不変であること (value invariant; これがスカラーであることの意味である) を課すと

$$L = \Gamma_\mu dy^\mu \quad (14)$$

$$\Gamma_\mu = \frac{\partial z^\nu}{\partial y^\mu} \gamma_\nu \quad (15)$$

を得る。これは $\{\gamma_\mu\} (\mu = 1, \dots, 2N)$ が共変ベクトルの変換則に従うことを表している。そして、座標 y における運動方程式は方程式(7,8)で z を y に、 γ を Γ に置き換えることによって得られる (すなわち、運動方程式の形は不変である)。

次に、運動方程式を導く作用積分があれば、近似の手続きを著しく簡単にする場合がある。これについては、内部層方程式やバルーニングモード方程式が良い例になっている。

三番目は、本稿のテーマであるが、Hamilton-Lie 摂動論という強力な近似解法が適用できることである。

では、一般の常微分方程式系が自分自身を導く変分原理を常に持つかということ、一般にはそれは不可能である。これまでの議論が成立するためには偶数次元でなければならないことから、それは明らかであろう。しかしながら、対象とする常微分方程式系をその一部とするような方程式系を導く変分原理を作ることは常に可能であり、それを保障するのが共役変数の方法である。

3 共役変数の方法

3.1 共役変数の導入による作用積分の構成

最も簡単な常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x \quad (16)$$

は、通常の古典力学の意味では、その方程式を導く変分原理を持たない。しかし、新しい変数 p を導入すれば、1-形式

$$L = p(dx + \gamma x dt) = p dx - H dt \quad (17)$$

$$H = -\gamma p x \quad (18)$$

を作ることが出来る。このとき、変数 p をもとの変数 x に対する「共役変数」と呼ばれる。(16)式は変数 (x, p) について正準形式であり、Hamilton の運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p} = -\gamma x \quad (19)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} = \gamma p \quad (20)$$

という二つの方程式を導く。そして、その一つである(19)はもとの方程式(16)に一致する。二つの方程式は簡単に解くことができ

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t), \quad p(t) = p_0 \exp(\gamma t)$$

を得る (x_0, p_0 は初期値)。しかしながら、我々はこのような「解き方」に関心があるわけではない。もし、これ以外の解き方がなければ、わざわざ、変数の数を倍にすることも無いであろう。別の解き方として、位相空間 (x, p) での座標変換

$$x = \exp(-\gamma t)X, \quad p = \exp(\gamma t)P$$

を考えよう (すなわち時間に陽に依存する変換を行う)。

$$dx = -\gamma \exp(-\gamma t)X dt + \exp(-\gamma t)dX$$

より

$$p dx = -\gamma P X dt + P dX$$

また

$$px = PX$$

から、変換後の1-形式は

$$\Gamma = P dX$$

となる。これは自由粒子に対する1-形式であり、運動は

$$X(t) = x_0, \quad P(t) = p_0$$

すなわち

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t), \quad p(t) = p_0 \exp(\gamma t) \quad (21)$$

で表わされる。そして、(21)式より

$$x(t)p(t) = x_0 p_0$$

である。この結果は Hamilton 力学のよく知られた定理の帰結である。すなわち、(17) 式における Hamiltonian H が時間に依存しないので、 H (したがって、 xp) は運動の定数である。また、 $\gamma > 0$ とすると、 $x(t)$ は減衰率 $-\gamma$ で指数関数的に減衰するが、共役変数 $p(t)$ は増大率 γ で指数関数的に増大する。これは、Hamilton 力学に従って運動する変数 $x(t), p(t)$ は位相空間 (x, p) 内で体積を保存することに対応していると解釈できる。

次に減衰振動の方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\eta y - x \quad (22)$$

を考えよう。方程式 (16) にならって、二つの変数 q, p を導入して、1-形式

$$L = q(dx - ydt) + p[dy + (\eta y + x)dt] = qdx + pdy - Hdt \quad (23)$$

$$H = qy - \eta py - px \quad (24)$$

を得る。これは正準形式であるので、Hamilton の運動方程式として

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p} = -\eta y - x \quad (25)$$

および

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -q + \eta p \quad (26)$$

を得る。特に、 $\eta = 0$ の場合

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p} = -x \quad (27)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -q \quad (28)$$

から、 x と p は同じ調和振動の方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = -p \quad (29)$$

を満たすことが分かる。方程式 (27),(28) を見比べて、これらの方程式の解に対して

$$p = -x, \quad q = y \quad (30)$$

あるいは

$$p = x, \quad q = -y \quad (31)$$

という制約条件を課せることがわかる。そして、たとえば、制約条件 (30) を 1-形式 (23) に用いると

$$L = 2(ydx - hdt), \quad h = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (32)$$

を得る。ここで

$$ydx - xdy = 2ydx - d(xy)$$

を用いた. (32) 式は (x, y) を正準共役な変数とする調和振動子の 1-形式である. 一方、制約条件 (31) を課した場合には、1-形式

$$L = -2(ydx - hdt), \quad h = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (33)$$

を得る. また、 (q, p) の運動を逆向きの時間

$$\tau = -t \quad (34)$$

で追跡すると、運動方程式として

$$\frac{dq}{d\tau} = -p, \quad \frac{dp}{d\tau} = q \quad (35)$$

を得る. これから、 $q(\tau)$ は $y(t)$ と、 $p(\tau)$ は $x(t)$ と同じ運動をすることがわかる.

$\eta \neq 0$ の場合はこのような見方をできず、また、1-形式 L の中の変数を減らすことはできない. これは、(22) 式単独では、これを導く 1-形式が存在しないことを意味する. さらに、このような手続き (解釈) で変数の数を減らせるのは、調和振動 (すなわち線形問題) という特別な場合に限るようである. 一般の非線形な常微分方程式系の場合に、同様の手続きで変数の数を減らせるかどうかは、著者は知らない.

3.2 共役変数を用いた Hamilton-Lie 摂動論

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \epsilon y^3 \quad (36)$$

であらわされる非線形な減衰振動子を例にとり、共役変数を援用した Hamilton-Lie 摂動論を議論する. 共役変数法 (q, p) を導入すれば、方程式 (36) に対応する 1-形式は

$$\gamma = qdx + pdy - (h_0 + \epsilon h_1)dt \quad (37)$$

という形式で表され、非摂動 Hamiltonian h_0 および摂動 Hamiltonian h_1 は、それぞれ

$$h_0 = qy - px \quad (38)$$

$$h_1 = -py^3 \quad (39)$$

である.

非摂動方程式を変数変換で解くこと

(x, y) から (a, θ) への変換を

$$x = a \cos \theta, \quad y = -a \sin \theta \quad (40)$$

で定義する.

$$dx = da \cos \theta - a \sin \theta d\theta, \quad dy = -da \sin \theta - a \cos \theta d\theta$$

より

$$qdx + pdy = [q \cos \theta - p \sin \theta]da - a[q \sin \theta + p \cos \theta]d\theta$$

一方、(38) で表される Hamiltonian $\mathcal{H}(= h_0)$ は

$$\mathcal{H} = -qa \sin \theta - pa \cos \theta$$

となる. そこで、 (a, θ, q, p) から (a, θ, Q, P) への変換を

$$Q = Q(q, p, a, \theta) = q \cos \theta - p \sin \theta, \quad (41)$$

$$P = P(q, p, a, \theta) = -a(q \sin \theta + p \cos \theta) \quad (42)$$

と選べば、非摂動 1-形式は

$$\gamma = Qda + Pd\theta - \mathcal{H}dt \quad (43)$$

となり、位相空間 (a, Q, θ, P) における Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = P \quad (44)$$

で与えられる. 変換 (41, 42) は (x, y) から (x, q, y, p) へと変数の数を倍にして、初めて可能になったことに注意しよう.

\mathcal{H} は a, Q, θ に依存しないので、共役な変数 Q, a, P は運動の定数である. すなわち

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 1 \quad (45)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 \quad (46)$$

したがって

$$a(t) = a_0, \quad \theta(t) = t + \theta_0 \quad (47)$$

および

$$Q(t) = Q_0, \quad P(t) = P_0 \quad (48)$$

である. これから

$$x(t) = a_0 \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = -a_0 \sin(t + \theta_0) \quad (49)$$

また、変換 (41, 42) の逆変換

$$q = Q \cos \theta - \frac{P}{a} \sin \theta \quad (50)$$

$$p = -Q \sin \theta - \frac{P}{a} \cos \theta \quad (51)$$

から、 $q(t), p(t)$ は、ただちに得ることができる. さらに

$$A := \frac{1}{2}a^2 \quad (52)$$

とし、 Q/a を新たに Q と置く変数変換を行なうのが便利である． これを行なっても、1-形式は

$$\gamma = QdA + Pd\theta - hdt \quad (53)$$

であり、したがって、 (A, θ, Q, P) は正準座標である． そして、摂動 Hamiltonian h_1 および運動方程式は次のようになる．

$$h_1 = -py^3 = -\frac{3}{2}QA^2 + QA^2f_c(\theta) + PAf_s(\theta) \quad (54)$$

$$= \langle h_1 \rangle + \tilde{h}_1, \quad \langle h_1 \rangle := -\frac{3}{2}QA^2 \quad (55)$$

ここで、 $f_c(\theta)$, $f_s(\theta)$ は

$$f_c(\theta) = 2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta \quad (56)$$

$$f_s(\theta) = -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \quad (57)$$

で与えられる θ に関する周期関数である． そして、各変数に関する Hamilton の運動方程式は次式で与えられる．

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial h}{\partial Q} = -\frac{3}{2}\epsilon A^2 + \epsilon A^2 f_c(\theta) \quad (58)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial h}{\partial P} = 1 + \epsilon A f_s(\theta) \quad (59)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial A} = 3\epsilon QA - \epsilon [P f_s(\theta) + 2QA f_c(\theta)] \quad (60)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\epsilon A [P f'_s(\theta) + Q A f'_c(\theta)] \quad (61)$$

ここまでは、何の近似もしておらず、方程式 (58)–(61) は厳密である． また、振幅 A に対する方程式 (58) から $\epsilon < 0$ のとき、解は爆発することが予想される（にもかかわらず、正準摂動論が適用できる）．

摂動論の適用

補足で示す (113) 式に非摂動 Hamiltonian(44) を使うと

$$\{S^{(1)}, \mathcal{H}\} = \{S^{(1)}, P\} = \partial_\theta S^{(1)} \quad (62)$$

である． 次に、平均化法の指針に従い、摂動 Hamiltonian を (55) 式のように表したとき、変換後の Hamiltonian H_1 が $H_1 = \langle h_1 \rangle$ になるようにゲージ関数 $S^{(1)}$ を決める． したがって、関数 $S^{(1)}$ に対する偏微分方程式として

$$\partial_t S^{(1)} + \partial_\theta S^{(1)} = \tilde{h}_1 \quad (63)$$

を得る． まず、 $S^{(1)}$ を時間に依存しないように選ぶことが分かる． これは摂動 Hamiltonian が時間に陽に依存しない結果である． 方程式 (63) は容易に解け

$$S^{(1)} = QA^2 F_s(\theta) + P A F_c(\theta) \quad (64)$$

$$F_s(\theta) = \sin(2\theta) - \frac{1}{8} \sin(4\theta) \quad (65)$$

$$F_c(\theta) = \frac{1}{4} \cos(2\theta) - \frac{1}{16} \cos(4\theta) \quad (66)$$

を得る。変換後の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \bar{P} - \frac{3\epsilon}{2} \bar{Q} \bar{A}^2 \quad (67)$$

となるので、変換された座標系 $(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{Q}, \bar{P})$ 座標における運動方程式は

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{Q}} = -\frac{3}{2} \epsilon \bar{A}^2 \quad (68)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{P}} = 1 \quad (69)$$

および

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{A}} = 3\epsilon \bar{Q} \bar{A} \quad (70)$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\theta}} = 0 \quad (71)$$

で与えられる。

微分方程式 (68)-(71) は容易に解ける。とくに、 $\epsilon < 0$ の場合、振幅 \bar{A} は爆発する解

$$\bar{A}(t) = \bar{A}_0 \frac{1}{1 - (3/2) \bar{A}_0 |\epsilon| t} \quad (72)$$

になる (\bar{A}_0 は初期値)。一方、 \bar{Q} は \bar{A} が爆発する時刻にゼロになる解

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}_0 \left(1 - \frac{3}{2} \bar{A}_0 |\epsilon| t\right)^{3/2} \quad (73)$$

になっている (\bar{Q}_0 は初期値)。

次に、この運動を元の座標 (A, θ, Q, P) で見よう。Lie 変換

$$(A, \theta, Q, P) \rightarrow (\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{Q}, \bar{P})$$

の生成子は

$$g_{(1)}^1 = \partial_k S^{(1)} \cdot J^{k1} = -\frac{\partial S^{(1)}}{\partial Q} = -A^2 F_s(\theta) \quad (74)$$

$$g_{(1)}^2 = \partial_k S^{(1)} \cdot J^{k2} = -\frac{\partial S^{(1)}}{\partial P} = -A F_c(\theta) \quad (75)$$

である。これより、 $O(\epsilon)$ の範囲で

$$A = \bar{A} - \epsilon g_{(1)}^1 = \bar{A} - \epsilon \bar{A}^2 F_s(\bar{\theta}) \quad (76)$$

$$\theta = \bar{\theta} - \epsilon g_{(1)}^2 = \bar{\theta} + \epsilon \bar{A} F_c(\bar{\theta}) \quad (77)$$

である。これらを $x(t) = \sqrt{2A(t)} \cos \theta(t)$ に使って

$$x(t) = a \left[1 - \frac{3}{4} a^2 |\epsilon| t\right]^{-1/2} + O(\epsilon, |\epsilon|^2 t) \quad (78)$$

を得る。ここで、 $a = \sqrt{2\bar{A}_0}$ と置いた。実際、(78) 式で与えられる解は、たとえば、Multi-scale expansion 法 [3] で得られるものと一致する。

4 MHD 固有値問題への応用

微分方程式

$$\frac{d}{d\theta} \left(f(\theta) \frac{dy}{d\theta} \right) + g(\theta, \lambda) y(\theta) = 0 \quad (79)$$

を考える．ここで、独立変数 θ の区間は $-\infty < \theta < \infty$ とし、 λ はパラメータである．また、この区間において

$$f(\theta) > 0 \quad (80)$$

とする．われわれは、初期値問題ではなく、境界値問題あるいは固有値問題に興味がある．たとえば、境界条件

$$y(\pm\infty) = 0 \quad (81)$$

を満たすようなパラメータ λ を求めることに興味がある．

上の問題を Hamilton-Lie の変分問題および摂動論から眺めよう．方程式 (79) の 1-形式はすぐに作ることができ、それは正準形式

$$\gamma = p dy - h(y, p; \theta) d\theta \quad (82)$$

$$h(y, p; \theta) = \frac{p^2}{2f(\theta)} + \frac{g(\theta; \lambda)}{2} y^2 \quad (83)$$

と表される．実際、Hamilton の運動方程式から

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{p}{f(\theta)} \quad (84)$$

$$\frac{dp}{d\theta} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -gy \quad (85)$$

を得る．これらから p を消去すれば、方程式 (79) を得る．力学問題との類推から、この問題は、質量 f およびバネ定数 g が共に時間 θ に陽に依存する場合の振動子問題になっていると見なすことができる．

方程式 (79) の近似解法として Hamilton-Lie 摂動論を使うことができると予想される．話を具体的にするため、理想 MHD ballooning mode に対する model 方程式 [7] を取り上げよう．係数関数は

$$f(\theta) = 1 + [s(\theta - \theta_0) - \rho \sin \theta]^2 \quad (86)$$

$$g(\theta) = \rho V(\theta) + \lambda f(\theta) \quad (87)$$

$$V(\theta) = \kappa + \cos \theta + [s(\theta - \theta_0) - \rho \sin \theta] \sin \theta \quad (88)$$

と与えられる．ここで、パラメータ ρ , κ , s は、それぞれ、無次元化した圧力勾配、平均法線曲率そして磁気シアを表している [7]．ここで、われわれは弱いバルーンング (weak ballooning) 近似を考えることにする．それは、 $\epsilon \ll 1$ なる展開パラメータを導入したとき

$$\rho = O(\epsilon), \quad s = O(\epsilon^2), \quad \kappa = O(\epsilon^3), \quad \lambda = O(\epsilon^4) \quad (89)$$

を仮定する．したがって、ゆっくりと変化する変数

$$x = s(\theta - \theta_0) \quad (90)$$

を導入すると、係数関数は次のように展開される．

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (1 + x^2) - 2\rho x \sin \theta + \frac{\rho^2}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ &= (1 + x^2) + \epsilon f_1(\theta) + \epsilon^2 f_2(\theta) \end{aligned} \quad (91)$$

$$g(\theta) = \epsilon g_1(\theta) + \epsilon^2 g_2(\theta) + \epsilon^3 g_3(\theta) + \epsilon^4 g_4(\theta) \quad (92)$$

$$g_1(\theta) = \rho(x \sin \theta + \cos \theta) \quad (93)$$

$$g_2(\theta) = -\frac{\rho^2}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (94)$$

$$g_3(\theta) = 0 \quad (95)$$

$$g_4(\theta) = \lambda(1 + x^2) + \rho\kappa \quad (96)$$

これに対応して、Hamiltonian(83) を

$$h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots \quad (97)$$

と展開すると

$$h_0 = \frac{p^2}{2(1 + x^2)} \quad (98)$$

$$h_1 = -\frac{f_1(\theta)}{2(1 + x^2)^2} p^2 + \frac{g_1(\theta)}{2} y^2 \quad (99)$$

$$h_2 = -\rho^2 \left\{ \frac{3x^2 - 1}{4(1 + x^2)^3} p^2 - \frac{\rho^2}{4} y^2 \right\} (1 - \cos 2\theta) \quad (100)$$

を得る．

5 まとめと今後の課題

MHD 理論で現れる微分方程式（固有値問題等）を変分原理（作用積分）から捉えることができれば、より深い解析が可能になる場合があると同時に統一的な近似解法として Hamilton-Lie 摂動論が適用できる．この論考で取り上げた ideal ballooning mode 方程式は Hamiltonian を持ち、それゆえ Hamilton-Lie 摂動論が直接適用できる例である．この観点から固有値問題を捉え直しているところであり、より詳細な解析が進んだ段階で、また報告する．

しかしながら、MHD 理論で興味のある多くの微分方程式は作用積分を持たない．これが MHD 理論研究で Hamilton-Lie 摂動論が使われなかった主たる理由と思われる．この困難を解決する方法として共役変数の方法を、非線形振動子の問題を例にとり、紹介するとともに、Hamilton-Lie 摂動論が適用可能であることを示した．この共役変数の方法を援用して、たとえば resistive MHD mode 方程式を研究することができよう．これに関しても順次報告していく予定である．

謝辞

本稿は核融合科学研究所で開催された「MHD 理論の進展とその周辺」研究会（2006 年 9 月 14 日～15 日）で発表した内容を一部加筆したものである。本研究の発表機会を与えていただいた市口勝治助教授（核融合科学研究所）に感謝いたします。

補足：Hamilton-Lie 摂動論の要約

ここでは、Hamilton-Lie 摂動論の方法をまとめておく [2]。1-形式

$$\gamma = \gamma^{(0)} + \epsilon\gamma^{(1)} + \epsilon^2\gamma^{(2)} + \dots \quad (101)$$

において $\gamma^{(0)}$ は可積であるとする。位相空間での座標変換 及びゲージ変換によって高次の摂動項 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots$ をできる限り消去することを考えよう。微分方程式 (36) では、摂動項（摂動 Hamiltonian）は θ に対して周期関数である。したがって、摂動 Hamiltonian すべてを消すゲージ関数を探す必要はなく、 θ 依存性を持つ項（周期成分）のみを消すようなゲージ関数を見つけることができれば、Hamiltonian は正準運動量だけの関数になって、やはり、運動は可積である。これが平均化法の考え方である。もちろん、それができれば運動が解けたことになるので、一般的には不可能である。その代わりに、摂動項（の周期項）を $O(\epsilon)$ のオーダーで消し、おつりが $O(\epsilon^2)$ あるいはそれ以上のオーダーにするような関数 S を決めることは可能である。これが逐次近似の考え方である。

Lie 摂動論の一般論

Lie 変換の生成子 $g_{(n)} = \{g_{(n)}^\mu\}$ を $O(\epsilon^n)$ の 1-形式を消すように逐次的に決めていくことを考える。 $g_{(n)}$ に対応する Lie 微分作用素を $\mathcal{L}_{(n)}$ で表し、その Lie 変換を

$$T_{(n)} = \exp(-\epsilon^n \mathcal{L}_{(n)})$$

で表わす。逐次 Lie 変換の積は

$$T = \dots T_{(3)} T_{(2)} T_{(1)} \quad (102)$$

その逆変換は

$$T^{-1} = T_{(1)}^{-1} T_{(2)}^{-1} T_{(3)}^{-1} \dots$$

で表わされる。ここで

$$T_{(n)}^{-1} = \exp(\epsilon^n \mathcal{L}_{(n)}) \quad (103)$$

このとき、(102) 式で与えられる逐次 Lie 変換後の 1-形式 Γ は

$$\Gamma = T\gamma + dS \quad (104)$$

である。ここで、 S はスカラー関数である。変換後の 1-形式 Γ を

$$\Gamma = \gamma^{(0)} + \epsilon\Gamma^{(1)} + \epsilon^2\Gamma^{(2)} + \dots \quad (105)$$

と ϵ で展開しよう.

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= I - \epsilon \mathcal{L}_{(1)} + \frac{1}{2} \epsilon^2 (\mathcal{L}_{(1)})^2 + \dots \\ T_{(2)} &= I - \epsilon^2 \mathcal{L}_{(2)} + \dots \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} T &= \dots T_{(1)} T_{(2)} \\ &= I - \epsilon \mathcal{L}_{(1)} + \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{(1)})^2 - \mathcal{L}_{(2)} \right] + \dots \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} T\gamma &= \gamma^{(0)} + \epsilon(\gamma^{(1)} - \mathcal{L}_{(1)}\gamma^{(0)}) \\ &+ \epsilon^2 \left[\gamma^{(2)} - \mathcal{L}_{(1)}\gamma^{(1)} + \left(\frac{1}{2} (\mathcal{L}_{(1)})^2 - \mathcal{L}_{(2)} \right) \gamma^{(0)} \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

から

$$\Gamma^{(1)} = -\mathcal{L}_{(1)}\gamma^{(0)} + dS^{(1)} + \gamma^{(1)} \quad (106)$$

$$\Gamma^{(2)} = -\mathcal{L}_{(2)}\gamma^{(0)} + dS^{(2)} + \xi^{(2)} \quad (107)$$

$$\xi^{(2)} = \gamma^{(2)} - \mathcal{L}_{(1)}\gamma^{(1)} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{(1)})^2 \gamma^{(0)} \quad (108)$$

一般的に

$$\Gamma^{(n)} = -\mathcal{L}_{(n)}\gamma^{(0)} + dS^{(n)} + \xi^{(n)} \quad (109)$$

と表される. ここで, 1-形式 $\xi^{(n)}$ は $\gamma^{(n)}$ と, 先立つ低次の計算から得られる 1-形式で与えられる. また, 生成子 $\{g\}$ から作られる Lie 微分作用素 \mathcal{L}_g は 1-形式 γ に対して

$$(\mathcal{L}_g\gamma)_\mu = g^\nu (\partial_\nu \gamma_\mu - \partial_\mu \gamma_\nu)$$

で定義される.

1 次の正準摂動論

(106) 式における $\Gamma^{(1)}$ の空間成分 $\Gamma_j^{(1)}$, ($j = 1, \dots, 2N$) は

$$\Gamma_j^{(1)} = -g_{(1)}^\nu \omega_{\nu j}^{(0)} + \partial_j S^{(1)} \quad (110)$$

および, 時間成分 $\Gamma_0^{(1)}$ は

$$\Gamma_0^{(1)} = -g_{(1)}^\nu \omega_{\nu 0}^{(0)} + \partial_0 S^{(1)} - h_1 = g_{(1)}^j \partial_j h + \partial_t S^{(1)} - h_1 \quad (111)$$

である. したがって

$$g_{(1)}^\nu \omega_{\nu, j}^{(0)} = \partial_j S^{(1)}, \quad \text{すなわち} \quad g_{(1)}^j = \partial_k S^{(1)} J^{kj} \quad (112)$$

と選べば、空間成分をゼロにできる。これから、1-形式 γ が正準形式であれば、変換後の1-形式も正準形式であるような Lie 変換が存在し、その Lie 変換の生成子 $\{g\}$ はスカラー関数 S で

$$g^j = \partial_k S \cdot J^{kj}$$

で与えられる。(112) 式を (111) 式に使うと

$$\Gamma_0^{(1)} = \partial_k S^{(1)} J^{kj} \partial_j h + \partial_t S^{(1)} - h_1$$

すなわち、変換後の Hamiltonian $H_{(1)}$ は

$$-H_{(1)} = \partial_t S^{(1)} + \{S^{(1)}, h\} - h_1 \quad (113)$$

となる。

参考文献

- [1] E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, (Rober E. Krieger Publishing Company, Florida, U.S.A, 1983).
- [2] J.R. Cary and R.G. Littlejohn, Noncanonical Hamiltonian Mechanics and Its Application to Magnetic Field Line Flow, *Annals of Physics* **151**, 1-34 (1983).
- [3] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (McGraw-Hill, New York, U.S.A, 1978), Chap.11.
- [4] R.G. Littlejohn, Variational Principles of Guiding Centre Motion, *J. Plasma Physics* **29**, 111-125 (1983).
- [5] B. Juvet and R. Phytian, Quantum aspects of classical and statistical fields, *Physical Rev. A* **19**,1350 (1979).
- [6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, (Wiley-Interscience,U.S.A, 1989).
- [7] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Shear-Alfvén Dynamics of Toroidally Confined Plasmas, *Phys. Reports* **121**,1-164 (1985).

Ellipticity of axisymmetric equilibrium with flow and pressure anisotropy in single-fluid and Hall MHD*

Atsushi Ito,¹ Jesús J. Ramos,² and Noriyoshi Nakajima¹

¹*National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki 509-5292, Japan*

²*Plasma Science and Fusion Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 02139-4307*

The ellipticity criteria for the partial differential equations of axisymmetric single-fluid and Hall magnetohydrodynamic (MHD) equilibria with flow and pressure anisotropy are investigated. The MHD systems are closed with cold ions and electron pressures derived from their parallel heat flux equations, a closure that reproduces the corresponding kinetic dispersion relation. In the single-fluid model, which differs from the double-adiabatic Chew-Goldberger-Low (CGL) model, it is verified that the elliptic region boundaries occur at poloidal flow velocities equal to wave velocities from the kinetic dispersion relation. For Hall MHD, a set of anisotropic-pressure equilibrium equations is derived and an ellipticity condition corresponding to a poloidal flow velocity slightly smaller than the ion sound velocity is obtained.

I. INTRODUCTION

In the ideal MHD description of plasmas, axisymmetric toroidal equilibria with flow are obtained by solving the so-called generalized Grad-Shafranov (GS) equation and the Bernoulli law [1, 2]. When the flow is strong, the characteristics of this system of equations are quite different from for static case. The generalized GS partial differential equation can be either elliptic or hyperbolic depending on the magnitude of the poloidal flow velocity relative to the velocities of MHD waves [1, 2] and, in particular, transonic flow profiles become hyperbolic. Transonic poloidal flows are of interest because they may lead to the formation of transport barriers and profile pedestals in tokamaks [3–5]. For these steep plasma profile features, small-scale effects not included in the ideal MHD model should be significant.

Two-fluid effects resolve the Alfvén singularity [6–8] and modify the conditions for ellipticity [9, 10]. In order to include further multiscale effects, one has to adopt proper fluid equations since the characteristics of flowing equilibria depend also on the closure models. As a simple example that brings the closure problem to the two-fluid theory, we will consider Hall MHD in the presence of pressure anisotropy. In single-fluid MHD, equilibria with flow and anisotropic pressure have been examined with a kinetic closure model known as Grad’s guiding-center-particle (GCP) model [11] or kinetic MHD [12], and with the Chew-Goldberger-Low (CGL) double-adiabatic model [13]. In the GCP model, the first hyperbolic region is resolved by the Landau damping [14, 15]. In the CGL model, the ellipticity criteria are modified quantitatively by the pressure anisotropy [15, 16].

We choose to define Hall MHD as two-fluid MHD with cold ions and massless electrons. Hence, this model includes the Hall current and the electron pressure in the generalized Ohm’s law. With isotropic electron pressure, it yields a dispersion relation that agrees with kinetic theory without assuming any particular direction for wave propagation [18]. In order to preserve this feature in the presence of pressure anisotropy, we shall adopt here the collisionless magnetized fluid model proposed in Ref. [17], which includes the fluid moment equations for the parallel heat fluxes and closes them by using a shifted, two-temperature Maxwellian distribution function to evaluate the fourth-rank moments. This is different from the CGL double-adiabatic closure which, as is well known [12], is not consistent with kinetic theory.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we introduce our Hall MHD equations in the presence of pressure anisotropy. In Sec. III, we present the linear dispersion relation for this model and show its agreement with the kinetic one. In Sec. IV, we investigate the equilibrium equations in the single-fluid limit of our anisotropic-pressure model and obtain their ellipticity criterion which is consistent with the one based on kinetic wave propagation. In Sec. V, we derive the equilibrium equations for our Hall MHD with flow and anisotropic pressure and examine their ellipticity. A summary is given in Sec. VI.

*Submitted to Physics of Plasmas

II. BASIC EQUATIONS

The Hall MHD equations in the presence of pressure anisotropy are

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}_\nu) = 0 \quad (\nu = i, e), \quad (1)$$

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{p}_e, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{p}_e), \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_e = p_{e\perp} \mathbf{I} + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2} \mathbf{B} \mathbf{B}, \quad (7)$$

where n is the density, \mathbf{v}_i and \mathbf{v}_e are the flow velocities of ions and electrons, m_i is the ion mass, e is the charge, \mathbf{E} and \mathbf{B} are the electric and magnetic fields, \mathbf{j} is the current density, and \mathbf{p}_e is the electron pressure tensor. The electron mass m_e is neglected in Hall MHD. The right-hand side of the generalized Ohm's law (3) is the Hall term that gives rise to effects characterized by the ion skin depth $d_i \equiv \sqrt{m_i/\mu_0 n e^2}$. The assumption of cold ions, $p_{i\parallel} = p_{i\perp} = 0$, is consistent with the neglect of finite ion Larmor radius effects such as the ion gyro-viscosity, given that the ion Larmor radius ρ_i arises from the ion pressure p_i together with the ion skin depth d_i :

$$\rho_i = d_i \sqrt{\frac{p_i}{B^2/2\mu_0}}. \quad (8)$$

Equations for electron pressures can be obtained from the zero-Larmor-radius fluid moment equations for the parallel heat fluxes [17]:

$$m_\nu B q_{\nu B\parallel} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla \right) \ln \left(\frac{B^3 q_{\nu B\parallel}}{n^4} \right) + \frac{3p_{\nu\parallel}}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{\nu\parallel}}{n} \right) = 0, \quad (9)$$

$$m_\nu B q_{\nu T\parallel} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla \right) \ln \left(\frac{q_{\nu T\parallel}}{n^2} \right) + p_{\nu\parallel} \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{\nu\perp}}{n} \right) - \frac{(p_{\nu\parallel} - p_{\nu\perp}) p_{\nu\perp}}{n} \mathbf{B} \cdot \nabla (\ln B) = 0, \quad (10)$$

where $q_{\nu B\parallel}$ and $q_{\nu T\parallel}$ are the parallel and perpendicular components of parallel heat fluxes $q_{\nu\parallel} \equiv q_{\nu B\parallel} + q_{\nu T\parallel}$. These equations have been closed by using shifted, two-temperature Maxwellian distribution functions to evaluate the fourth-rank moments. The first terms on the left-hand sides of Eqs. (9) and (10) vanish for massless electrons ($m_e = 0$) and we get the following equations for the electron parallel and perpendicular pressures:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{e\parallel}}{n} \right) = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \left[\left(\frac{p_{e\parallel}}{p_{e\perp}} - 1 \right) B \right] = 0. \quad (11)$$

Based on kinetic theory, it has been reported [15] that the same pressure equations (11) also hold for ions in axisymmetric MHD equilibria with purely toroidal flow $\mathbf{v}_i = v_{i\varphi} R \nabla \varphi$. This is understood from Eqs. (9) and (10) by taking $\partial/\partial t = 0$ and $\mathbf{v}_i \cdot \nabla = v_{i\varphi} \partial/\partial \varphi = 0$. For massless electrons, the pressure equations (11) do not require either steady state or purely toroidal flow.

Equations (1) - (7) and (11) form a closed set and yield a wave dispersion relation consistent with kinetic theory as shown in the next section.

III. DISPERSION RELATION

The linear dispersion relation for waves in a homogeneous plasma with anisotropic pressure, derived from the closed Hall MHD system given in the previous section, is

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - k_\parallel^2 V_A^2 \tau) \left[\omega^4 - \left(k_\perp^2 \alpha + k_\parallel^2 \gamma \right) V_A^2 \omega^2 + k_\parallel^2 C_{s\parallel}^2 (k_\parallel^2 \tau + k_\perp^2 \kappa) V_A^2 \right] \\ & = k_\parallel^2 d_i^2 V_A^2 \omega^2 \tau (k_\parallel^2 \tau + k_\perp^2 \sigma) (\omega^2 - k^2 C_{sp}^2), \end{aligned} \quad (12)$$

where

$$\alpha \equiv 1 + \frac{2p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}}, \quad (13)$$

$$\gamma \equiv 1 + \frac{p_{e\perp}}{B^2/\mu_0}, \quad (14)$$

$$\tau \equiv 1 - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0}, \quad (15)$$

$$\kappa \equiv 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \frac{2p_{e\perp}}{p_{e\parallel}}, \quad (16)$$

$$\sigma \equiv 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \left(1 + \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right), \quad (17)$$

$$C_{sp}^2 \equiv C_{s\parallel}^2 \frac{k_{\parallel}^2 \tau + k_{\perp}^2 \kappa}{k_{\parallel}^2 \tau + k_{\perp}^2 \sigma}, \quad (18)$$

ω is the frequency of perturbation, k_{\parallel} and k_{\perp} are the parallel and perpendicular wavenumbers, $V_A = B/\sqrt{\mu_0 n m_i}$ is the Alfvén velocity, and $C_{s\parallel} = \sqrt{p_{e\parallel}/n m_i}$ is the sound velocity based on the electron parallel pressure. When $p_{e\parallel} = p_{e\perp}$, Eq. (12) reduces to the isotropic Hall MHD dispersion relation [18–24] which represents three MHD waves, the shear Alfvén, slow and fast magnetosonic waves, modified by the Hall term on the right-hand side. In the limit of short wave length $k d_i \rightarrow \infty$, the phase velocities of the waves are 0, C_{sp} and ∞ , C_{sp} being a modified sound velocity in the presence of pressure anisotropy. In the limit $d_i \rightarrow 0$, Eq. (12) is the dispersion relation for single-fluid MHD in the presence of pressure anisotropy and gives the stability condition, i.e. the condition for the real frequency ω , for the firehose instability,

$$\tau = 1 - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} > 0, \quad (19)$$

and for the mirror instability,

$$\kappa = 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \frac{2p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} > 0, \quad (20)$$

The conditions (19) and (20) coincide with those found in kinetic theory, in contrast with the double-adiabatic CGL result for the mirror instability [12]:

$$\kappa_{CGL} = 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}/6}{B^2/\mu_0} \frac{2p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} > 0. \quad (21)$$

Furthermore, an identical full dispersion relation can be obtained from kinetic theory for cold ions and adiabatic electrons, $0 = v_{Ti} \ll \omega/|k_{\parallel}| \ll v_{Te}$ where v_{Ti} and v_{Te} are the thermal ion and electron velocities so that the Landau damping can be neglected, as was the case in an isotropic plasma [18]. The wave equation for a homogeneous plasma is given by

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (22)$$

where $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$, c is the speed of light and $\boldsymbol{\epsilon}$ is the dielectric tensor. The magnetic field is in the z -direction, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, and the wave number vector is $\mathbf{k} = k_{\perp}\mathbf{e}_x + k_{\parallel}\mathbf{e}_z$. Equation (22) is rewritten in matrix form,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - n_z^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} + n_x n_z \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - n_x^2 - n_z^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + n_z n_x & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - n_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

Assuming $0 = v_{Ti} \ll \omega/|k_{\parallel}| \ll v_{Te}$ and $\omega \ll \omega_{ci}$, the dielectric tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ given from the linearized Vlasov equation [25] can be expanded as follows:

$$\epsilon_{xx} \simeq (c^2/V_A^2) \left[\alpha_1 + \frac{k_{\parallel}^2 V_A^2}{\omega^2} \left(\frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \right) \right], \quad (24)$$

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} \simeq i(c^2/V_A^2) \alpha_1 (\omega/\omega_{ci}), \quad (25)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} \simeq -\frac{k_{\parallel} k_{\perp} c^2}{\omega^2} \left(\frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \right), \quad (26)$$

$$\epsilon_{yy} \simeq \frac{c^2}{V_A^2} \left[\alpha_1 + \frac{k_{\parallel}^2 V_A^2}{\omega^2} \left(1 - 2 \frac{k_{\perp}^2 p_{e\perp}}{k_{\parallel}^2 p_{e\parallel}} \right) \left(\frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \right) \right], \quad (27)$$

$$\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} \simeq -i \frac{c^2}{V_A^2} \frac{k_{\perp} p_{e\perp}}{k_{\parallel} p_{e\parallel}} \frac{\omega_{ci}}{\omega}, \quad (28)$$

$$\epsilon_{zz} \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 k_{\parallel}^2 C_{s\parallel}^2} \left[\omega^2 - k_{\parallel}^2 C_{s\parallel}^2 \left(1 - \frac{k_{\perp}^2 V_A^2}{\omega_{ci}^2} \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \right) \right], \quad (29)$$

where $\alpha_1 \equiv (1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1}$, $\omega_{ci} \equiv eB/m_i$ is the ion cyclotron frequency, and $\omega_{pi} \equiv \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m_i}$ is the ion plasma frequency. Substituting (24) - (29) to Eq. (22), its determinant gives

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - k_{\parallel}^2 V_A^2 \tau & -i \frac{\omega}{\omega_{ci}} V_A^2 (k_{\parallel}^2 \tau + k_{\perp}^2 \kappa) & \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_A^2 \tau - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \omega^2) \\ i \frac{\omega}{\omega_{ci}} k_{\parallel}^2 V_A^2 \tau & \omega^2 - V_A^2 (k_{\parallel}^2 \tau + k_{\perp}^2 \kappa) & i \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \omega \omega_{ci} \left(1 - \frac{k_{\parallel}^2 V_A^2 \tau}{\omega_{ci}^2} - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right) \\ \frac{k_{\parallel} k_{\perp} V_A^2 \tau}{\omega_{ci}^2} k_{\parallel}^2 C_{s\parallel}^2 & i k_{\parallel} k_{\perp} C_{s\parallel}^2 \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} & \omega^2 - k_{\parallel}^2 C_{s\parallel}^2 \left(1 + \frac{k_{\perp}^2 V_A^2 \tau}{\omega_{ci}^2} \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

which exactly coincides with the dispersion relation (12).

IV. ANISOTROPIC SINGLE-FLUID EQUILIBRIUM

Omitting the Hall term, i.e. the right-hand side of Eq. (3), Eqs. (1) - (7) and (11) reduce to our anisotropic single-fluid MHD equations. Here we shall consider the corresponding toroidal axisymmetric equilibria, where the magnetic field \mathbf{B} , the flow velocity \mathbf{v}_i , the electric field \mathbf{E} and the current density \mathbf{E} can be written as

$$\mathbf{B} = \nabla\psi(R, Z) \times \nabla\varphi + RB_{\varphi}(R, Z)\nabla\varphi, \quad (31)$$

$$n\mathbf{v}_i = \nabla\Psi_i(R, Z) \times \nabla\varphi + nRv_{i\varphi}(R, Z)\nabla\varphi, \quad (32)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi(R, Z), \quad (33)$$

$$\mu_0\mathbf{j} = \nabla(RB_{\varphi}) \times \nabla\varphi - \Delta^*\psi\nabla\varphi, \quad (34)$$

where ψ and Ψ_i are the poloidal magnetic flux and ion stream functions, Φ is the electrostatic potential and $\Delta^* \equiv R^2\nabla \cdot [R^{-2}\nabla]$. Generalizing the formulation in Refs. [2, 15] to our anisotropic pressures, we obtain the following equations for equilibrium states:

$$p_{e\parallel} = nT_{\parallel}(\psi), \quad \frac{p_{e\parallel}}{p_{e\perp}} - 1 = \frac{B_0}{B}\Delta(\psi), \quad (35)$$

$$\Psi_i = \Psi_M(\psi), \quad \frac{nV_p}{B_p} = \Psi'_M(\psi), \quad (36)$$

$$\Phi = \Phi_E(\psi), \quad (37)$$

$$\frac{v_{i\varphi}}{R} - \frac{B_{\varphi}}{nR}\Psi'_M(\psi) = \Phi'_E(\psi), \quad (38)$$

$$\tau_1 RB_{\varphi} - \mu_0 m_i R^2 \Psi'_M(\psi) \Phi'_E(\psi) = I_M(\psi), \quad (39)$$

the Bernoulli law,

$$m_i \left(\frac{v_i^2}{2} - Rv_{i\varphi}\Phi'_E \right) + T_{\parallel} \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) = H(\psi)$$

or

$$\frac{m_i}{2} \left[\left(\frac{B\Psi'_M}{n} \right)^2 - (R\Phi'_E)^2 \right] + T_{\parallel} \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) = H(\psi), \quad (40)$$

and the generalized GS equation,

$$\begin{aligned} \mu_0^{-1} \nabla \cdot \left(\frac{\tau_1}{R^2} \nabla\psi \right) + nT'_{\parallel} - \frac{B_0 \Delta' p_{e\parallel}}{B_0 \Delta + B} - nT'_{\parallel} \ln \left(\frac{p_{e\parallel} n}{p_{e\perp}} \right) + nH' \\ + \frac{B_{\varphi} I'_M}{\mu_0 R} + m_i \Psi''_M \left(RB_{\varphi} \Phi'_E + \frac{B^2 \Psi'_M}{n} \right) + nm_i Rv_{i\varphi} \Phi''_E = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

where

$$\tau_1 \equiv \tau - M_{Ap}^2 = 1 - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} - M_{Ap}^2,$$

$B_p \equiv |\nabla\psi|/R$, $V_p \equiv |\nabla\Psi_i|/nR$ are the poloidal magnetic field and flow velocity, the prime denotes derivative with respect to ψ , B_0 is a constant, $M_{Ap} = V_p/V_{Ap}$ is the poloidal Alfvén Mach number, and $V_{Ap} \equiv B_p/\sqrt{\mu_0 n m_i}$ is the poloidal Alfvén velocity. Equations (35) result from the pressure equations (11). One can obtain Eqs. (36) - (38) from the projection of Faraday's law along $\nabla\varphi$, \mathbf{B} and $\nabla\psi$, and Eqs. (39) - (41) from those of the momentum equation respectively. There are six arbitrary functions of ψ : T_{\parallel} , Δ , Ψ_M , Φ_E , I_M and H . In cylindrical coordinates (R, φ, Z) , the second order derivatives of Eq. (41) are

$$[\tau_1 + 2\dot{\tau}_1(\partial_R\psi)^2]\partial_{RR}^2\psi + 4\dot{\tau}_1(\partial_R\psi)(\partial_Z\psi)\partial_{RZ}^2\psi + [\tau_1 + 2\dot{\tau}_1(\partial_Z\psi)^2]\partial_{ZZ}^2\psi,$$

where $\dot{\tau}_1 = \partial\tau_1/\partial|\nabla\psi|^2$. The characteristic determinant D is given by

$$D = \tau_1^2 B^2 \alpha (\beta' - M_{Ap}^2) / X_1(M_{Ap}^2),$$

where

$$X_1(M_{Ap}^2) = B_p^2 M_{Ap}^4 - (\alpha B_\varphi^2 + \gamma B_p^2) M_{Ap}^2 + \beta_{\parallel} (\tau B_p^2 + \kappa B_\varphi^2),$$

$\beta' \equiv (\kappa/\alpha)\beta_{\parallel}$ and $\beta_{\parallel} = p_{e\parallel}/(B^2/\mu_0)$. The generalized GS equation is elliptic if $D > 0$. In the absence of poloidal flow, the equilibrium is elliptic if $\tau > 0$ and $\kappa > 0$ which are the kinetic stability conditions for the firehose and mirror modes. In the presence of poloidal flow, there are three elliptic regions: $M_{Ap}^2 < \beta'$, $M_s^2 < M_{Ap}^2 < \tau$, and $\tau < M_{Ap}^2 < M_f^2$, where M_s^2 and M_f^2 ($M_s^2 < M_f^2$) are the roots of $X_1(M_{Ap}^2) = 0$ and correspond to the phase velocities of the slow and fast magnetosonic waves modified by the pressure anisotropy. These critical velocities can be obtained from the dispersion relation (12) in its $d_i \rightarrow 0$ limit, i.e. its left-hand side, and are different from those found with the double-adiabatic CGL model [15, 16].

V. ANISOTROPIC HALL MHD EQUILIBRIUM

The equilibrium equations for our anisotropic Hall MHD ($d_i \neq 0$) are,

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}_\nu) = 0, \quad (42)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \left[\nabla p_{e\perp} + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2} \mathbf{B} \right) \right], \quad (43)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + \frac{m_i}{e} (\mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i), \quad (44)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (45)$$

and Eqs. (4), (6) and (11). In addition to (31), (32) and (33), we introduce the following variables,

$$n\mathbf{v}_e = \nabla\Psi_e \times \nabla\varphi + nRv_{e\varphi}\nabla\varphi, \quad (46)$$

where Ψ_e is the electron stream function. The poloidal and toroidal components of the current density are given by

$$RB_\varphi = \mu_0 e (\Psi_i - \Psi_e), \quad (47)$$

$$-\Delta^*\psi = en\mu_0 R(v_{i\varphi} - v_{e\varphi}). \quad (48)$$

The axisymmetric toroidal equilibria are described by the following equations,

$$\Psi_e + \frac{RB_\varphi}{eB^2} (p_{e\parallel} - p_{e\perp}) = \Psi_{*e}(\psi), \quad RB_\varphi = \mu_0 e [\Psi_i - \Psi_{*e}(\psi)]/\tau, \quad (49)$$

$$e\Phi - T_{\parallel}(\psi) \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) = e\Phi_*(\psi), \quad (50)$$

$$v_{e\varphi} = \frac{1}{en} R \nabla \cdot \left(\frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{R^2 B^2} \nabla \psi \right) + \frac{B_\varphi}{n} \frac{d\Psi_{*e}}{d\psi} + R \frac{d\Phi_*}{d\psi} + \frac{R}{e} \frac{dT_{\parallel}}{d\psi} \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) - \frac{R}{e} \frac{dT_{\parallel}}{d\psi} + \frac{R(p_{e\parallel} - p_{e\perp})}{en} \frac{d \ln \Delta}{d\psi}, \quad (51)$$

$$\psi + \frac{m_i}{e} R v_{i\varphi} = \chi(\Psi_i), \quad (52)$$

the Bernoulli law for ions,

$$e\Phi + \frac{m_i}{2} v_i^2 = W(\Psi_i)$$

or

$$\frac{m_i}{2R^2} \left\{ \frac{|\nabla \Psi_i|^2}{n^2} + \frac{e^2}{m_i^2} [\chi(\Psi_i) - \psi]^2 \right\} + e\Phi_*(\psi) + T_{\parallel}(\psi) \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) = W(\Psi_i), \quad (53)$$

and the coupled GS equations for ψ and Ψ_i ,

$$\begin{aligned} & \mu_0^{-1} R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\tau}{R^2} \nabla \psi \right) - e R B_\varphi \frac{d\Psi_{*e}}{d\psi} - R^2 (p_{e\parallel} - p_{e\perp}) \frac{d \ln \Delta}{d\psi} \\ & - n R^2 \left[e \frac{d\Phi_*}{d\psi} + \frac{dT_{\parallel}}{d\psi} \ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) - \frac{dT_{\parallel}}{d\psi} \right] + \frac{e^2 n}{m_i} [\chi(\Psi_i) - \psi] = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{n R^2} \nabla \Psi_i \right) - \frac{\mu_0 e^2}{m_i \tau} [\Psi_i - \Psi_{*e}(\psi)] + \frac{n e^2}{m_i^2} [\chi(\Psi_i) - \psi] \frac{d\chi}{d\Psi_i} - \frac{n R^2}{m_i} \frac{dW}{d\Psi_i} = 0. \quad (55)$$

One can obtain Eqs. (49) - (51) from the projection of Eq. (43) along $\nabla \varphi$, \mathbf{B} and $\nabla \psi$, and Eqs. (52), (53) and (55) from that of Eq. (44) along $\nabla \varphi$, \mathbf{v}_i and $\nabla \Psi_i$ respectively. The GS equation for ψ , (54), is given by substituting Eqs. (51) and (52) to Eq. (48). There are six arbitrary functions of ψ or Ψ_i : $T_{\parallel}(\psi)$, $\Delta(\psi)$, $\Phi_*(\psi)$, $\Psi_{*e}(\psi)$, $\chi(\Psi_i)$ and $W(\Psi_i)$. Taking the gradient of $\tau = 1 - (p_{e\parallel} - p_{e\perp})/(B^2/\mu_0)$ and Eq. (53), one obtains

$$\begin{aligned} & (1 - \tau) \frac{\nabla n}{n} + \left[\tau + (1 - \tau) \left(2 + \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right) \frac{B_\varphi^2}{B^2} \right] \frac{\nabla \tau}{\tau} + (1 - \tau) \left(\frac{d \ln T_{e\parallel}}{d\psi} + \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \frac{d \ln \Delta}{d\psi} \right) \nabla \psi \\ & - (1 - \tau) \left(1 + \frac{p_{e\perp}}{2p_{e\parallel}} \right) \left\{ -\frac{2}{R} \nabla R + \frac{\nabla(|\nabla \psi|^2)}{B^2 R^2} + \left(\frac{e\mu_0}{BR\tau} \right)^2 \nabla [\Psi_i - \Psi_{*e}(\psi)]^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (56)$$

and

$$\begin{aligned} & - \left(m_i V_p^2 - \frac{p_{e\parallel}}{n} \right) \frac{\nabla n}{n} + (1 - \tau) \frac{B_\varphi^2}{\mu_0 n} \frac{\nabla \tau}{\tau} - \left[m_i v_i^2 - (1 - \tau) \frac{B^2}{\mu_0 n} \right] \frac{\nabla R}{R} + \frac{m_i \nabla(|\nabla \Psi_i|^2)}{2n^2 R^2} \\ & + \frac{e^2 \nabla [\chi(\Psi_i) - \psi]^2}{2R^2 m_i} - \frac{1 - \tau}{2n R^2 \mu_0} \left\{ \nabla(|\nabla \psi|^2) + \left(\frac{e\mu_0}{\tau} \right)^2 \nabla [\Psi_i - \Psi_{*e}(\psi)]^2 \right\} \\ & + \left[\ln \left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) \frac{dT_{e\parallel}}{d\psi} + (1 - \tau) \frac{B^2}{n} \frac{d \ln \Delta}{d\psi} + e \frac{d\Phi_*}{d\psi} - \frac{dW}{d\psi} \right] \nabla \psi = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

which yield

$$\begin{aligned} \nabla \tau / \tau &= A_1 \nabla(|\nabla \psi|^2) + A_2 \nabla(|\nabla \Psi_i|^2) + \dots, \\ \nabla n / n &= A_3 \nabla(|\nabla \psi|^2) + A_4 \nabla(|\nabla \Psi_i|^2) + \dots, \end{aligned}$$

where

$$A_1 \equiv \frac{(1 - \tau) m_i}{2R^2 B^2 X_2} \left[V_p^2 \left(2 + \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right) - C_{s\parallel}^2 \left(1 + \frac{2p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right) \right], \quad (58)$$

$$A_2 \equiv -\frac{(1 - \tau) m_i}{2R^2 n^2 X_2}, \quad A_3 \equiv -\frac{(1 - \tau) \tau}{2R^2 \mu_0 n X_2}, \quad A_4 \equiv \frac{m_i (B_p^2 \tau + B_\varphi^2 \sigma)}{2R^2 n^2 B^2 X_2}, \quad (59)$$

$$X_2 \equiv \frac{m_i(B_p^2\tau + B_\varphi^2\sigma)}{B^2}(V_p^2 - C_{sp}^{\prime 2}), \quad C_{sp}^{\prime 2} \equiv C_{s\parallel}^2 \frac{k_{\parallel}^2\tau + k_{\perp}^2\kappa}{k_{\parallel}^2\tau + k_{\perp}^2\sigma}. \quad (60)$$

The second order derivatives of GS equations (54) and (55) are

$$\begin{aligned} \tau\Delta^*\psi + \nabla\psi \cdot \nabla\tau &= \tau[\Delta^*\psi + A_1\nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla\psi|^2) + A_2\nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla\Psi_i|^2)] + \dots, \\ \Delta^*\Psi_i - \nabla\Psi_i \cdot \nabla n/n &= \Delta^*\Psi_i - A_3\nabla\Psi_i \cdot \nabla(|\nabla\psi|^2) - A_4\nabla\Psi_i \cdot \nabla(|\nabla\Psi_i|^2) + \dots, \end{aligned}$$

and the coupled GS equations are rewritten as

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{RR}^2\psi \\ \partial_{RR}^2\Psi_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{RZ}^2\psi \\ \partial_{RZ}^2\Psi_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{ZZ}^2\psi \\ \partial_{ZZ}^2\Psi_i \end{pmatrix} + \dots = 0, \quad (61)$$

where

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau[1 + 2A_1(\partial_R\psi)^2] & 2\tau A_2(\partial_R\psi)(\partial_R\Psi_i) \\ -2A_3(\partial_R\psi)(\partial_R\Psi_i) & 1 - 2A_4(\partial_R\Psi_i)^2 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4\tau A_1(\partial_R\psi)(\partial_Z\psi) & 2A_2\tau[(\partial_Z\psi)(\partial_R\Psi_i) + (\partial_R\psi)(\partial_Z\Psi_i)] \\ -2A_3[(\partial_R\psi)(\partial_Z\Psi_i) + (\partial_Z\psi)(\partial_R\Psi_i)] & -4A_4(\partial_R\Psi_i)(\partial_Z\Psi_i) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau[1 + 2A_1(\partial_Z\psi)^2] & 2\tau A_2(\partial_Z\psi)(\partial_Z\Psi_i) \\ -2A_3(\partial_Z\psi)(\partial_Z\Psi_i) & 1 - 2A_4(\partial_Z\Psi_i)^2 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

In the absence of pressure anisotropy ($p_{e\parallel} = p_{e\perp} = p_e$), the three tensors in (61) are all diagonal since the coefficients A_2 and A_3 vanish, thus the determinants for ellipticity of Eqs. (54) and (55) are decoupled as shown in Ref. [23]. In the presence of pressure anisotropy, the determinants are coupled and cannot be examined separately. One can find the conditions for ellipticity of such systems involving higher order derivatives by examining the existence of wave type solutions as well as second order differential equations [26, 27]. Here we consider a wave propagating in one-dimensional space R and time Z and having discontinuity across the wave front $\xi(R, Z) = 0$. Using curvilinear coordinates of $\xi(R, Z) = \text{const}$ and its normal surface $\zeta(R, Z) = \text{const}$, Eq. (61) is transformed to

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi}^2\psi \\ \partial_{\xi\xi}^2\Psi_i \end{pmatrix} + \dots = 0, \quad (65)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \begin{pmatrix} a_1 - b_1u + c_1u^2 & a_2 - b_2u + c_2u^2 \\ a_3 - b_3u + c_3u^2 & a_4 - b_4u + c_4u^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} F_1(u) & G_1(u) \\ G_2(u) & F_2(u) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$F_1(u) \equiv \tau[1 + 2A_1(\partial_Z\psi)^2]u^2 - 4\tau A_1(\partial_R\psi)(\partial_Z\psi)u + \tau[1 + 2A_1(\partial_R\psi)^2], \quad (67)$$

$$F_2(u) \equiv [1 - 2A_4(\partial_Z\Psi_i)^2]u^2 + 4A_4(\partial_R\Psi_i)(\partial_Z\Psi_i)u + 1 - 2A_4(\partial_R\Psi_i)^2, \quad (68)$$

$$G_1(u) \equiv 2\tau A_2[(\partial_Z\psi)u - (\partial_R\psi)][(\partial_Z\Psi_i)u - (\partial_R\Psi_i)], \quad (69)$$

$$G_2(u) \equiv 2A_3[(\partial_Z\psi)u - (\partial_R\psi)][(\partial_Z\Psi_i)u - (\partial_R\Psi_i)], \quad (70)$$

and $u \equiv dR/dZ$ means the velocity of the wave front. If we assume the wave is smooth, the discontinuity at the wave front $\xi = 0$ appears only in the highest order derivatives with respect to ξ . It implies

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (71)$$

which yields an algebraic equation for u :

$$F(u) = G(u), \quad (72)$$

where

$$F(u) \equiv F_1(u)F_2(u), \quad (73)$$

$$\begin{aligned} G(u) &\equiv G_1(u)G_2(u), \\ &= -4\tau A_2 A_3 [(\partial_Z\psi)u - (\partial_R\psi)]^2 [(\partial_Z\Psi_i)u - (\partial_R\Psi_i)]^2. \end{aligned} \quad (74)$$

If u is real, there exist wave-type, i.e. hyperbolic, solutions for the partial differential equations. Ellipticity of the coupled GS equations requires the non-existence of real solutions of u , for Eq. (72). The discriminant for the solutions of $F_1(u) = 0$ is

$$D_1 = -4\tau^2(1 + 2A_1|\nabla\psi|^2) \quad (75)$$

$$= -\frac{4B^2\tau^2\sigma[V_p^2 - (\kappa/\sigma)C_{s\parallel}^2]}{(B_p^2\tau + B_\varphi^2\sigma)(V_p^2 - C_{sp}^{\prime 2})}, \quad (76)$$

and that of $F_2(u) = 0$ is

$$D_2 = -4(1 - 2A_4|\nabla\Psi_i|^2) \quad (77)$$

$$= \frac{4C_{sp}^{\prime 2}}{V_p^2 - C_{sp}^{\prime 2}}. \quad (78)$$

The right-hand side of Eq. (72) is not zero in the presence of both poloidal flow and pressure anisotropy.

(i) If the pressure is isotropic, D_1 is always negative and $D_2 < 0$ yields the condition for ellipticity shown in Ref. [9],

$$V_p^2 < C_s^2 \equiv p_e/nm_i. \quad (79)$$

(ii) If there is no poloidal flow, D_2 is always negative and $D_1 < 0$ is satisfied by the condition for ellipticity of single-fluid MHD equilibria with purely toroidal flow, $\tau > 0$ and $\kappa > 0$ due to the relation

$$\sigma - \kappa = (p_{e\parallel} - p_{e\perp})^2 / (p_{e\parallel} B^2 / \mu_0) > 0. \quad (80)$$

(iii) Provided the condition in (ii) holds, we examine now the dependence of the ellipticity condition on the poloidal flow velocity in the presence of pressure anisotropy. Since

$$C_{sp}^{\prime 2} - \frac{\kappa}{\sigma} C_{s\parallel}^2 = \frac{B_p^2\tau(\sigma - \kappa)}{\sigma(B_p^2\tau + B_\varphi^2\sigma)} C_{s\parallel}^2 > 0, \quad (81)$$

both $D_1 < 0$ and $D_2 < 0$ are satisfied by

$$V_p^2 < (\kappa/\sigma)C_{s\parallel}^2. \quad (82)$$

The relation (82) gives the relations

$$A_1 > -(2B_p^2 R^2)^{-1} > -[2(\partial_Z\psi)^2]^{-1}, \quad (83)$$

and

$$1 - 2A_4(\partial_Z\Psi_i)^2 > 0. \quad (84)$$

Thus $F(u) > 0$ when $\tau > 0$ and $\kappa > 0$. Since

$$G(u) = -\frac{m_i\tau^2}{\mu_0 n} \left(\frac{1 - \tau}{2R^2 n X} \right)^2 \leq 0, \quad (85)$$

the non-existence of real roots of $F(u) = 0$ is a sufficient condition for the non-existence of real roots of

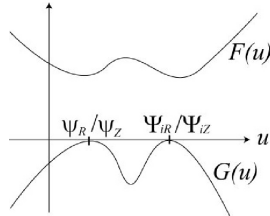


FIG. 1: Sketch of $F(u)$ and $G(u)$.

$F(u) = G(u)$ (see Fig. 1). The condition (82) is therefore a sufficient condition for the ellipticity. We note that the condition for ellipticity (82) is obtained from F_1 , i.e. the GS equation for ψ , Eq. (54), not from that for Ψ_i , Eq. (55) like in the absence of pressure anisotropy, and the criterion $\sqrt{\kappa/\sigma}C_{s\parallel}$ is slightly smaller than the ion sound velocity C_{sp}^{\prime} .

VI. SUMMARY

In this paper, we have obtained conditions for ellipticity of axisymmetric toroidal equilibria with flow and pressure anisotropy. We have adopted pressure equations that reproduce the kinetic dispersion relation in the limit of cold ions and adiabatic electrons. The ellipticity conditions in our single-fluid model are related to the velocities of waves from the kinetic dispersion relation and are different from those of the double-adiabatic CGL model. For anisotropic Hall MHD, we have obtained a sufficient condition for ellipticity that corresponds to a poloidal flow velocity slightly smaller than the sound velocity.

The fluid moment equations used in this paper include the Hall term and the pressure anisotropy for electrons. To include more small scale effects such as the gyro-viscosity and the Landau damping, a more advanced closure model applicable to finite ion pressures should be adopted.

Acknowledgments

This work was partially supported by the Ministry of Education, Culture, Sports and Technology of Japan, Grant-in-Aid for Young Scientists (B) No. 18740358. One of us (J.J.R.) benefited from a visiting appointment at Japan's National Institute for Fusion Science under the auspices of the U.S.-Japan Joint Institute for Fusion Theory and thanks the hospitality of Profs. M. Okamoto, T.-H. Watanabe and the NIFS staff, as well as the financial support from NIFS and the United States Department of Energy.

-
- [1] H. P. Zehrfeld and B. J. Green, Nucl. Fusion **12**, 569 (1972).
 - [2] E. Hameiri, Phys. Fluids **26**, 230 (1983).
 - [3] K. C. Shaing, R. D. Hazeltine, H. Sanuki, Phys. Fluids B **4**, 404 (1992).
 - [4] R. Betti and J. P. Freidberg, Phys. Plasmas **7**, 2439 (2000).
 - [5] L. Guazzotto, R. Betti, J. Manickam, and S. Kaye, Phys. Plasmas **11**, 604 (2004); L. Guazzotto, R. Betti, *ibid.* **12**, 056107 (2005).
 - [6] K. G. McClements and A. Thyagaraja, Mon. Not. R. Astron. Soc. **323**, 733 (2001).
 - [7] Z. Yoshida, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki, Phys. Plasmas **11**, 3660 (2004).
 - [8] J. Shiraishi, S. Ohsaki, Z. Yoshida, Phys. Plasmas **12**, 092308 (2005).
 - [9] A. Ishida, C. O. Harahap, L. C. Steinhauer, and Y.-K. M. Peng, Phys. Plasmas **11**, 5297 (2004).
 - [10] J. P. Goedbloed, Phys. Plasmas **11**, L81 (2004).
 - [11] H. Grad, in *Proceedings of the Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma* edited by J. Fox (Polytechnic Inst. of Brooklyn, New York, 1961), p.37; in *Magneto-Fluid and Plasma Dynamics, Symposia in Applied Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1967), Vol. 18, p. 162.
 - [12] R. M. Kulsrud, in *Handbook of Plasma Physics Vol. 1* (North-Holland, Amsterdam, 1983), p. 115.
 - [13] G. F. Chew, M. L. Goldberger, and F. E. Low, Proc. R. Soc. London Ser. A **236**, 112 (1956).
 - [14] D. Dobrott and J. M. Greene, Phys. Fluids **13**, 2391 (1970).
 - [15] R. Iacono, A. Bondeson, F. Troyon, and R. Gruber, Phys. Fluids B **2**, 1794 (1990).
 - [16] R. A. Clemente and R. L. Viana, Plasma Phys. Control. Fusion **41**, 567 (1999); Braz. J. Phys. **29**, 457 (1999).
 - [17] J. J. Ramos, Phys. Plasmas **10**, 3601 (2003).
 - [18] A. Ito, A. Hirose, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki, Phys. Plasmas **11**, 5643 (2004).
 - [19] G. Brodin and L. Stenflo, Contrib. Plasma Phys. **3**, 413 (1990).
 - [20] B. N. Kuvshinov, Plasma Phys. Control. Fusion **36**, 867 (1994).
 - [21] S. Ohsaki and S. M. Mahajan, Phys. Plasmas **11**, 898 (2004).
 - [22] A. Hirose, A. Ito, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki, Phys. Lett. A **330**, 23 (2004).
 - [23] A. Ishida, C. Z. Cheng, and Y.-K. M. Peng, Phys. Plasmas **12**, 052113 (2005).
 - [24] E. Hameiri, A. Ishizawa, and A. Ishida, Phys. Plasmas **12**, 072109 (2005).
 - [25] T. H. Stix, *Waves in Plasmas* (Springer-Verlag, New York, 1992).
 - [26] A. Jeffrey and T. Taniuti, *Non-linear Wave Propagation* (Academic Press, New York, 1964).
 - [27] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics Vol. II* (Wiley, New York, 1962).

流れのあるプラズマ中での外部揺動による磁気島成長

石井康友¹⁾、安積正史¹⁾、Andrei Smolyakov²⁾

1) 日本原子力研究開発機構、日本

2) University of Saskatchewan, Canada

E-mail : ishii.yasutomo@jaea.go.jp

Abstract. Novel features of the rapid growth and the nonlinear dynamics of the driven magnetic island in the rotating plasma are studied by nonlinear MHD simulations. The transition phase of the magnetic island evolution is found between the rapid growth phase and the Rutherford-like phase in the low resistivity regime. It is shown that the rapid growth of the magnetic island is associated with its deformation that leads to the secondary magnetic island formation around the original X-points. Unusual magnetic island deformation is caused by the non-monotonic torque profile around the magnetic island. In the rotating plasma, the nonlinear evolution of the driven magnetic island, which is one of the important origins of the seed island for the neoclassical tearing mode, in the low resistivity regime is different from that in the high resistivity regime.

1. はじめに

トカマクプラズマでは、低次の共鳴面に生じた磁気島がプラズマ閉じ込め性能に影響を及ぼすことが知られている。そのため、トカマク核融合プラズマにおいては、磁気島の抑制及び制御が重要な研究課題となっている。磁気島が発生する機構は大きく2つに分けられる。1つはMHDモードに対して不安定な共鳴面において自発的に磁気島が発生する機構である。他方はMHDモードに対して安定な共鳴面に加わる外部揺動により磁気島が強制的に形成される機構(外部駆動磁気島)である。後者の機構は、新古典ティアリングモードの種磁気島を励起する機構の1つと考えられている。流れのあるプラズマ中では、臨界値を越えると外部駆動磁気島が急激に成長することが知られている。これまでの研究では主にこの臨界値の研究に重点が置かれていたが、本研究では外部駆動磁気島の長時間成長を調べる。

2. モデル方程式

回転プラズマ中に外部から与えられた磁束揺動で励起される磁気島の時間発展を調べるために、円柱形状の抵抗性簡約化MHD方程式系を用いる[1]。本研究では平衡プラズマ流として剛体回転を考え、流れポテンシャルを $\phi_{0/0} = -2\pi/\lambda\tau(1-r^\lambda)$,

$\lambda = 2, \tau = 100$ と設定する。また、 $q=2$ の共鳴面のみを考え、プラズマ表面 $r=a$ でポロイダル磁束関数 $\psi_{2/1}(a)$ を時間 t に対して線形に増大させる。

3. 外部駆動磁気島の時間発展

本節では、外部駆動磁気島の時間発展の抵抗値 η に対する依存性を示す。図 1 は抵抗値 η を $\eta = 5 \times 10^{-5} \sim 10^{-7}$ の範囲で変化させた際の磁気島幅の時間発展の様子を示したものである。抵抗値 η が大きい場合 ($\eta = 5 \times 10^{-5}, 10^{-5}, 5 \times 10^{-6}$)、磁気島幅の時間発展は 3 領域に分けることができる ; A) flow-suppressed phase, B) rapid growth phase, C) Rutherford-like phase。この 3 領域への分割は従来の理論的理解と一致する。しかしながら、図 1 に示されるように、抵抗値 η が小さい場合 ($\eta = 10^{-6}, 5 \times 10^{-7}, 10^{-7}$)、磁気島幅が振動しながら増大する遷移領域が現れることが分かった。従って、流れのあるプラズマ中に励起される外部駆動磁気島の時間発展は 4 領域に分けられる ; A) flow-suppressed phase, B-1) rapid growth phase, B-2) transition phase, C) Rutherford-like phase。領域 B-2) transition phase は、抵抗値 η が小さくなるに従って、その継続時間が長くなる。

transition phase が発生する機構を明確にするために、磁気島のポロイダル角方向の運動を調べる。図 2 は、 $\eta = 10^{-5}, 10^{-6}$ の場合の磁気島の X-point および O-point のポロイダル角度の時間変化を表したものである。図 2 より、領域 A) ではほぼ一定であった X-point 及び O-point のポロイダル方向位置は領域 B-1) でポロイダル角が増大する方向に (仮定しているポロイダル流の向きに依存) 大きく変化する。X-point 及び O-point のポロイダル角が最大となる時刻とほぼ同時に、磁気島は transition phase に入る。Transition phase では X-point, O-point とともにポロイダル方向に振動し、抵抗値が小さいほど振動時間が長くなることが分かる。Transition phase から Rutherford-like phase へ入ると、磁気島と外部揺動の位相関係が固定されるため、X-point, O-point のポロイダル角度は再び一定になる。ポロイダルモード数 $m=2$ の磁気島を考えると、通常は X-point と O-point のポロイダル角度差 $\Delta\theta_{X-O}$ は 0.5π であるが、rapid growth phase から Rutherford-like phase の初期においては $\Delta\theta_{X-O} > 0.5\pi$ となる。このポロイダル角度差 $\Delta\theta_{X-O}$ の増大は磁気島のポロイダル方向に対する磁気島の非対称性の発生に対応する。図 3 (a), (b) は (a) rapid growth phase、(b) transition phase における磁気島構造および磁気島近傍でのトルクの分布を示したものである。径方向に flow shear が在る場合、問題となる共鳴面に対して磁気島が径方向に非対称性を持つことが知られている。しかしながら、本研究では、図 3 (a), (b) に示すように、rapid growth phase 及び transition phase では、磁気島がポロイダル方向にも非対称性を持つことを発見した。このような磁気島構造の非対称性により、初期の X-point が引き延ばされ 2 次的磁気再結合が生じることが分かった。これまでの研究では、磁気島のポロイダル角方向の運動は、磁気島が剛体であると仮定して研究されてきた。しかしながら、図 3 に示されるように、本研究で用いたパラメータ領域では、

磁気島中に作用するトルクは不均一である。その結果、磁気島内の各領域が異なった運動をし、径方向及びポロイダル方向に対する非対称な変形が磁気島に生じる。

4. まとめ

本研究では、流れのあるプラズマ中で外部揺動により駆動される磁気島の時間発展を調べた。流れのあるプラズマ中での磁気島の時間発展は、4領域に分けられることが分かった。領域 A) flow-suppressed phase では、磁気島幅がゆっくりと増大するとともに、初期の共鳴面近傍の平衡流が減衰する。この領域では、磁気島は外部揺動に対して一定のポロイダル角度位置に存在する。領域 B-1) rapid growth phase では、磁気島がポロイダル方向に移動し、磁気島のポロイダル方向の非対称変形が引き起こされる。その結果、領域 B-2) transition phase では、初期の X-point が破壊され 2 次的磁気再結合とそれに伴う磁気島が形成される。磁気島はその後、領域 C) Rutherford-like phase に入り、外部揺動と位相结合した状態で成長する。領域 B-1) 及び B-2) では、磁気島内の不均一なトルク分布により、磁気島が径方向及びポロイダル各方向に非対称な変形を生じ 2 次的磁気再結合を引き起こしている。

外部駆動磁気島は NTM の種磁気島に関する中心的な研究課題の 1 つである。本研究で示した 2 次的な磁気島の形成は、磁気島のセパトリクス近傍のブーツストラップ電流分の変化を通じて NTM に影響すると考えられる。

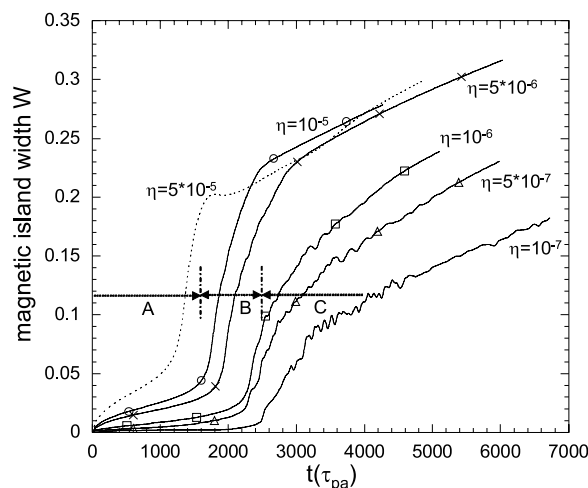


図1 様々な抵抗値 η に対する外部駆動磁気島幅の時間発展の様子。抵抗値が大きい場合は磁気島の時間発展は A) flow-suppressed phase, B) rapid growth phase, C) Rutherford-like phase の3領域に分けられる。

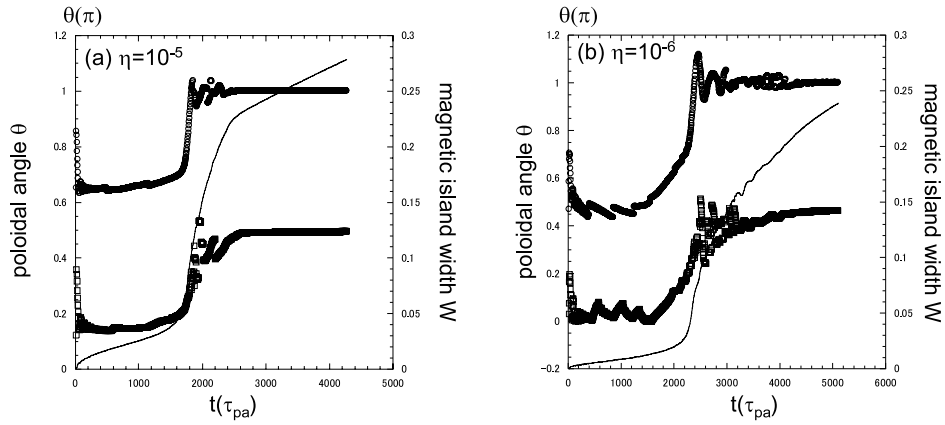


図2 X-point, O-point のポロイダル角度の時間変化と磁気島幅の時間発展 (a) $\eta=10^{-5}$, (b) $\eta=10^{-6}$ 。

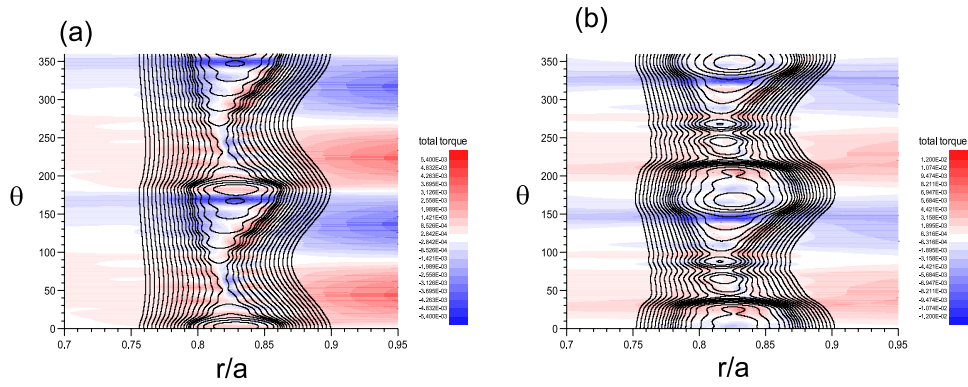


図3 (a) rapid growth phase 及び (b) transition phase における磁気島構造とトルク分布。

参考文献

- [1] Y. Ishii, M. Azumi and A. Smolyakov, FEC2006, TH/P3-5

ピーリング・バルーニングモードの安定性に対する プラズマ上部形状の影響に関する数値解析

相羽信行、徳田伸二、滝塚知典、栗田源一、小関隆久

日本原子力研究開発機構、茨城県那珂市向山 801-1, 311-0193

N. Aiba, S. Tokuda, T. Takizuka, G. Kurita, and T. Ozeki

Japan Atomic Energy Agency, 801-1 Muko-yama, Naka, Ibaraki 311-0193, Japan

e-mail: aiba.nobuyuki@jaea.go.jp

Abstract. エッジローカライズモード (ELMs) に関連した理想 MHD モードであるピーリングモード、バルーニングモード、およびピーリング・バルーニングモードと呼ばれるトカマク周辺局在 MHD モードの安定性を、線形理想 MHD 安定性解析コード MARG2D を用いて数値的に調べた。最外郭磁気面の上部および下部の曲率を用いて定義される "尖り度" と呼ぶ形状パラメータを定義し、トカマク周辺局在 MHD モードの安定性に対するこのパラメータの影響を解析した。その結果、楕円度・三角度といった他の形状パラメータが変化しなくとも尖り度を大きくすることで周辺局在 MHD モードの安定性で制限されるプラズマ圧力勾配の限界値が大きく改善することがわかった。この改善は、尖り度が大きくなることによるプラズマ上部および下部の局所磁気シア分布の変化を通して引き起こされることを明らかにした。

1 Introduction

トカマク周辺領域において生じる理想電磁流体 (MHD) 不安定性は、H-mode プラズマの周辺部ペデスタル領域の限界圧力勾配を制限するエッジローカライズモード (ELM) の原因の 1 つである [1]。この理想 MHD モードはピーリングモード、バルーニングモード、およびピーリング・バルーニングモードと呼ばれ、これらの安定性に関する理論解析が近年進められてきた。例えば、線形安定性解析によりピーリング・バルーニングモードの安定性がトカマク平衡の形状 (楕円度 δ 、三角度 κ [2]、四角度 Sq [3] など) に強く依存していることがわかっており、これらの結果は実験的に観測されている形状の変化による ELM 現象の変化と矛盾しない [4, 5]。また最近、ELMy H-mode の閉じこめ特性にトカマク平衡上部の形状が大きな影響を与えることが実験結果から予測されている [6, 7]。本論文では、トカマク平衡上部の形状を表すパラメータとして "尖り度" を平衡上部および下部の曲率を用いて定義し、周辺局在 MHD モードの安定性に対する尖り度の影響について線形理想 MHD 安定性解析コード MARG2D [8, 9, 10] を用いて数値的に解析する。この数値コードは 2 次元 Newcomb 方程式 [11] に随伴した固有値問題を解くことにより、理想 MHD モードの安定限界を正確に同定することができる [8, 9]。また、この MARG2D コードにおいて採用している定式化を真空磁場領域まで拡張することにより、単一の物理モデルに基づいたトロイダルモード数 n が小さい MHD モードから大きい MHD モードまでの安定性解析を可能にしている [10]。

2 Equilibrium properties

2.1 Definition of the 'sharpness'

ここではまず、トカマク平衡上部および下部の形状がトカマク周辺プラズマの安定性に与える影響を明らかにするために新たな形状パラメータ "尖り度" を導入する。この尖り度 σ はトカマク平衡上部あるいは下部の形状を用いて $\sigma = (1/r_c) (1/a)$ と定義する。ここで r_c は曲率円の半径、 a はプラズマ小半径である。図 1 は尖った磁気面 (実線 (赤)) と丸まった磁気面 (破線 (青)) の平衡上部における曲率の例を示す。この尖り度は形状が尖ることによって大きくなるパラメータであり、楕円度 κ や三角度 δ には直接依存しない。

2.2 Equilibrium properties

トカマク周辺プラズマの安定性に対する尖り度の影響を調べるために、3 つの異なる平衡上部の尖り度 ($\sigma_{up} = 5.66, 3.19, 1.75$) をもつ平衡における安定性解析を行い、その結果を比較する。なお、以

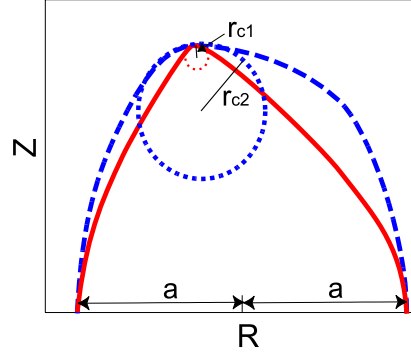


図 1: 平衡上部における曲率半径 r_c の例。尖った平衡 (実線 (赤)) の尖り度 σ は $\sigma_1 = (1/r_{c1}) (1/a)$ で与えられ、丸まった平衡 (破線 (青)) の尖り度 $\sigma_2 = (1/r_{c2}) (1/a)$ よりも大きいことがわかる。

後の議論では $\sigma_{up} = 5.66, 3.19, 1.75$ の平衡をそれぞれ EQ1, EQ2, EQ3 と呼ぶ。図 2(a) はそれぞれの平衡における磁気面形状を実線 (赤、EQ1)、破線 (青、EQ2) および点線 (緑、EQ3) で表している。これらの平衡の形状パラメータのうち、プラズマ大半径 $R_0[m] = 3.19$, $a[m] = 0.88$, $\kappa_{up} = 1.57$, $\kappa_{dw} = 1.75$, $\delta_{up} = 0.20$, $\delta_{dw} = 0.26$, $S_{q_{dw}}$ および σ_{dw} はそれぞれ同じ値である。ここで下付き文字 up , dw はそれぞれ平衡上部および下部の値を表している。また EQ2 および EQ3 の $S_{q_{up}}$ の値は同じであるが、EQ1 の $S_{q_{up}}$ はそれらよりも大きな値となっている。

これらの平衡における圧力勾配および平均電流分布は以下の式に基づいて与えられる。

$$\frac{dp}{d\psi} \propto (1 - \psi_N^{0.8})^{1.5} + C_p \exp \left(\frac{(\psi_N - 0.96)^2}{2 (0.025)^2} \right), \quad (1)$$

$$\langle j \cdot B \rangle \propto (1 - \psi_N^{0.55})^{2.2} + 0.3 (1 - \psi_N^5) + C_j \exp \left(\frac{(\psi_N - 0.96)^2}{2 (0.025)^2} \right). \quad (2)$$

ここで ψ はポロイダル磁束、 ψ_N は磁気軸で $\psi_N = 0$ 、プラズマ表面で $\psi_N = 1$ となるように規格化されたポロイダル磁束、 j はプラズマ電流密度、 B は磁場、および括弧 $\langle X \rangle$ は変数 X の磁気面平均を表している。この式の中の変数 C_p および C_j を変化させて $\psi_N = 0.96$ 近傍の圧力勾配および電流密度を変化させることで、周辺部ペDESTAL およびブートストラップ電流を模擬する。これらの平衡のポロイダルベータ値 β_p およびプラズマ中心における磁場強度は 0.8 および $3.5[T]$ で一定である。また、プラズマ電流をそれぞれ $I_p[MA] = 1.55$ (EQ1)、 1.535 (EQ2)、および 1.574 (EQ3) とすることにより、それぞれの平衡はパラメータ C_j が一定である場合にはプラズマ表面における安全係数 q_{edge} がほぼ同じ値となる。

図 2(b) は p および $dp/d\psi$ の分布、また図 2(c) は安全係数 q および平均電流密度 $\langle j \cdot B \rangle$ の分布を表している。これらの図はパラメータ C_p および C_j がそれぞれ 1.0 および 0.3 の場合の分布であり、この場合 q_{edge} は 7.52 である。また、圧力勾配およびペDESTAL の肩の位置はそれぞれ $\psi_N = 0.96$ 、 $\psi_N = 0.92$ である。

3 Effect of the sharpness on the stability of peeling-ballooning modes

この章では、尖り度がトカマク周辺プラズマの安定性に与える影響について数値的に解析した結果を示す。トロイダルモード数 n が無限大のバルーニングモードの安定性は BETA コード [12] を用いて、また有限 n の理想 MHD モードの安定性は MARG2D コードを用いてそれぞれ評価する。解析を行った MHD モード数のトロイダルモード数の範囲は 1 から 30 までである。

図 3(a) は安定性解析の結果を $j_{edge} \langle j_{||} \rangle \alpha_{96}$ ダイアグラムで表したものである。ここで $j_{||}$ は磁力線に平衡方向の電流密度、 j_{edge} はプラズマ表面における平均の $j_{||}$ 、 α は $\alpha = 2\mu_0 R q^2 (dp/dr) B^2$ で定義される規格化圧力勾配、 μ_0 は真空中における透磁率、 r は各磁気面における小半径、および下付き文字 96 は $\psi_N = 0.96$ の位置における値を表している。図中の BETA コードを用いて明らかにされたバルーニングモードの安定限界の線と、MARG2D コードを用いて明らかにされたピーリ

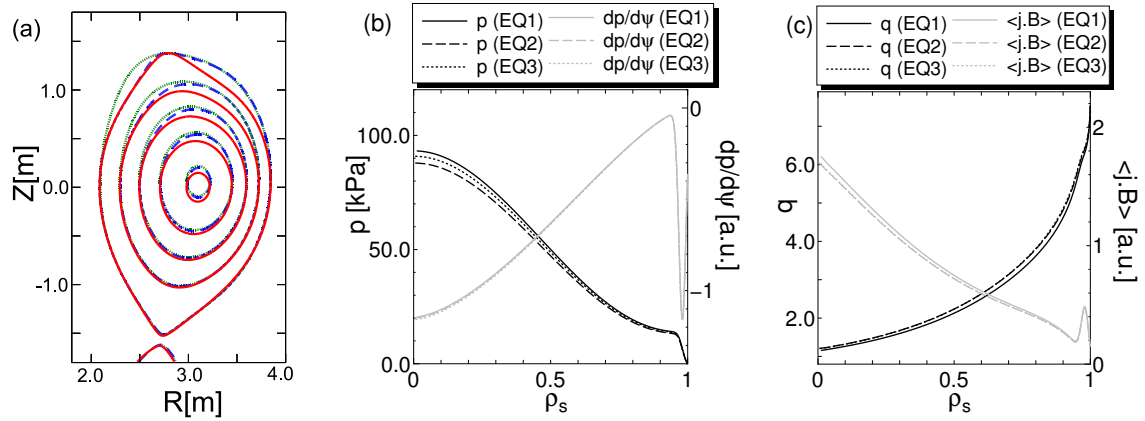


図 2: (a) 平衡EQ1 ($\sigma_{up} = 5.66$, 実線(赤)), EQ2 (3.19, 破線(青)), およびEQ3 (1.75, 点線(緑))の磁気面。楕円度および三角度はすべての平衡で一定である。(b) 圧力 p (黒) および圧力勾配 $dp/d\psi$ (灰) の分布, および (c) 安全係数 q (黒) および平均電流密度 $\langle j_{||} B \rangle$ (灰) の分布。横軸は $\rho_s = \sqrt{\psi_N}$ で定義される。実線はEQ1、破線はEQ2、および点線はEQ3の分布をそれぞれ表している。分布を決定するパラメータ (C_p, C_j) は (1.0, 0.3) である。

ング・バルーニングモードの安定限界の線との交点近傍で最も不安定となる MHD モードのトロイダルモード数は、いずれの平衡においてもおよそ $n = 25$ である。 $j_{edge} \langle j_{||} \rangle$ が一定である場合には q_{edge} もほぼ同じであることから、ピーリングモードの安定限界を決定する $j_{edge} \langle j_{||} \rangle$ の限界値はいずれの平衡でもほぼ 0.31 で一定であり、この値は α_{96} にほとんど依存しない。この結果は、 σ_{up} の増大が電流駆動型不安定性 (ピーリングモードおよびキックモード) の安定性にはほとんど影響を与えないことを示している。一方、ピーリング・バルーニングモードの安定性で制限されている α の安定限界値は、 σ_{up} を 1.75 から 5.66 まで上昇させることで 3.22 から 4.38 まで上昇していることがわかる。また、図 3(b) に示されている $s_{96} - \alpha_{96}$ ダイアグラムで示した安定性解析結果から、 σ_{up} が大きくなることによりバルーニングモードの第二安定領域が広がっていることがわかる。なおここで s は $s = r(dq/dr) / q$ で定義される磁気シアである。これらの結果から、尖り度の上昇はバルーニングモードおよびピーリング・バルーニングモードを安定化させることが明らかになった。この安定化はトカマク H-mode プラズマにおける周辺部ペダスタル領域の限界圧力勾配を上昇させる。

図 4 は α が安定限界値を制限しているピーリング・バルーニングモードの固有関数の (R, Z) 断面でのモード構造を、それぞれ (a) EQ1、(b) EQ2、および (c) EQ3 の場合について表している。この場合、($j_{edge} \langle j_{||} \rangle, s_{96}, \alpha_{96}$) の値はそれぞれ EQ1 で (0.31, 1.84, 4.38)、EQ2 で (0.29, 1.86, 3.65)、および EQ3 で (0.27, 1.92, 3.22) である。これらのピーリング・バルーニングモードのトロイダルモード数はいずれも $n = 5$ であり、いずれも悪い曲率側に局在した類似している構造を持つことがわかる。この結果は、尖り度がバルーニングモードおよびピーリング・バルーニングモードの安定化に有効であるが、固有関数の幅という観点から、ピーリング・バルーニングモードの不安定化によって崩壊するペダスタル領域の幅には尖り度の影響はほとんどないと考えられることを示している。

4 Mechanism of the stabilization with the sharpness

この章では、尖り度がバルーニングモードおよびピーリング・バルーニングモードを安定化する理由を明らかにする。我々の興味はペダスタル領域における限界圧力勾配の大きさにあるので、以後の議論では $\sigma_{up} = 5.66$ (EQ1) と 1.75 (EQ3) の平衡における圧力勾配が安定限界値となっている状態の比較を行う。これらの場合での周辺領域での平衡量の値は ($j_{edge} \langle j_{||} \rangle, s_{96}, \alpha_{96}$) でそれぞれ EQ1 で (0.31, 1.84, 4.38)、および EQ3 で (0.27, 1.92, 3.22) である。また、この場合に安定限界値を制限している MHD モードのモード構造はすでに図 4(a), (c) において示している。

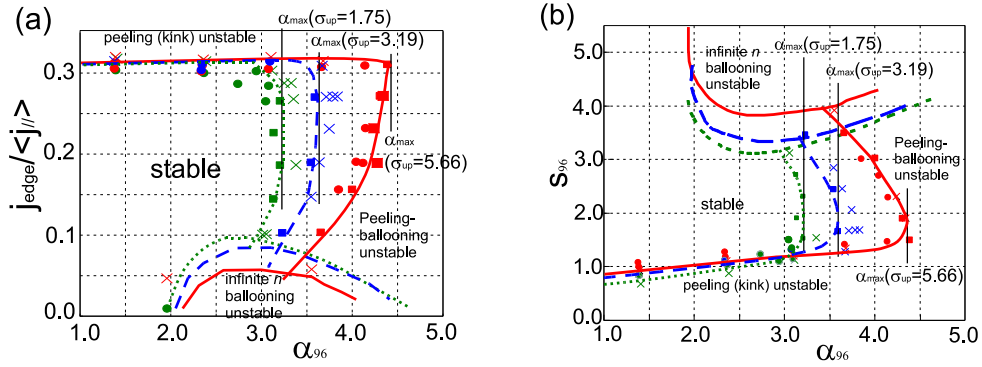


図 3: (a) EQ1 ($\sigma_{up} = 5.66$, 実線 (赤)), EQ2 (3.19, 破線 (青)), および EQ3 (1.94, 点線 (緑)) における安定性解析の結果を示す $(j_{edge} / \langle j_{||} \rangle - \alpha_{96})$ ダイアグラム。規格化圧力勾配 α_{96} の限界値は σ_{up} を 1.75 から 3.19, 5.66 まで上昇させることで 3.22 から 3.65, 4.38 まで上昇していることがわかる。(b) EQ1, EQ2, および EQ3 における安定性解析の結果を示す $s_{96} - \alpha_{96}$ ダイアグラム。 σ_{up} の上昇によってバルーニングモードの第二安定領域が広がっていることがわかる。

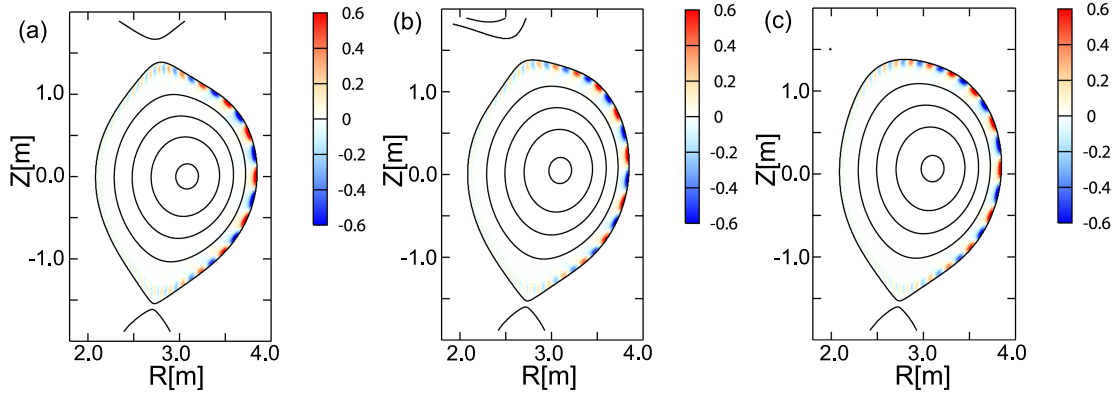


図 4: (R, Z) 断面における圧力勾配の安定限界値を制限するピーリング・バルーニングモードのモード構造 ((a) EQ1, (b) EQ2, (c) EQ3)。それぞれの場合の値 $(j_{edge} / \langle j_{||} \rangle, s_{96}, \alpha_{96})$ は EQ1 で (0.31, 1.84, 4.38)、EQ2 で (0.29, 1.86, 3.65)、および EQ3 で (0.27, 1.92, 3.22)。これらのピーリング・バルーニングモードのトロイダルモード数はいずれも $n = 5$ である。

4.1 Comparison of the plasma potential energy

非圧縮仮定に基づいた線形理想 MHD モデルでは、プラズマのポテンシャルエネルギーは以下のように 4 つの項の和で表される。

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} |Q_{\perp}|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left| Q_{||} \mathbf{b} - \mu_0 \frac{\xi \cdot \nabla p}{B^2} \mathbf{B} \right|^2 - \frac{j_{||} B}{B^2} (\xi \cdot \mathbf{B}) Q - 2(\xi \cdot \nabla p)(\xi \cdot \boldsymbol{\kappa}) \sqrt{g} d. \quad (3)$$

ここで $Q = Q_{\perp} + Q_{||} \mathbf{b} = \nabla \cdot (\xi \cdot \mathbf{B})$ は摂動磁場、下付き文字 \perp は平衡磁場 B に垂直な方向の値、 ξ はプラズマ変位、 $\boldsymbol{\kappa}$ は B の曲率、および \sqrt{g} はヤコビアンである。この式 (3) の右辺第 1 項および第 2 項は安定化項であり、それぞれ Shear Alfvén 項および Compressional Alfvén 項と呼ばれる。一方、第 3 項および第 4 項はそれぞれ磁力線に平行な方向に流れる電流、およびプラズマ圧力勾配によって引き起こされる不安定化項を表している。また、プラズマ表面が変位することを許す外部 MHD モードの安定性解析ではプラズマのポテンシャルエネルギーに加えて真空磁場のポテン

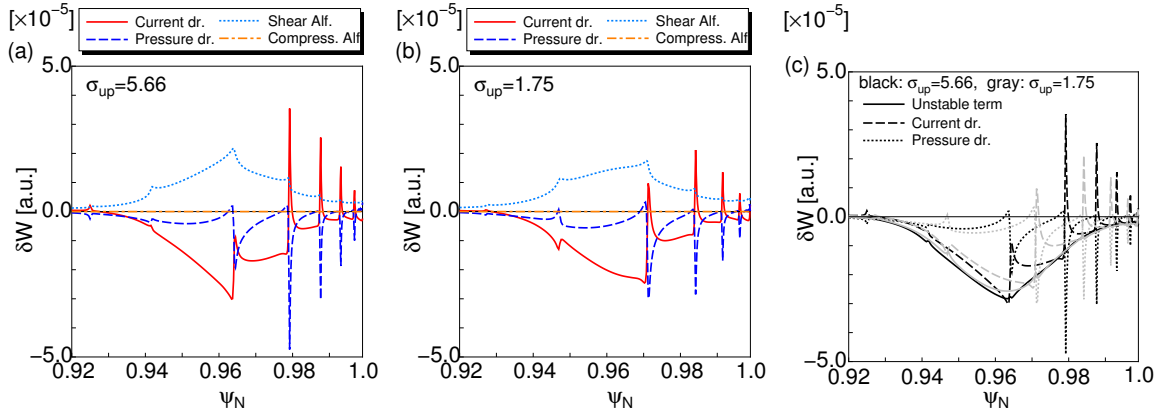


図 5: 式 (3) で示されるポテンシャルエネルギーの各成分の径方向分布 ((a) EQ1、(b) EQ3)。実線 (赤)、破線 (青)、点線 (水色)、および破点線 (黄色) はそれぞれ電流駆動成分、圧力駆動成分、Shear Alfven 成分、および Compressional Alfven 成分を表している。(c) EQ1 (黒) および EQ3 (灰) における電流駆動成分 (破線)、圧力駆動成分 (点線)、およびそれらの和 (実線) の径方向分布。

シャルエネルギーも評価する必要がある。この節では、これらのプラズマポテンシャルエネルギーの各項および真空磁場のポテンシャルエネルギーを EQ1 および EQ3 で評価し、それを比較することでそれぞれの平衡が不安定化する原因を明らかにする。

図 5 は (a) EQ1 および (b) EQ3 におけるポテンシャルエネルギーの各成分の径方向分布である。この場合、Compressional Alfven 成分 (図中破点線 (黄色)) はプラズマポテンシャルエネルギーにほとんど寄与しておらず、プラズマの安定性は電流駆動成分 (実線 (赤)) と圧力駆動成分 (破線 (青)) の和と Shear Alfven 成分 (点線 (水色)) との差によって決まっている。プラズマ全体での Shear Alfven 成分の寄与、電流駆動成分の寄与、圧力駆動成分の寄与、および真空磁場エネルギーを比較すると EQ1 で 3 : 10 : 4 : 11、EQ3 で 7 : 18 : 8 : 19 である。この結果から、プラズマは主に磁力線に平衡方向の電流によって不安定化するが、プラズマ圧力の勾配による不安定化も無視できず、典型的なピーリング・バルーニングモードが安定限界を制限していることが示された。また、図 5(c) に示す EQ1 (黒) および EQ3 (灰) における不安定化成分の径方向分布から、破線で示される電流駆動成分の分布および点線で示される圧力駆動成分の分布は EQ1 および EQ3 で異なるが、実線で示されるそれらを足しあわせた値はほぼ同じ分布をしていることがわかる。

これらの結果から、尖り度の上昇による MHD モードの安定化は、磁力線に平衡方向の電流およびプラズマ圧力勾配によって生じる不安定化項と主に Shear Alfven 項から生じる安定化項の比を変化させることによるものではないことがわかった。

4.2 Comparison of the eigenfunction in the poloidal direction

3 章において、尖り度の上昇は圧力駆動成分が不安定化の一因となるバルーニングモードおよびピーリング・バルーニングモードを安定化するが、電流駆動成分によって不安定化されるピーリングモードやキックモードの安定性にはほとんど影響を与えないことを明らかにした。そこでピーリング・バルーニングモードのうち特に圧力駆動成分の安定性に対する尖り度の影響を明らかにする観点から、安定限界を制限する MHD モードの固有関数のポロイダル方向の構造を比較する。前述の通り、EQ1 および EQ3 いずれの平衡においても圧力勾配の安定限界を制限するピーリング・バルーニングモードのトロイダルモード数はともに $n = 5$ である。図 6 は固有関数のポロイダル方向のモード構造を表している。ここで、横軸 θ は磁力線を直線にみる座標系 (ψ, θ, ϕ) におけるポロイダル角である。図 6(a) は $\psi_N = 0.96$ の位置におけるモード構造を示しているが、EQ1 (実線 (赤)) および EQ3 (破線 (青)) それぞれの構造が悪い曲率の領域 ($\theta \simeq 0.0$) においてよく似ていることがわかる。しかしながら、図 6 (b) および (c) でそれぞれ示される $\psi_N = 0.98$ および 0.99 の位置における分布を比較すると、EQ1 の場合の固有関数は EQ3 の場合に比べて $\theta = 0$ 近傍により強く局在している、特

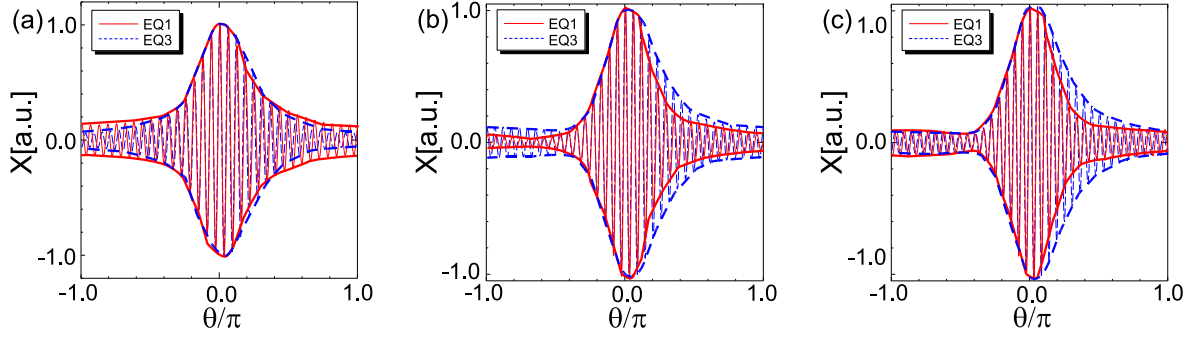


図 6: (a) $\psi_N = 0.96$ 、(b) 0.98 、および (c) 0.99 の位置における固有関数のポロイダル方向のモード構造。実線 (赤) は EQ1 の、破線 (青) は EQ3 の場合の固有関数の結果を示している。

に $\theta \simeq 0.3\pi$ 近傍での固有関数の振幅が尖り度が上昇することによって強く押さえられていることがわかる。このような固有関数の局在は、 $\theta \simeq 0.3\pi$ の領域において有限な振幅をもつ試行関数がプラズマを安定化させるのに不利であることを示している。

この節で示した尖り度の上昇による固有関数のポロイダル方向の局在化、および図 3(b) で示されるバルーニングモードの第二安定領域の拡大という結果から、磁力線に平行な電流およびプラズマ圧力勾配双方の和によって不安定化するピーリング・バルーニングモードの安定限界は、尖り度の上昇によって主に圧力駆動成分が安定化されることによって改善していることが示された。

4.3 Comparison of the equilibrium quantities affecting the ballooning mode stability

前節では、尖り度の上昇による圧力駆動成分の安定化によってピーリング・バルーニングモードが安定化されることを示した。そこで本節では、異なる尖り度を持つ平衡におけるバルーニングモードの安定性に重要である平衡量を比較することで、尖り度の上昇によるバルーニングモードの安定化の物理機構を明らかにする。

トロイダルモード数 n が無限大の極限においては、理想バルーニングモードの安定性は以下の式を解くことによって調べることができる [13, 14, 15]。

$$B \nabla \left[\frac{1}{|\nabla\psi|^2} + \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} I^2 \right] (B \nabla) \xi + \frac{2}{B^2} \frac{dp}{d\psi} \left[\frac{B^2}{|\nabla\psi|^2} \kappa_n + I \kappa_g \right] + \rho \omega^2 \left[\frac{1}{|\nabla\psi|^2} + \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} I^2 \right] \xi = 0, \quad (4)$$

$$I = \int \frac{S}{B} dl, \quad (5)$$

$$S = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \cdot \nabla \left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \cdot B \right), \quad (6)$$

ここで S は局所磁気シア、 $\kappa_n = \kappa \cdot \nabla\psi$ は主方向曲率、 $\kappa_g = \kappa \cdot (\nabla\psi \times B)$ は測地方向曲率である。これらの κ_n 、 κ_g 、および S という平衡量はバルーニングモードの安定性を決定する重要なものである [15, 16]。そこで、異なる尖り度を持つ平衡におけるこれらの量を比較する。

図 7 は $\psi_N = 0.96$ (実線)、 0.98 (破線)、および 0.99 (点線) の位置における (a) κ_n 、(b) κ_g 、および (c) S のポロイダル方向の分布を示している。これらの図から、 κ_n の分布は EQ1 (黒) および EQ3 (灰) でほとんど変化しないが、 κ_g および S の分布は尖り度の変化によって特に $\theta \simeq 0.3$ 近傍において変化していることがわかる。特に、局所磁気シア S の増大は、バルーニングモードの第二安定領域を広げる原因となる。この S の絶対値が大きくなることはバルーニングモードの安定化に寄与するため、固有関数は尖り度の上昇によって S の絶対値が大きくなった $\theta \simeq 0.3$ 近傍の領域では大きな振幅を持たず、 $|S|$ が小さく κ_n が負である $\theta \simeq 0$ の領域に局在すると考えられる。この結果は図 6(b) および (c) で示された結果と矛盾しないものである。

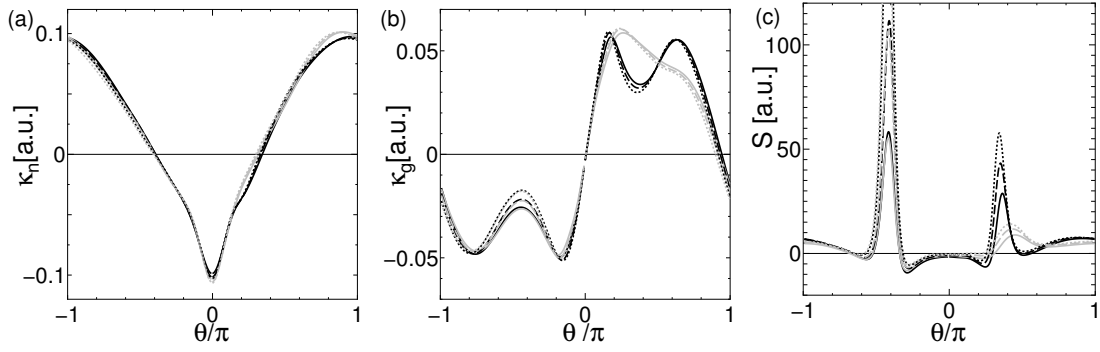


図 7: EQ1(黒) および EQ3(灰) における (a) κ_n 、(b) κ_g 、および (c) S のポロイダル方向の分布。実線、破線、および点線はそれぞれ $\psi_N = 0.96$ 、 0.98 、および 0.99 の位置における分布を表している。

これらの結果から、尖り度はプラズマ上部あるいは下部の局所磁気シアを変化させることによってバルーニングモード、およびピーリング・バルーニングモードの安定性に影響を与えていることが示された。

5 Summary

本論文では、新たな形状パラメータである "尖り度" をプラズマ上部および下部の曲率と、プラズマ小半径を曲率半径とする曲率の比として導入し、平衡の上部および下部の形状がトカマク周辺プラズマにおける理想 MHD 安定性に与える影響を調べた。トロイダルモード数が無限大のバルーニングモードおよび有限のトロイダルモード数を持つ理想 MHD モードの数値安定性解析から、尖り度の上昇はピーリングモードの安定性にはほとんど影響を与えないが、バルーニングモード、およびピーリング・バルーニングモードを安定化することが明らかになった。この安定化効果は、プラズマ上部および下部の局所磁気シアが尖り度の上昇とともに増大することにより、圧力駆動型のバルーニングモードが安定化されることによるものである。本論文で示された結果は、今回導入した "尖り度" を大きくすることによって、トカマク H-mode プラズマの周辺部ペDESTAL領域における限界圧力勾配を上昇させることができることを示しており、尖り度が H-mode プラズマの閉じこめ性能に影響を与える重要な形状パラメータであることを明らかにした。

References

- [1] J. W. Connor, R. J. Hastie, H. R. Wilson, and R. L. Miller, Phys. Plasmas **5**, 2687 (1998).
- [2] P. B. Snyder, H. R. Wilson, J. R. Ferron, L. L. Lao, A. W. Leonard, D. Mossessian, M. Murakami, T. H. Osborne, A. D. Turnbull, and X. Q. Xu, Nucl. Fusion **44**, 320 (2004).
- [3] A. W. Leonard, T. H. Osborne, P. B. Snyder, R. J. Groebner, P. Gohil, Bull. Am. Phys. Soc. **50**, 270 (2005).
- [4] J. R. Ferron et al., Phys. Plasmas, **7**, 1976 (2000).
- [5] Y. Kamada, H. Takenaga, A. Isayama, T. Hatae, H. Urano, H. Kubo, T. Takizuka and Y. Miura, Plasma Phys. Control. Fusion **44**, A279 (2002).
- [6] S. Takeji et al., Fusion Sci. Technol. **42**, 278 (2002).
- [7] T. Takizuka, H. Urano, H. Takenaga and N. Oyama, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 799 (2006).
- [8] S. Tokuda and T. Watanabe, Phys. Plasmas **6**, 3012 (1999).
- [9] S. Tokuda, N. Aiba and M. Okamoto, TH/P4-46, 20th IAEA Fusion Energy Conference, 2004.

- [10] N. Aiba, S. Tokuda, T. Ishizawa and M. Okamoto, *Comput. Phys. Commun.* **175**, 269 (2006).
- [11] W. A. Newcomb, *Ann. Phys.* **10**,232 (1960).
- [12] M. Azumi et al., *Plasma Phys. (Proc. 6th Int. Conf., Lausanne, 1984) vol. 1 (Brussels: CEC)* 375 (1984).
- [13] D. Dobrott, D. B. Nelson, J. M. Greene, A. H. Glasser, M. S. Chance, and E. A. Frieman, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 943 (1977).
- [14] J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 396 (1978).
- [15] M. S. Chance, S. C. Jardin, and T. H. Stix, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1963 (1983).
- [16] J. M. Greene and M. S. Chance, *Nucl. Fusion* **21**, 453 (1981).

MHD 平衡計算を考慮した簡約化 MHD 方程式の有限要素法による解析

京都大学大学院エネルギー科学研究科

中村祐司、川口哲司、大平丈夫

簡約化 MHD 方程式の二次元有限要素法を用いた解析を進めている。ここでは、MHD 平衡コードで得られた現実的な MHD 平衡に対して、簡約化 MHD 方程式による MHD 安定性解析を行う。ベンチマークとして LHD プラズマを対象に理想 MHD 線形安定性を行ったプレリミナリな結果を示す。

1. 序論

トーラス磁場配位の MHD 安定性解析において、簡約化 MHD 方程式 (RMHD) を用いると解くべき場の数を大幅に減らすことができるため、とくにエネルギー原理の使えない、抵抗性 MHD 安定性や非線形 MHD 安定性解析では RMHD を用いることが多い。また、ステラレータ近似に基づくヘリカル系プラズマの RMHD においては、最低次の MHD 平衡は軸対称となるため、トカマクにおける解析と同様の解析が可能となる。

通常、簡約化 MHD 方程式の解析では RMHD のオーダーリングとコンシステントな大アスペクト比近似に基づくモデル的な MHD 平衡が用いられることが多い。しかしこのような MHD 平衡は、Grad-Shafranov 方程式を解いて得られるトカマクの MHD 平衡や、三次元 MHD 平衡コード VMEC から得られるヘリカル系プラズマの MHD 平衡と異なり、磁気面形状の変化に起因する磁気井戸の変化などを考慮することができない。そこで、本研究では MHD 平衡コードの結果を用いた RMHD による MHD 安定性解析を試みる。数値計算法としては磁気座標を構築し、磁気座標上で RMHD を解く方法と、実座標上で有限要素法を用いて解く方法が考えられるが、磁気軸近傍での計量テンソルの精度の問題を考慮し、後者の方法を用いることとした。現在はベンチマークとして LHD プラズマを対象に理想 MHD 線形安定性を行っているおり、ここではそのプレリミナリな結果を示す。

2. 簡約化MHD方程式

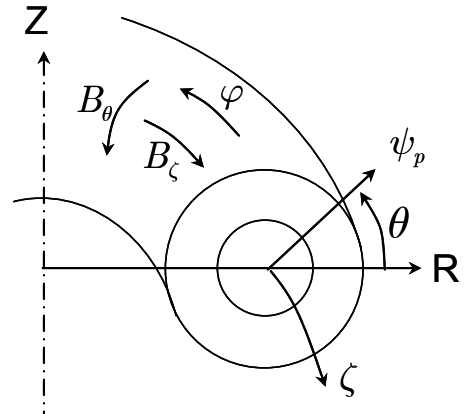
トカマクの高ベータオーダーリング RMHD およびステラレータ近似に基づくヘリカル系プラズマの RMHD は

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \phi \times \mathbf{e}_\zeta \cdot \nabla \right) \nabla_\perp^2 \phi = -\vec{B}_{\text{eff}} \cdot \nabla j_\zeta + \nabla \Omega \times \nabla p \cdot \mathbf{e}_\zeta$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \vec{B}_{\text{eff}} \cdot \nabla \phi - \eta_\parallel j_\zeta$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \phi \times \mathbf{e}_\zeta \cdot \nabla \right) p = 0$$

と書くことができる。ここで、 ϕ はプラズマ流速に対応する流れ関数、 A はプラズマ電流が作る磁場 \vec{B}_o に対応するベクトルポテンシャルのトロイダル成分であり $\vec{B}_o = \nabla A \times \mathbf{e}_\zeta = \nabla \zeta \times \nabla (-R_0 A)$ と定義される。プラズマ電流は $j_\zeta = -\nabla_\perp^2 A$ と表される。ここで、大アスペクト比近似を用いてトロイダル方向の単位ベクトルは $\mathbf{e}_\zeta = R \nabla \zeta \sim R_0 \nabla \zeta$ とする。トカマクでは、 A はポ



ロイダル磁束 Ψ_p に対応しており、 $2\pi R_0 A = -\Psi_p$ という関係がある。一方、ヘリカル系プラズマではプラズマ電流が無くても外部コイル系がトロイダル方向に平均化された真空ポロイダル磁束 Ψ_p^* をつくるため、 A と平均ポロイダル磁束との関係は $2\pi R_0 A = -(\Psi_p - \Psi_p^*)$ と表される。また磁気微分演算子 $\vec{B}_{eff} \cdot \nabla$ における \vec{B}_{eff} は、オーダリングにより $\vec{B}_{eff} = B_0 R_0 \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \psi_p$ である。ここで $\psi_p = \Psi_p / 2\pi$ とした。最後に磁力線の有効曲率を表す Ω は、トカマクプラズマではトロイダル曲率のみ考えればよく、

$$\Omega = \frac{R^2}{R_0^2} - 1 \simeq \frac{2x}{R_0}$$

と書けるが、ヘリカル系プラズマではヘリカルコイルが作る磁場の曲率を考慮して

$$\Omega = \frac{2x}{R_0} + \frac{\langle B_\delta^2 \rangle}{B_0^2}$$

とする必要がある。ここで、 $x = R - R_0$ であり、 $\langle B_\delta^2 \rangle$ はヘリカルコイルが作る磁場の二乗平均を表している。

この RMHD を規格化すると RMHD は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp^2 \phi = [\phi, \nabla_\perp^2 \phi] - \frac{\partial j_\zeta}{\partial \zeta} - [\psi_p, j_\zeta] + [\Omega, p]$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + [\psi_p, \phi] - \eta_\parallel j_\zeta$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [\phi, p]$$

と書ける。ここで、

$$[f, g] = \nabla f \times \nabla g \cdot \mathbf{e}_\zeta = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

は、ポアソン括弧であり（ここで、 x, y は特徴的なプラズマ小半径で規格化された x および Z である）、磁気微分は $\vec{B}_{eff} \cdot \nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} + [\psi_p, \]$ となる。この RMHD において安全係数や回転変換は陽には現れず、磁気微分の表現が有利面の位置など安全係数の情報を与える。したがって、MHD 平衡コードで得られたデータとして、磁気面形状、平衡ポロイダル磁束、平衡圧力をそのままこの RMHD に用いると、MHD 平衡力の残差が残るだけでなく、有利面の位置も異なってしまう。そこで、プラズマ平衡電流および磁力線の曲率は MHD 平衡コードとコンシステントにするとともに、磁気微分においてトロイダル磁場を回転変換と矛盾しないように $\vec{B}_{eff} \cdot \nabla \rightarrow f_* \frac{\partial}{\partial \zeta} + [\psi_p, \]$ とする。ここでトロイダル磁場 f_* はヤコビアンおよび回転変換と矛盾無く与える必要がある。これにより、用いる RMHD は物理量を平衡量と摂動量に分けると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} = -f_* \frac{\partial \tilde{j}_\zeta}{\partial \zeta} - [\tilde{j}_\zeta, \psi^{eq}] - [j_\zeta^{eq}, \tilde{\psi}] + [\Omega, \tilde{p}] + [\tilde{\phi}, \nabla_\perp^2 \tilde{\phi}] - [\tilde{j}_\zeta, \tilde{\psi}]$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = f_* \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} + [\tilde{\phi}, \psi^{eq}] - \eta_\parallel \tilde{j}_\zeta + [\tilde{\phi}, \tilde{\psi}]$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = [\tilde{\phi}, p^{eq}] + [\tilde{\phi}, \tilde{p}]$$

と書くことができる。

3. ヘリカル系プラズマに簡約化MHD方程式

ヘリカル系プラズマにおける解析はステラレータ近似に基づいておこなう。VMEC コードのような三次元 MHD 平衡コードで得られる磁気面は非軸対称であるので、非軸対称な磁気面 $(R(\psi_p, \theta, \zeta), Z(\psi_p, \theta, \zeta))$ をトロイダル方向に平均化し、軸対称な磁気面 $(R(\psi_p, \theta), Z(\psi_p, \theta))$ を構築する。この磁気面はステラレータ展開法における最低次の磁気面に対応する。この平均磁気面において (ψ_p, θ, ζ) 座標系は磁力線が直線に見える座標系とは限らないので磁場の表現は

$$\begin{aligned}\vec{B}_{eff} &= \iota^{-1} \left(1 + \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) \nabla \psi_p \times \nabla \theta + \nabla \zeta \times \nabla \psi_p \\ &= f(\psi_p) \nabla \zeta + \nabla \zeta \times \nabla \psi_p\end{aligned}$$

とする。この (ψ_p, θ, ζ) 座標系のヤコビアン \mathcal{J} を用いると回転変換と矛盾しないトロイダル磁場は

$$f_*(\psi_p) = \frac{2\pi}{\iota R_0 \oint \frac{\mathcal{J}}{R^2} d\theta}$$

と書くことができる。また、ステラレータ展開法における MHD 平衡方程式は

$$\Delta_* A^{eq} = -j_\zeta^{eq} = R_0 \Omega \frac{dp^{eq}}{d\psi_p} - G(\psi_p)$$

と書けるので、MHD 平衡電流はこれと矛盾しないように、

$$j_\zeta^{eq} = -R_0(\Omega - \bar{\Omega}) \frac{dp^{eq}}{d\psi_p} + \frac{\iota f}{R_0} \frac{dI}{d\psi_p}$$

とする。ここで、

$$\Omega = \frac{\langle R^2 \rangle}{R_0^2} - 1 + \frac{\langle R^2 \rangle \langle B_\delta^2 \rangle}{R_0^2 B_0^2}$$

とした。また、 $\bar{\Omega}$ は Ω の磁気面平均、 $2\pi I$ はトロイダル電流である。

4. 数値解析

ここでは RMHD を解く方法として、実座標上で二次元有限要素法を用いることにした[1]。すなわち、摂動量はトロイダル方向にのみスペクトル法を用いることとし、ポロイダル断面では二次元有限要素法を用いる。この方法のメリットはポアソン括弧

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

の計算などが容易で、計量テンソルを用いる必要がないことと、スペクトルのコンボリューションの計算が容易であることなどが挙げられる。

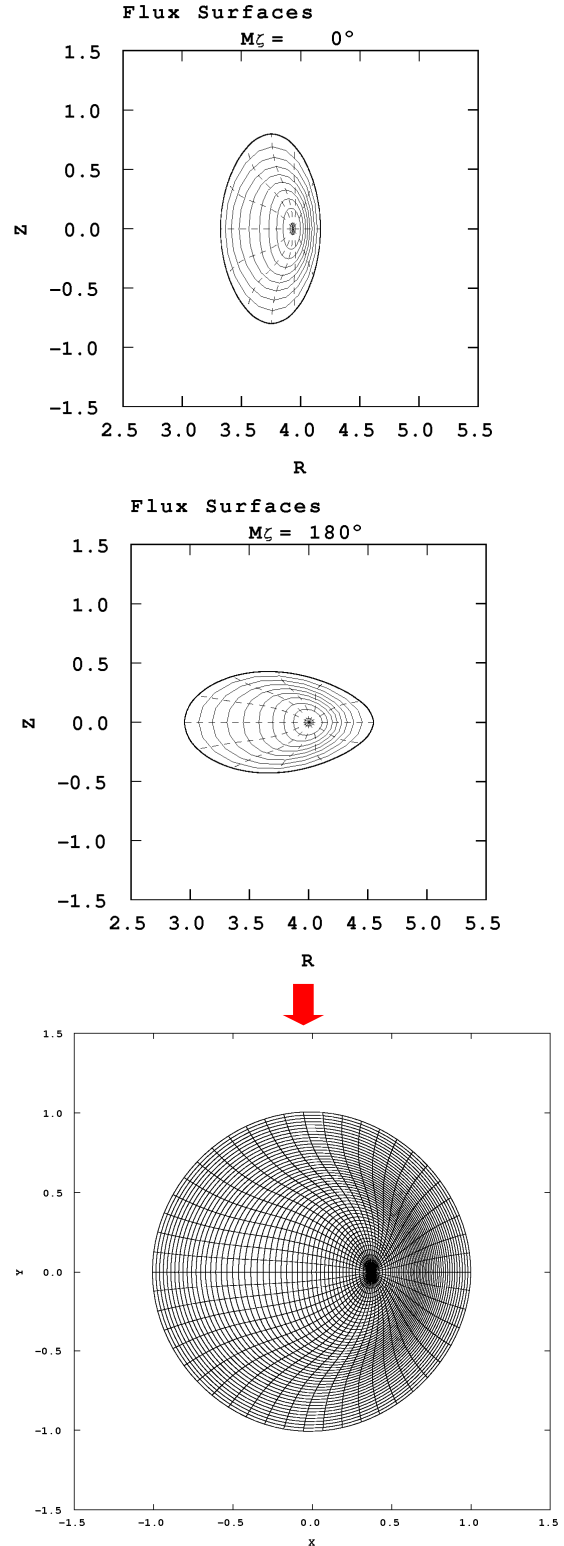


図1 トロイダル平均された磁気面

有限要素として、ここでは磁気面を参照した四角形アイソパラメトリック要素を用い、磁気軸近傍のみ三角形要素を用いる。時間ステップは単純な2ステップ法を用い、行列はICCG法を用いて解く。

下図にLHDタイプのヘリカル系プラズマの理想MHD安定性に対する、線形計算によりベンチマークをおこなった結果を示す。得られた不安定性は典型的な理想交換型モードであり、モード共鳴面は対応する有理面の位置と一致している。共鳴面近傍でのスペクトルの広がりにはポロイダル角の定義に依存するが、ここで用いたポロイダル角は弧長がほぼ等間隔のVMECコードにおけるポロイダル角に準拠しているため、モードの不均一なポロイダル構造がスペクトルの広がりにも反映しているものと考えられる。ここで示した結果は、以前行われたMHD安定性コード間のベンチマーキングの結果[2]とほぼ同じ結果を示しており、コードの健全性が確認できた。

5. まとめ

MHD平衡コードで得られた現実的なMHD平衡に対して、簡約化MHD方程式によるMHD安定性解析を行った。ここで行った解析法は、トカマクプラズマに対しても有用で、抵抗性不安定性や非線形MHD安定性解析を、MHD平衡コードで得られた現実的なMHD平衡に対して行うことができ、磁気面のシェイピングが抵抗性不安定性やその非線形発展に

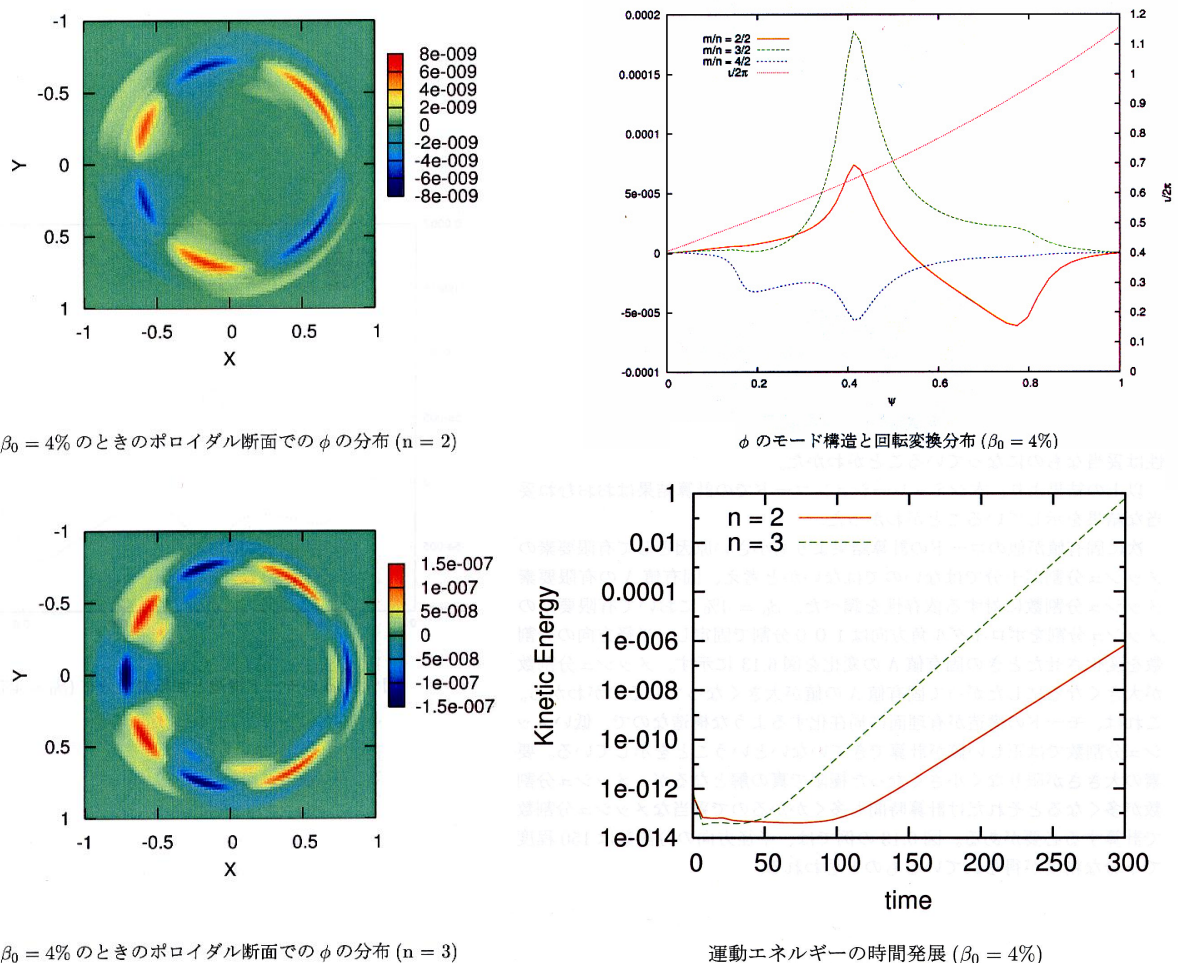


図2 LHDタイプのヘリカル系プラズマに対する安定性解析

及ぼす影響を調べる事が可能となる。

ここでは、ベンチマークとして LHD プラズマを対象に理想 MHD 線形安定性を行ったプレリミナリな結果を示し、コードの健全性を確認した。今後、このコードを抵抗性不安定性、および非線形 MHD 安定性解析に適用する予定である。

参考文献

- [1] T. Unemura, S. Hamaguchi and M. Wakatani, Phys. Plasma **11** (2004) 1545.
- [2] Y. Nakamura et al., J. Compt. Phys., **128** (1996) 43.

理想MHDと非圧縮性MHDとの比較

京都大学大学院エネルギー科学研究科

山田豪史、中村祐司、近藤克己

アブストラクト

理想MHD方程式系においては、状態方程式として断熱の式を使っているが、状態方程式として非圧縮性の条件を使ったMHDモデルを考える。これを以下では非圧縮性MHDと呼ぶ。本研究では、理想MHDと非圧縮性MHDをそれぞれ線形化したものを比較する。解析は、周期境界条件をもつ軸対称配位の円柱プラズマに対して行う。安全係数が単調増加であるようなプラズマを扱い、摂動量のフーリエモード数が $(m,n) = (1,1), (2,2)$ であるモードを対象とする。計算結果として、非圧縮性MHDの方が理想MHDよりも成長率が小さくなる傾向があったが、これには、2つのMHDモデルの間の流速の平衡磁場に平行な成分の振る舞い方の違いが関係していることが分かった。

一般的な考え方として、たとえばCAS3Dなどでとられているものであるが、理想MHDを圧縮性のモデル、無衝突MHD [1] を非圧縮性のモデルとみなすことがある。無衝突MHDの場合、安定化効果を持つポテンシャルエネルギーとしてのプラズマ圧縮の項がないので、無衝突MHDの方が理想MHDよりも成長率が大きくなると考えられるが [2]、実際の計算でもそうなる場合が多い。一方、理想MHDと上述の状態方程式として非圧縮性の条件を使う非圧縮性MHDは比較されることはあまりなかった。

理想MHDを線形化し、固有値問題に変換すると、

$$\begin{aligned}\lambda \rho_{m,eq} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_{eq}) \times \tilde{\mathbf{B}} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B}_{eq} - \nabla \tilde{p}, \\ \lambda \tilde{\mathbf{B}} &= \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_{eq}), \\ \lambda \tilde{p} &= -\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_{eq} - \mathcal{P}_{eq} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}\end{aligned} \quad \dots \quad (1)$$

ここで、 λ は成長率で、 $\rho_{m,eq}, \mathbf{B}_{eq}, p_{eq}$ は平衡量で、 $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{p}$ は摂動量である。これを $\tilde{\mathbf{v}}$ のみの式にすると、

$$\begin{aligned}\lambda^2 \rho_{m,eq} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_{eq}) \times (\nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_{eq})) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_{eq})) \times \mathbf{B}_{eq} \\ &+ \nabla (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_{eq} + \mathcal{P}_{eq} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})\end{aligned} \quad \dots \quad (2)$$

非圧縮性MHDの場合の固有値問題は (1) において、第3式を非圧縮性の条件

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \dots (3)$$

に置き換えたものになり、これをさらに $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}$ のみの式にすると、

$$\begin{aligned} \lambda^2 \rho_{m,eq} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_{eq}) \times (\nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_{eq})) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_{eq})) \times \mathbf{B}_{eq} - \nabla(\lambda \tilde{p}), \quad \dots (4) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= 0 \end{aligned}$$

2つの方程式 (2), (4) と $\tilde{\mathbf{v}}$ との内積をとりプラズマ全体 V で積分すると、理想MHDの場合は次の式が得られ、

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \int_V (e_{k,\perp} + e_{k,\parallel}) d\mathbf{r} &= \int_V (e_{p,1} + e_{p,2} + e_{p,3} + e_{p,4} + e_{p,5}) d\mathbf{r}, \\ e_{k,\perp} &= \rho_{m,eq} |\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}|^2, \quad e_{k,\parallel} = \rho_{m,eq} |\tilde{\mathbf{v}}_{\parallel}|^2, \\ e_{p,1} &= \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{Q}_{\perp}|^2, \quad e_{p,2} = \frac{B_{eq}^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp} + 2\tilde{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}|^2, \quad e_{p,3} = \gamma p_{eq} |\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}|^2, \\ e_{p,4} &= -2(\tilde{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla p_{eq})(\boldsymbol{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp}^*), \quad e_{p,5} = -J_{eq,\parallel} (\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}_{\perp}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}, \quad \mathbf{Q} = \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\perp} \times \mathbf{B}_{eq}), \quad \mathbf{J}_{eq} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_{eq} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

非圧縮性MHDの場合は次の式が得られる。

$$-\lambda^2 \int_V (e_{k,\perp} + e_{k,\parallel}) d\mathbf{r} = \int_V (e_{p,1} + e_{p,2} + e_{p,4} + e_{p,5}) d\mathbf{r} \quad \dots (6)$$

ここで、添え字の \perp, \parallel はそれぞれ平衡磁場に対する垂直、平行成分を意味する。

計算において用いる平衡量は領域 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 < a^2, -\pi R_0 < z < \pi R_0\}$ 上で定義し、

次のようなものとする。

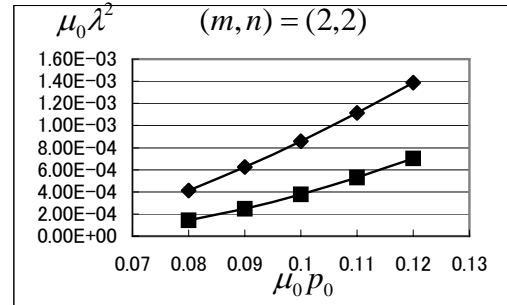
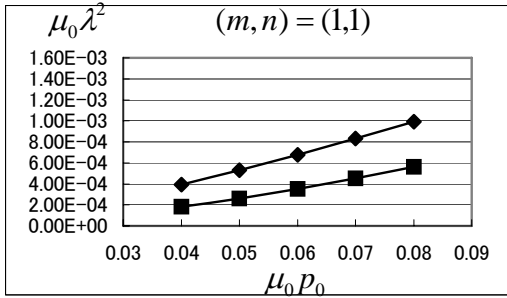
$$\begin{aligned} \rho_{m,eq} &= 1, \quad p_{eq} = p(\sqrt{x^2 + y^2}/a), \\ \mathbf{B}_{eq} &= B_{\theta}(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{e}_{\theta} + B_{\zeta}(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{e}_{\zeta}, \\ \mathbf{e}_{\theta} &= (y/\sqrt{x^2 + y^2}, -x/\sqrt{x^2 + y^2}, 0), \quad \mathbf{e}_{\zeta} = (0, 0, 1), \\ B_{\theta}(r) &= \frac{r}{R_0} \bar{t}\left(\frac{r}{a}\right) B_{tor}\left(\frac{r}{a}\right), \quad B_{\zeta}(r) = B_{tor}\left(\frac{r}{a}\right), \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{R_0^2} \rho^2 \bar{t}^2\right) \frac{d}{d\rho} (B_{tor}^2) + \frac{a^2}{R_0^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \bar{t}) \bar{t} B_{tor}^2 &= -\mu_0 \frac{dp}{d\rho} \end{aligned} \quad \dots (7)$$

また、摂動量は次のようなフーリエモード関数の形をとるものとする。

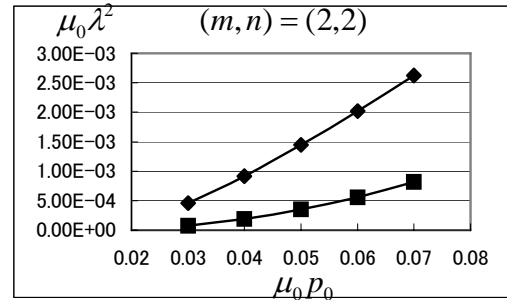
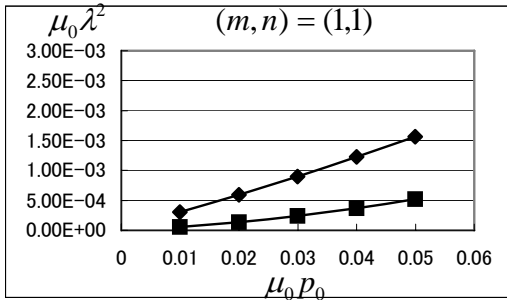
$$\begin{aligned}
\tilde{v}_\rho(\rho, \theta, \zeta) &= \tilde{v}_{\rho, mn}(\rho) \cos(m\theta - n\zeta), \\
\tilde{v}_\eta(\rho, \theta, \zeta) &= \tilde{v}_{\eta, mn}(\rho) \sin(m\theta - n\zeta), \\
\tilde{v}_\parallel(\rho, \theta, \zeta) &= \tilde{v}_{\parallel, mn}(\rho) \sin(m\theta - n\zeta), \\
\tilde{p}(\rho, \theta, \zeta) &= \tilde{p}_{mn}(\rho) \cos(m\theta - n\zeta), \quad \dots \quad (8) \\
\tilde{v}_\rho &= \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}, \quad \tilde{v}_\eta = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad \tilde{v}_\parallel = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{b}, \\
\mathbf{n} &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right), \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \\
x &= a\rho \cos \theta, \quad y = -a\rho \sin \theta, \quad z = R_0 \zeta
\end{aligned}$$

図1に、2つの回転変換の動径方向分布を与えて計算したときの、 $(m,n)=(1,1),(2,2)$ モードの磁気軸上での圧力 p_0 に対する成長率 λ の依存性を示す。これらの図から、非圧縮性MHDの場合の成長率は理想MHDの場合のそれよりも小さいことが分かる。図2に、先の回転変換の動径方向分布を与えて計算したときの、流速 \mathbf{v} の各成分のフーリエモード関数の動径方向分布を示す。2つのモデルの流速の平衡磁場に垂直な成分を比べてみると、同じような形をとっていることが分かるが、流速の平衡磁場に平行な成分については大きな相

$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1/(0.8 + 1.2\rho^2), p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$



$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.4\rho^2, p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$



◆ 理想MHD

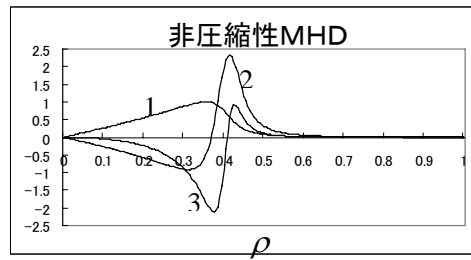
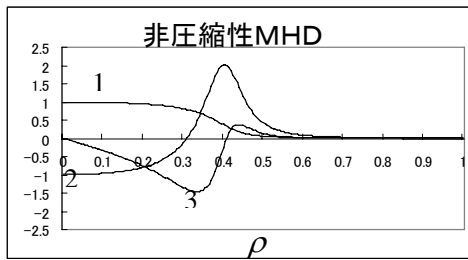
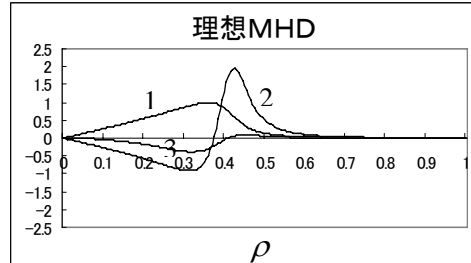
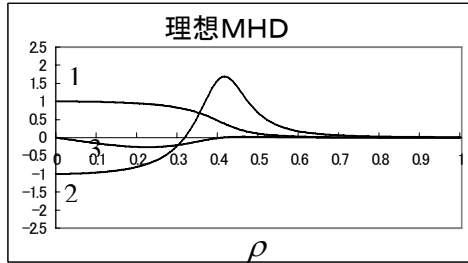
■ 非圧縮性MHD

図1 摂動量の成長率と磁気軸上における圧力との関係

$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1/(0.8 + 1.2\rho^2), p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$

$$p_0 = 0.06/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$

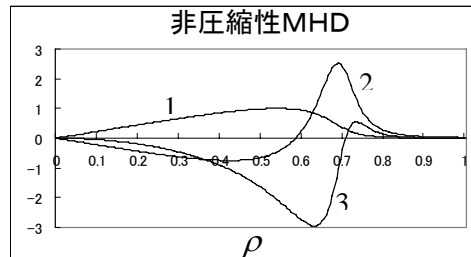
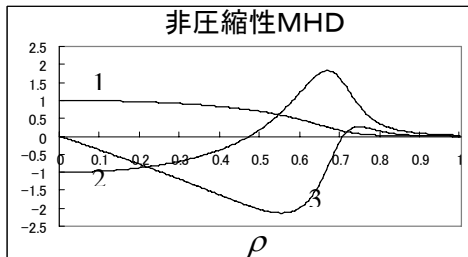
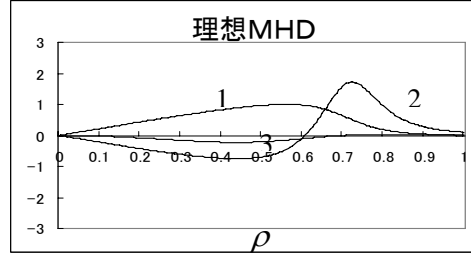
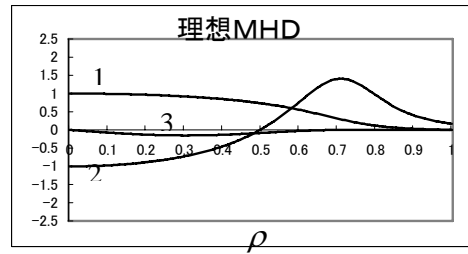
$$p_0 = 0.1/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$



$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.4\rho^2, p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$

$$p_0 = 0.03/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$

$$p_0 = 0.05/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$



1: $\tilde{v}_{\rho, mn}$ 2: $\tilde{v}_{\eta, mn}$ 3: $\tilde{v}_{\parallel, mn}$

図2 固有関数の動径方向分布

違があり、非圧縮性MHDの場合のそれは大きくなっている。 $e_{p,1}, e_{p,2}, e_{p,4}, e_{p,5}$ は $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ のみを含むが、理想MHDと非圧縮性MHDの場合のポテンシャルエネルギー（式(5),(6)の右辺）の値は、 $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ が両モデルでほぼ同じ分布をとっており、理想MHDにおける $e_{p,3}$ も小さいので、あまり変わらない。したがって、成長率 λ は平行方向の運動エネルギー $\left(\int_V e_{k,\parallel} d\mathbf{r}\right)$ に大きく依存することになる。実際の結果として、2つのモデルの間の流速の平行成分の相違が大きい $\bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.4\rho^2$ の場合の方が $\bar{i}(\rho) = 1/(0.8 + 1.2\rho^2)$ の場合より成長率の違いが大きくなっている。

これらの計算例から分かるように、平行方向の運動エネルギーは理想MHDと非圧縮性MHDとの間の成長率の相違の度合いを決める要因の1つであるが、ここで、低 β と高 β のときの $\tilde{v}_{\parallel,mm}$ のとり分布を比較する。図3に低 β のときと高 β のときの流速 \mathbf{v} の各成分のフーリモード関数の動径方向分布を、図4に非圧縮性MHDの場合のポテンシャルエネルギーの圧縮Alfven波に対応する項の面積分値

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_{p,2} \sqrt{g} d\theta d\zeta \quad \dots \quad (9)$$

の動径方向分布を示す。ここで、 \sqrt{g} はヤコビアン絶対値を表す。図3から、非圧縮性MHDの場合は低 β のときは高 β のときよりも、 $\tilde{v}_{\parallel,mm}$ の共鳴点(ρ_s)の近傍での特異的な振舞いが鋭くなっていることが分かる。この事は $e_{p,2}$ の面積分値がとる分布の様子と次のように関係付けられる。理想MHDと無衝突MHDの場合、 $e_{p,2}$ は安定化項としてとても小さな寄与をすることが分かっている [3]。非圧縮性MHDの場合も、 $e_{p,2}$ は ρ_s の近傍の外の領域で小さくなっているが、 $e_{p,2}$ をこの領域で0とみなすと、非圧縮性の条件(3)を使えば、次式が得られる。

$$2\mathbf{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\perp} = \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{B} \right) \quad \dots \quad (10)$$

この式をフーリエ表示すると、

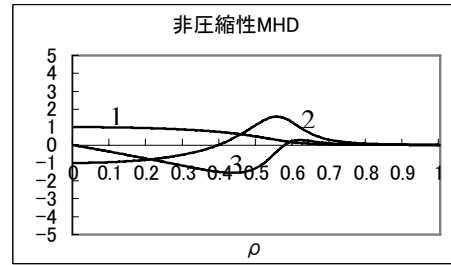
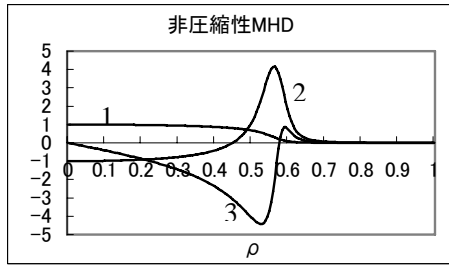
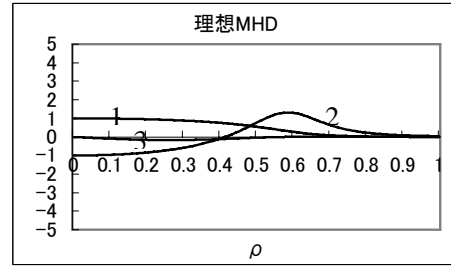
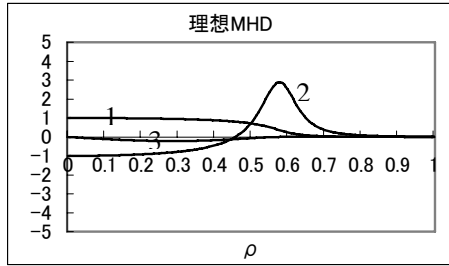
$$\tilde{v}_{\parallel,mm} = \frac{2\kappa_{\rho} \tilde{v}_{\rho,mm}}{mb^{\theta} - nb^{\zeta}}, \quad \dots \quad (11)$$

$$\kappa_{\rho} = \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{n}, \quad b^{\theta} = \mathbf{b} \cdot \nabla \theta, \quad b^{\zeta} = \mathbf{b} \cdot \nabla \zeta$$

$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.6\rho^2, p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$

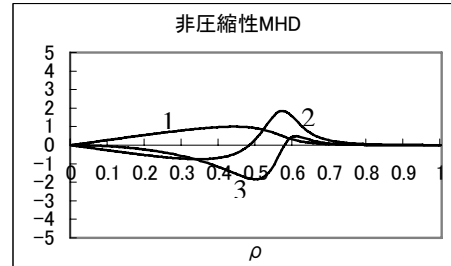
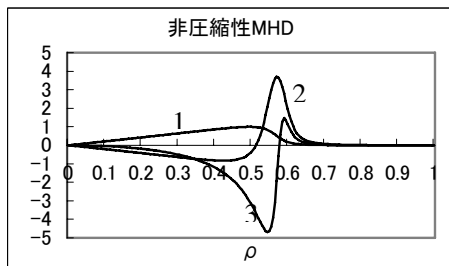
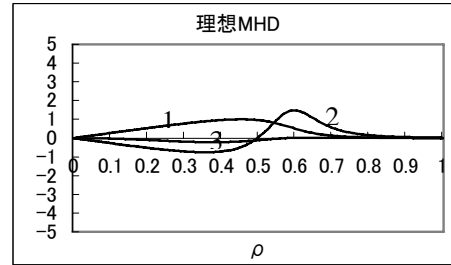
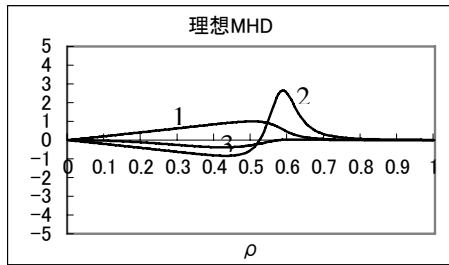
$$p_0 = 0.01/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$

$$p_0 = 0.05/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$



$$p_0 = 0.04/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$

$$p_0 = 0.08/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$

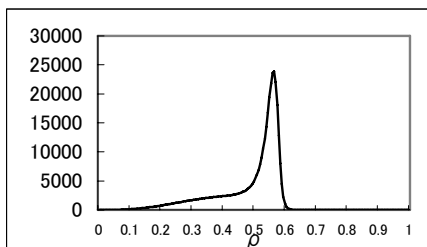


1: $\tilde{v}_{\rho, mn}$ 2: $\tilde{v}_{\eta, mn}$ 3: $\tilde{v}_{\parallel, mn}$

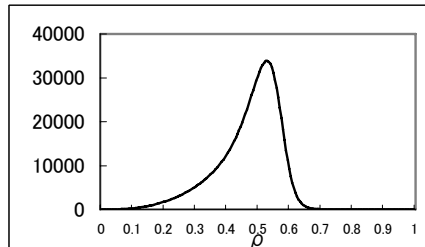
図3 固有関数の動径方向分布

$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.6\rho^2, p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$

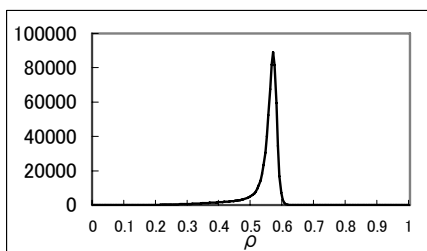
$$p_0 = 0.01/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$



$$p_0 = 0.05/\mu_0, (m, n) = (1, 1)$$



$$p_0 = 0.04/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$



$$p_0 = 0.08/\mu_0, (m, n) = (2, 2)$$

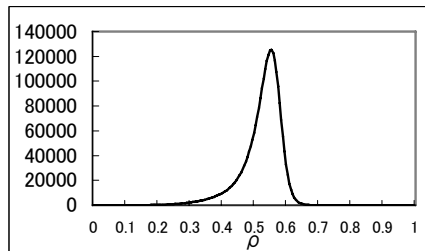
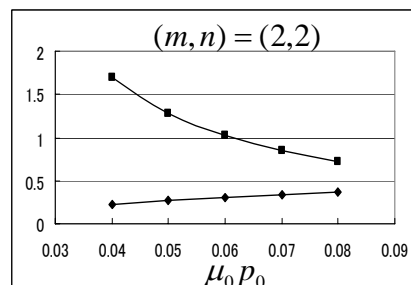
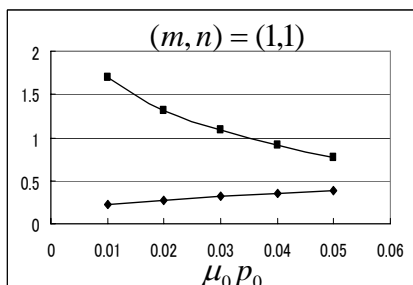


図4 $e_{p,2}$ の面積分値の動径方向分布

$$a = 1, R_0 = 3, B_{tor}(0) = 1, \bar{i}(\rho) = 1.2 - 0.6\rho^2, p(\rho) = p_0(1 - \rho^2)^2$$



$$\blacklozenge \left(\lambda_{\text{incomp}} / \lambda_{\text{comp}} \right)^2$$

$$\blacksquare \int_V e_{k,\parallel} d\mathbf{r} / \int_V e_{k,\perp} d\mathbf{r}$$

図5 $(\lambda_{\text{incomp}} / \lambda_{\text{comp}})^2$ と $\int_V e_{k,\parallel} d\mathbf{r} / \int_V e_{k,\perp} d\mathbf{r}$ の中心圧力依存性

$\tilde{v}_{\rho,mm}$ は一般に ρ_s の近傍で有限な値をとる。したがって、この式が成り立つ限り、 $\tilde{v}_{\parallel,mm}$ は ρ_s の近傍で非常に大きくなる。そのため、低 β のときの方が高 β のときより $e_{\rho,2}$ がとても小さくなる領域が広がるために、(11) が成立する範囲も広がり $\tilde{v}_{\parallel,mm}$ の特異性が顕著になる。

図5に理想 MHD 及び、非圧縮性 MHD の場合に得られる成長率をそれぞれ λ_{comp} 、 λ_{incomp} とするときの $(\lambda_{\text{incomp}}/\lambda_{\text{comp}})^2$ の値と、非圧縮性 MHD の場合の運動エネルギーの平行成分の垂直成分に対する割合 $\int_V e_{k,\parallel} d\mathbf{r} / \int_V e_{k,\perp} d\mathbf{r}$ の中心圧力依存性を示す。やはり平行方向の運動エネルギーが大きくなっていくに従って、成長率の比は小さくなっていく。

理想 MHD と無衝突 MHD との比較は今までに行われてきたが、理想 MHD と理想 MHD において状態方程式として用いられる断熱の式を非圧縮性の条件に置き換えた非圧縮性モデルは、あまり比較されることがなかったが、本研究ではこの2つの MHD モデルの関係を調べた。安全係数が単調増加関数であるような円柱プラズマに対して、線形成長率と固有関数の観点から、 $(m,n) = (1,1), (2,2)$ モードについて理想 MHD と非圧縮性 MHD を比較した。非圧縮性 MHD の方が理想 MHD よりも成長率が小さくなる傾向にあったが、これには非圧縮性 MHD の方が v_{\parallel} が大きくなることと関係している。また、非圧縮性 MHD の場合には、低 β では圧縮 Alfvén 波に対応する安定化項が小さい領域が広がるため、 v_{\parallel} がより大きくなることが分かった。

参考文献

- [1] J. P. Freidberg, Ideal Magnetohydrodynamics (Plenum Press, New York and London, 1987) p. 32 p. 260
- [2] J. P. Freidberg, Ideal Magnetohydrodynamics (Plenum Press, New York and London, 1987) p. 264
- [3] C. Schwab, Phys. Fluids B 5 (9), 3195 (1993)

球状トカマクにおけるELMの非線形シミュレーション

Nonlinear Simulation of ELM in Spherical Tokamak

水口直紀¹⁾²⁾, Riaz Khan²⁾³⁾, 林隆也¹⁾²⁾, 中島徳嘉¹⁾²⁾

Naoki Mizuguchi¹⁾²⁾, Riaz Khan²⁾³⁾, Takaya Hayashi¹⁾²⁾, Noriyoshi Nakajima¹⁾²⁾

1)核融合科学研究所, 2)総合研究大学院大学, 3)PINSTECH

1)National Institute for Fusion Science,

2)The Graduate University for Advanced Studies(Sokendai), 3)PINSTECH

E-mail: mizu@nifs.ac.jp

Abstract

近年の高閉じ込め状態の球状トカマクプラズマ中で観測されるELMについて、その崩壊相に注目し、特徴的なフィラメント構造の形成や、それに伴うプラズマの対流的損失といった非線形過程を、磁気流体力学モデルに基づく数値シミュレーションにより明らかにした。バルーニング・モードの非線形発展により少数のフィラメント構造が現れ、それらにより引き起こされる外部磁場との磁気リコネクションを通じてプラズマが損失する様子を再現し、これらがType-I ELMの実験結果をよく説明することを示した。またピーリング・モードが支配的に成長する場合は、形成される対流パターンの違いにより、フィラメント構造が現れないこと、条件の違いにより支配線形モードのモード数が異なる場合でも、トロイダル結合の結果、同じような少数フィラメントが形成されることを示した。

キーワード：球状トカマク, 磁気流体力学, ELM, 非線形シミュレーション
(spherical tokamak, magnetohydrodynamics, ELM, nonlinear simulation)

1. 序論

周辺局在モード(Edge-Localized Mode;ELM)は、近年の大型トカマク装置における高閉じ込め状態(Hモード)において、しばしば周辺の圧力勾配の大きな領域(ペDESTAL部)で間欠的に観測される揺動である[1-3]。ELMは将来の核融合炉を展望する際に、炉壁の損傷や閉じ込め劣化を引き起こす要因として回避されるべき対象である一方で、不純物粒子の効率的な排出に重要な役割を果たしているという側面もあり、その発生物理機構の理解と制御が近年の重要な検討課題となっている。ELMには1回の発生でペDESTAL部のエネルギーの数パーセントが失われ、いくつかの装置に共通して現れる比較的大きなもの(Type-I ELMと呼ばれる)から、閉じ込めに対する悪影響が少なく、発生状況や信号波形に応じてType-III ELM, QHモード等、様々な名前がつけられている比較的小規模のものまで存在し、現象論的に分類整理されてきている段階である。ELM制御の到達目標としては、大規模のもの発生を抑制し、Hモードの維持に必要な小規模のものに緩和させる方向が主流である。ELMは球状トカマク(Spherical Tokamak; ST)やヘリカル系装置においても観測され、高閉じ込め状態のプラズマに普遍的な現象として捉えられている。

STにおけるELMは、とくに大規模ELMについては、トカマクで観測されるものと本質的に同じと考えられるが、配位のコンパクトさに基づく計測面での有利性により、ELMに対する理解が進んでいる[4]。ELMは、(1)原因となる磁気流体力学的(MHD)不安定性の励起、(2)圧力構造の崩壊と余剰エネルギーおよび粒子の排出、(3)構造の再形成といった段階を繰り返しながら間欠的に発生すると考えられており、個々の発生機構に対する理解が、実験、理論の両面から近年急速に進展してきている。中でも(1)の線形不安定性については、周

辺部の大きな圧力勾配に起因するバルーニングモードと、同じく大きな密度勾配により表面近傍に発生する自発電流によって駆動されるピーリングモードの双方の効果によって説明する、所謂ピーリング・バルーニングモデル[5]が広く受け入れられている。また、線形安定性と長時間にわたる輸送特性とを関連づけて、(3)から(1)へと回帰するELMの間欠的挙動を説明するモデルも進展してきている[6]。その一方で、(2)に相当する短時間かつ大振幅の非線形ダイナミクスについては、未だ不明な点が多く残されている。実験的には、トカマクおよびST装置において、特徴的な紐状構造(フィラメント)の形成やその運動の様子等、断片的にはあるが徐々に情報が蓄積されてきている[4]。それらの特徴的な構造が線形不安定性の自発的な時間発展により、どのように形成されるか、変形の飽和レベルはどの程度か、それらが引き起こす損失量はどの程度か、といった諸問題は、非線形数値シミュレーションによりあきらかにされるであろう。最近1~2年の間に、主にトカマクを対象として国外でもこのような急速に研究例が増えてきている[7-9]が、その多くは、特定の装置を対象を限定した非線形段階のごく初期の再現となっている。

本研究は、磁気流体力学(MHD)モデルに基づくSTの全トーラス体系にて非線形3次元数値シミュレーションを実行し、ELM崩壊相の非線形ダイナミクスを明らかにしようとするものである。バルーニング・モードおよびピーリング・モードが自発的に非線形発展する様子を計算機上で再現し、フィラメント構造の形成等の実験結果と詳細に比較する。本論文の構成は以下の通りである。第2章では計算モデルを説明し、第3章ではバルーニング・モードの非線形発展の結果Type-I ELMの特徴的な構造が再現される様子を示す。第4章では、それらの結果をピーリング・モードが引き起こす場合と比較し、またパラメータに対

する依存性についても検証し、第5章で研究を総括する。

2. 計算モデル

基礎となる方程式は、非線形MHD方程式系である。プラズマを1流体で近似し、質量密度 ρ 、流速 \mathbf{v} 、磁場強度 \mathbf{B} 、および圧力 p の4つの独立変数の時間発展を求めてゆく。これらは次の連立微分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \\ &\quad \mu \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) - (\gamma - 1) (p \nabla \cdot \mathbf{v} + \eta j^2 + \Phi), \end{aligned}$$

ここで、電流 \mathbf{j} は、 $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ で決定され、電場 \mathbf{E} はオームの法則、

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} \quad (2)$$

で表されるものとする(抵抗性MHDモデル)。また簡単のため、本論文では粘性 μ および電気抵抗 η を全域にわたって一様定数として取扱う。粘性による加熱 Φ は

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\mu \left(e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right), \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

にて評価して圧力の時間発展に反映することにより、局所的にプラズマの熱、運動、および磁気エネルギーの総和が保存する。 γ は比熱比($=5/3$)である。これらの式を数値的に解くが、解法としては4次精度の有限差分法を用い、時間積分は4次精度のRunge-Kutta法を用いて解く。

この抵抗性MHDモデルは、所謂アルヴェン波の時間空間スケールで生じるプラズマの大域的な運動を記述するには適用範囲の広い有用なモデルであり、磁場に平行な方向および垂直な方向の運動特性をそれぞれ表現し、また磁気再結合を含む運動も記述できる。しかし、本来、厳密に抵抗性MHDモデルが適用できるためには、イオンのラーマ半径が現象の特徴的空間スケールに比べて充分小さく、時間変化に関しても、現象がアルヴェン波のそれに対して充分速くなければならない。しかし現実の実験装置で観測される現象は、ELMやディスラプションのような激しい運動でさえも、その条件を満たすには至らない。そこ

で、より現実的な時間・空間スケールを正しく取り扱うためのモデルとして、本論文の第4-2節では抵抗性MHDモデルに若干の修正を加えることをも試みる。最も低次の修正はイオンの有限ラーマ半径(FLR)効果を考慮するもので、これは流体近似においては、流速の垂直成分をMHDモデルにおける $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度とイオン反磁性ドリフト速度 \mathbf{v}_p との和として表すことに相当する。ここで \mathbf{v}_p は、

$$\mathbf{v}_p = \frac{m}{2e} \left(\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{\rho B^2} \right) \quad (4)$$

で表される(m , e はイオンの質量、電荷)。FLR効果を考慮すると、圧力はもはや等方的ではなくなり、系の平衡状態もMHDモデルにおけるそれとは異なったものとなる。しかし、本稿では最も低次の影響を調べる目的で、まずは運動方程式にのみ修正を加えて調べることとし、(1)式の数値に関する第2式の右辺移流項を、

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \rightarrow -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v}_p \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (5)$$

と置き換えたモデルを用いる(以後、ドリフトモデルと呼ぶ)。

シミュレーションは、3次元の全周トーラス体系にて実行する。ポロイダル断面を、外部磁場を含んだ矩形の領域に切り出し、トロイダル方向には周期境界条件を課してトーラス体系を表現する。境界条件は全ての壁上で完全導体とする。計算の初期値は数値的にGrad-Shafranov方程式を解いて求めた平衡状態に、不安定性の種として、流速成分に白色ノイズ的に微小な擾乱を加えたものとする。密度は全域にわたり初期に一様とし、各変数はそれぞれ、初期密度、磁気軸における磁場強度およびアルヴェン速度で規格化し、長さは大半径で規格化する。

3. 計算結果

シミュレーションの初期値として、ここでは図1に示すNSTX実験の再構成平衡データを用いる。中心部で平坦な分布をもち理想MHDモードに対しては安定であるが、大きな抵抗値を仮定するとバルーニング・モードに対して不安定となる。プラズマ・ベータ値は中心で約27%、体積平均値で約10%であり、安全係数は中心値で0.89となる。アスペクト比は1.4である。この配位はELMが発生した実験結果のものではなく、ここでは僅かにバルーニング不安定な配位の例として採用した。これらのパラメータおよび規格化によって、シミュレーションにおける時間の単位(アルヴェン時間)は $1\tau_A \approx 0.5 \mu\text{sec}$ となる。また散逸係数

の値はそれぞれ、 $\eta = 4 \times 10^{-5}$ 、 $\mu = 4 \times 10^{-4}$ とする。

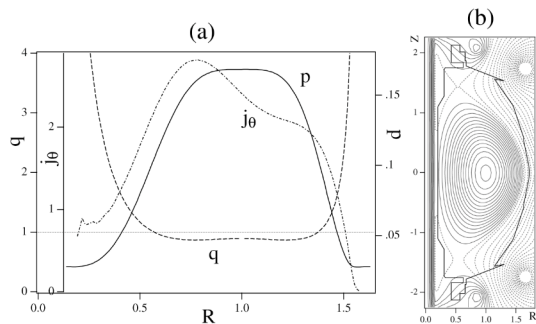


図1 初期平衡配位プロファイル. (a)圧力, トロイダル電流, 安全係数の径方向分布 (b)ポロイダル磁束

Fig.1 Profiles initial equilibrium. (a)Radial profiles of pressure, toroidal current, and safety factor.

(b)Poloidal flux.

計算結果は図2に示すように、はじめ中程度の波数（この場合、 $n \sim 12$ 程度が最大の成長率となる。 n はトロイダル波数）をもったバルーニング・モードの非線形発展により、周辺圧力構造が崩壊する[図2 (b)~(c)]。その結果、やや平坦であった圧力分布の周辺部のみが低くなり、中心部は高圧力のまま残るため、全体としてピークした分布となる。そのことにより、やがて別の種の不安定性が生じる。ここでは中心部付近に $m/n=1/1$ の成分をもったキンクモードが発生し、圧力構造の中心ピークが図中上方にシフトする[図2 (d)]。ここで m はポロイダル波数。これはよく知られた鋸歯状振動の崩壊機構と同様であり、この場合も図中上方で $q=1$ 有理面に達したプラズマ塊はやがて還流し、再び平坦化した分布となって安定化する[図2 (e)]。このように中波数バルーニング・モードと $n=1$ キンクモードの連続的発生により、崩壊・緩和が進行する。

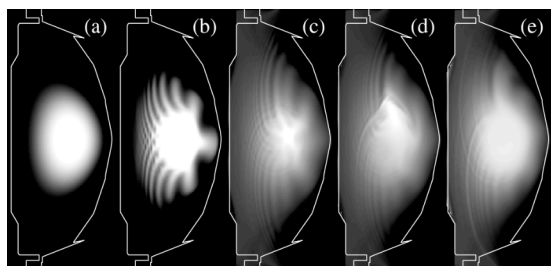


図2 圧力分布の時間発展.

Fig.2 Time development of pressure profile.

以上にのべた崩壊過程を実験観測と比較する。バルーニング・モードの発展に伴い、プラズマ表面付近に磁力線ピッチに沿って表面が波打つような変形を示すようになる。それとともに、不安定性の発展は成長が飽和する。成長の最終段階では、表面に生じた波状の構造の波頭のうち、一部のみが特に顕著な成長を示し、やがてトーラスから分離して外部へと膨張する(図3)。図では支配線形

モード数に対応した12本程度の波頭のうち最も左側の1本のみが大きく成長し、トーラス本体から分離して浮き上がっている。実験的にも、このように少数のフィラメントが浮き上がって径方向外側へ掃き出される様子がしばしば観測されている。この結果はそれとよく一致する。

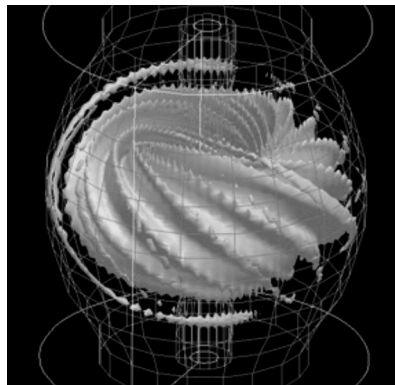


図3 フィラメント構造の形成. 図は圧力の等値面で表現されている.

Fig.3 Formation of a filament structure. Iso-pressure surface is shown in the figure.

NSTXの観測例によれば[11]、Type-I ELM発生時に中程度の端数をもったプレカーサと、一方で $n=1 \sim 2$ の構造をもった変形との両方が観測されている。またType-I ELMの発生領域がバルーニング・モードの安定性限界とよく合うことから、バルーニング・モードが発生原因として有力な候補となっている。本シミュレーション結果は中波数のバルーニング・モードの自発的な一連の時間発展により、フィラメントの形成から $n=1$ の構造を形成するまでを再現しており、実験結果をよく説明している。

またELMの非線形ダイナミクスにおいて未解明の問題として、ELM崩壊にともなうエネルギー損失が、伝導的ではなく対流的であること[12]および、その対流損失量が、フィラメント自体の体積内に含まれるプラズマの量と比較して多いこと[13]が挙げられる。これらに対し、本シミュレーション結果からは次の解釈が与えられる。バルーニング・モードの発展にともないプラズマ表面付近に膨張変形が生じるが、これによりトーラス閉じ込め磁場と、開いた外部磁場とが押しつけられ合うため、両者の間に磁力線のつなぎかえ(磁気リコネクション)が発生する。この様子を模式的に表したのが図5 (a) (b)である。図で示すように圧力構造に膨張が生じると、その先端付近において、濃色で表した外部磁力線と単色で表した内部磁力線がつなぎかわる。内部磁力線上の圧力は外部磁力線上のそれと比べて高いため、つなぎ代わった磁力線に沿って大きな圧力差が生じることになり、それによって磁力線方向に内部から外部へと強いプラズマ流が発生する。これによりプラズマ内部から多量のプラズマが対流的に損失する。図5 (c)にシミュレーション前半のバルーニン

グ・モードによる崩壊過程に関わるプラズマの全運動エネルギーとそのうちの磁力線に平行な成分の時間発展を示す。とくに後の時刻で平行成分が大きくなるが、この機構による磁気リコネクションの発生を示している。

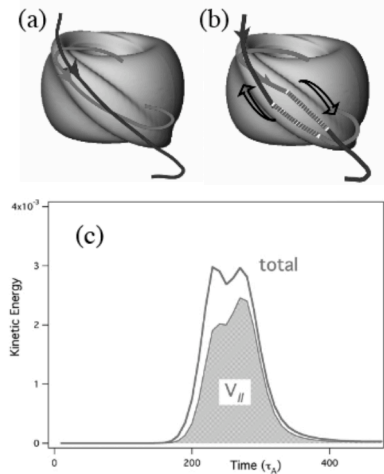


図4 (a) (b)内外磁場間に引き起こされる磁気リコネクションの概念図. (c)運動エネルギーの時間発展

Fig.4 (a)(b)Schematics of the reconnection induced between the internal and external fields. (c)Time development of the kinetic energy.

4. 議論

4-1 バルーンモードとピーリングモードの比較

第1章で述べたように、ELMの発生機構としてはバルーンモードとピーリングモードの複合的な効果が有力視されている。前章では、その一方の極端として、バルーンモードの非線形特性を調べ、実験で観測されているType-I ELMの特徴をいくつか定性的に説明することに成功した。ここではもう一方の極端であるピーリングモードについても非線形特性を調べ、両者を比較する。シミュレーションの初期値としては、ここでは数値平衡解を用いる。外部電流駆動型不安定性であるピーリングモードが不安定となるためには、平坦な圧力分布と端部付近で電流が大きくなるようなプロファイルを設定して平衡を計算し、またセパトリクスから導体壁までの距離を広く取ることにより、壁による安定化があまり効かないようにし、更に、バルーンモードが出来るだけ安定となるように三角度を大きくもたせた配位を設定する。図5にそのような平衡配位の例を示す。この配位ではアスペクト比が2.0、ベータ値は

体積平均で5%、中心で25%、大きく負磁気シアとなり、安全係数は最小値で1.27となり、その付近で $m/n=9/7$ 有理面を含む。

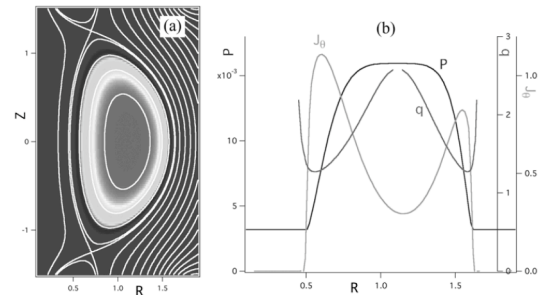


図5 初期平衡配位 (a)ポロイダル磁束と圧力分布 (b)圧力, 電流, 安全係数の径方向分布.

Fig.5 Initial equilibrium configuration.(a)Poloidal flux and pressure profile. (b)Radial profiles of the pressure, current, and safety factor.

この初期値を用いて第3章と同様に微小擾乱の成長を追跡すると、 $\eta=0$ の理想MHDの範疇では系は不安定であるが、図6 (a) (b)に示すように $n=7$ ピーリングモードが支配モードとなる。一方で、より大きな抵抗値を仮定すると($\eta=4 \times 10^{-4}$)、第3章と同様にバルーンモードが支配的となる。バルーンモードの場合は連続的にいくつかのトロイダル波数成分をもった複数のモードが不安

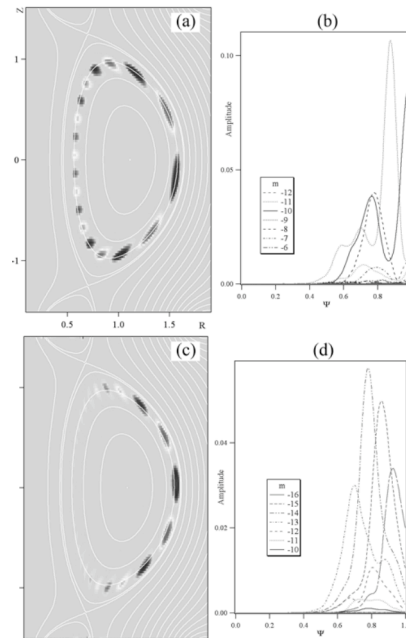


図6 線形不安定性のポロイダル構造.

(a) (b) $\eta=0$ および(c) (d) $\eta=4 \times 10^{-4}$ の場合のそれぞれポロイダル面内および径方向の固有関数. Fig.6 Poloidal structures of the linear instability. The eigenfunction in the poloidal cross section and radial profiles for (a)(b) $\eta=0$ and (c)(d) $\eta=4 \times 10^{-4}$ are plotted, respectively.

定となり、この場合は $n=10$ の成分が支配的となる[図6(c)(d)]. また、ポロイダル成分についても、有表面近傍に広くポロイダル成分がひろがった構造となる。これらはポロイダル方向に、トーラス外側の所謂曲率の悪い領域に局在化する。一方で、ピーリング・モードの場合はモード構造は、 $m/n=9/7$ 成分が単独で存在し、局在はしていない。このように、同じ平衡配位を用いて、抵抗値を変えることにより、ピーリング・モードとバルーニング・モードの双方を解析することが可能となる。ここでは、この配位を用いて、両者の非線形特性を比較しながら調べる。

やがて擾乱の振幅が大きくなると、変形が配位全体におよぶサイズに達する。その変形を生じさせるプラズマのフロー構造は、線形モード構造を反映している。図7にポロイダル断面内でのフロー構造を示す。前説で述べたようにバルーニング・モードの場合[図7(b)]は、プラズマ表面付近が局所的に膨張し、風船が膨らむような変形を生じさせる。そのときのフロー構造は、弱磁場領域に集中して小半径外側方向への流れが強く現れる。一方でピーリング・モードの場合[図7(a)]は、モード構造は局在化せず、また各々の流れの方向も磁気面に平行な成分が強く現れ、プラズマ表面を剥き取るようにフロー構造が形成される。

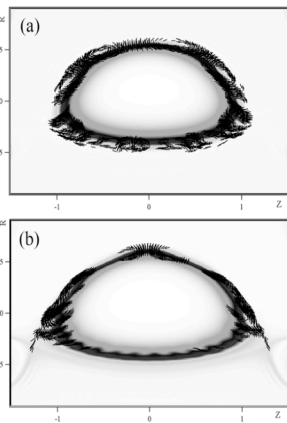


図7 フロー構造. (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = 4 \times 10^{-4}$.
Fig.7 Flow structures for (a) $\eta = 0$ and (b) $\eta = 4 \times 10^{-4}$ cases, respectively.

このようなフロー構造の違いにより、非線形ダイナミクスは両者の間で質的な差異が現れる。図8に示すように、バルーニング・モードの場合[図8(d)-(f)]は第3章で述べたように、フィラメント構造が形成され、当初はプラズマ表面付近に限られていた変位が、最終的には内部にまで達する。中心部付近は分布がピークしつつ圧力構造が残るが、全体的に大きな変形を伴っていることが分かる。

一方、ピーリング・モードの場合[図8(a)-(c)]は、終始、変位は表面付近のみに限られ、コア部は殆ど影響を受けていないことが分かる。このように、線形不安定性をピーリング・モードが支配する場合には、非線形挙動はより小規模な変位に終わることが示された。この特性が、様々なTypeの存在するELMの中で小規模のものに対応するかどうかは、今後さらなる詳細な比較が必要であろう。

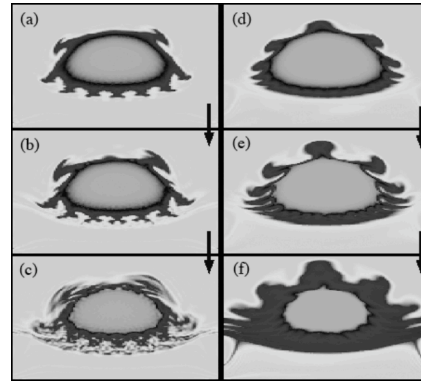


図8 圧力分布の非線形時間発展. (a)-(c) $\eta = 0$, (d)-(f) $\eta = 4 \times 10^{-4}$.

Fig.8 Nonlinear time development of pressure profile. (a)-(c) $\eta = 0$ and (d)-(f) $\eta = 4 \times 10^{-4}$ cases, respectively.

4-2 ドリフトモデルによる線形モード数の変化とフィラメント構造形成への影響

第2章で述べたように、より現実に近付いたモデリングを目指して、本シミュレーションにドリフトモデルを適用する。バルーニング・モードが主となる不安定性の場合、より高波数のモードほど成長率が大きくなるが、本研究の数値モデルでは主として粘性の効果により高波数成分は抑えられ、結果的に最大成長率をもつのは中波数程度の成分となる。ドリフトモデルを適用した場合、成長するモード成分が $\nabla p \times \mathbf{B}$ 方向へ散逸することにより、成長が抑えられる。詳細は[14]で報告されているように、この効果は高波数成分ほど大きくなり、結果としてドリフト効果が大きくなるに従い、最大成長率をもつモード数が小さい方へシフトする。このようにドリフトモデルの導入により、線形モード構造には変化が生じる。このピークモード数は非線形段階に生じる波状構造の波頭の数に直結し、図9に示すように波頭の数に線形モード数に応じて変化することが分かる。しかし、第3章で述べたように、実際にフィラメント構造に成長するのはそのうちの極少数の波頭のみである。図9を見ても、フィラメントとしてトーラス本体から分離するほどに成長する波

頭は、いずれの場合も1~2本のみである。

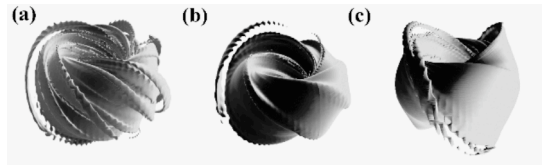


図9 線形モード数の変化と生じるフィラメント構造。(a)MHDモデル($n=9$), (b)(c)ドリフトモデル($n=4$ と 2)。

Fig.9 Change in the linear mode number and the resultant change in the filament formation.(a)MHD case($n=9$), and (b)(c) drift model case($n=4,2$).

このように、線形モード数に関わらず、少数のフィラメントのみが生じるのは、バルーニング・モードでは、支配モードの近傍に、モード数の若干異なる成分が、ほぼ同じ振幅で伴っている為に、トロイダル・モード結合を生じさせることによっている。また、この性質がある為に、損失量は線形モード数の多寡には依存せず、1本のフィラメントの挙動で決まることが推察される。

5. まとめ

球状トカマクプラズマ中で観測されるELMについて、その崩壊相に注目し、特徴的なフィラメント構造の形成や、それに伴うプラズマの対流的損失といった非線形過程を、磁気流体力学モデルに基づく数値シミュレーションにより明らかにした。バルーニング・モードの非線形発展により少数のフィラメント構造が現れ、それらにより引き起こされる外部磁場との磁気リコネクションを通じてプラズマが損失する様子を再現し、これらがType-I ELMの実験結果をよく説明することを示した。またピーリング・モードが支配的に成長する場合は、形成される対流パターンの違いにより、フィラメント構造が現れないこと、条件の違いにより支配線形モードのモード数が異なる場合でも、トロイダル結合の結果、同じような少数フィラメントが形成されることを示した。より実験に即した状況設定のもとで解析を行うことは、今後の課題である。

参考文献

- [1]H.Zohm, Plasma Phys. Control. Fusion **38** (1996) 105.
- [2]Y.Kamada, J. Plasma Fusion Res. **74** (1998) 977.
- [3]N.Mizuguchi and T.Ozeki J. Plasma Fusion Res. **82** (2006) 590.
- [4]A.Kirk *et al.*, 21th IAEA-FEC, Chengdu(2006) EX/9-1.
- [5]P.B.Snyder *et al.*, Phys. Plasmas **9** (2002) 2037.
- [6]T.Ozeki *et al.*, Fusion Sci. and Tech. Phys. (2006)

(in press).

- [7]N.Mizuguchi *et al.*, 21th IAEA-FEC, Chengdu (2006) TH/P6-20.
- [8]P.B.Snyder *et al.*, Phys. Plasmas **12**(2005) 056115.
- [9]S.E.Kruger *et al.*, 21th IAEA-FEC, Chengdu(2006) TH/P8-3.
- [10]H.R.Strauss *et al.*, 21th IAEA-FEC, Chengdu (2006) TH/P8-6.
- [11]R. Maingi *et al.*, Nucl. Fusion **45** (2005) 1066.
- [12]A.Kirk *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004) 551.
- [13]A.W. Leonard *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **48** (2006) A149.
- [14]R.Khan, *et al.*, J. Plasma Phys. (2007) in press.

Construction of a kinetic simulation model of electromagnetic plasmas

TODO Yasushi

National Institute for Fusion Science, Toki, Gifu 509-5292, Japan

Abstract

A kinetic simulation model of electromagnetic plasmas has been constructed using a new simulation method where the δf particle-in-cell simulation model is complemented with the fluid simulation model to satisfy the conservation properties. The electric field component parallel to the magnetic field is obtained from the time derivative of the Ampère's law. It is demonstrated that the complex frequency of kinetic Alfvén wave is reproduced accurately for various electron beta values. It is shown that the new simulation method enables a simulation of the kinetic Alfvén wave with a grid size ten times larger than the electron inertial length while the conventional δf particle-in-cell simulation method is not applicable to the same grid size.

Keywords: kinetic simulation, electromagnetic plasma, δf method, complementary fluid method

1. Introduction

The magnetohydrodynamic (MHD) model well describes macroscopic behaviors of plasmas. The ideal MHD model is closed with the adiabatic equation of state. The closure with the adiabatic equation of state is not valid for collisionless plasmas such as the fusion core plasmas. One approach to the closure problem of collisionless plasmas is to simulate the plasmas with the particle-in-cell (PIC) method or to solve the Vlasov equation (collisionless Boltzmann equation) with Eulerian simulation methods. For the fusion core plasmas, the gyro-kinetic theory provides a useful framework for the PIC and Vlasov simulations. When the fusion core plasmas are simulated with the PIC method, the δf method [1, 2, 3, 4] is often employed to reduce the numerical noise. Although the internal kink mode was investigated with the gyro-kinetic δf PIC method [5], the difficulty was suggested in solving accurately the Ampère's law with a term in proportion to the inverse square of the electron inertial length (skin length) in the left-hand-side of the equation [6]. In order to overcome this difficulty, several hybrid schemes [7, 8, 9] and split-weight schemes [10, 11] have been devised. It was also reported that the conventional δf scheme can be applied to the electromagnetic plasma simulation with careful normalization applied to the skin terms [12].

The complementary fluid method [13] was presented to improve the conservation properties, i.e., the conservation of particle, momentum, and energy, of δf particle-in-cell (PIC) simulations. In δf simulation, the distribution function is represented by the sum of a reference distribution and a variation distribution, often represented by f_0 and δf , respectively. The time evolution of δf is described by an advection term of δf and a linear source term associated with f_0 . It was shown that the linear source term, which is a Monte Carlo estimate in the δf method, violates the conservation properties [13]. In the δf simulation, each Lagrangian marker particles represents a characteristic of the Vlasov equation. In the complementary fluid method, in addition to the Lagrangian marker particles, a fluid system provides the complementary characteristics. The errors in the Monte Carlo estimate of the linear source term are corrected with the fluid system.

In this paper, we describe how an electromagnetic plasma model is constructed with the complementary fluid method. It is demonstrated that the complex frequency of kinetic Alfvén wave is simulated correctly for different electron beta values. The simulation results for a grid size ten times larger than the electron inertial length are compared to those with the conventional δf method. The new simulation model works well with the large grid size. In section 2, an electromagnetic simulation model with the complementary fluid method is presented. Section 3 is devoted to the demonstration of the kinetic Alfvén wave and to the comparison with the conventional δf method for the large grid size. A summary is given in section 4.

2. Construction of an electromagnetic plasma model with the complementary fluid method

A. Vlasov-Poisson-Ampère system

We consider phenomena with frequency lower than the ion cyclotron frequency in the uniform magnetic field \mathbf{B}_0 . We express the electromagnetic field using the scalar potential ϕ and the vector potential parallel to the magnetic field A_{\parallel}

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \mathbf{b}\frac{\partial}{\partial t}A_{\parallel}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \nabla \times (A_{\parallel}\mathbf{b}), \quad (2)$$

where $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. The perpendicular components of the vector potential are neglected because we focus on incompressible perturbations of the magnetic field. For the low frequency phenomena, the gyro-kinetic model provides a useful framework for simulation.

When the equilibrium number density and the electron temperature are given by n_0 and T_{e0} , the Debye length is $\lambda_D^2 = \epsilon_0 T_{e0}/n_0 e^2$. The gyro-kinetic Poisson equation in the long wavelength approximation for the electrostatic potential is

$$\left(\frac{\rho_s}{\lambda_D}\right)^2 \nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{q_i n_i + (-e)n_e}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

where n_i and n_e are ion and electron number density, and q_i is ion charge. We define $\rho_s = c_s/\Omega_i$, where $c_s = \sqrt{T_{e0}/m_i}$, $\Omega_i = q_i B_0/m_i$, and m_i is ion mass. The operator ∇_{\perp}^2 is $\nabla \cdot [\nabla - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)]$. The Ampère's law for the vector potential is

$$\nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} = -\mu_0(j_i + j_e), \quad (4)$$

where j_i and j_e are ion and electron current density parallel to the magnetic field.

The equations of motion for electrons and ions are

$$\dot{\mathbf{x}} = v_{\parallel}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (5)$$

$$\dot{v}_{\parallel} = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} E_{\parallel} \quad (\sigma = i, e), \quad (6)$$

where v_{\parallel} is the velocity parallel to the magnetic field. The parallel electric field E_{\parallel} is given from Eq. (1)

$$E_{\parallel} = -\mathbf{b} \cdot \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_{\parallel}. \quad (7)$$

The parallel electric field E_{\parallel} is needed for the time integration of the equations of motion. The time derivative of Eq. (4) gives $\frac{\partial}{\partial t}A_{\parallel}$. Thus, the parallel electric field can be given by the following equation.

$$\nabla_{\perp}^2 E_{\parallel} = -\nabla_{\perp}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla\phi) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(j_i + j_e). \quad (8)$$

The distribution function of the guiding-center evolves following the drift kinetic equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_{\sigma} + \left(v_{\parallel}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}\right) \cdot \nabla f_{\sigma} + \frac{q_{\sigma}E_{\parallel}}{m_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}}f_{\sigma} = 0. \quad (9)$$

Finite Larmor radius effects are omitted for simplicity. Equation (9) is multiplied by v_{\parallel} and integrated in the velocity space. This procedure gives the time evolution of the current density on the right-hand-side of Eq. (8)

$$\frac{\partial}{\partial t} j_\sigma = -\frac{q_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{b} \cdot \nabla P_{\parallel\sigma} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla j_\sigma + \frac{n_\sigma q_\sigma^2}{m_\sigma} E_{\parallel}, \quad (10)$$

$$P_{\parallel\sigma} = \int m_\sigma v_{\parallel}^2 f_\sigma d^3v. \quad (11)$$

Finally, we obtain the equation for the parallel electric field

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - \sum_{\sigma=i,e} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{c^2} \right) E_{\parallel} = -\nabla_{\perp}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla \phi) - \sum_{\sigma=i,e} \mu_0 \left(\frac{q_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{b} \cdot \nabla P_{\parallel\sigma} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla j_\sigma \right), \quad (12)$$

where $\omega_{p\sigma} = \sqrt{n_\sigma q_\sigma^2 / \epsilon_0 m_\sigma}$. Equations (1)-(6) and (12) constitute a closed set of the electromagnetic plasma model.

B. 1-dimensional simulation model with the complementary fluid method

We construct a 1-dimensional simulation model. The 1-dimensional phase space (x, v_{\parallel}) is considered. We assume immobile ions and focus on electron dynamics. The equilibrium distribution of electrons is assumed to be a Maxwellian distribution:

$$f_{e0}(x, v_{\parallel}) = n_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi T_{e0}/m_e}} e^{-m_e v_{\parallel}^2 / 2T_{e0}} \quad (\sigma = i, e). \quad (13)$$

We simulate the evolution of the distribution function using the δf particle-in-cell method complemented with a fluid model [13]. The position and velocity of Lagrangian markers evolve according to the equation of motion [Eqs. (5) and (6)]. The Lagrangian markers were loaded uniformly in the phase space, $0 \leq x \leq L$, $-5v_t \leq v \leq 5v_t$, where $v_t = \sqrt{T_{e0}/m_e}$ and L is the wavelength to be investigated. The initial velocity was scrambled with the bit-reversed technique [14]. The probability density of Lagrangian markers is uniform $p(x, v_{\parallel}) = 1/V$, where V is the phase space volume and $V = 10v_t L$.

The weight of the markers evolves according to the following equation:

$$\frac{dw_j}{dt} = -\frac{V}{N} \frac{(-e)}{m_e} E_{\parallel}(x_j, t) n_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi v_t}} \left(\frac{-v_j}{v_t} \right) e^{-v_j^2 / 2v_t^2}, \quad (14)$$

$$w_j(t=0) = 0. \quad (15)$$

In the conventional δf simulation, the electron number density, current density, and parallel pressure are estimated using the δf Klimontovich distribution function:

$$n(x, t) = n_0 + \delta n_K(x, t), \quad (16)$$

$$\delta n_K(x, t) \equiv \sum_{j=1}^N w_j S(x - x_j), \quad (17)$$

$$j(x, t) = \delta j_K(x, t), \quad (18)$$

$$\delta j_K(x, t) = \sum_{j=1}^N w_j (-e) v_{\parallel j} S(x - x_j), \quad (19)$$

$$P(x, t) = n_0 T_{e0} + \delta P_K(x, t), \quad (20)$$

$$\delta P_K(x, t) = \sum_{j=1}^N w_j m_e v_{\parallel j}^2 S(x - x_j), \quad (21)$$

where $S(x - x_j)$ is a shape factor. We should notice that n_0 , j_0 , and P_0 are constant in space and time. In the simulation complemented with the fluid model, the equations for the number density and the current

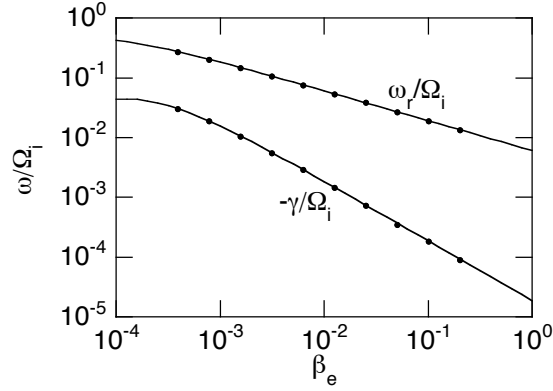


Figure 1: Real (ω_r) and imaginary frequency (γ) of kinetic Alfvén wave in the simulation results are plotted by closed circles for various electron beta values. Solid curves represent the theoretical frequency.

density are derived from Eq. (15) of Ref. [13] while the isothermal model is assumed for the equation for pressure evolution. The following fluid equations are employed in the complemented simulation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_g(x, t) = -\frac{b_x}{(-e)} \frac{\partial}{\partial x} \delta j_g(x, t) - \sum_{j=1}^N \frac{dw_j}{dt} S(x - x_j), \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta j_g(x, t) = -\frac{(-e)b_x}{m_e} \frac{\partial}{\partial x} \delta P_g(x, t) + \frac{e^2}{m_e} E_{\parallel}(x, t) [n_0 + \delta n_g(x, t)] - \sum_{j=1}^N \frac{dw_j}{dt} (-e)v_{\parallel j} S(x - x_j), \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta P_g(x, t) = -\frac{m_e v_t^2 b_x}{(-e)} \frac{\partial}{\partial x} \delta j_g(x, t) + 2E_{\parallel}(x, t) [j_0 + \delta j_g(x, t)] - \sum_{j=1}^N \frac{dw_j}{dt} m_e v_{\parallel j}^2 S(x - x_j), \quad (24)$$

$$\delta n_g(x, t = 0) = 0, \quad (25)$$

$$\delta j_g(x, t = 0) = 0, \quad (26)$$

$$\delta P_g(x, t = 0) = 0. \quad (27)$$

The $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift in x direction vanishes in the 1-dimensional model. The spatial derivatives are calculated with the spectrum method. In the complemented simulation, the number density, current density, and pressure are given by

$$n(x, t) = n_0 + \delta n_K(x, t) + \delta n_g(x, t), \quad (28)$$

$$j(x, t) = \delta j_K(x, t) + \delta j_g(x, t), \quad (29)$$

$$P(x, t) = n_0 T_{e0} + \delta P_K(x, t) + \delta P_g(x, t). \quad (30)$$

3. Benchmarks on kinetic Alfvén wave

Complex frequency of the kinetic Alfvén wave for different electron beta values has been investigated with the simulation model described in the previous subsection. The physical parameters are the same as those used in Ref. [7], $m_i/m_e = 1837$, $k_{\perp} \rho_s = 0.4$, and $k_{\parallel}/k_{\perp} = b_{0x}/b_{0y} = 10^{-2}$. The number of grid points is 64, the time step width $\Delta t = 0.5 \Delta x / b_{0x} v_t$, and the number of Lagrangian markers $N = 32768$. The 4th-order Runge-Kutta method is employed for the time integration. The simulation results are shown in Fig. 1. We see good agreement between the simulation results and the theoretical values both for real and complex frequencies. The theoretical frequencies of the kinetic Alfvén wave were calculated using a plasma dispersion function library DSPFNV [15].

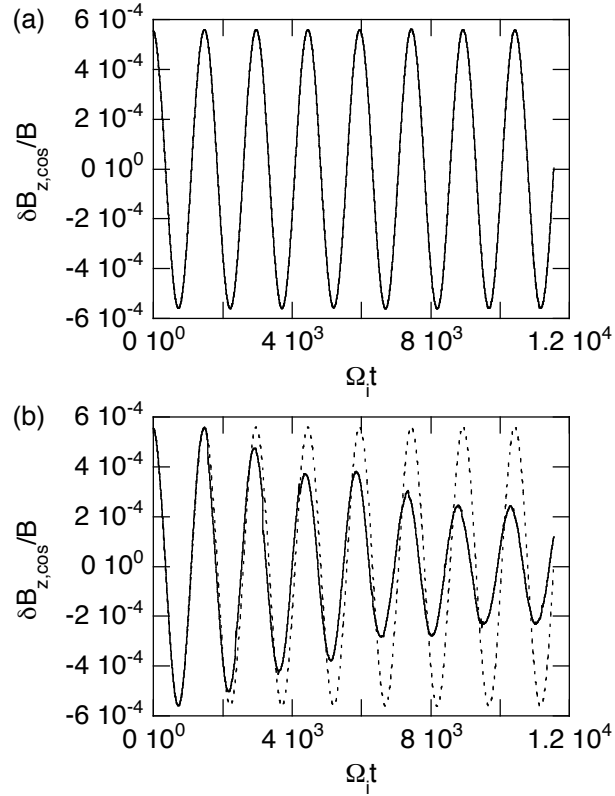


Figure 2: Time evolution of the cosine part of B_z with $\Delta x = 10c/\omega_{pe}$ in simulations with (a) the complementary fluid method and (b) the conventional δf method are compared with the theoretical evolution plotted in dashed curves.

For application to fusion plasmas, it is important to simulate with grid size larger than the electron inertial length. For example, when the electron number density is 10^{20}m^{-3} , the electron inertial length is $c/\omega_{pe} = 0.53\text{mm}$. If 200 grid points are assigned for 1m minor radius, the grid size is 5mm, which is larger than the electron inertial length by one order of magnitude. Thus, it is important to simulate with grid size larger than the electron inertial length. We have carried out a run with $\Delta x = 10c/\omega_{pe}$. The physical parameters are $m_i/m_e = 1837$, $\beta_e = 10^{-2}$, $k_{\perp}\rho_s = 3.0 \times 10^{-2}$, and $k_{\parallel}/k_{\perp} = b_{0x}/b_{0y} = 10^{-2}$. The number of grid points is 64. The results are compared to those with the standard δf method in Fig. 2. We see that the results with the complementary fluid method is close to the theoretical curve, while the Alfvén wave damps rapidly with the standard δf simulation.

4. Summary

In this paper, we described how an electromagnetic plasma model is constructed with the complementary fluid method. It is demonstrated that the complex frequency of kinetic Alfvén wave is simulated correctly for different electron beta values. The simulation results for a grid size ten times larger than the electron inertial length are compared to those with the conventional δf method. The new simulation model works well with the grid size larger than the electron inertial length.

Acknowledgments

The author would like to thank Prof. T. Watanabe for the plasma dispersion function library DSPFNV. The author greatly acknowledges helpful discussions with Dr. A. Ito on the dispersion relation of kinetic Alfvén wave. This work was supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research of the Japan Society

for the Promotion of Science (No. 16560728).

References

- [1] M. Kotschenreuther, Bull. Am. Phys. Soc. **33**, 2107 (1988).
- [2] A. M. Dimits and W. W. Lee, J. Comput. Phys. **107**, 309 (1993).
- [3] S. E. Parker and W. W. Lee, Phys. Fluids **B5**, 77 (1993).
- [4] A. Y. Aydemir, Phys. Plasmas **1**, 822 (1994).
- [5] H. Naitou, K. Tsuda, W. W. Lee, and R. D. Sydora, Phys. Plasmas **2**, 4257 (1995).
- [6] Y. Chen and S. E. Parker, Phys. Plasmas **8**, 2095 (2001).
- [7] Z. Lin and L. Chen, Phys. Plasmas **8**, 1447 (2001).
- [8] Y. Chen and S. E. Parker, Phys. Plasmas **8**, 441 (2001).
- [9] B. I. Cohen, A. M. Dimits, W. M. Nevins, Y. Chen, and S. E. Parker **9**, 251 (2002).
- [10] W. W. Lee, J. L. V. Lewandowski, T. S. Hahm, and Z. Lin, Phys. Plasmas **8**, 4435 (2001).
- [11] Y. Chen and S. E. Parker, J. Comput. Phys. **189**, 463 (2003).
- [12] A. Mishchenko, R. Hatzky, and A. Konies, Phys. Plasmas **11**, 5480 (2004).
- [13] Y. Todo, J. Plasma Fusion Res. **81**, 944 (2005).
- [14] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (Adam Hilger, Bristol, 1991) p. 393.
- [15] T. Watanabe, KAKUYUGO KENKYU **65**, 556 (1991) (in Japanese).