

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

核融合のためのプラズマ物理
Plasma Physics for Controlled Fusion

宮本 健郎
K. Miyamoto

(Received - Nov. 17, 2009)

NIFS-PROC-80

Jan. 12, 2010

RESEARCH REPORT
NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. The views presented here are solely those of the authors. This document is intended for information only and may be published in a journal after some rearrangement of its contents in the future.

Inquiries about copyright should be addressed to the Research Information Office, National Institute for Fusion Science, Oroshi-cho, Toki-shi, Gifu-ken 509-5292 Japan.

E-mail: bunken@nifs.ac.jp

<Notice about photocopying>

In order to photocopy any work from this publication, you or your organization must obtain permission from the following organization which has been delegated for copyright for clearance by the copyright owner of this publication.

Except in the USA

Japan Academic Association for Copyright Clearance (JAACC)
6-41 Akasaka 9-chome, Minato-ku, Tokyo 107-0052 Japan
Phone: 81-3-3475-5618 FAX: 81-3-3475-5619 E-mail: jaacc@mtd.biglobe.ne.jp

In the USA

Copyright Clearance Center, Inc.
222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923 USA
Phone: 1-978-750-8400 FAX: 1-978-646-8600

宮本健郎先生は、これまでに「核融合のためのプラズマ物理」(岩波書店)、「プラズマ物理・核融合」(東京大学出版会)、それらの英訳版(MIT press, Iwanami Book Service Center)を世に出されています。それと共に、核融合科学研究所のNIFS-PROC Seriesとして、「Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion」を2000年10月に出版されています。同NIFS-PROCの出版に際して、濱田泰司・企画調整官(当時)の前書きにもありますように、式の導出に時間を割けない実験家のために、高度に専門的であり、且つ、式の導出を詳細に記述したレポートの執筆をお願いしたところ、快諾していただいたという経緯があります。

今回、宮本先生から、新たにゾーナルフローと対称ステラレータの部分を追加したとのご連絡がありましたので、NIFS-PROC Seriesの続編として喜んで出版させていただくことにしました。核融合科学研究所では、2006年度から5年一貫制博士課程を導入しておりますので、本レポートは大学院生の教育にも大いに役立つだろうと考えています。

2009年12月

核融合科学研究所 図書・出版委員長
松岡啓介

The previous issue of “Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion” was published in October 2000. Professor emeritus of The University of Tokyo, Kenro Miyamoto, has published world-famous textbooks on plasma physics and controlled nuclear fusion. As shown in the foreword of the 2000 edition by Deputy Director-General of NIFS, Yasuji Hamada, it was written upon his request. Prof. Hamada requested Prof. emeritus Miyamoto to write the highly specialized textbook where derivation of difficult equations was described in detail.

This time, I received the direct contact from Miyamoto-sensei that he would like to publish the enlarged edition. The parts augmented are on zonal flow and on quasi-symmetric stellarator. This issue should be useful for researchers.

NIFS, Department of Fusion Science of SOKENDAI, introduced the five-year Ph. D program system in 2006 in addition to the existing three-year system. This means that NIFS accept younger graduate students than before and importance of education on plasma physics grows. This textbook should be useful in educating such young students, too.

December 2009

Keisuke Matsuoka
Chairman of Book & Publication Committee
National Institute for Fusion Science

核融合のためのプラズマ物理

宮本 健郎

January 12, 2010

はしがき

新しいエネルギー源として核融合反応を応用し発展させようとする世界的な規模の研究が始まってから既に半世紀が過ぎようとしている。そして ITER と呼ばれる国際トカマク実験炉の建設段階がようやく始まった。

この教科書の主な目的は、核融合に関連するプラズマ物理および制御された核融合研究の最近の状況を大学院生および専門課程の大学生に紹介することにある。またこの分野の研究者にとっても有用な参照資料になることも期待している。

この教科書は二つの編から成り立っている。最初の部分には核融合研究に密接に関連しているプラズマ物理の課題を記述している。第1章、第2章はプラズマの基礎的な概念を述べる。第3章から第6章まではプラズマを電磁流体として記述する。第3章では電磁流体運動方程式、第4章ではプラズマの閉じ込めを取り扱う。第5章、第6章で扱う電磁流体力学的不安定性、抵抗不安定性は閉じ込めたプラズマのベーター比の上限を与える。新古典ティアリングモード、抵抗性壁モードは第6章で解説されている。

第7章から第10章まではプラズマを運動論的に取り扱う。第7章で扱うボルマン方程式およびブラゾフ方程式は運動論および電磁流体力学の基礎となるものである。またここで述べるランダウ減衰は、熱いプラズマにおける荷電粒子(イオンと電子)と波動あるいは擾乱との総合作用における基本的概念である。第8章では、冷たいプラズマおよび熱いプラズマの誘電テンサーをブラゾフ方程式から導いている。種々の波の性質を分散式に基づいて論ずる。熱いプラズマの誘電率テンサーにはランダウ減衰(増幅)やサイクロトロン減衰(増幅)の効果が含まれている。ドリフト不安定性を速度空間不安定性の簡単な一例として紹介する。第9章では、波動加熱や非誘導電流駆動の物理的機構を説明する。波動加熱や中性粒子入射はイオンや電子を加熱する有効な手段である。また非誘導電流駆動はトカマクの定常運転にとって不可欠である。第10章では、乱流によるプラズマ輸送を記述する。この課題はもっとも複雑でやっかいな課題である。理論や計算機シミュレーションの多くの試みを紹介する。ジャイロ運動論的粒子モデルや完全軌道粒子モデルによるシミュレーション、帯状流の基礎知識などを記述する。

第2の部分には、核融合の種々の分野における最新の研究を記述する。核融合研究の種々の興味ある最新の局面をできるだけ近道を通して把握したい場合は第1~4章から第11~13章に飛ぶこともできる。第11章で述べるトカマクは最も活発に研究され、成果をあげているので、詳しく説明している。電磁流体力学的(MHD)不安定性、Lモード、Hモードのエネルギー閉じ込め時間の実験的比例則、定常運転などの重要な課題を説明している。ITERおよびその先をゆく先進的トカマクへの試みも紹介している。第12章の逆転磁場ピンチ(RFP)では、MHD緩和の現象、パルスの平行電流駆動(PPCD)、電流分布制御による閉じ込め特性の改善などを述べる。第13章のステラレーターにおいては、準対称ステラレーターの研究も紹介する。

この教科書は、核融合に密接に関連しているプラズマ物理の重要な課題を簡潔に説明し、(磁気閉じ込め)核融合研究の興味ある最新の研究をくわしく紹介することを心懸けた。

宮本 健郎
東京大学名誉教授

Plasma Physics for Controlled Fusion

K. Miyamoto

Preface

The primary objective of this lecture note is to present the theories and experiments of plasma physics for recent activities of controlled fusion research for graduate and senior undergraduate students.

Chapters 1-6 describe the basic knowledge of plasma and magnetohydrodynamics (MHD). MHD instabilities limit the beta ratio (ratio of plasma pressure to magnetic pressure) of confined plasma.

Chapters 7-9 provide the kinetic theory of hot plasma and discuss the wave heating and non-inductive current drive. The dispersion relation derived by the kinetic theory are used to discuss plasma waves and perturbed modes. Landau damping is the essential mechanism of plasma heating and the stabilization of perturbation. Landau inverse damping brings the amplification of waves and the destabilization of perturbed modes.

Chapter 10 explains the plasma transport due to turbulence, which is the most important and challenging subject for plasma confinement. Theories and simulations including subject of zonal flow are introduced.

Chapters 11, 12 and 13 describe the recent activities of tokamak including ITER as well as spherical tokamak, reversed field pinch (RFP) and stellarator including quasi-symmetric configurations. Emphasis has been given to tokamak research since it made the most remarkable progress and the construction phase of 'International Tokamak Experimental Reactor' called ITER has already started.

Keywords: Magnetohydrodynamics, Kinetic theory of hot plasma, Wave heating and current drive, Transport due to Turbulence, Zonal flow, Tokamak, ITER, Reversed Field Pinch, Stellarator

目次

第1章 プラズマとは	1
1.1 電気的中性およびランダウ減衰	1
1.2 核融合炉心プラズマ	3
第2章 荷電粒子の軌道および磁場配位	8
2.1 荷電粒子の軌道	8
2.1.1 サイクロトロン運動	
2.1.2 案内中心のドリフト速度, 磁気モーメント	
2.1.3 偏極ドリフト	
2.1.4 ポンデロモーティブフォース	
2.2 クーロン衝突, 中性粒子入射	13
2.2.1 クーロン衝突	
2.2.2 中性粒子入射	
2.2.3 遁走電子, 電気抵抗	
2.3 プラズマ現象の時間および空間スケール	18
2.4 磁気ミラー	19
2.5 トーラス系	20
2.5.1 磁気面	
2.5.2 ハミルトンの運動方程式	
2.5.3 軸対称系における粒子軌道	
2.5.4 トーラス磁場における案内中心ドリフト (周回粒子とバナナ粒子)	
2.5.5 トロイダル方向の電場がバナナ粒子の軌道に及ぼす効果	
2.5.6 案内中心の軌道と磁気面	
2.5.7 捕捉粒子 (バナナ) の歳差運動	
第3章 電磁流体力学	34
3.1 二流体電磁流体力学運動方程式	34
3.2 一流体電磁流体力学運動方程式	35
第4章 プラズマの閉じ込め	40
4.1 衝突頻度の大きい場合の拡散	41
4.2 トカマクにおける衝突頻度の小さい場合の拡散	44
4.3 ブートストラップ電流	45
4.4 径電場による揺動損失の抑制	46
第5章 電磁流体力学的不安定性	49
5.1 交換不安定性	49
5.1.1 交換不安定性	
5.1.2 交換不安定性の安定条件, 磁気井戸	
5.2 電磁流体力学的 (MHD) 不安定性の公式化	54
5.2.1 MHD 方程式の線形化	
5.2.2 磁気音波	
5.2.3 レイリ-テイラー (交換) 不安定性	
5.3 表面電流構成における円柱プラズマの不安定性	59
5.4 エネルギー原理	62
5.4.1 エネルギー積分	
5.4.2 解釈しやすい形のエネルギー積分	
5.5 分布電流構成における円柱プラズマの不安定性	65
5.5.1 分布電流構成における円柱プラズマのエネルギー積分	
5.5.2 スイダム条件	
5.5.3 トカマク配位	
5.6 Hain-Lüst の電磁流体運動方程式	69
5.7 バルーニング不安定性	70
5.8 密度勾配と温度勾配がある場合の η_i モード	74
5.9 アルフベン固有モード	75
第6章 抵抗不安定性	80
6.1 ティアリング不安定性	80
6.2 新古典ティアリング不安定性	84

6.3	抵抗性ドリフト不安定性	89
6.4	抵抗性壁モード	92
第7章	ボルツマン方程式およびランダウ減衰	97
7.1	ボルツマン方程式	97
7.1.1	位相空間と分布関数	
7.1.2	ボルツマン方程式およびブラゾフ方程式	
7.1.3	フォッカー・プランクの衝突項	
7.2	ランダウ減衰	101
7.3	準線形理論による分布関数の変化	104
第8章	電磁波伝播媒質としてのプラズマ	107
8.1	冷たいプラズマの誘電テンサー	107
8.2	波の諸性質	110
8.2.1	波の偏光性と粒子の運動	
8.2.2	カット・オフと共鳴	
8.3	2成分プラズマの波	111
8.4	種々の波	115
8.4.1	アルフベン波	
8.4.2	イオン・サイクロトロン波および速波	
8.4.3	低域混成共鳴	
8.4.4	高域混成共鳴	
8.4.5	電子サイクロトロン波	
8.4.6	静電波の分散式	
8.5	熱いプラズマの誘電テンサー	121
8.5.1	熱いプラズマにおける分散関係の公式化	
8.5.2	線形化ブラゾフ方程式の解	
8.5.3	熱いプラズマの誘電テンサー	
8.5.4	二重マクスウェル分布プラズマの誘電テンサー	
8.5.5	プラズマ分散関数	
8.5.6	静電波の分散式	
8.6	速度空間不安定性	131
8.6.1	ドリフト不安定性(無衝突)	
8.6.2	種々の速度空間不安定性	
第9章	波動加熱および非誘導電流駆動	134
9.1	エネルギーの流れ	134
9.2	イオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱(ICRF)	141
9.3	低域混成波加熱(LHH)	144
9.4	電子サイクロトロン加熱(ECH)	146
9.5	低域混成電流駆動(LHCD)	149
9.6	電子サイクロトロン電流駆動(ECCD)	151
9.7	中性粒子電流駆動(NBCD)	154
第10章	乱流によるプラズマ輸送	157
10.1	揺動損失, ボーム, ジャイロボーム拡散, 対流損失	157
10.2	磁気揺動による損失	161
10.3	輸送の次元解析	162
10.4	ジャイロ運動論的粒子モデルと完全軌道粒子モデルによる 計算機シミュレーション	165
10.4.1	ジャイロ運動論的粒子モデル	
10.4.2	完全軌道粒子モデル	
10.5	帯状流	172
10.5.1	ドリフト乱流の長谷川-三間方程式	
10.5.2	帯状流の生成	
10.5.3	GAM(ゲオデシックアコースティックモード)	
10.5.4	ETG(電子温度勾配)乱流による帯状流	
10.5.5	付記	
第11章	トカマク	186
11.1	トカマク装置	186
11.2	平衡	192
11.2.1	平衡方程式	

11.2.2	トカマク平衡のための垂直磁場	
11.2.3	平衡によるポロイダルベータ値の上限	
11.2.4	シャフラノフ・シフト	
11.3	MHD 安定性および密度上限	200
11.4	不純物制御, スクレイブ オフ層, ダイバーター	204
11.5	LモードとHモードの閉じ込め比例則	208
11.6	定常運転	214
11.7	ITER(国際トカマク実験炉)	216
11.8	先進的トカマクへの試み	221
	11.8.1 球状トカマク	
	11.8.2 先進的トカマク炉への試み	
第12章	逆転磁場ピンチ (RFP)	227
12.1	RFP 配位	227
12.2	MHD 緩和	227
	12.2.1 テイラー理論	
	12.2.2 MHD 緩和過程	
12.3	RFP の閉じ込め	232
第13章	ステラレーター	237
13.1	ヘリカル磁場	237
13.2	ステラレーター装置	241
13.3	ステラレーター磁場における新古典拡散	241
13.4	ステラレーターの閉じ込め	244
13.5	準対称ステラレーター	246
	13.5.1 磁気座標 (Boozer 座標) と自然座標 (浜田座標)	
	13.5.2 ドリフト運動のブーザー方程式	
	13.5.3 準対称ステラレーター	
13.6	ステラレーター炉の概念設計	254
参考文献		257
索引		264

第1章 プラズマとは

1.1 電気的中性およびランダウ減衰

物質の温度を上げていくと固体、液体、気体と相変化を行うが、さらに高温にすると気体分子は原子に解離し、ついには原子が電離する。イオンと電子の電価密度はほぼ同じで、巨視的に見て電気的中性である高温の電離ガス状態になる。

その構成粒子であるイオンと電子の荷電粒子間にクーロン力が働く。その距離を r とするときクーロン力は r^{-2} 程度で遠距離になってもあまり小さくならない。また電流が流れ、ローレンツ力が荷電粒子に働く。

“実在のプラズマは、非常に多くの個々の荷電粒子の集団であり、その荷電粒子は互いにクーロン力やその運動によって流れる電流を通して相互作用をしあい、かつ外部から加わる電磁場(そしてこの外部電磁場を変える)とも相互作用をしている。その振舞いを複雑にしているのは、プラズマとそれ自体、そしてプラズマと電磁場との集団的長距離相互作用の特性である。” [1.1].

温度が $T(\text{K})$ のとき、質量 m の粒子の熱運動の平均速度 v_T は

$$mv_T^2/2 = \kappa T/2 \quad (1.1)$$

である。 κ はボルツマン定数で $\kappa = 1.380658(12) \times 10^{-23} \text{ J/K}$ である。 κT は熱運動エネルギーの大きさ (SI単位でジュール (J)) を表す。一方エネルギーの単位として、電子の電荷 $e = 1.60217733(49) \times 10^{-19}$ クーロンを1ボルトの電位差に抗して移動することに費やすエネルギー

$$1 \text{ eV}(\text{エレクトロン} \cdot \text{ボルト}) = 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ J}(\text{ジュール})$$

を物理の多くの分野で用いている。 $\kappa T = 1 \text{ eV}$ に相当する温度は $e/\kappa = 1.16 \times 10^4 \text{ K/V}$ であるので $1.16 \times 10^4 \text{ K}$ である。これから以降は、熱エネルギー κT を簡単のため T と表す。水素原子のイオン化エネルギーは 13.6 eV であるので、水素ガスを $1 \text{ eV} \sim 10^4 \text{ K}$ 程度の温度にすると、熱運動の平均エネルギーは 1 eV であっても 13.6 eV 以上の高速電子もある程度あるので水素原子と衝突して電離しプラズマ状態になる。

プラズマは自然界に多様な形で現れる。地球大気の上層で高さが $70 \sim 500 \text{ km}$ の範囲には電離気体がいくつかの層をなして存在し、電離層と呼ばれている (密度 10^{12} m^{-3} , 温度 0.2 eV)。また太陽周囲の惑星間空間には太陽風と呼ばれるプラズマの流れが太陽から吹き出しており、その密度は $10^{6 \sim 7} \text{ m}^{-3}$, 電子温度は 10 eV ぐらいである。また太陽のまわりにはコロナ領域が広がっていて、その位置によって異なるが、およそ密度は 10^{14} m^{-3} , 電子温度は 100 eV 程度と推定されている。また恒星の進化の最終状態の一つである白色矮星においては $10^{35 \sim 36} \text{ m}^{-3}$ の電子密度となる。プラズマ物理は特に核融合研究に関連して、学問体系が整えられてきた。したがって、高温プラズマの研究は核融合研究の分野で最も活発に研究されている。

プラズマの基本的性質の一つである電気的中性の特徴は、プラズマに加えられた電位を遮蔽してしまうことである。正の電極の周りには電子が集まり、負の電極の周りには電子が遠ざけられ、電位を遮蔽してしまう。この遮蔽距離を計算してみよう。簡単にするため、イオンは一様に分布しイオン密度 n_i の値を n_0 とする ($n_i = n_0$)。また電子は T_e のボルツマン分布をすると仮定する。すなわち電子密度を n_e , 静電ポテンシャルを ϕ とすると

$$n_e = n_0 \exp(e\phi/T_e) \simeq n_0(1 + e\phi/T_e)$$

となる。ここで電子のポテンシャルエネルギー $|e\phi|$ が熱エネルギー T_e より小さいと仮定した。一方静電場 \mathbf{E} の式は、マクスウェルの方程式より

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \nabla(\epsilon_0\mathbf{E}) = -\epsilon_0\nabla^2\phi = \rho = -e(n_e - n_0) = -\frac{e^2n_0}{T_e}\phi$$

であり

$$\nabla^2 \phi = \frac{\phi}{\lambda_D^2}, \quad \lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2} \right)^{1/2} = 7.45 \times 10^3 \left(\frac{1}{n_e} \frac{T_e}{e} \right)^{1/2} \text{ (m)} \quad (1.2)$$

となる。ただし ϵ_0 は真空中の誘電率, n_e は m^{-3} 単位, T_e/e は eV 単位である。 $n_e \sim 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $T_e/e \sim 10 \text{ keV}$ の場合, $\lambda_D \sim 75 \mu\text{m}$ である。

この式の球対称な解は, $\nabla^2 \phi = (1/r^2)(\partial/\partial r)(r^2 \partial \phi / \partial r)$ より

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r}$$

となる。このことは点電荷のポテンシャル $q/4\pi\epsilon_0 r$ が λ_D の距離で遮蔽されることを意味する。この現象をデバイ遮蔽といい, この距離 λ_D をデバイ長と呼ぶ。プラズマの大きさを a とするとき $a \gg \lambda_D$ であればプラズマは電氣的に中性であるといえる。もし $a < \lambda_D$ であると各荷電粒子は静電的に遮蔽されず独立な荷電粒子の集まりとなってしまふのでプラズマといえなくなる。

デバイ長を半径に持つデバイ球の中にある電子の数をプラズマ・パラメーターという。すなわち

$$n_e \lambda_D^3 = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{e} \right)^{3/2} \frac{1}{n_e^{1/2}}. \quad (1.3)$$

したがって温度一定のとき密度を大きくしていくとこの値は小さくなる。もしこのプラズマ・パラメーターが1程度になると電荷密度が連続的になるとしている仮定が成立しなくなり, デバイ遮蔽の概念が成り立たなくなる。 $n_e \lambda_D^3 > 1$ の領域を古典プラズマあるいは弱結合プラズマと呼んでいる。なぜならば熱運動エネルギー T_e と電子間のクーロン・エネルギー $E_{\text{coulomb}} = e^2/4\pi\epsilon_0 d$ ($d \simeq n_e^{-1/3}$ は電子間の平均距離) の比は

$$\frac{T_e}{E_{\text{coulomb}}} = 4\pi(n_e \lambda_D^3)^{2/3}$$

で与えられ, クーロン・エネルギーが熱運動エネルギーに比べて小さいからである。 $n_e \lambda_D^3 < 1$ の場合は荷電粒子間のクーロン・エネルギーが支配的になるので強結合プラズマと呼んでいる。

縮退した電子ガスのフェルミ・エネルギーは $\epsilon_F = (h^2/2m_e)(3\pi^2 n)^{2/3}$ で表されるので, 高密度になってくると $\epsilon_F \geq \kappa T_e$ となる可能性がある ($h = 6.6260755(40) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ はプランク定数, m_e は電子の質量)。この場合には熱運動の効果よりフェルミ粒子としての量子効果が重要となってくる。このような系を縮退電子プラズマと呼んでいる。この例は金属中の電子プラズマ, レーザープラズマである。磁気閉じ込め実験で普通取り扱うプラズマのほとんどは古典的弱結合プラズマである。

一様なプラズマ中で擾乱が起こり, 電子が変位したとする。このときイオンの質量は電子の質量に比べて非常に重いので, 簡単のため, イオンは動かないとする。電子の変位によって, 電荷分布が生じ電場が発生する。電場の方程式は

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -e(n_e - n_0)$$

である。電子は電場によって加速される:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

電子の移動によって, 電子密度が変化する:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}) = 0.$$

$n_e - n_0 = n_1$ とし $|n_1| \ll n_0$ を仮定すると

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -en_1, \quad m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -e\mathbf{E}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

が導かれる。簡単のため, 変位は x 方向のみとし, 揺動は角周波数 ω で正弦的に振動するとする:

$$n_1(x, t) = n_1 \exp(ikx - i\omega t).$$

1.2 核融合炉心プラズマ

時間微分 $\partial/\partial t$ は $-i\omega$ で置き換えられ, $\partial/\partial x$ は ik で置き換えられる. また電場は x 成分 E のみとなる. そうすると

$$ik\epsilon_0 E = -en_1, \quad -i\omega m_e v = -eE, \quad -i\omega n_1 = -ikn_0 v$$

となり

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (1.4)$$

が導かれる. この波を電子プラズマ波 あるいは ラングミュア波と呼び, その振動数を電子プラズマ (角) 振動数 Π_e と呼び

$$\Pi_e = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{1/2} \text{ rad/sec}$$

となる. $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ のとき, $\Pi_e/2\pi = 90 \text{ GHz}$ である. プラズ振動数とデバイ長の間には λ_D :

$$\lambda_D \Pi_e = \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{1/2} = v_{Te} = 4.19 \times 10^5 \left(\frac{T_e}{e} \right)^{1/2} \text{ m/sec}$$

の関係がある. したがって Π_e の逆数は, 電子がデバイ長の距離の通過時間と考えることができる ($\Pi_e^{-1} = \lambda_D/v_{Te}$).

プラズマのもう一つの基本的過程は, 荷電粒子の長距離相互作用による集団的運動である. 波は荷電粒子のコヒーレントな運動をともなっている. もし波の位相速度 v_{ph} が荷電粒子の熱速度 v_T よりかなり大きければ, 波はプラズマ媒質中を伝播し, 減衰もしなければ増幅もしない. しかしながらプラズマ媒質の屈折率 N が大きくなり, プラズマが高温になると, 波の位相速度 $v_{ph} = c/N$ (c は光速) は熱速度 v_T と同程度になり ($v_{ph} = c/N \sim v_T$), 波とプラズマとの間でエネルギーのやり取りをすることが可能になる. この波の減衰機構の存在はランダウ (L.D. Landau) により理論的に発見されたのでランダウ減衰と呼ばれる. この過程は, 衝突熱化の過程によらない, プラズマと波との直接的相互作用によるものである. この過程はプラズマの波動加熱 (ランダウ減衰) や揺動 (波) の不安定性 (逆ランダウ減衰, ランダウ増幅) において最も基本的な機構である. ランダウ減衰については 7, 8 章 において解説する.

1.2 核融合炉心プラズマ

プラズマ物理の発展は核融合炉心プラズマをどのようにしたら生成できるかという動機に負うところが大きい. この節では核融合炉心プラズマの必要条件について述べてみよう.

質量数の小さい各種の原子核が衝突して, 質量数の大きい原子核をつくる反応を核融合反応という. 核融合反応後に生成された原子核の質量の和は, 衝突する前の二つの原子核の質量の和に比べてわずかに少なくなっている. 相対性理論によれば, この質量欠損 Δm に相当する $(\Delta m)c^2$ (c は光速) のエネルギーが放出される.

利用可能な核融合反応として現在考えられているのは重水素 D, 三重水素 T, ヘリウム 3 (He^3) である. リチウム (Li) の核反応は T の増殖に用いられる.

- (1) $\text{D} + \text{D} \rightarrow \text{T}(1.01 \text{ MeV}) + \text{p}(3.03 \text{ MeV})$
- (2) $\text{D} + \text{D} \rightarrow \text{He}^3(0.82 \text{ MeV}) + \text{n}(2.45 \text{ MeV})$
- (3) $\text{T} + \text{D} \rightarrow \text{He}^4(3.52 \text{ MeV}) + \text{n}(14.06 \text{ MeV})$
- (4) $\text{D} + \text{He}^3 \rightarrow \text{He}^4(3.67 \text{ MeV}) + \text{p}(14.67 \text{ MeV})$
- (5) $\text{Li}^6 + \text{n} \rightarrow \text{T} + \text{He}^4 + 4.8 \text{ MeV}$
- (6) $\text{Li}^7 + \text{n}(2.5 \text{ MeV}) \rightarrow \text{T} + \text{He}^4 + \text{n}$

ここで p, n はそれぞれ陽子 (水素 H のイオン) と中性子である. 重水素はきわめて豊富に存在し, $1.35 \times 10^9 \text{ km}^3$ の海水中の水素の 0.015% (原子の数で) が重水素である. また 1 MeV は 10^6 eV である. ちなみに水素分子 H_2 が燃焼して H_2O になる化学反応で放出される化学エネルギーは 2.96 eV であるから, 上記の核融合反応によるエネルギーは, その 100 万倍程度の大きな値である. 核子 1 個当りの結合エネルギーは, 非常に軽い原子核あるいは非常に重い原子核で小さく, 原子量 60 あたりの原子核で大きい. したがって軽い原子核同士が核融合反応を起こすとき, 大きなエネルギーが放出される. 重水素は天然に豊富に存在する. 全体積およそ $1.35 \times 10^9 \text{ km}^3$ の海水中の水素の 0.015 の割合 (原子数で) が重水素である.

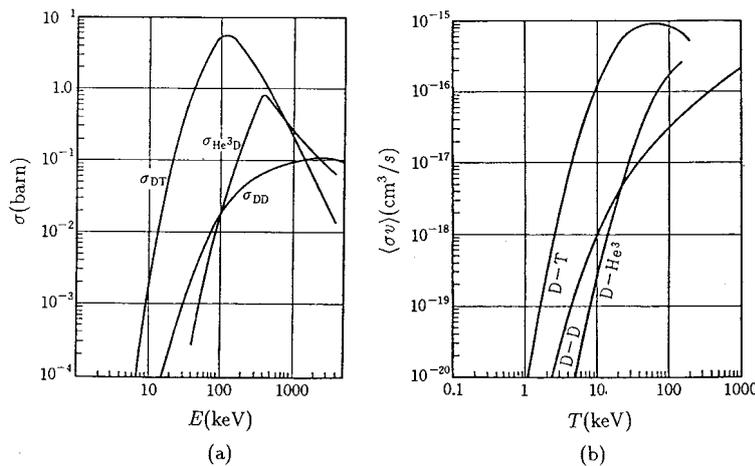


図 1.1 (a) 核融合反応断面積 σ の衝突粒子運動エネルギー E への依存性. σ_{DD} は DD 反応 (1),(2) の断面積の和を示す. $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$. (b) 核融合反応率 $\langle\sigma v\rangle$ のイオン温度 T_i 依存性.

爆発的な核融合反応によるエネルギーの放出は 1951 年 水素爆弾の実験によって実証されているが, 制御核融合はいまだ開発研究の途上にある. 核融合反応は加速器を用いて 1920 年代に発見された. 陽子あるいは重陽子ビームを軽い原子から成るターゲットに衝突させても, そのエネルギーはターゲットの原子核を電離したり, 弾性衝突によって失われ, 核融合反応を起こす確率は無視できるほど小さい. エネルギー資源に役立つ核融合研究としては高温プラズマを用いた研究が主力である.

完全に電離した水素プラズマ中では水素イオンがさらに電離したり, 励起されたりすることはない. 高い熱エネルギーを持つイオンや電子がクーロン衝突 (弾性衝突) を繰り返しても, プラズマが断熱的にある領域に閉じ込められていれば, その平均エネルギー, すなわち温度は下がらない. したがってある温度以上の高温 DT プラズマ, あるいは DD プラズマを閉じ込めることができるならば, D と T あるいは D と D が互いに高速で走り回っているため双方の持つ + 電気の反発力を乗り越えて衝突し, 核融合反応を起こすことが期待できる.

D が T と核融合反応を起こすような衝突をする場合に, 衝突をする相手の T の大きさの断面積を反応断面積という. この断面積は衝突する D の運動エネルギー E によって変化する. $E = 100 \text{ keV}$ のとき DT 反応の断面積は $5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ である. DT, DD, DHe^3 反応の反応断面積 σ の衝突粒子運動エネルギー E への依存性を図 1.1(a) に示す [1.2, 1.3]. ある D イオンが v の速度で密度 n_T の T イオンと核融合反応する場合, 単位時間に核融合反応を起こす確率は $n_T \sigma v$ となる (衝突確率については 2.2.1 節のクーロン衝突のところより詳しく説明する). プラズマが温度 T_i のマクスウェル分布をしているとき, 衝突するイオンの相対速度はさまざまに変わるので σv の速度平均値 $\langle\sigma v\rangle$ が必要となる. 図 1.1(b) に $\langle\sigma v\rangle$ のイオン温度 T_i に対する依存性を示す [1.4]. D-T 反応の断面積 $\langle\sigma v\rangle$ の温度 T (keV 単位) の依存性によく合う関数として

$$\langle\sigma v\rangle(\text{m}^{-3}) = \frac{3.7 \times 10^{-18}}{H(T) \times T^{2/3}} \exp\left(-\frac{20}{T^{1/3}}\right), \quad (1.5)$$

$$H(T) \equiv \frac{T}{37} + \frac{5.45}{3 + T(1 + T/37.5)^{2.8}}$$

が提案されている [1.5].

核融合炉の概念図を図 1.2 に示す. 炉心プラズマから飛び出した中性子は真空壁を突き抜けて Li ブランケット内で減速され熱エネルギーを生じる. 三重水素 T は 12.3 年の半減期で He^3 にベータ崩壊し ($T \rightarrow He^3 + e$ ($< 18.6 \text{ keV}$)), 天然には存在しないので Li の核反応 (5)(6) によって T を生成する. 生じた熱エネルギーは熱交換器によって水蒸気の発生に利用され, 蒸気タービンを回転し発電する. その電気エネルギーの一部をつかって加熱装置を働かせる. 核融合によるアルファ粒子 (He イオン) は荷電粒子であるのでクーロン衝突によってプラズマを直接加熱する (2.6 節参照). 全加熱入力は外部からの加熱入力とアルファ粒子加熱入力の和になる. プラズマを定常に保つために必要な全加熱入力は, 炉心プラズマのエネルギー損失率に等しくなければならないから, プラズマのエネルギー閉じ込めが非常に良いことが必要となる.

1.2 核融合炉心プラズマ

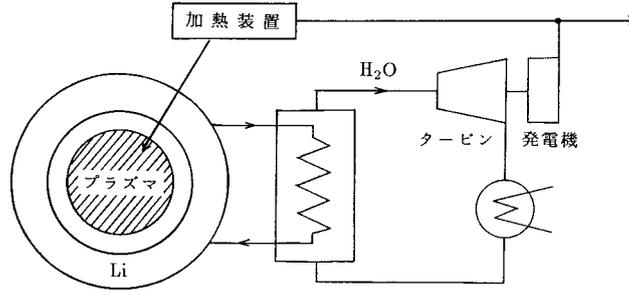


図 1.2 D-T 核融合炉に基づく発電プラントの概念図.

プラズマの単位体積当りの熱エネルギーは $(3/2)n(T_i + T_e)$ で与えられる. この熱エネルギーは熱伝導や対流損失によって失われていく. 単位体積単位時間当りのこのエネルギー損失を P_L とする. また電子の制御放射, 不純物イオンによる放射損失 R がある. 熱伝導, 対流損失および放射損失で決まるエネルギー閉じ込め時間 τ_E を

$$\tau_E \equiv \frac{(3/2)n(T_e + T_i)}{P_L + R} \simeq \frac{3nT}{P_L + R} \quad (1.6)$$

と定義する. プラズマを高温に保つために必要な加熱入力 P_{heat} は損失出力 $P_L + R$ に等しくなくてはならない. DT 炉を考える場合, 1 反応当りアルファ粒子の $Q_\alpha = 3.52 \text{ MeV}$ および中性子の $Q_n = 14.06 \text{ MeV}$ の合計 $Q_{\text{NF}} = 17.58 \text{ MeV}$ のエネルギー放出がある (運動量保存則より $Q_n : Q_\alpha = m_\alpha : m_n = 0.8 : 0.2$). また D および T のイオンが等しい割合で混ざっているとき各々の密度は $n/2$ であるから単位時間単位体積当りの核融合反応のおこる回数は $(n/2)(n/2)\langle\sigma v\rangle$ であり (2.2.1 節における議論を参照), 単位体積当りの核融合反応全出力 P_{NF} は

$$P_{\text{NF}} = (n/2)(n/2)\langle\sigma v\rangle Q_{\text{NF}} \quad (1.7)$$

で与えられる. 中性子およびアルファ粒子による核融合出力をそれぞれ P_n, P_α とすると, $P_n = 0.8P_{\text{NF}}, P_\alpha = 0.2P_{\text{NF}}$ である. 中性子による出力は前にも述べたように Li ブランケットで熱出力となり, 発電プラントで電気出力になる. 発電プラントの効率を η_{el} , 発電出力より少ない $\gamma (< 1)$ の割合を加熱装置に使い, その加熱効率 (プラズマに吸収された入力と加熱装置を作動させる入力との比) を η_{heat} とするとき, 外部加熱入力は $\eta_{\text{heat}}\gamma\eta_{\text{el}}P_n$ である. また α 粒子による出力はそのままプラズマを加熱する入力になる. したがってプラズマへの全加熱入力は

$$(0.8\eta_{\text{el}}\gamma\eta_{\text{heat}} + 0.2)P_{\text{NF}} = \eta P_{\text{NF}},$$

$$\eta \equiv 0.8\gamma\eta_{\text{el}}\eta_{\text{heat}} + 0.2$$

となる. したがって炉心プラズマの条件は以下のようになる.

$$P_{\text{heat}} = P_L + R = \frac{3nT}{\tau_E} < \eta P_{\text{NF}} \quad (1.8)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{3nT}{\tau_E} &< \eta \frac{Q_{\text{NF}}}{4} n^2 \langle\sigma v\rangle, \\ n\tau_E &> \frac{12T}{\eta Q_{\text{NF}} \langle\sigma v\rangle}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

ここで (1.9) の右辺は温度 T のみの関数である. $T = 10^4 \text{ eV}$ のとき $\eta \sim 0.3$ ($\gamma \sim 0.4, \eta_{\text{el}} \sim 0.4, \eta_{\text{heat}} \sim 0.8$) として $n\tau_E > 1.7 \times 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot \text{sec}$ となる. $\eta \approx 0.3$ としたときの D-T 炉心プラズマの核融合燃焼条件を図 1.3 に示す. 現実の炉心プラズマではその中心は高温であるが, 周辺においては低温になっている. より厳密に取り扱うためには温度や密度の空間分布の影響を考慮して全領域の積分をとらなければならない. 4.8 節でより詳しい解析を行う.

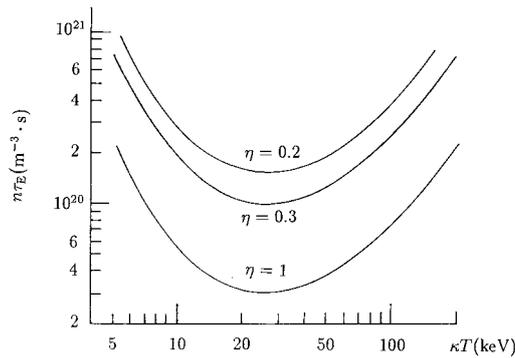


図 1.3 D-T 炉心プラズマの $n\tau_E$ - T ダイアグラムにおける 核燃焼条件 ($\eta = 0.3$ の曲線), 臨界条件 ($\eta = 1$ の曲線), 着火の条件 ($\eta = 0.2$ の曲線).

また $P_{\text{heat}} = P_{\text{NF}}$ の条件を臨界条件という. これは $\eta = 1$ とした場合に相当する. もし外部加熱入力が必要でなく, アルファ粒子加熱のみでよい場合, すなわち $P_{\text{heat}} = 0.2P_{\text{NF}} = P_L + R$ の条件を着火条件という. 自分自身の出力で高温状態を持続するからである. これは (1.8) 式において $\eta = 0.2$ とした場合に相当する.

着火条件 ($\eta = 0.2$) および 臨界条件を図 1.3 に示す.

問題

- 三重積 イオン温度が 10 keV 付近の場合, D-T 反応率 $\langle\sigma v\rangle$ of D-T は近似的に $\langle\sigma v\rangle = \langle\sigma v\rangle_{10}(T_{\text{keV}}/10)^2$ で表せる. ここで T_{keV} は keV 単位のイオン温度である. イオン温度が $T_{\text{keV}} \sim 10$ 付近のとき, (1.9) 式をより簡単な式に導け. $\eta \approx 0.3$ のとき, 着火条件を満たすために必要な三重積 $n\tau_E T_{\text{keV}}$ の値を $\text{m}^3 \text{s keV}$ の単位で求めよ. ($\langle\sigma v\rangle_{10} \approx 10^{-22} \text{m}^3/\text{s}$, $Q_{\text{NF}} = 17.58 \text{MeV}$.)
- 核燃焼の安定性 核燃焼プラズマの温度変化の式は $3(d(nT)/dt) = -3nT/\tau_E + \eta Q_{\text{NF}} n^2 \langle\sigma v\rangle / 4$ で与えられる. $d(nT)/dt = 0$ の条件を満たすプラズマの平衡温度を T_0 とする. 温度が $T_0 + \delta T$ に変化したとき, 核燃焼プラズマは熱的に安定か? 簡単のため, n と η は一定とする. $T = T_0$ の付近で, $\tau_E \propto T^{-\alpha}$, $\langle\sigma v\rangle \propto T^\beta$ として, 熱的に安定な条件を導け.

解答 (ヒント)

- 三重積 $T = 10 \text{keV}$ 付近の着火条件は

$$n\tau_E > \frac{12T}{\eta Q_{\text{NF}} \langle\sigma v\rangle_{10} (T_{\text{keV}}/10)^2},$$

$$n\tau_E T_{\text{keV}} > \frac{1200}{\eta 17.58 \times 10^3 \langle\sigma v\rangle_{10}} \approx 2.27 \times 10^{21} (\text{m}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{keV})$$

となる.

- 核燃焼の安定性 平衡温度 T_0 のとき

$$-\frac{T_0}{\tau_{E0}} + \frac{\eta Q_{\text{NF}}}{12} n S(T_0) = 0$$

であり, 温度が $T = T_0 + \delta T$ の場合

$$\tau_E = \tau_{E0} \left(1 - \alpha \frac{\delta T}{T_0}\right), \quad \langle\sigma v\rangle = \langle\sigma v\rangle_0 \left(1 + \beta \frac{\delta T}{T_0}\right)$$

である. したがって

$$\frac{d\delta T}{dt} = -\frac{T_0}{\tau_{E0}} \left(1 + (1 + \alpha) \frac{\delta T}{T_0}\right) + \frac{\eta Q_{\text{NF}}}{12} n \langle\sigma v\rangle_0 \left(1 + \beta \frac{\delta T}{T_0}\right)$$

1.2 核融合炉心プラズマ

$$\begin{aligned} &= -\frac{T_0}{\tau_{E0}}(1 + \alpha)\frac{\delta T}{T_0} + \frac{\eta Q_{\text{NF}}}{12}n\langle\sigma v\rangle_0\beta\frac{\delta T}{T_0} \\ &= (-1 - \alpha + \beta)\frac{1}{\tau_{E0}}\delta T. \end{aligned}$$

安定化条件は

$$-1 - \alpha + \beta < 0 \quad \alpha > \beta - 1$$

となる。

第2章 荷電粒子の軌道および磁場配位

2.1 荷電粒子の軌道

2.1.1 サイクロトロン運動

電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} において質量 m , 電荷 q を持つ粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

で与えられる. z 方向に一様な磁場があつて電場が0の場合, 運動方程式は $\dot{\mathbf{v}} = (qB/m)(\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ ($\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$) となるので, この解は

$$v_x = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \delta),$$

$$v_y = v_{\perp} \cos(\Omega t + \delta),$$

$$v_z = v_{z0},$$

$$\Omega = -\frac{qB}{m} \quad (2.2)$$

となり (δ は初期位相), Ω の角速度で磁力線の周りを旋回する運動をする (図 2.1). この運動をラーマー運動といい, Ω をサイクロトロン (角) 周波数という. 回転半径を ρ_{Ω} とすると遠心力は $mv_{\perp}^2/\rho_{\Omega}$ であり, ローレンツ力は $qv_{\perp}B$ であるから両者が釣り合わなければならない. すなわち

$$\rho_{\Omega} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (2.3)$$

となる. この回転半径をラーマー半径という. 電子は右回り ($\Omega > 0$), イオンは左回りである (図 2.1 参照). $B = 1 \text{ T}, T = 100 \text{ eV}$ のとき, ラーマー半径およびサイクロトロン周波数は表 2.1 にそれぞれの値が示される.

表 2.1 電子およびイオンの質量, 熱速度, ラーマー半径およびサイクロトロン周波数.

$B=1\text{T}, T=100\text{eV}$	電子	プロトン	
質量 (Kg)	$9.1093897(54) \times 10^{-31}$	$1.6726231(10) \times 10^{-27}$	
v_T	$4.2 \times 10^6 \text{ m/s}$	$9.8 \times 10^4 \text{ m/s}$	$v_T = (T/m)^{1/2}$ は熱速度, ρ_{Ω} は
ρ_{Ω}	$23.8 \mu\text{m}$	1.0 mm	
Ω	$1.76 \times 10^{11} / \text{s}$	$-9.58 \times 10^7 / \text{s}$	
$\Omega/2\pi$	28 GHz	-15.2 MHz	

ラーマー半径, Ω と $\Omega/2\pi$ はそれぞれサイクロトロン角周波数, サイクロトロン周波数である.

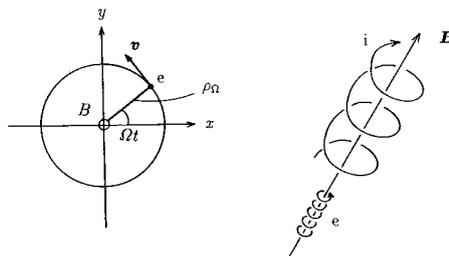


図 2.1 荷電粒子のラーマー運動.

2.1 荷電粒子の軌道



図 2.2 電場および加速度による案内中心のドリフト運動 (概念図).

2.1.2 案内中心のドリフト速度, 磁気モーメント

一様磁場に垂直で一様な電場 \mathbf{E} が加わる時は,

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}_E + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B} \quad (2.4)$$

によって定義される \mathbf{u} and \mathbf{u}_E を導入することによって, 運動方程式 (2.1) は

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

に還元される. したがって荷電粒子の運動はラーマー運動と, 電場による案内中心のドリフト運動 \mathbf{u}_E との重ね合わせとなる. 電場によるイオンと電子のドリフト運動は互いに同じ方向, 同じ速度である (図 2.2). 加速度 \mathbf{g} が加わった場合は, 力 $m\mathbf{g}$ が $q\mathbf{E}$ と対応するので

$$\mathbf{u}_g = \frac{m}{qB}(\mathbf{g} \times \mathbf{b}) = -\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{b}}{\Omega} \quad (2.5)$$

のドリフト速度で案内中心がドリフトする. 加速度によるイオンと電子のドリフト速度は互いに反対方向でイオンの方が速い (図 2.2). 磁場や電場が時間的, 空間的に緩やかに変化している場合は ($|\omega/\Omega| \ll 1, \rho_\Omega/R \ll 1$), 上記のドリフト運動の表式はそのまま成立する. ただし磁力線が曲がっているので磁力線に沿って速度 v_{\parallel} で運動する粒子には遠心力が加わる (図 2.3). 磁力線の曲率半径を R とし, その曲率中心 O から磁力線に向かう単位ベクトルを \mathbf{n} とすると, 遠心加速度は

$$\mathbf{g}_{\text{curv}} = \frac{v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n}$$

となる.

更に不均一磁場中におけるラーマー運動の効果を考慮すると, この節の後の部分で記述してあるように,

$$\mathbf{g}_{\nabla B} = -\frac{v_{\perp}^2/2}{B} \nabla B$$

の加速度を受ける. したがって, 不均一磁場中による案内中心のドリフト速度 \mathbf{u}_G は

$$\mathbf{u}_G = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n} - \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\nabla B}{B} \right) \times \mathbf{b} \quad (2.6)$$

で与えられる. 第 1 項を曲率ドリフト, 第 2 項を 磁場勾配による (∇B) ドリフトという. $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ であるから, ベクトル公式により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2B} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial l} (B\mathbf{b}) + \mathbf{b} \times \mu_0 \mathbf{j} \\ &= \frac{\partial B}{\partial l} \mathbf{b} + B \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} - \mu_0 \frac{\nabla p}{B} = \frac{\partial B}{\partial l} \mathbf{b} - B \frac{\mathbf{n}}{R} - \mu_0 \frac{\nabla p}{B} \end{aligned}$$

となる. ここで p はプラズマ圧力であり, $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ となる (4.1.1 節, 11.2.1 節参照). また次の関係

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} = -\frac{\mathbf{n}}{R}$$

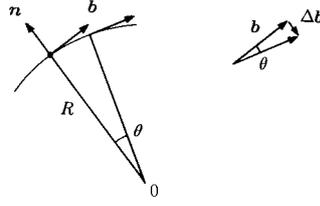


図 2.3 磁力線の曲率半径.

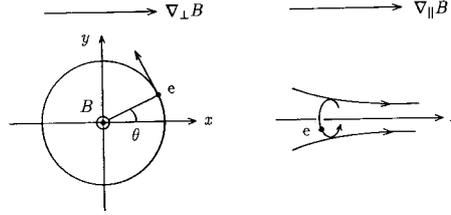


図 2.4 不均一磁場中における旋回運動.

の関係を用いた (図 2.3 参照). ただし l は磁力線に沿う長さである. これより

$$\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{R} = - \left(\frac{\nabla B}{B} + \mu_0 \frac{\nabla p}{B^2} \right) \times \mathbf{b}$$

の関係がえられる. ∇p が $\nabla B^2/(2\mu_0)$ に比べて十分小さい場合は

$$\mathbf{u}_G = - \frac{1}{\Omega} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{R} (\mathbf{n} \times \mathbf{b})$$

となる. 磁力線に平行方向の案内中心の運動は

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel} + mg_{\parallel} - \frac{mv_{\perp}^2/2}{B} \nabla_{\parallel} B \quad (2.7)$$

となる.

旋回運動をしている荷電粒子に対して, 不均一磁場の及ぼす影響を考えよう. ローレンツ力 $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の x 成分および案内中心付近の磁場の大きさ B は

$$F_{Lx} = qv_y B = -|q|v_{\perp} \cos \theta B$$

$$B = B_0 + \frac{\partial B}{\partial x} \rho_{\Omega} \cos \theta + \frac{\partial B}{\partial y} \rho_{\Omega} \sin \theta$$

で与えられる. ローレンツ力の x 成分の時間平均は $\langle F_{Lx} \rangle = \frac{1}{2} (\partial B / \partial x) (-|q|) v_{\perp} \rho_{\Omega}$ であり, y 成分の平均も同様に与えられる. したがって

$$\langle \mathbf{F}_L \rangle_{\perp} = - \frac{mv_{\perp}^2/2}{B} \nabla_{\perp} B$$

が導かれる.

次にローレンツ力の z 成分の平均について考えよう. 案内中心付近における $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は $B_r/r + \partial B_r / \partial r + \partial B_z / \partial z = 0$ となるので (図 2.4 参照),

$$\langle F_{Lz} \rangle = - \langle qv_{\theta} B_r \rangle = |q|v_{\perp} \rho_{\Omega} \frac{\partial B_r}{\partial r} = - \frac{mv_{\perp}^2/2}{B} \frac{\partial B}{\partial z}$$

($r \sim \rho_{\Omega}$ はラーマー半径程度で小さいから $B_r/r \approx \partial B_r / \partial r$). かくして $\mathbf{g}_{\nabla B}$ の表現に必要な式が導かれた.

2.1 荷電粒子の軌道

S の面積を囲むループに電流 I が流れている場合, その電流ループは $\mu_m = IS$ の磁気モーメントをもつ. ラーマー運動をしている場合, $I = q\Omega/2\pi, S = \pi\rho_\Omega^2$ ゆえ, ラーマー運動している荷電粒子は

$$\mu_m = \frac{q\Omega}{2\pi}\pi\rho_\Omega^2 = \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

の磁気モーメントを持っている. この物理量は断熱不変量である.

荷電粒子がラーマー運動の1周期の間に磁場がほんのわずかしき変化しない場合, すなわち $|\partial B/\partial t| \ll |\Omega B|$ のとき磁気モーメントが保存されることを示そう. 運動方程式と磁場に垂直な速度成分 v_\perp とのスカラー積をとると

$$mv_\perp \cdot \frac{dv_\perp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_\perp^2}{2} \right) = q(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp)$$

となる. ラーマー運動の1周期 $2\pi/|\Omega|$ の間に運動エネルギー $W_\perp = mv_\perp^2/2$ の変化する量 ΔW_\perp は

$$\Delta W_\perp = q \int (\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp) dt = q \oint \mathbf{E}_\perp \cdot d\mathbf{s} = q \int (\nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS$$

である. ただし $\oint d\mathbf{s}$ は荷電粒子のラーマー運動の軌道に沿って1周する積分である. また $\int dS$ はラーマー軌道で囲まれた面積分である. $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ であるから, ΔW_\perp は

$$\Delta W_\perp = -q \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = |q|\pi\rho_\Omega^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

となる. ラーマー運動の1周期の間の磁場の変化量は $\Delta B = (\partial B/\partial t)(2\pi/|\Omega|)$ であるから,

$$\Delta W_\perp = \frac{mv_\perp^2}{2} \frac{\Delta B}{B} = W_\perp \frac{\Delta B}{B}$$

となり

$$\mu_m = \frac{W_\perp}{B} = \frac{mv_\perp^2/2}{B} = \text{const.} \quad (2.8)$$

となる. 力学系が周期的に時間変化するとき, 正準変数 p, q による作用積分 $\int pdq$ は一般的に断熱不変である. ラーマー運動の作用積分は $J_\perp = (-m\rho_\Omega\Omega)2\pi\rho_\Omega = -(4\pi m/q)\mu_m$ となる. J_\perp を横の断熱不変量と呼ぶ.

磁気モーメントは一定に保たれるので, B を時間的に緩やか大きくしていくと, mv_\perp^2 が増大し, 荷電粒子が加熱される. このような加熱法を断熱圧縮という.

2.1.3 偏極ドリフト

z 方向に一様定常な磁場 \mathbf{B} があり, x 方向に時間とともに変化する電場 $\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t)\hat{x}$ がある場合を考える. 荷電粒子の運動方程式 (2.1) は

$$\ddot{v}_x = \frac{q}{m}\dot{E}_x + \frac{q}{m}\dot{v}_y B = i\omega\Omega \frac{E_x}{B} - \Omega^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{q}{m}\dot{v}_x B = -\Omega^2 \frac{E_x}{B} - \Omega^2 v_y$$

となる. ここで

$$v_E \equiv -\frac{E_x}{B}, \quad v_p = i\frac{\omega}{\Omega} \frac{E_x}{B}$$

を定義すると, 運動方程式はつぎのように還元される.

$$\ddot{v}_x = -\Omega^2(v_x - v_p), \quad \ddot{v}_y = -\Omega^2(v_y - v_E).$$

$\Omega^2 \gg \omega^2$ の場合, その解は

$$v_x = -iv_\perp \exp(-i\Omega t) + v_p, \quad v_y = v_\perp \exp(-i\Omega t) + v_E$$

である。この解は、案内中心の運動が通常の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト (ただし時間的にゆっくり振動する) と電場 \mathbf{E} と同じ方向にドリフトする新しい項からなっていることを示している。この新しい項を分極ドリフトといい、より一般的に表すとつぎのようになる。

$$\mathbf{v}_p = -\frac{1}{\Omega B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

この \mathbf{v}_p はイオンと電子とは向きが反対であるので、分極電流

$$\mathbf{j}_p = en_e(\mathbf{v}_{pi} - \mathbf{v}_{pe}) = \frac{n_e(m_i + m_e)}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\rho_m}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

が流れることになる。ここで ρ_m は質量密度である。

2.1.4 ポンデロモータティブフォース

電磁波 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ 中の電子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

で与えられる。ここで振幅 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ は波長の尺度ではゆっくり変化すると仮定する。また記号 $\alpha \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ を用いる。電磁波の磁場 \mathbf{B} は電場 \mathbf{E} を用いて次ように与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \hat{\mathbf{E}} \cos \alpha + \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} \sin \alpha,$$

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{E}}}{\omega} \sin \alpha + \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}}{\omega} \cos \alpha.$$

1 次のオーダーの近似においては、2 次の項 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は無視できる。そして

$$m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = -e\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t),$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{e\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0)}{m\omega} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t),$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0)}{m\omega^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t).$$

ここで \mathbf{r}_0 は初期における電子の位置を表す。 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ を \mathbf{r}_0 付近で展開すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) + (\mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}_0}$$

$$= \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) + (\mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}} \cos \alpha_0 - \hat{\mathbf{E}} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}) \sin \alpha_0$$

となる。ただし $\alpha_0 \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t$ 。

2 次のオーダーでは $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}$ の項を考慮しなければならない。

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= -e((\mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}} \cos \alpha_0 - \hat{\mathbf{E}} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}) \sin \alpha_0) \\ &\quad - e\mathbf{v}_1 \times \left(\nabla \times \hat{\mathbf{E}} \sin \alpha_0 + \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}}{\omega} \cos \alpha_0 \right) \\ &= -\frac{e^2}{m\omega^2} \left((\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}} \cos^2 \alpha_0 + \hat{\mathbf{E}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}} \sin^2 \alpha_0 \right) \\ &\quad - \frac{e^2}{m\omega^2} \left(-(\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} \right) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \end{aligned}$$

2.2 クーロン衝突, 中性粒子入射

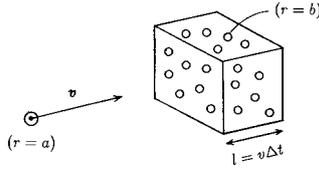


図 2.5 半径 $r = a$ の球が $r = b$ の球と衝突するときの確率.

$$= -\frac{e^2}{2m\omega^2} \left(\nabla \frac{\hat{\mathbf{E}}^2}{2} (1 - \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)) + 2(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}} \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) \right. \\ \left. + \mathbf{k} \hat{\mathbf{E}}^2 \sin 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) - 2(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \hat{\mathbf{E}} \sin 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) \right). \quad (2.10)$$

ここで公式 $\hat{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = \nabla(\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}})/2 - (\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{E}} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}) = \mathbf{k} \hat{\mathbf{E}}^2 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \hat{\mathbf{E}}$ を用いた. 横波の電磁波の場合 $(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{E}}$ および $(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \hat{\mathbf{E}}$ は無視でき, ローレンツ力による項が主になる. $m d\mathbf{v}_2/dt$ の時間平均は

$$m \left\langle \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla \hat{\mathbf{E}}^2$$

に還元される. この項は一ヶの電子に対する実効的非線形力である. 単位体積あたりのプラズマに対する非線形力は

$$nm \left\langle \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right\rangle = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \frac{\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2}{4} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \frac{\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle}{2} \quad (2.11)$$

である. ω_p は電子プラズマ周波数である. この力をポンドラモーティブフォースという. この力は電磁波(レーザー)のビームの外へプラズマを押し出す. 電子密度は減り, 電子プラズマ周波数 Π_e が小さくなり, 誘電率 $\epsilon = (1 - \Pi_e^2/\omega^2)$ (11.1 節参照) はビームの内部では外部より大きくなる. すなわち屈折率 $N = \epsilon^{1/2}$ がビームの内部で外より大きくなる. したがってプラズマは光ファイバーと同じ役割をして, ビームを小さい径に絞る. 慣性閉じ込め実験においては, ペタワット (Peta Watt, 10^{15} W) 級の非常に強力なレーザーのポンドラモーティブフォースによって, 超高密度の燃料ペレットに孔をくりぬき, (2.10) の振動項により中心部の電子を加熱することが観測されている. このような概念を高速点火 (fast ignition) という [2.1].

2.2 クーロン衝突, 中性粒子入射

2.2.1 クーロン衝突

これまで考察した荷電粒子の運動においては荷電粒子間の局所的クーロン力による衝突の効果を考慮していなかったが, この節においてはこのクーロン衝突について考察しよう. まず簡単なモデルから出発する. 半径 b の球が密度 n で満たされているところへ半径 a の球が速度 v で飛び込んだとする (図 2.5). 二つの球の中心距離が $a+b$ 以内になると衝突するので, この球の衝突断面積 σ は $\sigma = \pi(a+b)^2$ となる. 球 a が δt の間に $l = v\delta t$ の距離だけ飛行する. したがってその間に球 b と衝突する確率は

$$nl\sigma = n\sigma v\delta t$$

である. nl は入射単位面積当り衝突可能な球 b の数であり, $nl\sigma$ は入射単位面積当り衝突可能な全断面積になるからである. したがって衝突する確率が 1 に成る時間, すなわち衝突時間 τ_{coll} は

$$\tau_{\text{coll}} = (n\sigma v)^{-1}$$

である. この例では衝突断面積 σ は速度に無関係であるが一般には σ は速度 v に依存する. つぎに電子が電荷 Ze をもつイオンのクーロン引力によって強く曲げられる場合の衝突断面積を求めてみよう (図 2.6 参照). このような衝突が起こるのは最近接距離 b におけるポテンシャル・エネルギーが運動エネルギーとほぼ等しい場合である.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{m_e v_e^2}{2}.$$

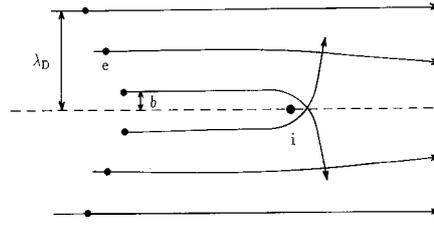


図 2.6 電子 → イオンのクーロン衝突.

したがって強く曲げられる衝突断面積は $\sigma = \pi b^2$ である. そしてこのような過程の衝突時間 τ_{coll} の逆数は

$$\frac{1}{\tau_{\text{coll}}} = n_i \sigma v_e = n_i v_e \pi b^2 = \frac{n_i \pi (Z e^2)^2 v_e}{(4 \pi \epsilon_0 m_e v_e^2 / 2)^2} = \frac{Z^2 e^4 n_i}{4 \pi \epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}$$

である.

クーロン力は長距離相互作用であるので比較的速く離れて走るテスト粒子に対しても少し軌道を曲げる. そして 1.1 節で述べたようにある 1 個の場の粒子のクーロン場はデバイ長 λ_D 内では遮蔽されない. デバイ長半径内の粒子数は多く, それらのクーロン力による小散乱角衝突も, 回数を重ねると大きな効果となる. これらの衝突の効果を含めて考えるとクーロン衝突面積はいわゆるクーロン対数

$$\ln \Lambda \simeq \ln \left(\frac{2 \lambda_D}{b} \right) \simeq \int_{b/2}^{\lambda_D} \frac{1}{r} dr \simeq 15 \sim 20$$

の因子だけ大きくなる. 初速度に平行な運動量成分 p_{\parallel} の時間変化は衝突時間 $\tau_{\text{ei}\parallel}$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= -\frac{p_{\parallel}}{\tau_{\text{ei}\parallel}}, \\ \frac{1}{\tau_{\text{ei}\parallel}} &= \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{4 \pi \epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

で与えられる [2.2], [2.3] の 4 章. ここで $\tau_{\text{ei}\parallel}$ は電子のイオンによる減速時間を表す.

電荷 q , 質量 m , 速度 v のテスト粒子が, 電荷 q^* , 質量 m^* , 速度 $v_T^* = (\kappa T^* / m^*)^{1/2}$ の場の粒子と衝突する場合, テスト粒子の衝突時間は, $v > v_T^*$ の仮定のもとに

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{4 \pi \epsilon_0^2 m m_{\text{r}} v^3} = \left(\frac{q q^*}{\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{n^* \ln \Lambda}{4 \pi (m_{\text{r}} / m) v^3} \quad (2.13)$$

で与えられる. ここで m_{r} は換算質量 $m_{\text{r}} = m m^* / (m + m^*)$ である. 速度の平均 $(m/2)v^2 = (3/2)\kappa T$ を代入すると, $1/\tau_{\parallel}$ は

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{3^{1/2} 12 \pi \epsilon_0^2 (m_{\text{r}} / m^{1/2}) T^{3/2}} \quad (2.14)$$

となる. 衝突時間の逆数を衝突周波数という. 衝突時間の間に走る距離を自由行路長という ($\lambda = 3^{1/2} v_T \tau$).

電子がイオンと衝突する場合は

$$\frac{1}{\tau_{\text{ei}\parallel}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{3^{1/2} 12 \pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T^{3/2}}. \quad (2.15)$$

この電子イオン衝突時間 $\tau_{\text{ei}\parallel}$ の値は, 次に示す Spitzer の結果 [2.4] の 1.4 倍である.

$$\frac{1}{\tau_{\text{ei}\parallel} \text{ Spitzer}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{9.3 \times 10 \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}. \quad (2.16)$$

2.2 クーロン衝突, 中性粒子入射

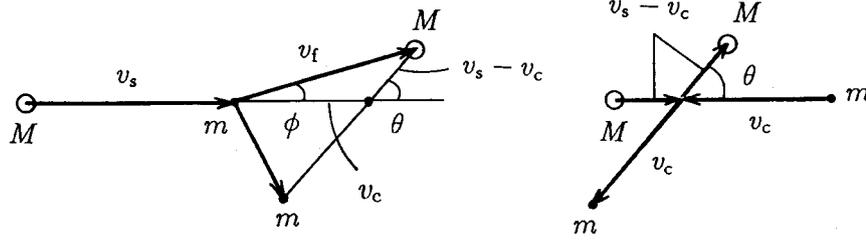


図 2.7 実験室系 (a) と重心系 (b) における質量 M のテスト粒子と質量 m の場の粒子との弾性衝突.

電荷数 Z 質量 m_i のイオンが, 同じイオンと衝突するときの衝突周波数は

$$\frac{1}{\tau_{ii\parallel}} = \frac{Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}} \quad (2.17)$$

となる. 電子-電子クーロン衝突周波数は, $\tau_{ii\parallel}$ の公式において $m_i \rightarrow m_e$, $Z \rightarrow 1$ として

$$\frac{1}{\tau_{ee\parallel}} = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \quad (2.18)$$

である.

しかしながらイオンが電子とクーロン衝突をする場合は $v_i > v_T^*$ の仮定が成り立たないので, 扱いがやや複雑になる. さて観測者が静止している実験室系において質量 M のテスト粒子が v_s の速度で, 静止している質量 m の場の粒子に衝突する場合を考える. これを二つの粒子の重心が静止している重心系でみると M 粒子は $v_s - v_c = mv_s/(M+m)$ で走り, m 粒子は $v_c = -Mv_s/(M+m)$ の速度で走る. そして弾性衝突後は, 全運動量および全運動エネルギーは保存されるので, M 粒子, m 粒子はそれぞれの速度は変えず, 角度 θ だけ向きを変える (図 2.7 参照). 実験室系における衝突後の M 粒子の速度を v_f , 散乱角を ϕ とすると

$$v_f^2 = (v_s - v_c)^2 + v_c^2 + 2(v_s - v_c)v_c \cos \theta = v_s^2 \frac{(M^2 + 2Mm \cos \theta + m^2)}{(M+m)^2},$$

$$\sin \phi = \frac{m \sin \theta}{(M^2 + 2Mm \cos \theta + m^2)^{1/2}}$$

である. 衝突前のテスト粒子の運動量およびエネルギーをそれぞれ p_s, E_s , 衝突後の量を p_f ,

$$\frac{\Delta E}{E_s} \equiv \frac{E_f - E_s}{E_s} = -\frac{2Mm}{(M+m)^2} (1 - \cos \theta)$$

となる. θ で平均をとると, $m/M \ll 1$ のとき

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_s} \right\rangle \simeq -\frac{2m}{M}, \quad \left\langle \frac{\Delta p_{\parallel}}{p_s} \right\rangle \simeq -\frac{m}{M}$$

である. イオンが電子とクーロン衝突する場合の衝突時間の逆数は, 電子がイオンとクーロン衝突する場合に比べておよそ m_e/m_i 倍になる. そして

$$\frac{1}{\tau_{ie\parallel}} = \frac{m_e}{m_i} \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \quad (2.19)$$

が導かれる. [2.2], ch.4 of [2.3] テスト粒子の運動量の平行成分, 垂直成分をそれぞれ p_{\parallel}, p_{\perp} とし, 運動エネルギーを E とすると

$$E = \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{2m},$$

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = 2m \frac{dE}{dt} - 2p_{\parallel} \frac{dp_{\parallel}}{dt}$$

である。運動量の初速度に対する垂直方向の速度拡散時間 τ_{\perp} およびエネルギー緩和時間 τ^{ϵ} をそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}^2}{dt} &\equiv \frac{p_{\perp}^2}{\tau_{\perp}}, \\ \frac{dE}{dt} &\equiv -\frac{E}{\tau^{\epsilon}} \end{aligned}$$

によって定義する。そして $1/\tau_{\perp}$ と $1/\tau^{\epsilon}$ は

$$\frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 v (mv)^2} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\tau^{\epsilon}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m^* v (mv^2/2)} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m m^* v^3} \quad (2.21)$$

によって与えられる [2.2].

電子がイオンとクーロン衝突する場合は

$$\frac{1}{\tau_{ei\perp}} \simeq \frac{2}{\tau_{ei\parallel}}, \quad \frac{1}{\tau_{ei}^{\epsilon}} \simeq \frac{m_e}{m_i} \frac{2}{\tau_{ei\parallel}}. \quad (2.22)$$

電子と電子、およびイオンとイオンがクーロン衝突する場合は

$$\frac{1}{\tau_{ee\perp}} \simeq \frac{1}{\tau_{ee\parallel}} = \frac{e^4 n_e \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} = \frac{\ln \Lambda}{32.6} \frac{\Pi_e}{n_e \lambda_D^3} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{\epsilon}} \simeq \frac{1}{\tau_{ee\parallel}} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\tau_{ii\perp}} \simeq \frac{1}{\tau_{ii\parallel}} = \frac{Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi\epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}} \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{\tau_{ii}^{\epsilon}} \simeq \frac{1}{\tau_{ii\parallel}}. \quad (2.26)$$

イオンが電子とクーロン衝突する場合は [2.2]

$$\frac{1}{\tau_{ie\perp}} \simeq \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} E_i T_e^{1/2}} \frac{m_e}{m_i}, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\tau_{ie}^{\epsilon}} \simeq \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \frac{4}{3(2\pi)^{1/2}} \frac{m_e}{m_i} \simeq \frac{1}{\tau_{ie\parallel}} \simeq \frac{m_e}{m_i} \frac{2.77}{\tau_{ei\parallel}} \quad (2.28)$$

である。ここで $E_i = (3/2)T_i$ はイオンの運動エネルギーである。

2.2.2 中性粒子入射

プラズマの外側から高速の中性粒子ビームを入射すると電氣的に中性であるため磁力線を横切ってプラズマ中に入る。このビームはプラズマ中では電子による衝突電離、イオンとの荷電交換によってイオン化され、質量 m_b 、電荷 $Z_b e$ (Z_b はビームイオンのイオン電荷数)、エネルギー E_b のイオンビームとなる。高速イオンは磁力線に沿ってラーマー運動をしながらプラズマ中のイオン ($m_i, Z_i e$) および電子 ($m_e, -e$) とのクーロン衝突をしてプラズマを加熱し、高速イオンのエネルギーは減少する。このような加熱方法を高速中性粒子入射加熱という。ビームイオンの速度 v_b がプラズマの電子の熱速度よりも小さく ($< \sim 1/3$)、イオンの熱速度より大きい場合 ($> \sim 2$) は、高速イオンのエネルギー減衰率すなわちプラズマの加熱率は [2.5]

$$\frac{dE_b}{dt} = -\frac{E_b}{\tau_{bi}^{\epsilon}} - \frac{E_b}{\tau_{be}^{\epsilon}}, \quad (2.29)$$

2.2 クーロン衝突, 中性粒子入射

$$\frac{1}{\tau_{bi}^e} = \frac{(Z_b e)^2 (Z_i e)^2 \ln \Lambda n_i}{2\pi\epsilon_0^2 m_i m_b v_b^3}$$

そして

$$\frac{dE_b}{dt} = -\frac{Z_b^2 e^4 \ln \Lambda n_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v_b} \left(\sum_i \frac{m_e n_i Z_i^2}{m_i n_e} + \frac{4}{3\pi^{1/2}} \left(\frac{m_e E_b}{m_b T_e} \right)^{3/2} \right) \quad (2.30)$$

である. 右辺第1項はビームとイオン衝突による項で, 第2項はビームと電子の衝突による項である. プラズマ中の電子とイオンを, 同じ割合で加熱する高速イオンのエネルギー E_{cr} は, 第1項と第2項を等しいとにおいて

$$\frac{m v_{cr}^2}{2} = E_{cr} = 14.8 T_e A_b \left(\frac{1}{n_e} \sum_i \frac{n_i Z_i^2}{A_i} \right)^{2/3} \quad (2.31)$$

で与えられる. ただし A_b, A_i は高速イオンビームおよびプラズマ中イオンの原子量である. 高速イオンのエネルギーが E_{cr} より大きい場合は電子の加熱により多く寄与することになる. イオンビームの減速時間は

$$\tau_{\text{slowdown}} = \int_{E_{cr}}^{E_b} \frac{-dE_b}{(dE_b/dt)} = \frac{\tau_{be}^e}{1.5} \ln \left(1 + \left(\frac{E}{E_{cr}} \right)^{3/2} \right),$$

$$\frac{1}{\tau_{be}^e} = \frac{Z^2 n_e e^4 \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \frac{m_e}{m_b} \quad (2.32)$$

となる. τ_{be}^e はビームイオンと電子のエネルギー緩和時間である.

2.2.3 遁走電子, 電気抵抗

プラズマに一樣な電場 \mathbf{E} が加わったとき, 電子の運動は電場による加速を受け, 電子およびイオンとのクーロン衝突による減速を受ける. ここでは簡単のため電子とのクーロン衝突のみを考えると運動方程式はつぎのようになる.

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{1}{\tau_{ee}(v)} m_e \mathbf{v},$$

$$\frac{1}{\tau_{ee}} = n_e \sigma v = \frac{e^4 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v^3}.$$

減速項の大きさは速度と共に減少するので, 次式であたえられる値 v_{cr} の速度において加速項の大きさと等しくなる.

$$\frac{m_e v_{cr}^2}{2e} = \frac{e^2 n \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 E}. \quad (2.33)$$

したがって $v > v_{cr}$ では加速項の方が大きくなり, ますます速度が大きくなる. このような電子を遁走電子という. またある与えられた速度の電子が遁走電子になる電場の値をドライサ電場という. もし $\ln \Lambda = 20$ とすると

$$\frac{m_e v_{cr}^2}{2e} = 5 \times 10^{-16} \frac{n}{E}$$

をえる. ただし単位は SI 単位である. $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}, E = 1 \text{ V/m}$ とすると 5 keV 以上のエネルギーの電子は遁走電子になる.

プラズマにドライサ電場以下の電場を加えると, 電子が電場で加速されイオンと衝突して, 電子の速度は平衡値に達する. すなわち

$$\frac{m_e (v_e - v_i)}{\tau_{ei}} = -eE.$$

したがって電場によって誘起される電流密度 j は

$$j = -en_e(v_e - v_i) = \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e} E$$

で与えられる。比電気抵抗率は、 $\eta j = E$ と比較することにより

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \quad (2.34)$$

をえる。スピッツァーのクーロン衝突周波数 (2.16) を用いると、スピッツァーの比抵抗率 η_{spitzer} は

$$\begin{aligned} \eta_{\text{spitzer}} &= \frac{m_e \nu_{ei|\text{spitzer}}}{n_e e^2} = \frac{(m_e)^{1/2} Z^2 (n_i/n_e) e^2 \ln \Lambda}{9.3 \times 10 \epsilon_0^2} (T_e)^{-3/2} \\ &= 5.2 \times 10^{-5} Z \ln \Lambda \left(\frac{T_e}{e} \right)^{-3/2} (\Omega\text{m}) \end{aligned}$$

で与えられる [2.4]. $T_e = 1 \text{ keV}$, $Z = 1$ のとき, $\eta = 3.3 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ となり, 銅の比抵抗 (20°C) $1.8 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ より若干大きい. プラズマに電流を流すと単位体積, 単位時間あたりのエネルギー ηj^2 が電子の加熱に寄与することになる. この電子加熱機構をオーム加熱という.

2.3 プラズマ現象の時間および空間スケール

これまでプラズマの諸特性について述べてきたが, 様々の特徴的な時間および空間スケールが現れてきた. 時間スケールは

- 電子プラズマ周波数に対応する周期 $2\pi/\Pi_e$
- 電子サイクロトロン周期 $2\pi/\Omega_e$
- イオン・サイクロトロン周期 $2\pi/|\Omega_i|$
- 電子・イオン衝突時間 τ_{ei}
- イオン・イオン衝突時間 τ_{ii}
- 電子・イオン温度緩和時間 τ_{ei}^e
- アルフベン通過時間 $\tau_H = L/v_A$
- 抵抗拡散時間 $\tau_R = \mu_0 L^2/\eta$

である. 磁場の擾乱の伝播速度であるアルフベン速度 v_A は $v_A^2 = B^2/(2\mu_0\rho_m)$ (ρ_m は質量密度) で与えられる (12.4.1 節参照). L はプラズマの典型的な大きさである. また抵抗拡散時間は電気比抵抗率 η の媒質で電場が拡散する時間スケールで $\tau_R = \mu_0 L^2/\eta$ で与えられる (第 9 章).

空間スケールは

- デバイ長 λ_D
- 電子ラーマー半径 ρ_{Ω_e}
- イオン・ラーマー半径 ρ_{Ω_i}
- 電子-イオン自由行路長 λ_{ei}
- プラズマの大きさ L

である.

空間スケールと時間スケールとの間には

$$\lambda_D \Pi_e = v_{Te}, \quad \rho_{\Omega_e} \Omega_e = v_{Te}, \quad \rho_{\Omega_i} |\Omega_i| = v_{Ti},$$

$$\lambda_{ei}/\tau_{ei} \simeq 3^{1/2} v_{Te}, \quad \lambda_{ii}/\tau_{ii} \simeq 3^{1/2} v_{Ti}, \quad L/\tau_A = v_A$$

などの関係がある. ただし v_{Te} , v_{Ti} はそれぞれ電子およびイオンの熱速度

$$v_{Te}^2 = T_e/m_e, \quad v_{Ti}^2 = T_i/m_i$$

である. また案内中心のドリフト速度の大きさの程度は

$$v_{\text{drift}} \sim T/eBL = v_T(\rho_{\Omega}/L)$$

である.

典型的炉心重水素プラズマのパラメーター $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $T_e = T_i = 10 \text{ keV}$, $B = 5 \text{ T}$, $L = 1 \text{ m}$ を例にとると

2.4 2.4 磁気ミラー

表 2.2 プラズマパラメーターの式 (SI 単位).

$$\begin{aligned}
\Pi_e &= (n_e e^2 / m_e \epsilon_0)^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} (n_{e20})^{1/2} \\
\Omega_e &= eB / m_e = 1.76 \times 10^{11} B \\
|\Omega_i| &= ZeB / m_i = 9.58 \times 10^7 (Z/A) B \\
\tau_A^{-1} &= v_A / a = 2.18 \times 10^6 B / [(An_{i20})^{1/2} a] \\
\nu_{ei\perp} &\equiv 1 / \tau_{ei\perp} = Z^2 n_i e^4 \ln \Lambda / (3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}) \\
&= 8.41 \times 10^9 Z^2 (T_e/e)^{-3/2} n_{i20} \\
\nu_{ii\perp} &\equiv 1 / \tau_{ii\perp} = Z^4 n_i e^4 \ln \Lambda / (3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}) \\
&= 2.0 \times 10^8 \frac{Z^4}{A^{1/2}} (T_i/e)^{-3/2} n_{i20} \\
\tau_R^{-1} &= \eta / (\mu_0 a^2) = 41.4 Z \ln \Lambda (T_e/e)^{-3/2} a^{-2} \\
\nu_{ei\parallel} &\equiv 1 / \tau_{ei\parallel} = \nu_{ei\perp} / 2, \quad \nu_{ei\parallel \text{spitzer}} \approx 0.7 \nu_{ei\parallel} \\
\lambda_D &= (\epsilon_0 T / n_e e^2)^{1/2} = 7.45 \times 10^{-7} (T_e/e)^{1/2} n_{e20}^{-1/2} \quad \ln \Lambda = 20 \text{ とした. } T/e \text{ は eV} \\
\rho_{\Omega e} &= v_{Te} / \Omega_e = 2.38 \times 10^{-6} (T_e/e)^{1/2} (1/B) \\
\rho_{\Omega i} &= v_{Ti} / \Omega_i = 1.02 \times 10^{-4} (AT_i/e)^{1/2} (1/ZB) \\
\lambda_{ei} &= (3T_e/m_e)^{1/2} \tau_{ei\parallel} = 1.73 \times 10^{-4} (T_e/e)^2 (n_{e20})^{-1} \\
v_A &= (B^2 / \mu_0 n_i m_i)^{1/2} = 2.18 \times 10^6 B / (An_{i20})^{1/2} \\
v_{Te} &= (T_e/m_e)^{1/2} = 4.19 \times 10^5 (T_e/e)^{1/2} \\
v_{Ti} &= (T_i/m_i)^{1/2} = 9.79 \times 10^3 (T_i/Ae)^{1/2} \\
\eta &= m_e \nu_{ei\parallel \text{spitzer}} / n_e e^2 = 5.2 \times 10^{-5} Z \ln \Lambda (T_e/e)^{-3/2} \text{ (}\Omega\text{m)} \\
&\quad (Zn_i = n_e \text{ の場合)} \\
(v_{Ti}/v_A)^2 &= \beta_i/2, \quad (v_A/c)^2 = (\lambda_D/\rho_{\Omega e})^2 (m_e n_e / m_i n_i) \\
(\Pi_e/\nu_{ei\perp}) &= (32.6/Z \ln \Lambda) n_e \lambda_D^3, \quad \lambda_D \Pi_e = v_{Te} \quad S_R \equiv \tau_R/\tau_A
\end{aligned}$$

単位, $n_{20} \equiv n(\text{m}^3)/10^{20}$.

$$\begin{aligned}
2\pi/\Pi_e &= 11.1 \text{ ps} & \Pi_e/2\pi &= 89.8 \text{ GHz} \\
2\pi/\Omega_e &= 7.1 \text{ ps} & \Omega_e/2\pi &= 140 \text{ GHz} \\
2\pi/|\Omega_i| &= 26 \text{ ns} & |\Omega_i|/2\pi &= 38 \text{ MHz} \\
\tau_A &= 0.13 \mu\text{s}, & \tau_{\perp ei} &= 0.12 \text{ ms}, & \tau_{\perp ii} &= 7.2 \text{ ms} \\
\tau_{ei}^e &= 0.3 \text{ s}, & \tau_R &= 1.2 \times 10^3 \text{ s.} \\
\lambda_D &= 74.5 \mu\text{m}, & \rho_{\Omega e} &= 47.6 \mu\text{m}, & \rho_{\Omega i} &= 2.88 \text{ mm} \\
\lambda_{ei} &= 8.6 \text{ km}, & \lambda_{ii} &= 8.6 \text{ km.}
\end{aligned}$$

時間および空間スケールは $\tau_R \Pi_e \sim 10^{14}$, $\lambda_{ei}/\lambda_D \sim 1.6 \times 10^8$ の広い範囲にわたっており, プラズマ現象の多様性と複雑さを示している. プラズマパラメーターの式を表 2.2 に示す.

2.4 磁気ミラー

図 2.8 に示すように, 磁場が中央部で弱く両端部で強い磁場配位を考えよう. 簡単のため定常磁場で電場は 0 とする. ローレンツ力は速度に対して直角に働くから荷電粒子に対して仕事をしない. したがって電場が 0 の時は運動エネルギーは保存される.

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = E = \text{const.} \quad (2.35)$$

ここで v_{\parallel} および v_{\perp} はそれぞれ磁場に平行および垂直な速度成分である. 磁気モーメントは保存されるから

$$v_{\parallel} = \pm \left(\frac{2}{m} E - v_{\perp}^2 \right)^{1/2} = \pm \left(v^2 - \frac{2}{m} \mu_m B \right)^{1/2}$$

が導かれる. 粒子が端に近づいて磁場が大きくなると v_{\parallel} は小さくなり, ついには 0 となり向きを変える. 磁力線方向には $-\mu_m \nabla_{\parallel} B$ の力が加わるので荷電粒子を反射する効果がある. このように両端の磁場を強くし, 磁力線を絞った磁場をミラー磁場 という. 両端の磁場の大きさと中心に

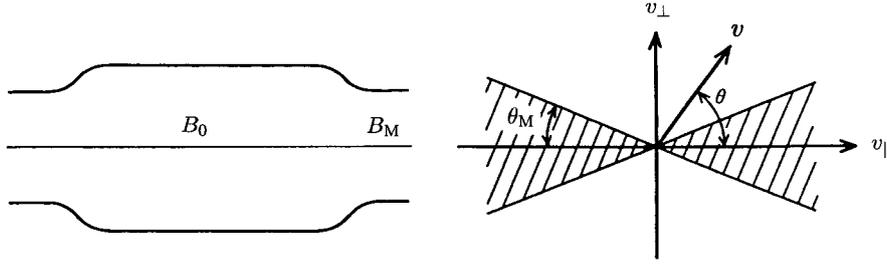


図 2.8 ミラー磁場および v_{\parallel} - v_{\perp} 空間におけるロス・コーン.

おける大きさとの比 R_M をミラー比という.

$$R_M = \frac{B_M}{B_0}.$$

ミラー磁場の中心における速度の平行成分, 垂直成分をそれぞれ $v_{\parallel 0}, v_{\perp 0}$ とする. 最大磁場 B_M の点における v_{\perp}^2 は μ_m 保存により

$$v_{\perp M}^2 = \frac{B_M}{B_0} v_{\perp 0}^2$$

で与えられる. この値は $v^2 = v_0^2$ より大きくなることはできない. したがって $v_{\perp M}^2 > v_0^2$ を満たすところでミラー磁場を通り抜けることができず, ($v_{\parallel M} = 0$ になるところで) 荷電粒子は反射され, ミラー磁場に捕捉される.

$$\left(\frac{v_{\perp 0}}{v_0}\right)^2 > \frac{B_0}{B_M} = \frac{1}{R_M} \equiv \sin^2 \theta_M. \quad (2.36)$$

$\sin \theta \equiv v_{\perp 0}/v_0$ が

$$\sin^2 \theta \leq \frac{1}{R_M}$$

の条件を満たす場合, この粒子はミラーに捕捉されず, 開口端から逃げ出す (端損失). v_{\parallel} - v_{\perp} 空間におけるこの領域をロス・コーン (損失錐) という (図 2.8 参照).

ミラー磁場に捕捉された粒子は磁力線に沿って往復運動を行う. この周期運動の第 2 の作用積分

$$J_{\parallel} = m \oint v_{\parallel} dl \quad (2.37)$$

も断熱不変量である. J_{\parallel} を縦の断熱不変量という. ミラー磁場の長さ l を短くしていくと, $J_{\parallel} = 2m\langle v_{\parallel} \rangle l$ が一定であるから $\langle v_{\parallel} \rangle$ が大きくなり加熱される. この機構をフェルミ加速という.

ミラー磁場の磁力線はミラー中央部では外に対して凸の曲率半径を持っている. ミラー中央部付近に捕捉された粒子の案内中心の軌道は磁力線に沿って往復運動をしながら曲率ドリフトによって θ 方向にもドリフトする. 案内中心の軌道が $z = 0$ 面と交差する点 (r, θ) の軌跡は $J_{\parallel}(r, \theta, \mu_m, E) = \text{const.}$ より求めることができる.

2.5 トーラス系

2.5.1 磁気面

磁力線はその座標を r とするとき

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{dl}{B} \quad (2.38)$$

2.5 トーラス系

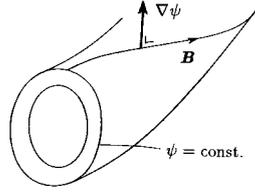


図 2.9 磁気面 $\psi = \text{const.}$ とその法線 $\nabla\psi$ と磁力線.

の方程式を満たす. ただし l は磁力線に沿った長さ ($dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$) である. 磁気面 $\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ は全ての磁力線がその面上に存在する面として定義されるので

$$(\nabla\psi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.39)$$

を満たす. すなわち $\nabla\psi(\mathbf{r})$ は磁気面に垂直なベクトルであり, \mathbf{B} と直交していなければならないからである (図 2.9 参照). 円柱座標系 (r, θ, z) を用いると, 磁場 \mathbf{B} は, ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \quad (2.40)$$

で与えられる. 系が軸対称 (回転対称ともいう) である場合には ($\partial/\partial\theta = 0$),

$$\psi(r, z) = rA_\theta(r, z) \quad (2.41)$$

は磁気面の条件 (2.39) を満たす. すなわち $B_r \partial(rA_\theta)/\partial r + B_\theta \cdot 0 + B_z \partial(rA_\theta)/\partial z = 0$. 系が移動対称である場合 ($\partial/\partial z = 0$) の磁気面は

$$\psi(r, \theta) = A_z(r, \theta) \quad (2.42)$$

で与えられ, 系がヘリカル対称である場合, すなわち ψ が r および $\theta - \alpha z$ のみの関数の場合の磁気面は

$$\psi(r, \theta - \alpha z) = A_z(r, \theta - \alpha z) + \alpha r A_\theta(r, \theta - \alpha z) \quad (2.43)$$

で与えられる. ここで α はヘリカルピッチパラメーターである.

2.5.2 ハミルトンの運動方程式

電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} において質量 m , 電荷 q をもつ荷電粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.44)$$

で与えられる. 第 2 項のローレンツ力は速度に対して直角であるから荷電粒子に対して仕事をしない. したがって運動エネルギーは

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = q \int_{t=t_0}^t \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

となる. 電場がない場合運動エネルギーは保存される. 一般座標 q_i ($i = 1, 2, 3$) を用いる場合はラグランジュの方程式を用いるのが便利である. 電磁場のスカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルをそれぞれ ϕ , \mathbf{A} とするとき, 荷電粒子のラグランジアンは

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{mv^2}{2} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi \quad (2.45)$$

で与えられる. ここで \dot{q}_i は q_i の時間微分である. ここで \mathbf{E} , \mathbf{B} と ϕ , \mathbf{A} との関係は以下の通りである.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

直交座標系および円筒座標系ではそれぞれ

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\phi,$$

$$L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + \dot{z}A_z) - q\phi$$

となる。そしてラグランジアン L の運動方程式は以下の通りである。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.46)$$

より一般的な正準変換に対して、その形式が保存される運動方程式がハミルトンの運動方程式である。この場合には空間座標 q_i のほかに、つぎの式で定義される運動量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.47)$$

を導入し、 p_i を独立変数としてとり扱う。したがって(2.47)より \dot{q}_i は (q_j, p_j, t) の関数として表す。

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t). \quad (2.48)$$

ハミルトニアン $H(q_i, p_i, t)$ は

$$H(q_i, p_i, t) \equiv -L(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j, t), t) + \sum_i p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) \quad (2.49)$$

で与えられる。直交座標系における p_x 、円筒座標系における p_θ を一例として示すと次のようになる：

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} + qA_x, & \dot{x} &= (p_x - qA_x)/m, \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} + qrA_\theta, & \dot{\theta} &= (p_\theta - qrA_\theta)/(mr^2). \end{aligned}$$

直交座標系におけるハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 + (p_z - qA_z)^2 \right) + q\phi(x, y, z, t),$$

円柱座標系におけるハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_r - qA_r)^2 + \frac{(p_\theta - qrA_\theta)^2}{r^2} + (p_z - qA_z)^2 \right) + q\phi(r, \theta, z, t)$$

となる。

ラグランジアン L の変分をとると

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_i (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \delta \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) + \sum_i (\dot{p}_i \delta q_i - \dot{q}_i \delta p_i)$$

$$\delta(-L + \sum_i p_i \dot{q}_i) = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i), \quad \delta H(q_i, p_i, t) = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i)$$

となる。したがってハミルトンの運動方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.50)$$

2.5 トーラス系

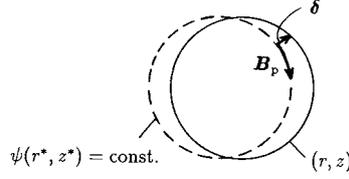


図 2.10 磁気面 (点線) と粒子の軌道面 (実線).

が導かれた。直交座標系におけるハミルトンの運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x - qA_x}{m}, & \frac{dp_x}{dt} &= \frac{q}{m} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) - q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dp_x}{dt} - q \frac{dA_x}{dt} = q \left[\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_x \right) \right] \\ &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x \end{aligned}$$

となり, (2.50) は (2.44) と同等であることがわかる。

H が t を陽に含まない場合 (\mathbf{A}, ϕ が t に依存しない場合),

$$\frac{dH(q_i, p_i)}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

$$H(q_i, p_i) = \text{const.} \quad (2.51)$$

はハミルトンの運動方程式の積分である。そしてこれはエネルギー保存則である。

電磁場が軸対称系のときは $\partial H / \partial \theta = 0$ となり, $p_\theta = \text{const.}$ すなわち

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + qrA_\theta = \text{const.} \quad (2.52)$$

となり, 角運動量保存則である。

移動対称系 ($\partial / \partial z = 0$) の場合は以下の通りである。

$$p_z = m\dot{z} + qA_z = \text{const.} \quad (2.53)$$

2.5.3 軸対称系における粒子軌道

軸対称系の磁気面上の位置の座標 (r^*, θ^*, z^*) は

$$\psi = r^* A_\theta(r^*, z^*) = c_M$$

を満たす必要がある (c_M は定数)。一方荷電粒子の軌道上の座標 (r, θ, z) は角運動量保存則 (2.52) を満たす。

$$rA_\theta(r, z) + \frac{m}{q} r^2 \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{q} = \text{const.}$$

もし c_M の値を $c_M = p_\theta / q$ とすると, 軌道面の磁気面からのずれは

$$rA_\theta(r, z) - r^* A_\theta(r^*, z^*) = -\frac{m}{q} r^2 \dot{\theta}$$

から求めることができる。図 2.10 に示すようにずれ δ をとると

$$\delta = (r - r^*) \mathbf{e}_r + (z - z^*) \mathbf{e}_z,$$

$$\delta \cdot \nabla (rA_\theta) = -\frac{m}{q} r^2 \dot{\theta}$$

となる (e_r, e_z は r, z 方向の単位ベクトル). $rB_r = -\partial(rA_\theta)/\partial z$, $rB_z = \partial(rA_\theta)/\partial r$ より, 上記の式は

$$[-(z - z^*)B_r + (r - r^*)B_z] = -\frac{m}{q}r\dot{\theta}$$

に還元される. この式の左辺は, $\mathbf{B}_p = (B_r, B_z)$ と $\delta = (r - r^*, z - z^*)$ のベクトル積の θ 成分に等しい. すなわち

$$(\mathbf{B}_p \times \delta)_\theta = -\frac{m}{q}r\dot{\theta}.$$

磁場 \mathbf{B} のポロイダル成分 \mathbf{B}_p (磁場の (r, z) 面内の成分) の大きさを B_p とすると $-B_p\delta = -(m/q)v_\theta$ ($v_\theta = r\dot{\theta}$) の関係がえられ

$$\delta = \frac{mv_\theta}{qB_p} = \rho_{\Omega p}. \quad (2.54)$$

この値は B_p に v_θ の速度を持つ荷電粒子の B_p に対応するラーマー半径である. これをポロイダルラーマー半径という. $c_M = (p_\theta - m\langle rv_\theta \rangle)/q$ ($\langle rv_\theta \rangle$ は rv_θ の平均値) にえらぶと,

$$\delta = \frac{m}{qB_p} \left(v_\theta - \frac{\langle rv_\theta \rangle}{r} \right)$$

となる. 軸対称系において B_p が 0 でない場合, 衝突がなければ, 全ての荷電粒子は磁気面からポロイダルラーマー半径以上にずれることは出来ないことを示している.

2.5.4 トーラス磁場における案内中心ドリフト (周回粒子とバナナ粒子)

円筒座標 (R, φ, z) の z 軸の周りに単純トーラス磁場 ($B_r = 0$, $B_\varphi = B_0 R_0/R$, $B_z = 0$) がある場合について案内中心の運動を考えてみよう. φ 方向の磁場 B_φ をトロイダル磁場というが, B_φ は外側に $1/R$ で小さくなる. また磁力線は z 軸をまわるリング状になっている. z 軸をトーラスの主軸という. 案内中心のドリフト速度は 2.4 節で述べたように

$$\mathbf{v}_G = v_\parallel \mathbf{e}_\varphi + \frac{m}{qB_\varphi R} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) \mathbf{e}_z$$

となる. ここで \mathbf{e}_φ は φ 方向の単位ベクトルである (図 2.11 参照). 単純トーラスにおける荷電粒子はトーラス方向に速く走りながら z 方向にゆっくりした速度

$$v_{dr} = \frac{m}{qB_0 R_0} \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) \sim \left(\frac{\rho_\Omega}{R_0} \right) v \quad (2.55)$$

でドリフトする. このドリフトをトロイダルドリフトという. 電子とイオンは互いに逆方向に移動する. その結果電荷の分極により電場ができ, そのために $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ ドリフトでプラズマは外へ移動し, プラズマを閉じ込めることができない (図 2.11). このトロイダル・ドリフトを消すためには, なんらかの方法でこの荷電分離を消す必要がある. そのためトーラスの上部と下部を磁力線でつなげば, 磁力線に沿って荷電粒子は自由に移動できるので分離した電荷を短絡させることができる. その方法の一つとしてプラズマ中にトーラス方向の電流を流せば図 2.12 に示すよう

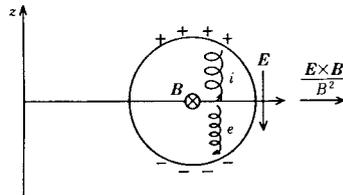


図 2.11 トロイダル・ドリフト.

2.5 トーラス系

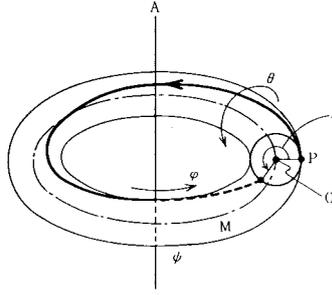


図 2.12 トーラス磁場の主軸 A, 小軸 M および回轉變換角 ι .

なプラズマの小軸の周りに磁場成分ができる。この方向の磁場 B_p をポロイダル磁場という。小軸を磁気軸ともいう。ここで R をトーラス・プラズマの大半径, a をプラズマ断面の小半径とする。そして r を小半径方向の座標とする。磁力線がトーラス方向に 1 周 ($2\pi R$) したときプラズマの小軸の周りは ι の角度だけ回転した位置に変わったとすると

$$\frac{r\iota}{2\pi R} = \frac{B_p}{B_\phi}$$

の関係がある。 ι を回轉變換角といい

$$\frac{\iota}{2\pi} = \frac{R}{r} \frac{B_p}{B_\phi} \quad (2.56)$$

となる。この逆数 $q_s = \iota/2\pi$ を安全係数といい、

$$q_s \equiv \frac{2\pi}{\iota} = \frac{r}{R} \frac{B_\phi}{B_p}$$

となる。 $A \equiv R/a$ をアスペクト比といい、この逆数を逆アスペクト比という。

トーラスを周回する非捕捉荷電粒子の案内中心

荷電粒子が磁力線に沿って v_{\parallel} の速度でトーラスを 1 周する場合、 $T = 2\pi R_0/v_{\parallel}$ の時間を要する。したがって小軸のまわりに、ポロイダル方向に

$$\omega = \frac{\iota}{T} = \frac{\iota v_{\parallel}}{2\pi R_0}$$

の角速度で回転する。そして z 方向に v_{dr} の速度でドリフトする。すなわち粒子の案内中心の軌道は、 $x = R - R_0$ として

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x, \quad \frac{dz}{dt} = \omega x + v_{dr}$$

となる。解は

$$\left(x + \frac{v_{dr}}{\omega}\right)^2 + z^2 = r^2$$

である。したがってポロイダル磁場を導入すれば軌道面は閉じた円となり、その中心は磁気面(円)の中心から

$$\Delta = -\frac{v_{dr}}{\omega} = -\frac{mv_{\parallel}}{qB_0} \frac{2\pi}{\iota} \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2}\right) \quad (2.57)$$

$$|\Delta| \sim \rho_{\Omega} \left(\frac{2\pi}{\iota}\right) = \rho_{\Omega} q_s$$

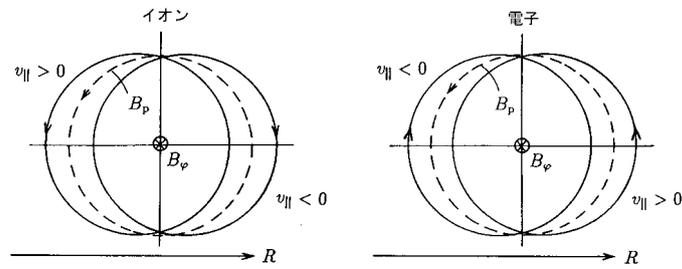


図 2.13 トーラスを周回するイオンおよび電子の案内中心軌道 (実線) の磁気面 (点線).

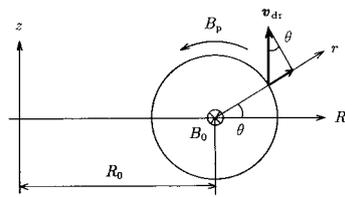


図 2.14 (r, θ) 座標.

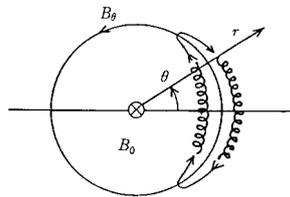


図 2.15 イオンのバナナ軌道のポロイダル面 (r, θ) への投影.

2.5 トーラス系

だけずれることになる (ρ_Ω はラーマー半径). 図 2.13 のような配位においては $v_{\parallel} > 0$, $q > 0$ (イオン) のとき $v_{\text{dr}} > 0$, $\omega > 0$ であるから $\Delta < 0$ となる. また $v_{\parallel} < 0$ ($v_{\parallel} > 0$ の場合の反対方向), $q > 0$ (イオン) のときは $\Delta > 0$ となる.

トーラスの外側に捕捉されるバナナ粒子の案内中心

トーラス磁場において $|B_\varphi| \gg |B_p|$ の場合はトーラス磁場の大きさは B_φ で決まってしまう.

$$B = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0}{1 + (r/R) \cos \theta} \simeq B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right).$$

磁力線に沿う長さを l とし磁力線を (R, z) 面に投影したときの座標を (r, θ) で表すとき (図 2.14 参照)

$$\theta = \frac{\varphi}{q_s} = \frac{l}{R q_s} = \left(\frac{B_p}{r B_0} \right) l = \kappa l, \quad \left(\theta - \frac{\varphi}{q_s} = 0 \right)$$

となるので

$$B = B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos(\kappa l) \right)$$

と書ける. いま v_{\parallel} 成分 (磁力線に平行な成分) が v_{\perp} 成分に比べて小さく

$$\frac{v_{\perp}^2}{v^2} > 1 - \frac{r}{R}, \quad \frac{v_{\parallel}^2}{v^2} < \frac{r}{R} \quad (2.58)$$

を満たす場合は, トーラスの外側の弱い磁場の領域にミラー効果 (2.4 節参照) により粒子が捕捉される. このような粒子を捕捉粒子, 捕捉されないでトーラスを周回する粒子を非捕捉粒子という. トロイダル・ドリフト v_{dr} の r 成分は, $v_{\parallel}^2 \ll v_{\perp}^2$ であるから

$$\frac{dr}{dt} = v_{\text{dr}} \sin \theta = \frac{m}{q B_0} \frac{v_{\perp}^2}{2R} \sin \theta$$

となる. 案内中心の磁場に平行方向の運動は ((2.7) を参照)

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{\mu_m}{m} \frac{\partial B}{\partial l} = -\frac{\mu_m}{m} \frac{r}{R} \kappa B_0 \sin \kappa l = -\frac{v_{\perp}^2}{2R} \frac{B_p}{B_0} \sin \theta.$$

したがって解は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(r + \frac{m}{q B_p} v_{\parallel} \right) &= 0, \\ r - r_0 &= -\frac{m}{q B_p} v_{\parallel} \end{aligned} \quad (2.59)$$

で与えられる. $r = r_0$ は磁気ミラーの反射点の位置である. このような案内中心の軌道はバナナの形をしているのでバナナ軌道という (図 2.15). 捕捉粒子をバナナ粒子ともいう. バナナ軌道の幅 Δ_b は

$$\Delta_b = \frac{m}{q B_p} v_{\parallel} \sim \frac{m v}{q B_0} \frac{v_{\parallel}}{v} \frac{B_0}{B_p} \sim \frac{B_0}{B_p} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \rho_\Omega \sim \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} q_s \rho_\Omega \quad (2.60)$$

で与えられる.

2.5.5 トロイダル方向の電場がバナナ粒子の軌道に及ぼす効果

トカマク型の磁場配位においてはプラズマ中に電流を流すため, トーラス方向に電場を加える. 粒子の案内中心は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ のドリフトを受けるがバナナ中心のドリフトは異なる運動をする. 軸対称系トーラスにおいて, トーラス方向の電場は (R, φ, z) 座標 (図 2.16 参照) を用いて

$$E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$$

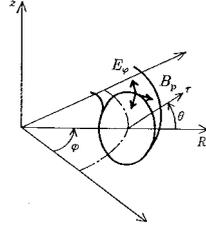


図 2.16 ウェアーピンチの説明に用いた座標系.

である. 粒子の角運動量は保存されるので

$$R(mR\dot{\phi} + qA_\phi) = \text{const.}$$

である. 案内中心は磁力線に沿って v_{\parallel} の速度で移動するからラーマー周期で平均すると, ϕ 方向のドリフト速度は

$$\langle R\dot{\phi} \rangle = \frac{B_\phi}{B} v_{\parallel}$$

で与えられ, そして

$$R \left(m v_{\parallel} \frac{B_\phi}{B} + q A_\phi \right) = \text{const.} \quad (2.61)$$

となる. $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$ の粒子がバナナ運動をしているとき, 折り返し点では $v_{\parallel} = 0$ である. この折り返し点 (R, Z) が, バナナ軌道を 1 周する時間 Δt 間に, どのくらい変位するかを求めてみよう. (2.61) において折り返し点では $v_{\parallel} = 0$ であることを留意すると

$$0 = \Delta(RA_\phi(R, Z)) = \Delta r \frac{\partial}{\partial r} RA_\phi + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} RA_\phi$$

である. ただし r は磁気面の径方向の座標である. ϕ および θ 方向についての微分は $RA_\phi = \text{const.}$ が磁気面であるから 0 である. また

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (RA_\phi) &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial (RA_\phi)}{\partial R} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial (RA_\phi)}{\partial Z} \right) \\ &= \cos \theta B_Z - \sin \theta B_R = \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{e}_\theta = -B_p \end{aligned}$$

であるから, バナナのドリフト速度は

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{E_\phi}{B_p} \quad (2.62)$$

となる. ここで \mathbf{e}_θ は θ 方向の単位である (図 2.16 参照). E_ϕ によって流れる電流がつくる B_p の符号を考慮すると (図 3.8 の場合は $E_\phi > 0, B_p > 0$) $\Delta r / \Delta t$ の符号は負で内側に向かう. $|B_p| \ll |B_\phi| \simeq B$ であるからその速度は速い. 粒子の案内中心のドリフトは $E_\phi B_p / B^2$ であるから $(B/B_p)^2$ の比で速く内側に向かう. これをウェアーピンチと呼んでいる [2.6].

2.5.6 案内中心の軌道と磁気面

案内中心のドリフト速度は 2.1.2 節で次のように与えられた.

$$\mathbf{v}_G = v_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{1}{B} (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) + \frac{m v_{\perp}^2 / 2}{q B^2} (\mathbf{b} \times \nabla B) + \frac{m v_{\parallel}^2}{q B^2} (\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B}) \quad (2.63)$$

$$\mu_m = m v_{\perp}^2 / (2B) = \text{const.}$$

2.5 トーラス系

電場 \mathbf{E} が静電場の場合 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ となり, エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + q\phi = W$$

が成り立つ. したがって v_{\parallel} は

$$v_{\parallel} = \pm \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} (W - q\phi - \mu_m B)^{1/2}$$

となり, v_{\parallel} は座標の関数で表される. さて

$$\begin{aligned} \nabla \times (mv_{\parallel}\mathbf{b}) &= mv_{\parallel}\nabla \times \mathbf{b} + \nabla(mv_{\parallel}) \times \mathbf{b} \\ &= mv_{\parallel}\nabla \times \mathbf{b} + \frac{1}{v_{\parallel}}(-q\nabla\phi - \mu_m\nabla B) \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

であるので

$$\frac{v_{\parallel}}{qB}\nabla \times (mv_{\parallel}\mathbf{b}) = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB}\nabla \times \mathbf{b} + \frac{1}{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{b}) + \frac{mv_{\perp}^2/2}{qB^2}(\mathbf{b} \times \nabla B)$$

となる. したがって (2.63) の \mathbf{v}_G は次のように還元される [2.7].

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= v_{\parallel}\mathbf{b} + \left(\frac{v_{\parallel}}{qB}\nabla \times (mv_{\parallel}\mathbf{b}) - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB}\nabla \times \mathbf{b}\right) + \frac{mv_{\perp}^2}{qB^2}(\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{B}) \\ &= v_{\parallel}\mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}}{qB}\nabla \times (mv_{\parallel}\mathbf{b}) - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB}(\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b}). \end{aligned}$$

$\nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} + 2\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$ ($\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$) の関係より, \mathbf{v}_G の右辺第3項は $\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\nabla \times \mathbf{b}) - (\nabla \times \mathbf{b})_{\perp} = (\nabla \times \mathbf{b})_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}))\mathbf{b}$ となる. したがって ラーマー半径と \mathbf{b} の特徴的長さの比の1次の精度で

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \left(v_{\parallel} - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB}(\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b})\right)\mathbf{b} + \frac{mv_{\parallel}}{qB}\nabla \times (v_{\parallel}\mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{1 + (mv_{\parallel}/qB)\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}} \left(v_{\parallel}\mathbf{b} + \frac{mv_{\parallel}}{qB}\nabla \times (v_{\parallel}\mathbf{b})\right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

を導くことができた. (2.64) の右辺第1項は, 案内中心の運動のラグランジ-ハミルトン公式化 [2.8] において位相空間の体積を保存するために必要な項である.

$\nabla \times \mathbf{B} = B\nabla \times \mathbf{b} + \nabla B \times \mathbf{b} = \mu_0\mathbf{j}$ であるので, $\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 j_{\parallel}/B$ である. 分母の第2項は通常1より非常に小さい ($j_{\parallel} = 0$ のときは0). もし分母の第2項が無視できる場合は, (2.63) の \mathbf{v}_G は次のように還元される [2.7].

$$\frac{d\mathbf{r}_G}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B}\nabla \times \left(\mathbf{A} + \frac{mv_{\parallel}}{qB}\mathbf{B}\right). \quad (2.65)$$

磁場が時間によらない場合, (2.64) と (2.65) の軌道は全く同じである.

案内中心の軌道は, あたかも次式のベクトル・ポテンシャル

$$\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A} + \frac{mv_{\parallel}}{qB}\mathbf{B}.$$

をもつ磁場 $\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A}^*$ の磁力線の軌跡と一致する. 回転対称系の場合は2.5.1節の解析と同様にして

$$rA_{\theta}^*(r, z) = \text{const.} \quad (2.66)$$

が案内中心の軌道面となる.

2.5.7 捕捉粒子 (バナナ) の歳差運動

例えば、トカマクにおいて磁場の弱いトーラスの外側で捕捉されたバナナの中心は、トーラス方向に移動する。この捕捉粒子の歳差運動の軌道解析を一般的に行うために、図 2.17 に示されるような一般座標系 (u^1, u^2, u^3) を用いる。すなわち

$$u^1 = u^1(x, y, z), \quad u^2 = u^2(x, y, z), \quad u^3 = u^3(x, y, z).$$

一般座標系においては、任意のベクトル \mathbf{F} はコントラバリエント $f^i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i$ を用いて

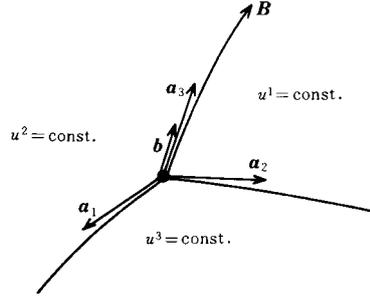


図 2.17 捕捉粒子の歳差運動の軌道解析のために用いる一般座標 (u^1, u^2, u^3) .

$\mathbf{F} = \sum f^i \mathbf{a}_i$, コバリエント $f_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i$ を用いて $\mathbf{F} = \sum f_i \mathbf{a}^i$ と表すことができる。ここでベクトル \mathbf{a}_i および \mathbf{a}^i は $\mathbf{a}_i \equiv \partial \mathbf{r} / \partial u^i$ および $\mathbf{a}^i \equiv \nabla u^i$ (図 2.17, 13.5 節の表 13.3 参照) である。 $u^1(x, y, z) = \text{const}$ の曲面と $u^2(x, y, z) = \text{const}$ の曲面の交差線が磁力線になるように (u^1, u^2, u^3) を選ぶ。磁力線に沿う単位ベクトル \mathbf{b} は $\mathbf{b} = b^3 \mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3)^{-1/2} \mathbf{a}_3$ で表される。全エネルギー W , 磁気モーメント μ_m の捕捉粒子の案内中心の軌道は縦の断熱不変量

$$J_{\parallel}(u^1, u^2, \mu_m, W) = m \oint v_{\parallel} dl = \text{const}. \quad (2.67)$$

で与えられる。ここで v_{\parallel} は

$$v_{\parallel} = \pm ((2/m)(W - \mu_m B - q\phi))^{1/2} \quad (2.68)$$

で与えられる。また荷電粒子の運動は

$$\mathbf{v} = \left(v_{\parallel} - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB} (\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}) \right) \mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}}{qB} \nabla \times (mv_{\parallel} \mathbf{b}) \quad (2.69)$$

で表される。(2.69) の磁力線に垂直な成分は座標 (u^1, u^2, u^3) を用いて次のようになる (表 13.3 参照)。

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{qBg^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} (mv_{\parallel} b_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (mv_{\parallel} b_2) \right), \\ \frac{du^2}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{qBg^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} (mv_{\parallel} b_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (mv_{\parallel} b_3) \right). \end{aligned}$$

一周期間における u^1 および u^2 の変化は

$$\begin{aligned} \Delta u^1 &= \oint \frac{1}{qB} \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} (mv_{\parallel} b_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (mv_{\parallel} b_2) \right) du_3 \\ &= \left(\frac{1}{qB} \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \right)_m \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial u^2}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

2.5 トーラス系

$$\Delta u^2 = - \left(\frac{1}{qB} \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \right)_m \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial u^1} \quad (2.71)$$

である. ここで $J_{\parallel} = \oint (mv_{\parallel} b_3) du^3 = \oint (mv_{\parallel}) dl$ ($dl = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) dt = du^3 (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}) = du^3 g_{33}^{1/2}$ であり, g および g_{ij} の定義は表 13.3 に与えてある). 記号 $(f)_m$ は f の軌道内のある点における値である (平均値定理). 一周期の値 τ は

$$\tau = \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} = m \frac{\partial}{\partial W} \oint v_{\parallel} dl = \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial W} \quad (2.72)$$

である. したがって捕捉粒子の歳差運動のドリフト速度は次のように与えられる.

$$\frac{du^1}{dt} = \frac{\Delta u^1}{\tau} = \left(\frac{1}{qB} \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \right)_m \frac{\partial J_{\parallel} / \partial u^2}{\partial J_{\parallel} / \partial W}, \quad (2.73)$$

$$\frac{du^2}{dt} = \frac{\Delta u^2}{\tau} = - \left(\frac{1}{qB} \left(\frac{g_{33}}{g} \right)^{1/2} \right)_m \frac{\partial J_{\parallel} / \partial u^1}{\partial J_{\parallel} / \partial W}. \quad (2.74)$$

この場合周期 τ はドリフト運動の時間スケールより充分短いことを前提としている. トカマクのパナナの歳差運動を解析してみよう. トカマクの磁場強度は

$$B = B_0(1 - \epsilon \cos \theta)$$

である. ここで ϵ は逆アスペクト比 $\epsilon = r/R$ である. 一般座標系として

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta - \frac{1}{q_s} \varphi, \quad u^3 = R\varphi$$

を選ぶ. 縦の断熱不変量 J_{\parallel} は

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= m \oint ((2/m)(W - q\phi - \mu_m B(1 - \epsilon \cos \theta)))^{1/2} dl \\ &\approx (2m\mu_m B\epsilon)^{1/2} (Rq_s) \oint (2\kappa^2 + \cos \theta - 1)^{1/2} d\theta \\ &= 4 \cdot 4(m\mu_m B\epsilon)^{1/2} (Rq_s) \int_0^{\theta_0/2} (\kappa^2 - \sin^2(\theta/2))^{1/2} d(\theta/2) \\ &= 16(m\mu_m B\epsilon)^{1/2} (Rq_s) (E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)) \end{aligned} \quad (2.75)$$

である. ここで

$$\kappa^2 \equiv \frac{W - \mu_m B(1 - \epsilon) - q\phi}{2\epsilon\mu_m B} < 1, \quad \sin^2(\theta_0/2) = \kappa^2$$

であり, $r d\theta/dl = B_{\theta}/B = r/Rq_s$, $dl = Rq_s d\theta$ である. $K(\kappa)$ および $E(\kappa)$ はそれぞれ第 1 種および第 2 種の完全楕円積分で次のような関数である.

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{((1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2))^{-1/2}},$$

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} (1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi = \int_0^1 \left(\frac{1 - \kappa^2 x^2}{1 - x^2} \right)^{1/2} dx,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \kappa} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{E}{1 - \kappa^2} - K \right), \quad \frac{\partial E}{\partial \kappa} = \frac{1}{\kappa} (E - K).$$

第 1 種および第 2 種の完全楕円積分の値を表 2.3 に示す.

表 2.3 $K(\kappa)$ および $E(\kappa)$ の値

κ	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$K(\kappa)$	$\pi/2$	1.660	1.778	1.854	1.950	2.075	2.257	2.578	∞
$E(\kappa)$	$\pi/2$	1.489	1.339	1.351	1.298	1.242	1.178	1.105	1

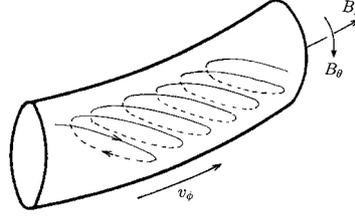


図 2.18 歳差運動するイオンのバナナ軌道がトロイダル方向に移動する様子。

$$\frac{\partial \kappa^2}{\partial r} = -\frac{1}{r}(\kappa^2 - 1/2) - \frac{q\partial\phi/\partial r}{2\epsilon\mu_m B}$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r} &= 16(m\mu_m B\epsilon)^{1/2} Rq_s \left((E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)) \frac{1}{2r} + \kappa K(\kappa) \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \\ &= 16(m\mu_m B\epsilon)^{1/2} Rq_s \left((E - K/2) \frac{1}{2r} + \frac{K}{2} \left(-\frac{q\partial\phi/\partial r}{2\epsilon\mu_m B} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial W} = 16(m\mu_m B\epsilon)^{1/2} Rq_s \frac{K}{2} \frac{1}{2\mu_m B\epsilon}$$

である。バナナの歳差運動の軌道は

$$\begin{aligned} \frac{du^2}{dt} &= \frac{d(\theta - \varphi/q_s)}{dt} = -(1/q_s) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\mu_m B\epsilon}{qBr^2} (E/K - 1/2) - \left(-\frac{q\partial\phi/\partial r}{rqB} \right) \\ &= -\frac{2\mu_m B}{qBrR} (E/K - 1/2) - \frac{E_r}{rB}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\frac{du^1}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0 \quad (2.77)$$

である。トカマクのバナナの歳差運動は $\theta = 0$ 付近に捕捉される。そして

$$R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mv_{\perp}^2}{qBr} q_s \left(\frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) + \frac{E_r}{B} \frac{q_s R}{r} \quad (2.78)$$

となる (図 2.18 参照)。

問題

1. 0.1 パスカル, 0°C の理想ガスの密度 0.1 パスカル, 0°C の理想ガスの密度を求めよ。(1 気圧 = 760 mmHg = 13.5951 × 76 × 980.665 × 10⁻¹ Pa = 1.01325 × 10⁵ Pa, N_A (アボガドロ数 = 6.0221367 × 10²³) (0.1 Pa = 0.75 mtorr)).

2.5 トーラス系

2. 電子プラズマ周波数とデバイ長 密度 $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$, 温度 $T_e = 10 \text{keV}$ の炉心プラズマの電子プラズマ周波数とデバイ長の値を計算せよ. 電離層の電子密度や電子温度はその高度, 時間によって変わるが, 典型的な値 $n_e \sim 10^{12} \text{m}^{-3}$, $T_e \sim 0.2 \text{eV}$ の場合について, 電子プラズマ周波数とデバイ長の値を計算せよ.
3. ラーマー半径 中性粒子源から磁場に対して 30° の角度で入射された 1MeV (10^6eV) のエネルギーを持つ高速重水素原子が, $B = 5 \text{T}$ の磁場中で荷電交換により重陽子 D^+ になったとき, そのラーマー半径を求めよ. ((2.3) 参照).
4. 曲率ドリフトと ∇B ドリフト 磁力線の曲率半径を R とするとき, 曲率ドリフトと ∇B ドリフトの速度が $(\rho_\Omega/R)v_T$ で表せることを示せ. ((2.6) 参照).
5. 偏極ドリフト 偏極ドリフト速度は $\mathbf{v}_p = (m/qB) \times (\partial \mathbf{E} / \partial t) / B$ であり, \mathbf{v}_E を $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度とする. $(\partial / \partial t)(mv_E^2/2) - q\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{E} = 0$ の関係があることを確かめよ. ((2.9) 参照).
6. ポンデロモティブフォース $1 \text{ワット} = 10^{15} \text{W}$ の超高出力のレーザービームが, プラズマ中で半径 0.02mm のスポットに収束すると仮定する. 光の圧力 $\epsilon \langle E^2 \rangle / 2$ を計算せよ. 光の強度は I_L is $I_L (\text{W/m}^2) = (\epsilon \langle E^2 \rangle / 2) c (\text{J/m}^3) \text{m/s}$ で表される. ここで c は光速である. ((2.11) 参照).
7. 中性粒子入射 (NBI) NBI から入射された高速中性粒子はプラズマ中で荷電交換により高速イオンになる. 高速イオンはプラズマ中の電子やイオンとクロン衝突をしてエネルギーを失う. 高速イオンエネルギーの変化率 (プラズマの加熱率に対応) は (2.30) で与えられる. この式を導入せよ.
8. ミラーの反射往復運動の周期 熱速度 v_T の荷電粒子が, 長さ L , ミラー比 R_M のミラーに捕捉されている. この場合の反射往復運動の周期を求めよ. ((2.36) 参照).
9. バナナ運動の周期 トカマクに閉じ込められたバナナ粒子の折り返し点のポロイダル角が ± 0.5 ラジアンとする. この場合のバナナ運動の周期を求めよ. ただしトーラスの大半径は R , 逆アスペクト比は $\epsilon = A^{-1}$, 安全係数は q , 熱速度は v_T とする. (2.5.4. 節参照)
10. イオン軌道と磁気面 プラズマ小半径 $a = 2 \text{m}$, トーラス大半径 $R = 6.2 \text{m}$, プラズマ電流 $I_p = 15 \text{MA}$ で平坦なプラズマ電流密度をもつトカマクにおいて, 10keV のデューテロン (D^+) の軌道が, 半径 $r = 1 \text{m}$ の磁気面から最大どのくらいずれるか? ただし衝突はないものとする. (2.54 参照)

解答 (ヒント)

10. イオン軌道と磁気面 軌道と磁気面のずれは $\delta \approx (mv_{\parallel} / qB_p) < m(2r/R)^{1/2} v / qB_p = 1.5 \text{cm}$ である. ($r=1 \text{m}$ における B_p の値は 0.75T)

第3章 電磁流体力学

3.1 二流体電磁流体力学運動方程式

プラズマはイオンおよび電子の電磁二流体としてそれぞれの質量密度 ρ_{mi}, ρ_{me} , それぞれの流体速度 $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_e$, 圧力 p_i, p_e , そして電荷密度 ρ , 電流密度 \mathbf{j} などで記述することができる。これらの物理量は速度分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (第10章で詳しく記述する) を用いて表すことができる。すなわちイオン数密度 n_i , イオン質量密度 ρ_{mi} , イオン流体速度 $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)$ は次のように表すことができる。微小位相空間体積 $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ の中に存在するイオン数 dN_i は

$$dN_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

で与えられる。イオン数密度 n_i , イオン質量密度 ρ_{mi} , イオン流体速度 $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)$ は次のように表すことができる。

$$n_i(\mathbf{r}, t) = \int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.1)$$

$$\rho_{mi}(\mathbf{r}, t) = m_i n_i(\mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{n_i(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

電子についても全く同じように表すことができる。電磁流体力学は速度空間の平均量を取り扱っているため、速度分布関数の形(マクスウェル分布からのずれ)によって起こりうる波動と粒子の相互作用などは無視されてしまう。しかし独立変数が (\mathbf{r}, t) のみなので、複雑な系についても比較的簡単に解析できる有力な特徴を持っている。

電磁二流体力学の方程式は

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (3.5)$$

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad (3.6)$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i + Z e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R} \quad (3.7)$$

で表される。ただし \mathbf{R} は電子がイオンと衝突して受ける運動量(密度)の変化を表す衝突項である。イオンが電子と衝突して受ける運動量(密度)の変化は $-\mathbf{R}$ である。

$\Delta x \Delta y \Delta z$ の中の領域の粒子数 $n(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z$ の変化は図 3.1 の A 面から入る粒子束 $n(x, y, z, t) V_x(x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ と A' 面から出る粒子束 $n(x + \Delta x, y, z, t) V_x(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ との差である。すなわち

$$\begin{aligned} & (n(x, y, z, t) V_x(x, y, z, t) - n(x + \Delta x, y, z, t) V_x(x + \Delta x, y, z, t)) \Delta y \Delta z \\ &= -\frac{\partial(n V_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

他の面からの粒子束も考慮すると、連続の式(3.4),(3.5)が導かれる。すなわち

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = -\left(\frac{\partial(n V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n V_z)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

3.2 一流体電磁流体力学運動方程式

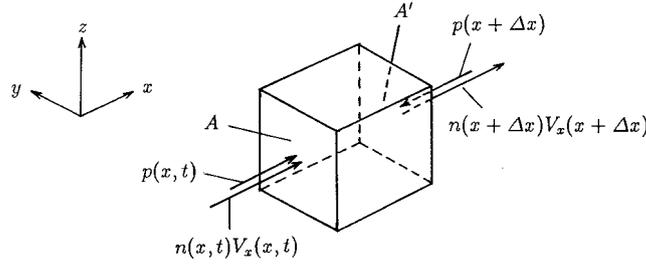


図 3.1 粒子束と圧力による力.

(3.6) と (3.7) に現れる $-\nabla p$ の項は圧力 p によるプラズマの単位体積当りの力であり, その右辺第 2 項は単位体積当りのクーロン力およびロレンツ力である. 第 3 項は 2.2 節で述べたようにイオン・電子間のクーロン衝突による項であり,

$$\mathbf{R} = -n_e m_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \nu_{ei} \quad (3.8)$$

である. ただし ν_{ei} は電子がイオンとクーロン衝突周波数である.

つぎに運動方程式の左辺の時間全微分について考察しよう. 流体速度は座標 \mathbf{r} , 時間 t の関数である. そして流体のある小体積は時間とともに移動する. したがって, この小体積の流体の加速度は

$$\frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$$

で与えられる. したがって運動方程式 (3.6) および (3.7) は次のように還元される.

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right) = -\nabla p_e - en_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R} \quad (3.9)$$

$$n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \right) = -\nabla p_i + Zen_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

粒子保存則 (3.4) および (3.5), 運動方程式 (3.9) および (3.10) は第 11 章で述べるボルツマン方程式から導くことができる. ボルツマン方程式の速度空間における積分をとると, (3.4), (3.5) がえられ, ボルツマン方程式に $m\mathbf{v}$ をかけて速度空間における積分をとると, (3.9), (3.10) を導くことができる ([2.3] の 6 章参照).

3.2 一流体電磁流体力学運動方程式

イオンと電子の質量比は $m_i/m_e = 1836A$ (A は原子量) であるからプラズマの質量密度はイオンからの寄与が主である. したがって二流体運動方程式を一流体運動方程式とオームの法則とに再編成した方が都合のよい場合もある.

全質量密度 ρ_m , プラズマの平均速度 \mathbf{V} , 電荷分布密度 ρ , 電流密度 \mathbf{j} を次のように定義する.

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{\rho_m}, \quad (3.12)$$

$$\rho = -en_e + Zen_i, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{V}_e + Zen_i \mathbf{V}_i. \quad (3.14)$$

(3.4) および (3.5) から

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.16)$$

(3.9) および (3.10) から

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \\ = -\nabla(p_e + p_i) + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.17)$$

である。プラズマの準中性より $n_e \simeq Z n_i$ である。 $\Delta n_e = n_e - Z n_i$ として

$$\begin{aligned} \rho_m = n_i m_i \left(1 + \frac{m_e}{m_i} Z \right), \quad p = p_i + p_e, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_i + \frac{m_e Z}{m_i} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i), \\ \rho = -e \Delta n_e, \quad \mathbf{j} = -e n_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \end{aligned}$$

である。 $m_e/m_i \ll 1$ であるので (3.17) 左辺第 2 項, 第 3 項は $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ としてよい。 $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \mathbf{j}/en_e \simeq \mathbf{V} - \mathbf{j}/en_e$ であるから, (3.9) は

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{\mathbf{R}}{en_e} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (3.18)$$

となる。2.8 節で導いた比抵抗率 η ((2.34) 参照) の表式を用いると, 衝突項 \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = n_e \left(\frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \right) (-e n_e) (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) = n_e e \eta \mathbf{j} \quad (3.19)$$

になる。(3.18) は一般化されたオームの法則である。電磁一流体運動方程式, オームの法則はは次のようになる。

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \eta \mathbf{j} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \simeq 0. \quad (3.21)$$

$$(|\omega/\Omega_e| \ll 1)$$

連続の式およびマクスウェルの方程式を加えると次のようになる。

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.27)$$

(3.25) および (3.24) より $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{j} / \partial t - \mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$ となる。電磁流体力学における波あるいは擾乱の代表的伝播速度 $v_{ph} = \omega/k$ ($k = |\mathbf{k}|$) はアルフベン速度 $v_A = B/(\mu_0 \rho_m)^{1/2}$

3.2 一流体電磁流体力学運動方程式

で, 光速 c に比べて小さい. (アルフベン波は 5.2.2 節, 8.4.1 節で説明される). したがって $\omega^2/k^2 \sim v_A^2 \ll c^2$ である. $|\nabla \times (\partial \mathbf{B}/\partial t)| = |\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}| \sim k^2 |\mathbf{E}|$, $\mu_0 \epsilon_0 |\partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2| \sim \omega^2 |\mathbf{E}|/c^2$ であるから, (3.25) 式右辺第 2 項の真空中の変位電流 $\partial \mathbf{D}/\partial t$ は無視できる. (3.21) の右辺 $(m_e/e)\partial \mathbf{j}/\partial t$ と左辺の $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ の大きさの比は ω/Ω_e であるから $|\omega/\Omega_e| \ll 1$ ならば右辺の第 1 項は無視できる. (3.21) の右辺第 2 項 $(m_e/e)\partial \mathbf{V}/\partial t$ と左辺の $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ の大きさの比は ω/Ω_e である. したがって $|\omega/\Omega_e| \ll 1$ のとき (3.21) の右辺を 0 としてよい. (3.21) の $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の項を (3.20) を用いて消去すると

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i - \eta \mathbf{j} = \frac{\Delta n_e}{n_e} \mathbf{E} + \frac{m_i}{e} \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

となる. $(m_i/e)d\mathbf{V}/dt$ と $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ の大きさの比はおよそ $|\omega/\Omega_i|$ であり, $\Delta n_e/n_e \ll 1$ である. $|\omega/\Omega_i| \ll 1$ のとき, 次のようになる.

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i = \eta \mathbf{j}. \quad (|\omega/\Omega_i| \ll 1) \quad (3.28)$$

$|\omega/\Omega_i| \ll 1$ および $|\omega/k| \ll c$ で, イオンの圧力項 ∇p_i がオーム法則の式で無視できる場合は, 電磁流体方程式は次のように簡単になる.

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}, \quad (3.29)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho_m + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3.34)$$

さらに状態方程式として断熱変化の式を追加する.

$$\frac{d}{dt} (p \rho_m^{-\gamma}) = 0.$$

ここで γ は比熱比で自由度 δ のとき $\gamma = (2 + \delta)/\delta$ である. 3次元で自由度 $\delta = 3$ のときは $\gamma = 5/3$ である. (3.34) と組み合わせると

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.35)$$

となる. $|(d\rho_m/dt)/\rho_m| \ll |\nabla \cdot \mathbf{V}|$ の場合, 断熱変化の式 (3.35) の代わりに非圧縮性の式

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.36)$$

を用いることができる ($\gamma \rightarrow \infty$).

エネルギー保存則は (3.31) および (3.32) より次のように導くことができる.

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.37)$$

(3.37) の左辺第 3 項は, (3.29) より

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \eta j^2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.38)$$

となる. (3.30) および (3.34) を用いると, (3.38) 右辺第 2 項のローレンツ項は

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_m V^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m V^2}{2} \mathbf{V} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla p$$

となる. (3.35) より

$$-\nabla \cdot (p\mathbf{V}) = \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1)p\nabla \cdot \mathbf{V}$$

となるから

$$\mathbf{V} \cdot \nabla p = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{V}$$

である. したがってエネルギー保存則 (3.37) は次のように還元される.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_m V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \eta j^2 \\ + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{V} = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

(3.29) を (3.32) に代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \quad (3.41)$$

が導かれる. ここで表 3.1 にあるベクトル公式を $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ および $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$ に適用した. $\eta/\mu_0 = \nu_m$ を磁気粘性率という. (3.31) を (3.30) に代入すると

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.42)$$

となる. したがって運動方程式 (3.42) および磁場拡散方程式 (3.41) が電磁流体力学の基礎方程式になる. そして $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の (3.33), 連続の式 (3.34), 状態方程式 (3.35) または (3.36) がつけ加わる.

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})|}{|\Delta \mathbf{B}(\eta/\mu_0)|} \approx \frac{VB/a}{(B/a^2)(\eta/\mu_0)} = \frac{\mu_0 Va}{\eta} \equiv S_R \quad (3.43)$$

によって定義される (3.40) の右辺第 1 項と第 2 項の比 S_R を磁気レイノルズ数という. 記号 a は典型的なプラズマの大きさを表す. 磁気レイノルズ数は磁場拡散時間 (あるいは抵抗拡散時間) $\tau_R = \mu_0 a^2/\eta$ とアルフベン通過時間 $\tau_H = a/v_A$ の比に等しい ($v \approx v_A$ として). すなわち

$$\tau_R = \mu_0 a^2/\eta, \quad \tau_H = a/v_A, \quad S_R = \tau_R/\tau_H. \quad (3.44)$$

$S_R \ll 1$ のとき, 磁場は拡散方程式にしたがって変化する. $S_R \gg 1$ のときは磁力線がプラズマに凍り付いて (frozen in) 動くことが示される. いまプラズマ中の微小面積 ΔS を通る磁束を $\Delta\Phi$ とし, \mathbf{B} 方向に z 軸をとると, $\Delta\Phi$ は

$$\Delta\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\Delta S = B\Delta x\Delta y$$

である. ΔS の境界は移動するから ΔS は

3.2 一流体電磁流体力学運動方程式

表 3.1 ベクトル公式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
 \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) &= \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\phi \\
 \nabla \times (\phi \mathbf{a}) &= \nabla \phi \times \mathbf{a} + \phi \nabla \times \mathbf{a} \\
 \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
 \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \\
 \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (\text{valid for } x, y, z \text{ 座標のみ}) \\
 \nabla \cdot \mathbf{a} &= (1/r)\partial(r a_r)/\partial r + (1/r)\partial a_\theta/\partial \theta + \partial a_z/\partial z \\
 \nabla \times \mathbf{a} &= [(1/r)\partial a_z/\partial \theta - \partial a_\theta/\partial z]\mathbf{i}_r + [\partial a_r/\partial z - \partial a_z/\partial r]\mathbf{i}_\theta \\
 &\quad + [(1/r)\partial(r a_\theta)/\partial r - (1/r)\partial a_r/\partial \theta]\mathbf{i}_z \\
 \nabla^2 \phi &= (1/r)\partial/\partial r(r \partial \phi/\partial r) + (1/r^2)\partial^2 \phi/\partial \theta^2 + \partial^2 \phi/\partial z^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{d}{dt}(x + \Delta x - x) = V_x(x + \Delta x) - V_x(x) = \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x,$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta S) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

となる。磁束 $\Delta \Phi$ の変化は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\Delta \Phi) &= \frac{dB}{dt} \Delta S + B \frac{d}{dt}(\Delta S) = \left(\frac{dB}{dt} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} \right)_z \Delta S \\
 &= \frac{\eta}{\mu_0} \Delta B_z (\Delta S)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

である ((3.41) 参照). $S_R \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ とすると, 磁束の変化も 0 に近づく. すなわち $d(\Delta \Phi)/dt \rightarrow 0$. 磁力線はプラズマに凍り付いて動くことが示された.

第4章 プラズマの閉じ込め

プラズマの輸送および閉じ込めに関する研究は核融合の研究において最も重要な課題の一つであり、理論的および実験的な研究が相互に関連しながら続けられている。プラズマの閉じ込めに関しては後で述べる不安定性の考慮なしには議論できないが、まずプラズマが平衡状態にありかつ安定な理想的な場合について考える。電子イオン間の衝突頻度が大きい場合の古典拡散 (4.1 節)、衝突頻度が小さい場合のトカマクのトーラス系における新古典拡散およびブートストラップ電流について説明する (4.2 節および 4.3 節)。また径電場によって生ずるシアのある流れによる揺動損失の抑制について半定量的解析を 4.4 節で行う

プラズマの粒子の輸送の解析のために連続の式 (3.1 節参照)

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (n(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (4.1)$$

を用いる。ただし中性粒子の電離やイオンの再結合は無視できるものとする。粒子束 $\mathbf{\Gamma} = n\mathbf{V}$ は多くの場合

$$n(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}, t)\nabla n(\mathbf{r}, t)$$

で与えられる。ここで D は粒子拡散係数である。(一般的にはこの他の項も加わる。) プラズマの粒子拡散係数 D と粒子閉じ込め時間 τ_p とはプラズマ密度 n の拡散方程式

$$\nabla \cdot (D\nabla n(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r}, t)$$

で関係づけられている。 $n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}) \exp(-t/\tau_p)$ として拡散方程式に代入すると

$$\nabla \cdot (D\nabla n(\mathbf{r})) = -\frac{1}{\tau_p}n(\mathbf{r})$$

となり、固有値問題を解けばよいことになる。 D が一定でプラズマの境界が半径 a の円筒である場合には

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{1}{D\tau_p}n = 0$$

である。 $r = a$ で密度 $n(a) = 0$ となる境界条件を満たす解は

$$n = n_0 J_0 \left(\frac{2.4r}{a} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_p} \right)$$

であり、粒子閉じ込め時間は

$$\tau_p = \frac{a^2}{2.4^2 D} \approx \frac{a^2}{5.8 D} \quad (4.2)$$

で与えられる。ただし J_0 は 0 次のベッセル関数である。一般にプラズマの特徴的な大きさを a とすると、プラズマの閉じ込め時間と拡散係数との関係は、1 程度の大きさの数値係数を除いて (4.2) の式が成り立つ。したがってプラズマの大きさと閉じ込め時間からプラズマの拡散係数を求めることができる。この関係は実験でよく用いられる。

エネルギー輸送方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n \kappa T \right) + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \kappa T n \mathbf{V} \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q - p \nabla \cdot \mathbf{v} - \sum_{ij} \Pi_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \quad (4.3)$$

第4章 プラズマの閉じ込め

で表される ([2.3] の6章参照). 右辺の第1項は単位体積, 単位時間当りの粒子衝突による熱の発生, 第2項は圧縮による仕事, 第3項は粘性加熱項である. 左辺の第1項は単位体積, 単位時間当りの熱エネルギーの時間変化, 第2項は対流エネルギー損失, 第3項は熱伝導エネルギー損失を表わす. 熱伝導係数を κ_T とすると熱流束は

$$\mathbf{q} = -\kappa_T \nabla(\kappa T)$$

となる. 右辺第2項の対流損失は無視でき, 左辺第1項の熱発生源はじめ第2項, 第3項が無視できるときは

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n \kappa T \right) - \nabla \cdot \kappa_T \nabla(\kappa T) = 0$$

となる. $n = \text{const.}$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \kappa T \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa_T}{n} \nabla(\kappa T) \right)$$

となるから熱拡散係数 χ_T を

$$\chi_T = \frac{\kappa_T}{n}$$

と定義すると κT に関して (4.1) と同じ式になる. $\chi_T = \text{const.}$ のとき

$$\kappa T = \kappa T_0 J_0 \left(\frac{2.4}{a} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_E} \right), \quad \tau_E = \frac{a^2}{5.8(2/3)\chi_T} \quad (4.4)$$

をえる. τ_{Er} をエネルギー閉じ込め時間という.

4.1 衝突頻度が大きい場合の拡散 (古典拡散)

4.1.1 電磁流体力学的取り扱い

電子イオン間の衝突頻度が大きく, したがって平均自由行路長がトラスの内側にある良い曲率部と外側にある悪い曲率部とをつなぐ連結距離より短いとき, すなわち

$$\frac{v_{Te}}{\nu_{ei}} < \frac{2\pi R}{l}, \quad \nu_{ei} > \nu_p \equiv \frac{1}{R} \frac{l}{2\pi} v_{Te} = \frac{1}{R} \frac{l}{2\pi} \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}$$

のとき, プラズマの拡散について電磁流体力学的取り扱いが適用できる. ここで v_{Te} は電子の熱速度, ν_{ei} は電子・イオン間の衝突周波数である. (3.28) のオームの法則

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_i = \eta \mathbf{j}$$

より磁力線を横切るプラズマの運動は

$$\begin{aligned} n \mathbf{v}_\perp &= \frac{1}{B} \left(\left(n \mathbf{E} - \frac{\kappa T_i}{e} \nabla n \right) \times \mathbf{b} \right) - \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2} \frac{\nabla p}{B^2} \\ &= \frac{1}{B} \left(\left(n \mathbf{E} - \frac{\kappa T_i}{e} \nabla n \right) \times \mathbf{b} \right) - (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \nabla n \end{aligned} \quad (4.5)$$

で与えられる. ただし $\rho_{\Omega e} = v_{Te}/\Omega_e$, $v_{Te} = (\kappa T_e/m_e)^{1/2}$, $\eta = m_e \nu_{ei}/n_e e^2$ である (2.2.2 節参照). ここでもし (4.5) の右辺第1項が無視できる場合, プラズマの拡散係数 D は

$$D = (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \quad (4.6)$$

で与えられる. ここで古典拡散係数 D_{ei} を

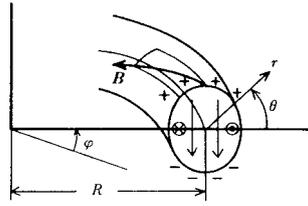


図 4.1 トーラス・プラズマにおける電場. ⊗ と ⊙ の記号はフィルシ-シュルーター電流の向きを示す.

$$D_{ei} \equiv (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} = \frac{nT_e}{\sigma_{\perp} B^2} = \frac{\beta_e \eta_{\parallel}}{\mu_0} \quad (4.7)$$

によって定義する. ただし $\sigma_{\perp} = n_e e^2 / (m_e \nu_{ei})$, $\eta_{\parallel} = 1/2\sigma_{\perp}$ である.

しかし, 一般に (4.5) の右辺の第 1 項は無視できない. トーラスプラズマの場合はトロイダル・ドリフトによって生ずる荷電分離が磁力線に沿って十分に短絡されずに残っており, 電場 \mathbf{E} を生ずる (図 4.1). したがって, (4.5) の $\mathbf{E} \times \mathbf{b}$ の項がプラズマの拡散に寄与する. この項について考察してみよう.

プラズマが定常であり ($\partial/\partial t = 0$), かつ静止しているときは, (3.30) より圧力平衡の式は

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

となる. 磁場に垂直なプラズマ中の電流成分 \mathbf{j}_{\perp} は

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{b}}{B} \times \nabla p$$

となる. この電流はプラズマ内部の磁場を弱める効果があるので反磁性電流 (diamagnetic current) と呼ばれている. $\nabla \mathbf{j} = 0$ より $\nabla \mathbf{j}_{\parallel} = -\nabla \mathbf{j}_{\perp}$ がえられ, プラズマ電流の磁場に平行な成分 j_{\parallel} は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} &= -\nabla p \cdot \left(\left(\nabla \frac{1}{B^2} \times \mathbf{B} \right) + \frac{\mu_0 \mathbf{j}}{B^2} \right) = 2\nabla p \cdot \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3} \\ \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial s} &= 2\nabla p \cdot \frac{(\nabla B \times \mathbf{b})}{B^2} \end{aligned}$$

より求めることができる. ここで s は磁力線に沿った長さの変数である. ($\nabla p \times \mathbf{j} = 0$ に注意)

$B \approx B_0(1 - (r/R_0 \cos \theta))$, $p = p(r)$, $\partial/\partial s = (\partial\theta/\partial s)\partial/\partial\theta = (\iota/(2\pi R))\partial/\partial\theta$ としてよい. ι は回転角である. したがって

$$\frac{\iota}{2\pi R} \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial r} \frac{2}{RB} \sin \theta,$$

すなわち

$$j_{\parallel} = \frac{2q_s}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta \quad (4.8)$$

を得る ($q_s = 2\pi/\iota$). この電流をフィルシ-シュルーター電流という. このプラズマ電流はトロイダル・ドリフトによる荷電分離による磁力線に沿って短絡するために流れ, 安全係数 q_s に比例している.

磁力線に沿うプラズマの伝導率を σ_{\parallel} とすると, 磁力線に沿って $E_{\parallel} = j_{\parallel}/\sigma_{\parallel}$ の電場を生ずる. 図 4.1 より明らかなように

$$\frac{E_{\theta}}{E_{\parallel}} \approx \frac{B_0}{B_{\theta}}$$

であるから, $B_{\theta}/B_0 \approx (r/R)(\iota/2\pi)$ より, 電場の θ 成分は

4.1 衝突頻度が大きい場合の拡散 (古典拡散)

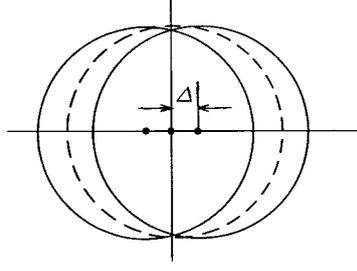


図 4.2 磁気面 (点線) とドリフト面 (実線) とのずれ.

$$E_\theta = \frac{B_0}{B_\theta} E_{\parallel} = \frac{R}{r} \frac{2\pi}{l} \frac{1}{\sigma_{\parallel}} j_{\parallel} = \frac{2}{\sigma_{\parallel}} \frac{R}{r} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta \quad (4.9)$$

である. すなわち (4.5) は

$$\begin{aligned} nV_r &= -n \frac{E_\theta}{B} - (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial n}{\partial r} \\ &= - \left(\frac{R}{r} \cdot 2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\parallel} B_0^2} \cos \theta \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\perp} B_0^2} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta \right)^2 \right) \times \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial n}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる. トーラス系の磁気面の面積要素が θ によって変化することを考慮し, θ について平均すると

$$\begin{aligned} \langle nV_r \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} nV_r \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta \right) d\theta \\ &= - \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\perp} B_0^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \left(1 + \frac{2\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right) \frac{\partial n}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.11)$$

をえる. したがってトーラス系の場合, (4.6) の拡散係数に比べて $1 + (2\pi/l)^2 = 1 + q_s^2$ 倍大きくなる. この係数は フィルシとシュルーターによって最初に導かれたのでフィルシ-シュルーター係数と呼ばれる [4.1]. 回転変換角 $l/2\pi$ が 0.3 とするとフィルシ-シュルーター係数は 10 の値になる.

4.1.2 粒子的取り扱い

古典拡散の表式

$$D_{ei} = (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}$$

は電子が各衝突において電子のラーマー半径だけランダムに移動する場合の拡散係数の表式そのものである (電子は磁力線に巻きついてラーマー運動をしているので, 衝突によって磁力線からラーマー半径の大きさしか移動できない). この考え方をトーラス系の場合に適用してみよう. 回転変換角を l とするとき, 磁気面と電子のドリフト面とのずれ Δ は (図 4.2 参照)

$$\Delta \approx \pm \rho_{\Omega e} \frac{2\pi}{l} \quad (4.12)$$

である. \pm の符号は電子の運動する向きが, 磁力線の向きと同方向かあるいは反対方向かによって変わる ((2.57) 参照). 電子は衝突によって別のドリフト面に移り得るので

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{l} \right) \rho_{\Omega e} \quad (4.13)$$

だけ磁気面を横切って移動する。したがってこの場合の拡散係数は

$$D_{P.S.} = \Delta^2 \nu_{ei} = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \quad (4.14)$$

となり フィルシ-シュルター係数が導かれる (この場合 $|2\pi/l| \gg 1$ と仮定). $D_{P.S.}$ をフィルシ-シュルター拡散係数という.

4.2 トカマクにおける衝突頻度が小さい場合の電子の新古典拡散

トカマク型のトーラス系においては磁場の大きさ B は

$$B = \frac{RB_0}{R(1 + \epsilon_t \cos \theta)} = B_0(1 - \epsilon_t \cos \theta) \quad (4.15)$$

で与えられる. ただし

$$\epsilon_t = \frac{r}{R} \quad (4.16)$$

である. したがって電子の磁場は, 垂直方向の速度 v_{\perp} が平行成分 v_{\parallel} に比べて大きい場合

$$\left(\frac{v_{\perp}}{v} \right)^2 > \frac{R}{R+r}$$

すなわち

$$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} > \frac{1}{\epsilon_t^{1/2}} \quad (4.17)$$

のときはその電子はトーラスの外側の弱い磁場の領域に捕捉され, バナナ軌道を描く (図 2.15 参照). しかしバナナ軌道を描けるためには, 捕捉電子の有効衝突時間 $\tau_{\text{eff}} = 1/\nu_{\text{eff}}$ がバナナ軌道を 1 周する時間 τ_b

$$\tau_b \approx \frac{R}{v_{\parallel}} \left(\frac{2\pi}{l} \right) = \frac{R}{v_{\perp} \epsilon_t^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{l} \right) \quad (4.18)$$

より長くなくてはならない. 捕捉電子の有効衝突周波数 ν_{eff} は捕捉電子の条件 (4.17) が衝突によって破れればよい. 電子・イオンの衝突周波数 ν_{ei} は粒子の向きを 1 ラディアン程度変える時間の逆数であるから, 有効衝突周波数 ν_{eff} は

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1}{\epsilon_t} \nu_{ei} \quad (4.19)$$

で与えられる. したがって $\nu_{\text{eff}} < 1/\tau_b$ すなわち

$$\nu_{ei} < \nu_b \equiv \frac{v_{\perp} \epsilon_t^{3/2}}{R} \left(\frac{l}{2\pi} \right) = \epsilon_t^{3/2} \frac{1}{R} \left(\frac{l}{2\pi} \right) \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} \quad (4.20)$$

のとき, 電子はバナナ軌道を描く (図 2.15). このとき捕捉電子は衝突によってバナナ軌道の幅

$$\Delta_b = \frac{mv_{\parallel}}{eB_p} \approx \frac{mv_{\perp}}{eB} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{B}{B_p} \approx \rho_{\Omega e} \epsilon_t^{1/2} \frac{R}{r} \frac{2\pi}{l} = \left(\frac{2\pi}{l} \right) \epsilon_t^{-1/2} \rho_{\Omega e} \quad (4.21)$$

だけ移動しうる ((2.60) 参照). 捕捉電子は電子全体の $\epsilon_t^{1/2}$ だけ存在するから, 捕捉電子によって引き起こされる拡散への寄与は

$$\begin{aligned} D_{G.S.} &= \epsilon_t^{1/2} \Delta_b^2 \nu_{\text{eff}} = \epsilon_t^{1/2} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \epsilon_t^{-1} (\rho_{\Omega e})^2 \frac{1}{\epsilon_t} \nu_{ei} \\ &= \epsilon_t^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3 ブートストラップ電流

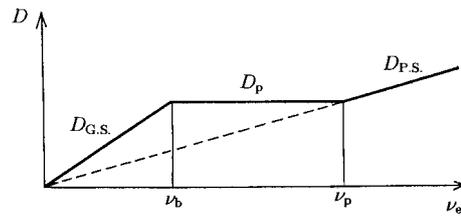


図 4.3 トカマク磁場における拡散係数の衝突周波数 ν_{ei} に対する依存性.

となり, 衝突頻度の大きい場合の拡散に比べて $\epsilon_t^{-3/2} = (R/r)^{3/2}$ だけ大きくなる. この因子はガリエフとサグディエフ [4.2] によって導かれた. $D_{G.S.}$ をガリエフ-サグディエフ拡散係数という. 上記の議論は半定量的なものであるが, より厳密な取り扱いについては [4.2] を参照されたい. いま電磁流体力学的取り扱いの可能な領域を決める衝突周波数を ν_p とすると, 4.1 節より

$$\nu_p = \frac{1}{R} \frac{\iota}{2\pi} v_{Te} = \frac{1}{R} \left(\frac{\iota}{2\pi} \right) \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

で与えられる. 電子がバナナ軌道を描きうる, いわゆるバナナ領域をきめる電子・イオン間の衝突周波数 ν_b は

$$\nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p \quad (4.24)$$

となる. したがって拡散係数は

$$D_{P.S.} = \left(\frac{2\pi}{\iota} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}, \quad \nu_{ei} > \nu_p, \quad (4.25)$$

$$D_{G.S.} = \epsilon_t^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{\iota} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}, \quad \nu_{ei} < \nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p \quad (4.26)$$

で与えられる. もし衝突周波数 ν_{ei} が $\nu_b < \nu_{ei} < \nu_p$ のときは電子はバナナ軌道を描けなくなり上記のような簡単な取り扱いはできない. また電磁流体力学的取り扱いもできない. したがってドリフト近似によるブラゾフの方程式を出発点として取り扱う. この結果, この衝突周波数領域では拡散係数はあまり変わらず, したがって拡散係数は

$$D_p = \left(\frac{2\pi}{\iota} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_p, \quad \nu_p > \nu_{ei} > \nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p \quad (4.27)$$

となる [4.3],[4.3]. (4.25) (4.26) (4.27) より拡散係数の衝突周波数に対する依存を図 4.3 に示す. $\nu_{ei} > \nu_p$ の領域を **MHD** 領域あるいは衝突領域, $\nu_p > \nu_{ei} > \nu_b$ の領域をプラトー領域あるいは中間領域, $\nu_{ei} < \nu_b$ の領域をバナナ領域あるいは無衝突領域と呼んでいる. これらの拡散を新古典拡散という. これらについては [4.3] にすぐれた解説がある. 電子の粒子拡散に対して電子・電子の衝突が影響しないのはそのクーロン衝突によってその 2 電子の重心速度が変わらないからである. 電子の新古典熱拡散係数 χ_{Te} は粒子拡散係数と同じ程度の値である ($\chi_{Te} \sim D_e$). イオン・イオン衝突過程はイオンの粒子拡散過程には効かないけれども, 温度勾配がある場合は熱拡散過程に効く. すなわち同種のイオンでも温度の高いイオンと低いイオンとで見分けがつくためである. したがってたとえばバナナ領域においては $\chi_{Ti} \sim \epsilon_t^{-3/2} (2\pi/\iota)^2 \rho_{\Omega i}^2 \nu_{ii}$ で与えられ, $\chi_{Ti} \sim (m_i/m_e)^{1/2} D_i$ ($D_i \sim D_e$) となり, イオンの熱拡散係数は粒子拡散係数の $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍程度大きくなる.

4.3 ブートストラップ電流

プラズマがバナナ領域にあるとき, 圧力勾配による径方向の拡散がトロイダル方向に電流を誘起することが理論的に予測された [4.4]~[4.7]. ブートストラップ電流と呼ばれるようになったこの電流は後に実験によって確かめられた. この過程はトカマクの電流を定常に効率的に維持する手段を提供した重要な現象である. 2.5.2 節で述べたように, $\nu_{ei} < \nu_b$ を満たすバナナ領域の電子はバナナ軌道を描くことができる. 密度勾配があると, 図 4.4 に示すような A 点を通る近接するバナナ粒子の数に差ができる. その差は $(dn_t/dr)\Delta_b$ であり, Δ_b はバナナ軌道の幅である. 捕

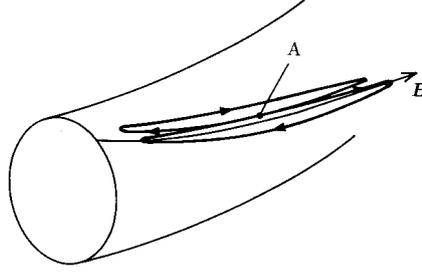


図 4.4 ブートストラップ電流を誘起する捕捉電子のバナナ軌道.

捉電子の磁力線に平行な速度は $v_{\parallel} = \epsilon^{1/2} v_T$ であるので, 密度 n_t の捕捉電子による電流密度は

$$j_{\text{banana}} = -(ev_{\parallel}) \left(\frac{dn_t}{dr} \Delta_b \right) = -\epsilon^{3/2} \frac{1}{B_p} \frac{dp}{dr}$$

となる. 非捕捉電子は捕捉電子との衝突により同じ方向にドリフトする. そしてイオンとの衝突で定常になる. 定常状態における非捕捉電子のドリフト速度 V_{untrap} は

$$m_e V_{\text{untrap}} \nu_{ei} = \frac{\nu_{ee}}{\epsilon} m_e \left(\frac{j_{\text{banana}}}{-en_e} \right)$$

になる. ν_{ee}/ϵ は非捕捉電子と捕捉電子との有効衝突周波数である. V_{untrap} の平均速度をもつ非捕捉電子 (周回電子) による電流密度は

$$j_{\text{boot}} \approx -\epsilon^{1/2} \frac{1}{B_p} \frac{dp}{dr} \quad (4.28)$$

となる. この電流をブートストラップ電流と呼ぶ. 平均ポロイダルベータ $\beta_p = \langle p \rangle / (B_p^2 / 2\mu_0)$ を用いると, 全ブートストラップ電流 I_b のプラズマ電流 I_p に対する比は

$$\frac{I_b}{I_p} \sim c \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} \beta_p \quad (4.29)$$

で与えられる. ここで $c \sim 0.3$ は常数である. この値は, もし β_p が大きく ($\beta_p \sim R/a$) 圧力分布が急峻な場合は, 1 に近い値になりうる. ブートストラップ電流の実験は TFTR, JT60U, JET などで行われた. 高ポロイダルベータプラズマの運転で, プラズマ電流 $I_p = 1 \text{ MA}$ の 70% ~ 80% のブートストラップ電流が観測された.

ブートストラップ電流分布は凹形の (中心部でくぼんだ) 分布をしているので, 負の磁気シアをもつ q 分布をしていてバルーニングに対して安定である (5.7 節参照). くぼんだ電流分布 (hollow current profile) の MHD 安定性について文献 [4.8] に詳しく解析されている.

4.4 径電場による揺動損失の抑制

径電場はポロイダル方向に $v_{\theta} = -E_r/B$, トロイダル方向に $v_{\phi} = -(E_r/B)(B_{\theta}/B)$ の速度をもった回転を引き起こす. もし E_r に勾配があるとき, ポロイダル, トロイダル方向にシアのある回転を引き起こす. シアのある流れ (sheared flow) がプラズマ端付近の乱流を抑制し, 閉じ込めの改善に重要な役割を果たしていることが指摘された [4.9].

$\tilde{\xi}$ が揺動場を表すとして, つぎのような流体モデルを考える.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla + L_d \right) \tilde{\xi} = \tilde{s}.$$

ここで $\tilde{\xi}$ は揺動場である. \mathbf{v}_0 は平衡状態の $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ による流れとし, \tilde{s} は乱流の駆動項とする. L_d は乱流の散逸を表す演算子とする. 点 1 の揺動場 $\tilde{\xi}(1)$ と点 2 の揺動場 $\tilde{\xi}(2)$ との相互相関 $\langle \tilde{\xi}(1)\tilde{\xi}(2) \rangle$ は

4.4 径電場による揺動損失の抑制

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v'_\theta - v_\theta/r_+)r_+ \frac{\partial}{\partial y_-} - \frac{\partial}{\partial r_+} D(r_+, y_-) \frac{\partial}{\partial r_+} + L_d \right) \langle \tilde{\xi}(1) \tilde{\xi}(2) \rangle = T \quad (4.30)$$

で与えられる [4.10]. ここで D は径方向の乱流の拡散係数, T は乱流の駆動項, $r_+ = (r_1 + r_2)/2$, $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$, $y_- = r_+ \theta_-$ である. ポロイダル方向の非相関化時間 (decorrelation time) τ_d は, 点 1 と点 2 のポロイダル方向の相対的距離 δy がシアのある流れによって乱流 (ポロイダル方向の伝播定数が k_{0k}^{-1}) のポロイダル方向の相関距離だけ離れる時間である. すなわち

$$k_{0k} \delta y \sim 1, \quad \delta y = v'_\theta (\Delta r) \tau_d$$

より

$$\tau_d = \frac{1}{v'_\theta \Delta r k_{0k}}$$

となる. したがってポロイダル方向の非相関化率 ω_s は

$$\omega_s = \frac{1}{\tau_d} = (\Delta r k_{0k}) v'_\theta$$

であり, Δr は乱流の径方向の相関距離である. 径方向の非相関化率 $\Delta\omega_t$ は

$$\Delta\omega_t = \frac{D}{(\Delta r)^2}$$

である. 径方向とポロイダル方向の非相関化過程は互いに強い相互作用をするので, 乱流の非相関化率 $1/\tau_{\text{corr}}$ は二つの非相関化率の混成値

$$\frac{1}{\tau_{\text{corr}}} = (\omega_s^2 \Delta\omega_t)^{1/3} = \left(\frac{\omega_s}{\Delta\omega_t} \right)^{2/3} \Delta\omega_t \quad (4.31)$$

で与えられる.

非相関化率 $1/\tau_{\text{corr}}$ は $\Delta\omega_t$ の $(\omega_s/\Delta\omega_t)^{2/3}$ 倍の大きさになる. $\Delta\omega_t$ はシアのない流れの場合の乱流の非相関化率に相当する. 乱流場の飽和レベル $\tilde{\xi}$ は

$$|\tilde{\xi}|^2 \sim T \times \tau_{\text{corr}}$$

で与えられるので, 乱流場の飽和レベルは

$$\frac{|\tilde{\xi}|^2}{|\tilde{\xi}_0|^2} \sim \left(\frac{\Delta\omega_t}{\omega_s} \right)^{2/3} \sim \left(\frac{1}{(dv_\theta/dr)t_0} \right)^{2/3} \frac{1}{(k_{0y} \Delta r)^2}, \quad t_0^{-1} \equiv \langle k_{0y}^2 \rangle D$$

になる. ここで $|\tilde{\xi}_0|$ はシアのない流れの場合の値である. 図 4.5 は飽和した抵抗性圧力勾配駆動乱流における等電子密度面に対するシアのある流れの影響を示した図である. この図は, シアのある流れがあるとき, 揺動のポロイダル方向, 径方向の非相関化現象のカップリングにより対流セル (等電子密度面) の大きさが減少することをよく示している. 熱拡散係数は $|\tilde{\xi}|^2$ に比例するので, 熱拡散係数は減少し, 熱障壁が形成され, 閉じ込め時間が長くなる. この現象は 11.5 節で述べるトカマクの H モード実験で観測されている.

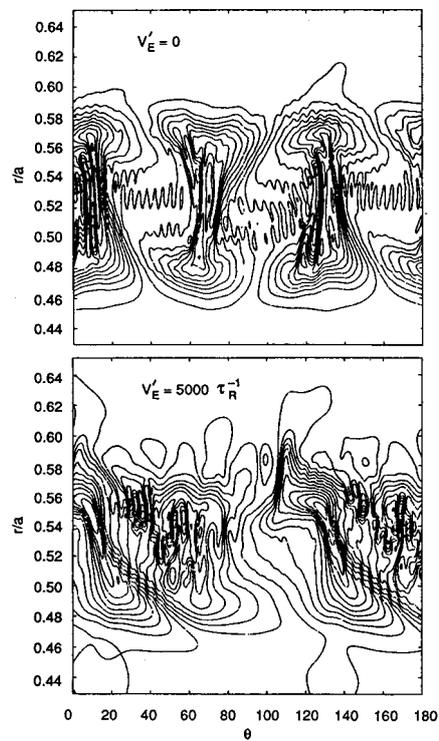


図 4.5 上の図は 抵抗性圧力駆動乱流の シアの無い流れの場合における ある時刻の等電子密度面. 下の図は強いシアのある流れの場合の等電子密度面 [4.9]. 垂直軸は半径方向の座標 r/a , 水平軸はポロイダル角 θ (度).

第5章 電磁流体力学的不安定性

磁場中におけるプラズマの安定性は制御熱核融合研究の重要課題の一つであり、理論的および実験的に研究が進められてきた。もしプラズマが不安定性に悩まされることなく、エネルギー閉じ込め時間がバナナ領域における新古典理論で決まるとすると、閉じ込め時間 τ_E は

$$\tau_E \approx \frac{(3/2)a^2}{5.8\chi_{G.S.}} \approx \frac{(3/2)}{5.8} q^2 \epsilon^{3/2} \left(\frac{a}{\rho_{\Omega i}} \right)^2 \frac{1}{\nu_{ii}}$$

で与えられる。ただし a はプラズマ半径、 $\rho_{\Omega i}$ はイオンのラーマー半径、 ν_{ii} はイオン・イオンの衝突周波数である。炉心プラズマの条件は適当な大きさの磁場、装置の規模で十分に満たすことができる (たとえば磁場 $B = 5 \text{ W/m}^2$, $a = 1 \text{ m}$, $T_i = 20 \text{ keV}$, $\iota/2\pi \approx 1/3$, $\epsilon = 0.2$ のとき, $n\tau_E \sim 3.5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{sec}$ となる)。

しかしプラズマは多くの電磁流体力学的自由度 (モード) をもっており、プラズマ中にあるモード (揺動) が成長すればそれによって電場、磁場の揺動を誘起し、プラズマ損失を急増させる。これらの揺動を電磁流体力学的不安定性 (magnetohydrodynamic (MHD) instability), あるいは巨視的不安定性 (macroscopic instability) という。

したがってプラズマにあるモードの擾乱を加えたとき、それが安定 (減衰) か不安定 (成長) かを調べることは重要課題である。安定性の解析では、擾乱が小さく平衡状態からのずれが1次の微小量であるとして線形化近似を用いる。この章では電磁流体力学の方程式を線形化して取り扱う不安定性についてのべる。

1次の揺動項は、時間的および空間的にフーリエ展開され、各フーリエ成分は線形近似の範囲で独立に取り扱われる。まず揺動項 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad \omega = \omega_r + i\omega_i$$

を考え、 ω についての分散式を導いて、 ω を解きその虚数部 ω_i の正負によって不安定、安定を判定する ($\omega_i > 0$ のとき不安定, $\omega_i < 0$ のとき安定)。実数部 $\omega_r = 0$ のときは、揺動は単調に成長あるいは減衰し、 $\omega_r \neq 0$ のときは揺動項は振動しながら成長あるいは減衰する。

これから各節ごとに典型的な電磁流体力学的不安定性について説明していく。5.1節においては交換不安定性を直観的な方法で述べる。5.2節においては電磁流体力学方程式を線形化しその境界条件を導く。アルフベン波および交換不安定性を線形化MHD方程式によって解析する。5.3節では、簡単ではあるが重要な例として表面電流構成の円筒プラズマを解析する。クルスカール-シャフラーノフ条件を導く。線形化MHD方程式を解くこととエネルギー積分の変分を解くことは同等である。5.4節ではエネルギー積分を記述する。5.5節ではより現実的な分布電流構成のプラズマのエネルギー積分を導入する。大きいアスペクト比をもつトカマクの安定性を吟味する。円筒分布電流構成のHain-Lüst MHD方程式を5.6節に導入する。5.7節ではバルーニング不安定性、5.8節では密度および温度の勾配があるときのエータ・アイ (η_i) モードについて述べ、5.9節でアルフベン固有モードを記述する。ここに述べたものはいずれも代表的な電磁流体力学的不安定性であるが、この外にも多くの不安定性がある。詳しくは文献 [5.1] を参照されたい。

5.1 交換不安定性

5.1.1 交換不安定性

プラズマと真空との境界を $x = 0$ に選び、磁場 \mathbf{B} の方向に z 軸を選ぶ。 $x < 0$ がプラズマの領域であり $x > 0$ が真空領域とする。また x 軸方向に加速度 \mathbf{g} が加わっているとす (図 5.1 参照)。加速度によるイオンと電子のドリフト方向は反対で、ドリフト速度は

$$\mathbf{v}_{G,i} = \frac{M \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{e B^2},$$

$$\mathbf{v}_{G,e} = -\frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{e B^2}$$

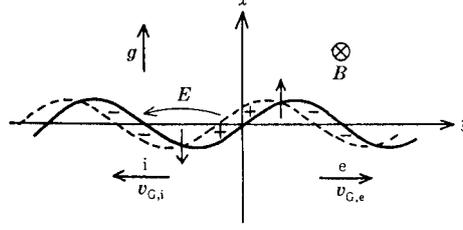


図 5.1 交換不安定性における電場および粒子のドリフト.

である. ここで M はイオン質量, m は電子質量である. このときプラズマの境界が $x = 0$ の面から, 擾乱のため

$$\delta x = a(t) \sin(k_y y)$$

にずれたとする. 加速度 \mathbf{g} によるイオンおよび電子の互いに反対方向のドリフトのためにプラズマは荷電分離を起こし, 電場を生じる. この電場による $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは, 加速度 \mathbf{g} がプラズマの外側に向かうときは擾乱をますます増大させる方向に働く. プラズマのある部分がへっこみ, 他のある部分がふくらむ擾乱は, プラズマのある領域がプラズマ外部の真空磁場の領域と入れ替わるというふうにかんがえることができるので, このような不安定性を交換不安定性 (interchange instability) という. またこの擾乱は磁力線に沿ってたてみぞ (flute) の形をしているので, フルート不安定性 (flute instability) ともいう. また流体力学における同様な不安定性 ($B \rightarrow 0$) と関連してレイリー-テイラー不安定性 (Rayleigh-Taylor instability) ともいわれる.

さて加速度による荷電粒子のドリフトのためプラズマ表面に

$$\sigma_s = \sigma(t) \cos(k_y y) \delta(x) \quad (5.1)$$

の表面電荷密度が生ずる (図 5.1 参照). そのため電場 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ が生じ, ポテンシャル ϕ は

$$\epsilon_{\perp} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\sigma_s \quad (5.2)$$

で与えられる. 境界条件は

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{+0} - \left(\epsilon_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{-0} = -\sigma_s,$$

$$\phi_{+0} = \phi_{-0}$$

である. したがって, $k_y > 0$ として, 解 ϕ は

$$\phi = \frac{\sigma(t)}{k_y (\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})} \cos(k_y y) \exp(-k_y |x|) \quad (5.3)$$

である. これより \mathbf{E} を求め, 境界の x 方向の速度 $d(\delta x)/dt$ は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ に等しいので

$$\frac{da(t)}{dt} \sin(k_y y) = \frac{\sigma(t)}{(\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})B} \sin(k_y y) \quad (5.4)$$

をえる. ここで y 方向に単位時間内に移動する電荷の流束は

$$ne|\mathbf{v}_{G,i}| = \frac{\rho_m g}{B}$$

である ($\rho_m = nM$). したがって電荷の変化率は

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} \cos(k_y y) = \frac{\rho_m g}{B} a(t) \frac{d}{dy} \sin(k_y y) \quad (5.5)$$

である. ゆえに

5.1 交換不安定性

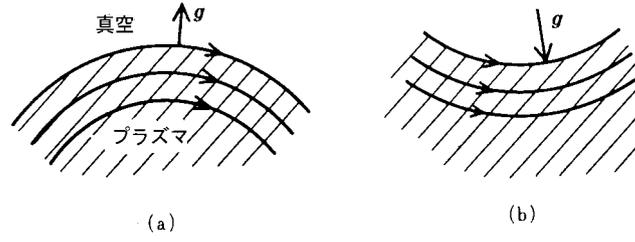


図 5.2 磁力線の曲率による遠心力.

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{\rho_m g k_y}{(\epsilon_0 + \epsilon_\perp) B^2} a \quad (5.6)$$

となり, $a \propto \exp \gamma t$ として成長率 γ は

$$\gamma = \left(\frac{\rho_m}{(\epsilon_0 + \epsilon_\perp) B^2} \right)^{1/2} (g k_y)^{1/2} \quad (5.7)$$

である. 波の周波数が小さいときには (イオンサイクロトロン周波数と比較して), 誘電率は次のように与えられる (8.4.1 節参照).

$$\epsilon_\perp = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\rho_m}{B^2 \epsilon_0} \right) \gg \epsilon_0. \quad (5.8)$$

したがって成長率 γ は [5.2]

$$\gamma = (g k_y)^{1/2} \quad (5.9)$$

である. 図 5.2(a) に示すようにプラズマから真空の方向に向かう加速度に対して, 磁場 \mathbf{B} に垂直な伝播ベクトル \mathbf{k} , すなわち

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (5.10)$$

をもつ擾乱は不安定になる. もし加速度の向きが逆であれば ($g < 0$), (5.9) の γ は虚数となり振動項となり安定である.

この不安定性の本質的な機構は加速度によって生ずる荷電分離である. 図 5.2 のように磁力線が曲がっているとき, 荷電粒子は遠心力によって加速度を受ける. 磁力線が図 5.2(a) のように真空に向かって凸のように曲がっている場合, この加速度は不安定に作用し, 真空に向かって凹のように磁力線が曲がっている場合 (図 5.2(b)) は安定である. したがってプラズマの存在する領域で磁場が最小であるとき安定である. これがいわゆる最小磁場 (min. B) の安定化条件である. 交換不安定性の一般的取り扱いは 5.2.3 節で述べる.

荷電粒子のドリフト運動は 2.1.2 節より

$$\mathbf{v}_G = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B} + \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \times \left(\mathbf{g} + \frac{(v_\perp^2/2) + v_\parallel^2}{R} \mathbf{n} \right) + v_\parallel \mathbf{b}$$

で与えられる. ただし \mathbf{n} は曲率中心から磁力線上の点に向かう単位ベクトルであり, R は磁力線の曲率半径である. したがって図 5.2 の場合には

$$\mathbf{g} = \frac{(v_\perp^2/2) + v_\parallel^2}{R} \mathbf{n} \quad (5.11)$$

の加速度を受けたことと同等である. この場合は $\gamma \approx (a/R)^{1/2} (v_T/a)$ となる.

成長率 γ が $\gamma \sim (g k_y)^{1/2}$ で生ずる交換不安定性も, もし成長率があまり小さくなく, イオンのラーマー半径 ρ_Ω^i が大きく

$$(k_y \rho_\Omega^i)^2 > \frac{\gamma}{|\Omega_i|}$$

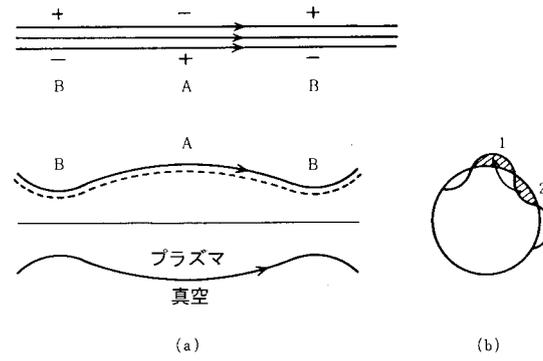


図 5.3 交換不安定性における荷電分離. (a) の上の図は磁力線に沿うたてみぞの擾乱によって生ずる荷電分離の様子. (a) の下の図は 1 本の磁力線において不安定な部分 A と安定な部分 B を示す. (b) はプラズマの擾乱の様子をプラズマ断面で示したものである.

の条件を満たすときは安定化される [5.3]. イオンのラーマー半径が大きくなるとイオンの感じる平均的な電場が電子のそれと異なり, 加速度 g による荷電分離によって生じた電場による両者のドリフト速度が異なる. このため生じた荷電分離は, 加速度 g によって生じた荷電分離と位相がずれ, 安定化される.

5.1.2 交換不安定性の安定条件, 磁気井戸

ある一本の磁力線がある部分 B で安定な曲率を持ち, またある部分 A で不安定な曲率を持つとする. すると A の部分と B の部分とで遠心力による加速度が逆となり荷電分離が逆方向になる. A と B とに生じた電荷は磁力線に沿って短絡されるため, このような場合の安定性は前節よりやや複雑になる. いまプラズマ圧力 p はスカラーで図 5.3(b) に示すように領域 1 と領域 2 とでプラズマと磁束とが入れ替わる (領域 1 の磁束が領域 2 へ移り, 領域 2 のプラズマが領域 1 に移る) ような擾乱を考える. またプラズマのベータ比は小さいと仮定する. したがって磁場は真空磁場とほとんど変わらない. また電磁気学の定理により, 真空磁場からのどんなずれも, 磁場のエネルギーを増やす方向になる. この場合危険な擾乱は磁束を保存するようなものであることを示そう.

ある磁束管内にある磁場のエネルギー Q_M は

$$Q_M = \int d\mathbf{r} \frac{B^2}{2\mu_0} = \int dl S \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (5.12)$$

となる. ここで l は磁力線に沿う長さ, S は磁束管の断面積である. 磁束 $\Phi = B \cdot S$ は磁束管で一定であるから, 磁場のエネルギーは

$$Q_M = \frac{\Phi^2}{2\mu_0} \int \frac{dl}{S}$$

となる. 領域 1 の磁束が領域 2 に移り, 領域 2 の磁束が領域 1 に移ることによって変化する磁場のエネルギーの変化 δQ_M は

$$\delta Q_M = \frac{1}{2\mu_0} \left(\left(\Phi_1^2 \int_2 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_1 \frac{dl}{S} \right) - \left(\Phi_1^2 \int_1 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_2 \frac{dl}{S} \right) \right) \quad (5.13)$$

となる. したがって交換される Φ_1 と Φ_2 が同じなら $\delta Q_M = 0$ ($\Phi_1 = \Phi_2$) であり, 最も危険である.

一方ある小体積 \mathcal{V} 内のプラズマの持つエネルギー Q_p は

$$Q_p = \frac{nT\mathcal{V}}{\gamma - 1} = \frac{p\mathcal{V}}{\gamma - 1} \quad (5.14)$$

である. ただし γ は比熱の比である. 断熱変化に対して

$$p\mathcal{V}^\gamma = \text{const.}$$

5.1 交換不安定性

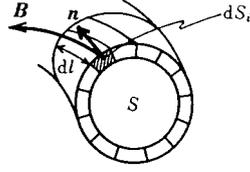


図 5.4 トーラス磁場の比体積.

であるが、領域 1 と 2 との交換によって生ずる Q_p の変化 δQ_p は

$$\delta Q_p = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p'_2 \nu_2 - p_1 \nu_1 + p'_1 \nu_1 - p_2 \nu_2 \right)$$

である. p'_2 は領域 ν_1 から ν_2 に交換された後の圧力であり, p'_1 は領域 ν_2 から ν_1 に交換された後の圧力であるため, $p'_2 = p_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^\gamma$, $p'_1 = p_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^\gamma$ の関係がある. そして δQ_p は

$$\delta Q_p = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^\gamma \nu_2 - p_1 \nu_1 + p_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^\gamma \nu_1 - p_2 \nu_2 \right) \quad (5.15)$$

になる.

$$p_2 = p_1 + \delta p,$$

$$\nu_2 = \nu_1 + \delta \nu$$

とすると δQ_p は

$$\delta Q_p = \delta p \delta \nu + \gamma p \frac{(\delta \nu)^2}{\nu} \quad (5.16)$$

である. 安定化条件は $\delta Q_p > 0$ であるから

$$\delta p \delta \nu > 0$$

が充分条件となる. 境界付近では p は外側に向かって減少し, また境界では $p \rightarrow 0$ となる. 体積 ν は

$$\nu = \int dl S = \Phi \int \frac{dl}{B}$$

となるので交換不安定性の安定化条件は

$$\delta p \delta \int \frac{dl}{B} > 0$$

である. 普通圧力はプラズマの外側に向かって減少するので ($\delta p < 0$), 安定化条件は, プラズマの外側に向かって

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0 \quad (5.17)$$

となる [5.4]. ただし積分範囲はプラズマのある領域である.

次に磁気井戸の概念について述べる. ある磁気面 ψ 内の領域の体積を V とし, また φ 方向の縦磁場の磁束を Φ とする. そして磁気面の比体積 U を

$$U = \frac{dV}{d\Phi} \quad (5.18)$$

で定義する. 図 5.4 に示すように磁場 \mathbf{B} の単位ベクトルを \mathbf{b} , 断面積 S の単位ベクトルを \mathbf{n} とすると

$$dV = \int \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i dS_i dl, \quad d\Phi = \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i$$

となる. 磁力線が 1 周して元の点にもどってきて閉じる簡単な場合, 比体積 U は

$$U = \frac{\oint \left(\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i dS_i \right) dl}{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i} = \frac{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i \oint \frac{dl}{B_i}}{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i}$$

となる. l についての積分は微小磁力管に沿って行うが $\sum_i \Pi(\mathbf{b}, \mathbf{n})_i S_i B_i$ は l に依存しないからである (磁束管内の磁束一定). $\oint dl/B_i$ は, 同じ磁気面に属する場合は一定であるので, U は

$$U = \oint \frac{dl}{B}$$

となる. 磁力線が N 周して閉じる場合は同様の考察により, U は

$$U = \frac{1}{N} \int_N \frac{dl}{B} \quad (5.19)$$

となる. 閉じない場合は次の形をとる.

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_N \frac{dl}{B}$$

したがって U は $1/B$ の平均という意味をもち, U が外側に向かって減る場合は平均的な意味で B が外側に向かって増加することを意味し, プラズマ領域で平均最小磁場となっていることを示す. すなわち交換不安定性の安定化条件は平均最小磁場の条件

$$\frac{dU}{d\Phi} = \frac{d^2V}{d\Phi^2} < 0 \quad (5.20)$$

と表すこともできる. 磁気軸上の U の値を U_0 , 外側の磁気面における U の値を U_a とするとき, 磁気井戸の深さを

$$-\frac{\Delta U}{U} = \frac{U_0 - U_a}{U_0} \quad (5.21)$$

によって定義する.

5.2 電磁流体力学的 (MHD) 不安定性の公式化

5.2.1 MHD 方程式の線形化

プラズマの電磁流体力学的安定性の問題は平衡状態からの微少擾乱がどのようになるかを解析することによって調べる. そこで運動方程式の線形化近似を行う. 質量密度を ρ_m , 圧力を p , 流速を \mathbf{V} , 磁場を \mathbf{B} とするとき, 運動方程式, 質量保存の式, オームの式, 断熱の式は次のようになる.

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0,$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (p \rho_m^{-\gamma}) = 0$$

5.2 電磁流体力学的 (MHD) 不安定性の公式化

(γ は比熱比). マクスウェルの方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

で表される. これはプラズマの比抵抗を 0 とした簡単化された電磁流体力学の方程式である. ρ_m , p , \mathbf{V} , \mathbf{B} の 0 次の平衡量を ρ_{m0} , p_0 , $\mathbf{V}_0 = 0$, \mathbf{B}_0 とする. また 1 次の摂動項を ρ_{m1} , p_1 , $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}$, \mathbf{B}_1 とする. 0 次の項の方程式は

$$\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.22)$$

である. 1 次の揺動項について線形化された方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \rho_{m1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m0} \mathbf{V}) = 0, \quad (5.23)$$

$$\rho_{m0} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p_1 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (5.26)$$

プラズマが平衡なときの位置 \mathbf{r}_0 からの変位を $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$ とすると

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{V} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \quad (5.27)$$

である. $\boldsymbol{\xi}$ を用いて上の式を書き表してみよう. (5.26) は

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \quad (5.28)$$

に還元される. $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ より

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1 \quad (5.29)$$

となる. (5.23) (5.25) より

$$\rho_{m1} = -\nabla \cdot (\rho_{m0} \boldsymbol{\xi}), \quad (5.30)$$

$$p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (5.31)$$

が導かれる. これらの式を (5.24) に代入すると次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \rho_{m0} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} &= \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \\ &= -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (5.32)$$

これが $\boldsymbol{\xi}$ に関する線形化された運動方程式である.

次に境界条件について考察してみよう. プラズマが理想的な導体に境界を接しているときは $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, したがって $\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) = 0$ である. ここで \mathbf{n} は境界面上の法線方向の単位ベクトルでプラズマの外側方向を向く. また $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) = 0$ および $(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) = 0$ である.

プラズマと真空磁場が境界を接しているとき全圧力は連続であるから境界面で

$$p - p_0 + \frac{B_{\text{in}}^2 - B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{\text{ex}}^2 - B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0}$$

となる。ただし $\mathbf{B}_{\text{in}}, \mathbf{B}_{0,\text{in}}$ はプラズマ内部の磁場, $\mathbf{B}_{\text{ex}}, \mathbf{B}_{0,\text{ex}}$ はプラズマ外部の磁場である。 $\mathbf{B}_{\text{in}}(\mathbf{r}), \mathbf{B}_{\text{ex}}(\mathbf{r}), p(\mathbf{r})$ を $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ で展開すると ($f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}_0) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)f_0(\mathbf{r}) + f_1$), 境界条件は

$$\begin{aligned} & -\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot (\mathbf{B}_{1,\text{in}} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{0,\text{in}})}{\mu_0} \\ & = \frac{\mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot (\mathbf{B}_{1,\text{ex}} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{0,\text{ex}})}{\mu_0} \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる。マクスウェルの式より

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_{0,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}}) = 0, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{B}_{0,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}}) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (5.35)$$

の関係がある。ただし \mathbf{K} は表面電流密度である。オームの式より、プラズマの中では

$$\mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{in}} = 0 \quad (5.36)$$

となる。この境界条件は次のようにも変形できる。プラズマの比抵抗は0であるからプラズマに固定した座標系から見た電場 $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{in}}$ は0であり、電場の接線方向 (t) は境界面で連続であるから、境界条件は

$$\mathbf{E}_t + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}})_t = 0 \quad (5.37)$$

である。下付きの t は接線成分を意味する。 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ の式より \mathbf{B} の垂直成分は \mathbf{E} の接線成分で表すことができるので、(5.37) は次のようになる。

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}}) = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}}). \quad (5.38)$$

プラズマ外部の真空領域では電場 \mathbf{E}_{ex} および磁場 \mathbf{B}_{ex} はベクトルポテンシャル \mathbf{A} で表すことができる。すなわち

$$\mathbf{E}_{\text{ex}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_{1,\text{ex}} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

真空領域で電流がないときは、 \mathbf{A} は

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (5.39)$$

である。ベクトルポテンシャルを用いると、(5.37) は

$$\mathbf{n}_0 \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \right) = 0$$

となる。 $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_{0,\text{in}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_{0,\text{ex}} = 0$ とすると、境界条件は

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{A} = -\xi_n \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \quad (5.40)$$

となる。理想導体の壁における境界条件は

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad (5.41)$$

となる。したがって摂動項を求めるためには方程式 (5.32) (5.39) を境界条件 (5.33) (5.38) または (5.40) (5.41) のもとに解けばよい。 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ とすればこの問題は固有値問題 $\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ に還元される。固有値より ω^2 がえられ、これによって安定・不安定が判定できる。もし総ての ω^2 が正ならば、プラズマは MHD 安定である。

5.2 電磁流体力学的 (MHD) 不安定性の公式化

5.2.2 磁気音波

$\mathbf{B}_0 = \text{const.}$, $p_0 = \text{const.}$ の場合を考える. 変位を $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\xi}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ とすると, (5.32) は次式に還元される.

$$-\rho_{m0}\omega^2\boldsymbol{\xi}_1 = -\gamma p_0(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_1)\mathbf{k} - \mu_0^{-1}(\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\xi}_1 \times \mathbf{B}_0))) \times \mathbf{B}_0. \quad (5.42)$$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ のベクトル公式 (表 3.1 参照) を用いると, (5.42) は

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 - \mu_0\omega^2\rho_{m0} \right) \boldsymbol{\xi}_1 + \left((B_0^2 + \mu_0\gamma p_0)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0 \right) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) \\ & - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)(\mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_1)\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

となる. \mathbf{k} , \mathbf{B}_0 の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/k$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}_0/B_0$ とし, 記号 $V \equiv \omega/k$, $v_A^2 \equiv B_0^2/(\mu_0\rho_{m0})$, $\beta \equiv p_0/(B_0^2/2\mu_0)$, $\cos\theta \equiv (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{b})$ を導入すると

$$\left(\cos^2\theta - \frac{V^2}{v_A^2} \right) \boldsymbol{\xi}_1 + \left(\left(1 + \frac{\gamma\beta}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} - \cos\theta\mathbf{b} \right) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) - \cos\theta(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}_1)\hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (5.43)$$

となる. (5.43) と $\hat{\mathbf{k}}$ および \mathbf{b} とのスカラー積, (5.43) と $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{b}$ とのスカラー積は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\gamma\beta}{2} - \frac{V^2}{v_A^2} \right) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) - \cos\theta(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) = 0, \\ & \frac{\gamma\beta}{2} \cos\theta(\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) - \frac{V^2}{v_A^2} (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}_1) = 0, \\ & \left(\cos^2\theta - \frac{V^2}{v_A^2} \right) \mathbf{b} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\xi}_1) = 0. \end{aligned}$$

この方程式の解が磁気音波である. その一つの解は

$$V^2 = v_A^2 \cos^2\theta, \quad (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{B}_0) = 0$$

であり $\boldsymbol{\xi}_1$ が \mathbf{k} と \mathbf{B}_0 とに対して直交しているので振れアルフベン波という (9.4.1 節参照). もう一つの解は

$$\left(\frac{V}{v_A} \right)^4 - \left(1 + \frac{\gamma\beta}{2} \right) \left(\frac{V}{v_A} \right)^2 + \frac{\gamma\beta}{2} \cos^2\theta = 0, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}_1) = 0$$

である. $\boldsymbol{\xi}_1$ と \mathbf{k} と \mathbf{B}_0 とが同一平面にあるので圧縮モードである. 音速を $c_s^2 = \gamma p_0/\rho_{m0}$ とすると, (5.44) は

$$V^4 - (v_A^2 + c_s^2)V^2 + v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta = 0$$

となり, 解は

$$V_f^2 = \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 \right) + \left((v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta \right)^{1/2}, \quad (5.45)$$

$$V_s^2 = \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 \right) - \left((v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta \right)^{1/2} \quad (5.46)$$

である. (5.45) の解は圧縮アルフベン波 (9.4.1 節参照) といい, (5.46) を磁気音波の遅波という. アルフベン波の特徴的な速度

$$v_A^2 = \frac{B^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \quad (5.47)$$

をアルフベン速度 (Alfvén velocity) という。比抵抗 0 のプラズマは磁力線に凍り付く。磁力線の沿っては張力 $B^2/2\mu_0$ が働く。質量密度 ρ_m のプラズマが磁力線にくっついているので、磁気音波は磁力線の糸を伝わる波と考えることができる。

5.2.3 レイリ-テイラー (交換) 不安定性

z 軸を磁場の方向にとり、 x 軸を加速度の (反) 平行にとる。すなわち $\mathbf{g} = -g\hat{x}$ 。0 次の磁場 \mathbf{B}_0 、電流 \mathbf{j}_0 、密度 ρ_0 、圧力 p_0 は次式のように与えられている。

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0(x)), \quad \mu_0 \mathbf{j}_0 = -\frac{dB_0}{dx} \hat{y}, \quad \rho_0(x), \quad p_0(x).$$

0 次の方程式は

$$\frac{d}{dx} \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

である。1 次の項は

$$f_1(x, y, z) = f_1(x) \exp(ik_y y + ik_z z + \gamma t) \quad (5.48)$$

の形をとるとする。加速度の項をつけた運動方程式 (5.32) は次のようになる。

$$\gamma \rho_0 \mathbf{v} = -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0) - \rho_1 g \hat{x}. \quad (5.49)$$

(5.30) は

$$\gamma \rho_1 + v_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = 0, \quad (5.50)$$

非圧縮条件は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + ik_y v_y + ik_z v_z = 0, \quad (5.51)$$

\mathbf{B}_1 の各成分は

$$\mathbf{B}_1 = (ik_z v_x B_0, \quad ik_z v_y B_0, \quad ik_y v_y B_0 - \frac{\partial v_x B_0}{\partial x} B_0)$$

となる。(5.49) の各々の成分は次のようになる。

$$\gamma \rho_0 v_x = -\frac{\partial}{\partial x} p_1 + \frac{1}{\gamma \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(ik_y v_y B_0^2 + \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_0) B_0 \right) - \frac{1}{\gamma \mu_0} k_z^2 B_0^2 v_x - \rho_1 g, \quad (5.52)$$

$$\gamma \rho_0 v_y = -ik_y p_1 - \frac{1}{\gamma \mu_0} k_y^2 B_0^2 v_y + ik_y \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_0) B_0 - k_z^2 \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0} v_y, \quad (5.53)$$

$$\gamma \rho_0 v_z = -ik_z p_1 + ik_z \frac{1}{\gamma \mu_0} B_0 \frac{\partial}{\partial x} B_0 v_x. \quad (5.54)$$

(5.53) $\times ik_y$ + (5.54) $\times ik_z$ により、 p_1 をえる。 $(k^2 = k_y^2 + k_z^2)$ 。

$$p_1 = \frac{\gamma \rho_0}{k^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{k_y^2}{k^2} \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\gamma \mu_0} B_0 \frac{\partial B_0}{\partial x} v_x + ik_y \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0} v_y. \quad (5.55)$$

(5.55) を (5.52) に代入すると [5.1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\rho_0 \gamma^2 + \frac{(k_z B_0)^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - k^2 \left(\rho_0 \gamma^2 + \frac{(k_z B_0)^2}{\mu_0} - g \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) v_x = 0 \quad (5.56)$$

5.3 表面電流構成における円柱プラズマの不安定性

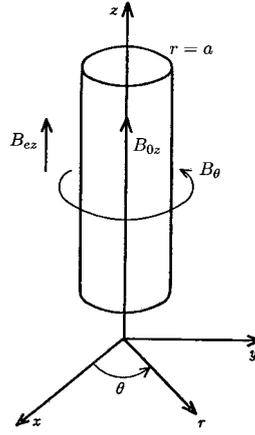


図 5.5 表面電流構成のプラズマ.

となる. (5.56) の変分形式は

$$\gamma^2 = \frac{\int \left(g \frac{\partial \rho_0}{\partial x} v_x^2 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{\mu_0} \left(v_x^2 + k^{-2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx}{\int \rho_0 \left(v_x^2 + k^{-2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx} \quad (5.57)$$

である. この積分は $v_x(x)$ の適切なテスト関数を選ぶことにより, γ^2 を近似的に求めることができる利点がある. (5.57) より判るとおり, 磁場に直角方向の波数をもつ揺動が最も危険である. そこで $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ とし, $\rho_0(x)$ の例として次の場合を考える.

$$\rho_0(x) = \rho_0 \quad (x > d), \quad \rho_0(x) = \rho_0 \frac{x}{d} \quad (d > x > 0), \quad \rho_0(x) = 0 \quad (0 > x).$$

密度の変化層の厚さが y 方向の揺動の波長に較べて小さい場合, すなわち $kd \ll 1$ のとき, テスト関数として $v_x \propto \exp(-|x|/\lambda)$ ($\lambda \gg d$) を選ぶと

$$\gamma^2 \approx \frac{2gk}{k\lambda + (k\lambda)^{-1}} \quad (5.58)$$

になる. $\lambda = k^{-1}$ とすると, 最大成長率 $\gamma^2 = gk$ がえられる. $v_x \propto \exp(-k|x|) \exp(iky)$, $k_z = 0$ は (5.51) の解であり, (5.9) と同じ結果を与える.

5.3 表面電流構成における円柱プラズマの不安定性

半径 a のプラズマ中に縦磁場 B_{0z} , 外部に縦磁場 B_{ez} および θ 方向の $B_\theta = \mu_0 I / (2\pi r)$ 磁場があり B_{0z} , B_{ez} は一定であるような表面電流構成を考える (図 5.5 参照). 変位 ξ として

$$\xi(r) \exp(im\theta + ikz) \quad (5.59)$$

を考える. 任意の変位は, このようなモードの重畳で表すことができる. 後で述べるエネルギー積分の中で $\nabla \cdot \xi$ の項はプラスに貢献し安定化に寄与するので, 非圧縮な揺動が最も危険である. すなわち

$$\nabla \cdot \xi = 0. \quad (5.60)$$

このとき, 磁場の揺動 $\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$ はプラズマ内部では

$$\mathbf{B}_1 = ikB_{0z}\xi \quad (5.61)$$

である. 運動方程式 (5.32) はつぎの形に還元される.

$$\left(-\omega^2 \rho_{m0} + \frac{k^2 B_{0z}^2}{\mu_0} \right) \xi = -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right). \quad (5.62)$$

記号 p^* を

$$p^* \equiv p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0}$$

と定義する。 $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ であるので、(5.62) より $\Delta p^* = 0$ である。すなわち

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) p^*(r) = 0. \quad (5.63)$$

$r = 0$ で特異点を持たない解は m 次の第1種変形ベッセル関数 $I_m(kr)$ で表されるから、 $p^*(r)$ は次のようになる。

$$p^*(r) = p^*(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)}.$$

したがって

$$\xi_r(a) = \frac{\frac{kp^*(a)}{I_m(ka)}}{\omega^2 \rho_{m0} - \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0}} I'_m(ka) \quad (5.64)$$

をえる。真空磁場の摂動 \mathbf{B}_{1e} は $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるから、 $\mathbf{B}_{1e} = \nabla \psi$, $\Delta \psi = 0$ である。 $r \rightarrow \infty$ のとき $\psi \rightarrow 0$ の境界条件より磁気スカラーポテンシャル ψ は

$$\psi = C \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} \exp(im\theta + ikz) \quad (5.65)$$

となる。ただし $K_m(kr)$ は m 次の第2種変形ベッセル関数である。境界条件 (5.33) や (5.31) より

$$\begin{aligned} p^*(a) &= p_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_{1e} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \left(\frac{B_e^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} - p_0 \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_{1e} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned}$$

をえる。 $B_\theta \propto 1/r$ かつ $\mathbf{B}_{1e} = \nabla \psi$ であるから、 $r = a$ において

$$p^*(a) = \frac{i}{\mu_0} (kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta) C - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 a} \xi_r(a) \quad (5.66)$$

となる。 $B_{1r} = \partial \psi / \partial r$ より、境界条件 (5.38) は次のように還元される。

$$Ck \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} = i(kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta) \xi_r(a). \quad (5.67)$$

(5.64), (5.66) および (5.67) より、分散式は

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_{0z}^2}{\mu_0 \rho_{m0}} - \frac{(kB_{ez} + (m/a) B_\theta)^2}{\mu_0 \rho_{m0} k^2} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)} - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \frac{1}{(ka)} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \quad (5.68)$$

に還元される。第1項、第2項は B_{0z}, B_{ez} による安定化の寄与を表す ($K_m/K'_m < 0$)。もし伝播ベクトル \mathbf{k} が磁場に直角な場合、すなわち

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_e) = kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta = 0$$

5.3 表面電流構成における円柱プラズマの不安定性

の場合は，第2項の安定化寄与が0になる．すなわち磁力線に沿って位相が一定になるような揺動は危険である．第3項は不安定に寄与する項である．

(i) $B_{ez} = 0, m = 0$ モード $B_{ez} = 0$ の場合において $m = 0$ を考えてみよう．これは円柱の形がソーセイジのようにくびれる摂動に対応するのでソーセイジ不安定性と呼ばれる．(5.68)は次のようになる．

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 - \frac{B_\theta^2}{B_{0z}^2} \frac{I_0'(ka)}{(ka)I_0(ka)} \right). \quad (5.69)$$

$I_0'(x)/xI_0(x) < 1/2$ であるので，安定条件は

$$B_{0z}^2 > B_\theta^2/2$$

である．

(ii) $B_{ez} = 0, m = 1$ モード $m = 1$ モードの摂動はプラズマ柱を折り曲げるようになるので，キンクモードと呼ばれる． $m = 1$ モードで $B_{ez} = 0$ の場合 (5.68) は

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 + \frac{B_\theta^2}{B_{0z}^2} \frac{1}{(ka)} \frac{I_1'(ka)}{I_1(ka)} \frac{K_0(ka)}{K_1'(ka)} \right) \quad (5.70)$$

となる． $(-K_1'(z) = K_0(z) + K_1(z)/z)$ ．長波長の摂動のとき $ka \rightarrow 0$ となり，(5.70)は

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 - \left(\frac{B_\theta}{B_{0z}} \right)^2 \ln \frac{1}{ka} \right) \quad (5.71)$$

をえる．長波長のキンクは不安定になる．

(iii) $|B_{ez}| > |B_\theta|$ の場合の不安定性 $|B_{ez}| \gg |B_\theta|$ のとき， $|ka| \ll 1$ の項が重要である．変形ベッセル関数を展開すると ($m > 0$ とする)，(5.63)は

$$\mu_0 \rho_{m0} \omega^2 = k^2 B_{0z}^2 + \left(kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta \right)^2 - \frac{m}{a^2} B_\theta^2 \quad (5.72)$$

となる． $\partial\omega/\partial k = 0$ すなわち $k(B_{0z}^2 + B_{ez}^2) + (m/a)B_\theta B_{ez} = 0$ のとき， ω^2 は最小になる．

$$\omega_{\min}^2 = \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0} a^2} \left(\frac{m^2 B_{0z}^2}{B_{ez}^2 + B_{0z}^2} - m \right) = \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0} a^2} m \left(m \frac{1-\beta}{2-\beta} - 1 \right). \quad (5.73)$$

β はベータ比とした．したがって $0 < m < (2-\beta)/(1-\beta)$ のとき不安定となる．ベータ比が小さいときは $m = 1$ と $m = 2$ のモードだけが不安定になりうる．

$m = 1$ モードのとき，もし

$$\left(\frac{B_\theta}{B_z} \right)^2 < (ka)^2 \quad (5.74)$$

を満たせば，(5.72)よりプラズマは安定になる．一般に系の長さ L は有限であり k は $2\pi/L$ より小さくはなれない．したがって

$$\left| \frac{B_\theta}{B_z} \right| < \frac{2\pi a}{L} \quad (5.75)$$

ならば，プラズマは安定である．この安定条件をクルスカル-シャラノフ条件 (Kruskal-Shafranov condition)[5.5, 5.6] という．

半径 b の導体壁がプラズマの周りにある場合は，外部磁場の磁気スカラーポテンシャルは，(5.65)の代わりに

$$\psi = \left(c_1 \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} + c_2 \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \right) \exp(im\theta + ikz)$$

で与えられる。境界条件 $B_{1er} = 0$ ($r = b$) より

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{I'_m(kb)K_m(ka)}{K'_m(kb)I_m(ka)}$$

となる。分散式は

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{B_{0z}^2}{\mu_0\rho_{m0}} - \frac{(kB_{ez} + (m/a)B_\theta)^2}{\mu_0\rho_{m0}k^2} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \\ &\times \left(\frac{K_m(ka)I'_m(kb) - I_m(ka)K'_m(kb)}{K'_m(ka)I'_m(kb) - I'_m(ka)K'_m(kb)} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_{m0}} \frac{1}{(ka)} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \end{aligned}$$

となる。変形ベッセル関数を $ka \ll 1, kb \ll 1$ として展開し

$$\mu_0\rho_{m0}\omega^2 = k^2 B_{0z}^2 + \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}} (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2 - \frac{m}{a^2} B_\theta^2$$

をえる。したがって壁とプラズマ境界とが近い程安定化の寄与が大きい。

トーラス系においては、トーラスの主半径を R とすれば $k = n/R$ (n は整数) である。ここでプラズマ境界 $r = a$ における安全係数 q_a を

$$q_a = \frac{aB_{ez}}{RB_\theta} \quad (5.76)$$

を導入すると、 $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})$ は

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta) = \frac{nB_\theta}{a} \left(q_a + \frac{m}{n} \right)$$

となる。 $m = 1, n = -1$ モードのクルスカル-シャフラノフ条件 (5.66) は安全係数を用いて

$$q_a > 1 \quad (5.77)$$

と書き表すことができる。これが安全係数と名付けられた理由である。

5.4 エネルギー原理

5.4.1 エネルギー積分

固有値問題を解くことは一般の場合困難な問題である。プラズマの微小変位によるポテンシャルエネルギーの変化を考え、その安定性を調べるエネルギー原理の方法がある。微小変位 ξ に関する運動方程式は

$$\rho_{m0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi) = -\widehat{\mathbf{K}} \cdot \xi \quad (5.78)$$

の形式で与えられる。ここで $\widehat{\mathbf{K}}$ は線形演算子である。この式を積分するとエネルギー保存則が得られる。

$$\frac{1}{2} \int \rho_{m0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int \xi \cdot \widehat{\mathbf{K}} \xi dr = \text{const.}$$

運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー W は

$$T \equiv \frac{1}{2} \int \rho_{m0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr, \quad W \equiv \frac{1}{2} \int \xi \cdot \widehat{\mathbf{K}} \xi dr = -\frac{1}{2} \int \xi \cdot \mathbf{F}(\xi) dr$$

である。したがってあらゆる可能な変位について

$$W > 0$$

5.4 エネルギー原理

であるならば、この系は安定である。これがエネルギー原理 (energy principle) による不安定性の判定条件である [5.7]。\$W\$ をエネルギー積分 (energy integral) とよぶ。

\$\widehat{\mathbf{K}}\$ 演算子がエルミート (Hermitic) 演算子であることを証明できる ([5.8], [2.3] の 9 章)。変位 \$\boldsymbol{\eta}\$ およびベクトル・ポテンシャル \$\mathbf{Q}\$ を考え、\$\boldsymbol{\xi}\$ や \$\mathbf{A}\$ の境界条件と同じ条件を満たすものとする。プラズマ-真空境界では

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = -\eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}}$$

プラズマ-真空境界では

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = 0$$

を満たす。プラズマの存在する内部領域 \$V_{\text{in}}\$ における積分は、(5.32) を用いると \$(\nabla \cdot (\mathbf{B}_1 \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0))) = (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla \times \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0)\$

$$\begin{aligned} & \int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{r} \\ &= \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\eta} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \right) d\mathbf{r} \\ & + \int_S \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0,\text{in}})}{\mu_0} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \right) dS \end{aligned} \tag{5.79}$$

となる。つぎに (5.79) の面積分について計算する。境界においては \$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = -\eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}}\$ の関係があるので以下の関係式をえる。

$$\begin{aligned} \int_S \eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}} dS &= \int_S \eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}} (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_S (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &= - \int_S \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{Q} \times (\nabla \times \mathbf{A})) dS = \int_{V_{\text{ex}}} \nabla \cdot (\mathbf{Q} \times (\nabla \times \mathbf{A})) d\mathbf{r} \\ &= \int_{V_{\text{ex}}} ((\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{Q} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) d\mathbf{r} \\ &= \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

ここで積分領域 \$V_{\text{ex}}\$ はプラズマ外部の領域を表す。(5.79) における面積分の項と上記面積分の項との差は、境界条件は (5.33) を用いて

$$\begin{aligned} & \int_S \eta_m \left(\frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}}}{\mu_0} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 \right) dS \\ &= \int_S \eta_m (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS \\ &= \int_S \eta_m \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS \end{aligned}$$

となる。ここで \$\mathbf{n}_0 \times \nabla (p_0 + B_{0,\text{in}}^2/2\mu_0 - B_{0,\text{ex}}^2/2\mu_0) = 0\$ の関係を用いた。したがってエネルギー積分は次のように還元される。

$$\int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{r} = \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0)) \cdot (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +(\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) - \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\eta} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \, d\mathbf{r} \\
& + \frac{1}{\mu_0} \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, d\mathbf{r} + \int_S \eta_n \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS. \quad (5.80)
\end{aligned}$$

ポテンシャル・エネルギー積分 W はプラズマ内部の領域 V_{in} 、プラズマ境界面 S 、プラズマ外部の真空磁場 V_{ex} での積分項 W_p , W_S , W_V の和で表される。すなわち

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{r} = W_p + W_S + W_V, \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}
W_p &= \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0))^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \right) d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \left(\frac{B_1^2}{\mu_0} - p_1 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1) \right) d\mathbf{r}, \quad (5.82)
\end{aligned}$$

$$W_S = \frac{1}{2} \int_S \xi_n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS, \quad (5.83)$$

$$W_V = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{A})^2 d\mathbf{r} = \int_{V_{\text{ex}}} \frac{B_1^2}{2\mu_0} d\mathbf{r}. \quad (5.84)$$

安定条件はあらゆる $\boldsymbol{\xi}$ に対して $W > 0$ である。またこのエネルギー原理によって揺動の振動数を求めることもできる。揺動の時間変化を $\exp(-i\omega t)$ とすると、運動方程式は

$$\widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} - \omega^2 \rho_{m0} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (5.85)$$

で与えられる。固有値問題の解は変分原理に基づく解と同等である。

$$\delta L = 0 \quad L = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r} - \omega^2 \int \rho_{m0} \boldsymbol{\xi}^2 d\mathbf{r}. \quad (5.86)$$

((4.48) および図 4.15 参照).

$\widehat{\mathbf{K}}$ は共役 (エルミート) 演算子であるから ω^2 は実数である。

$$\omega^2 = \frac{\int \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r}}{\int \rho_{m0} \boldsymbol{\xi}^2 d\mathbf{r}}.$$

したがって比抵抗 0 の電磁流体力学の取り扱いにおいては、単調増大、減少または純振動の揺動のみが表れることになる。

5.4.2 解釈しやすい形のエネルギー積分

前節で導かれたエネルギー積分 (5.82) は、もう少し解釈しやすい次のような形に整えることができる [5.9].

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \int \left(\gamma p (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{1\perp}|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left| \mathbf{B}_{1\parallel} - \mathbf{B} \frac{\mu_0 (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)}{B^2} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})}{B^2} (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_1 - 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \right) d\mathbf{r}. \quad (5.87)
\end{aligned}$$

(5.87) の被積分項の第 1 項は音波の項であり、第 2 項はシア-アルフベン波、第 3 項は磁気音波 (圧縮アルフベン波、速波アルフベン波)、第 4 項はキンクモード、最後の第 5 項はバルーニング

5.5 分布電流構成における円柱プラズマの不安定性

モードの項である。\$\boldsymbol{\kappa}\$ は磁力線の曲率ベクトルである。(5.87) の導入は [5.10] の 5.5.2 節に詳しく述べてある。

軸対称性トーラスのエネルギー積分はもっと取り扱いやすい形に還元できる [5.11]。このエネルギー積分の導入過程は [5.10] の 5.5.2 節に詳しく記述されている。

5.5 分布電流構成における円柱プラズマの不安定性

5.5.1 分布電流構成における円柱プラズマのエネルギー積分

5.3 節で取り扱った円柱プラズマの鋭い境界の構成は極端な例であり、一般にはプラズマ電流は分布している。平衡状態として次の構成を考える。

$$p_0(r), \quad \mathbf{B}_0(r) = (0, B_\theta(r), B_z(r)). \quad (5.88)$$

変位 \$\boldsymbol{\xi}\$ は

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(r) \exp(im\theta + ikz)$$

とする。磁場の揺動 \$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)\$ は

$$B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\xi_r, \quad (5.89)$$

$$B_{1\theta} = ikA - \frac{d}{dr}(\xi_r B_\theta), \quad (5.90)$$

$$B_{1z} = -\left(\frac{imA}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r B_z)\right) \quad (5.91)$$

である。ただし

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = kB_z + \frac{m}{r}B_\theta,$$

$$A = \xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta = (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)_r. \quad (5.92)$$

ポテンシャルエネルギー \$W\$ の圧力項

\$\gamma p_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) = (\gamma - 1)p_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})(\nabla \cdot p_0 \boldsymbol{\xi})\$ は負でない寄与をするので、危険な非圧縮性の変位 \$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0\$ を考えればよい。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) + \frac{im}{r}\xi_\theta + ik\xi_z = 0.$$

非圧縮性と \$A\$ の式 (5.92) から、\$\xi_\theta\$ および \$\xi_z\$ は、\$\xi_r\$ と \$A\$ を用いて

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_\theta = ikA - \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r),$$

$$-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_z = \frac{imA}{r} + \frac{B_z}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r)$$

で表される。

\$A\$ を (5.82) の被積分項を最小にするように選ぶ。すなわち

$$A = -\frac{i}{k^2 + (m^2/r^2)} \left(\left(kB_\theta - \frac{m}{r}B_z \right) \frac{d\xi_r}{dr} - \left(kB_\theta + \frac{m}{r}B_z \right) \frac{\xi_r}{r} \right).$$

そうすると全エネルギー積分 (5.81) \$W = W_p + W_V\$ は (\$W_S = 0\$ となる)

$$\left. \begin{aligned} W_p &= \frac{\pi}{2\mu_0} \int_0^a \left(f \left| \frac{d\xi_r}{dr} \right|^2 + g |\xi_r|^2 \right) dr + W_a, \\ W_a &= \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{k^2 B_s^2 - (m/a)^2 B_a^2}{k^2 + (m/a)^2} |\xi_r(a)|^2, \\ W_V &= \frac{\pi}{2\mu_0} \int_a^b \left(\frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \left| \frac{d\zeta}{dr} \right|^2 + \frac{1}{r} |\zeta|^2 \right) dr \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

$$f = \frac{r(kB_z + (m/r)B_\theta)^2}{k^2 + (m/r)^2}, \quad (5.94)$$

$$g = \frac{1}{r} \frac{(kB_z - (m/r)B_\theta)^2}{k^2 + (m/r)^2} + r \left(kB_z + \frac{m}{r} B_\theta \right)^2 - \frac{2B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{k^2 B_z^2 - (m/r)^2 B_\theta^2}{k^2 + (m/r)^2} \right), \quad (5.95)$$

$$\zeta \equiv rB_{e1r}$$

となる. この詳しい過程は [5.10] の 8 章に詳しい. B_{e1r} はプラズマ境界 $r = a$ と導体壁 $r = b$ 間の真空における揺動磁場の半径方向成分である. ($r < a$ における B_{1r} は $B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_r$). 平衡の式 $(d/dr)(\mu_0 p + B^2/2) = -B_\theta^2/r$ を用いると, (5.95) は

$$g = \frac{2k^2}{k^2 + (m/r)^2} \mu_0 \frac{dp_0}{dr} + r \left(kB_z + \frac{m}{r} B_\theta \right)^2 \frac{k^2 + (m/r)^2 - (1/r)^2}{k^2 + (m/r)^2} + \frac{(2k^2/r)(k^2 B_z^2 - (m/r)^2 B_\theta^2)}{(k^2 + (m/r)^2)^2} \quad (5.96)$$

に還元される. W_p を最小にする ξ_r および W_V を最小にする ζ はオイラー方程式

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{k^2 + (m/r)^2} \frac{d\xi_r}{dr} \right) - g\xi_r = 0, \quad r \leq a, \quad (5.97)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \frac{d\zeta}{dr} \right) - \frac{1}{r}\zeta = 0, \quad r > a \quad (5.98)$$

の解である. $r \ll a$ の領域では (5.79) は

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{d\xi_r}{dr} \right) - (m^2 - 1)r\xi_r = 0$$

になるので, $r \rightarrow 0$ のとき, 二つの解 $\xi_r \propto r^{m-1}$, r^{-m-1} がある. ξ_r は $r = 0$ において有限であるので, ξ_r は次の境界条件を満たさなければならない.

$$\xi_r \propto r^{m-1} \quad (r \rightarrow 0),$$

$$ia(kB_z(a) + \frac{m}{a}B_\theta(a))\xi_r(a) = \zeta(a), \quad r = a$$

$$\zeta(b) = 0.$$

(5.98) の解を用いると, 部分積分により

$$W_V = \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \left| \frac{d\zeta}{dr} \zeta^* \right|_a^b$$

となる. $b > r > a$ における (5.98) の解は

$$\zeta = i \frac{I'_m(kr)K'_m(kb) - K'_m(kr)I'_m(kb)}{I'_m(ka)K'_m(kb) - K'_m(ka)I'_m(kb)} r \left(kB_s + \frac{m}{a}B_a \right) \xi_r(a) \quad (5.99)$$

である.

5.5.2 スイダム条件

5.5 分布電流構成における円柱プラズマの不安定性

前節の W_p の表式の積分項において f は常に $f \geq 0$ であるので f の項は常に安定化に作用し、 g の表式 (5.95) において第1項、第2項は安定化に寄与するが第3項、第4項は不安定に寄与する可能性がある。 W_p に対するオイラーの方程式 (5.97) の特異点

$$f \propto (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 = 0$$

がプラズマ領域内のある点 $r = r_0$ にあるとすると、 $r = r_0$ 付近の安定化の寄与は小さい。したがって特異点付近の局所モードは危険である。

$$r - r_0 = x, \quad f = \alpha x^2, \quad g = \beta, \quad \beta = \frac{2B_\theta^2}{B_0^2} \mu_0 \left. \frac{dp_0}{dr} \right|_{r=r_0},$$

$$\alpha = \frac{r_0}{k^2 r_0^2 + m^2} \left(kr \frac{dB_z}{dr} + kB_z + m \frac{dB_\theta}{dr} \right)_{r_0}^2 = \frac{r B_\theta^2 B_z^2}{B^2} \left(\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} \right)_{r_0}^2, \quad \tilde{\mu} \equiv \frac{B_\theta}{r B_z}$$

の記号を導入すると、オイラーの式は

$$\alpha \frac{d}{dr} \left(x^2 \frac{d\xi_r}{dx} \right) - \beta \xi_r = 0$$

となる。解は

$$\xi_r = c_1 x^{-n_1} + c_2 x^{-n_2}$$

で与えられ、 n_1 および n_2 は

$$n^2 - n - \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad n_i = \frac{1 \pm (1 + 4\beta/\alpha)^{1/2}}{2} \quad (i = 1, 2)$$

である。 $\alpha + 4\beta > 0$ のとき n_1, n_2 は実数である。 $n_1 + n_2 = 1$ の関係がある。 $n_1 < n_2$ として、 x^{-n_1} を小さい解 (small solution) という。 n が複素数 ($n = \gamma \pm i\delta$) ならば、 ξ_r は $\exp((-\gamma \mp i\delta) \ln x)$ の形をとり、 ξ_r は振動的になる。 ξ_r として r_0 の近傍 ε の範囲で0でないものを考える。

$$r - r_0 = \varepsilon t, \quad \xi_r(r) = \xi(t), \quad \xi(1) = \xi(-1) = 0$$

とする。 W_p は

$$W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \varepsilon \int_{-1}^1 \left(\alpha t^2 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 + \beta |\xi|^2 \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

となる。Schwartz の不等式より

$$\int_{-1}^1 t^2 |\xi'|^2 dt \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt \geq \left| \int_{-1}^1 t \xi' \xi^* dt \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt \right)^2$$

であるから、 W_p は

$$W_p > \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{1}{4} (\alpha + 4\beta) \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt$$

となり、 $\alpha + 4\beta > 0$ が安定条件となる。すなわち

$$\frac{r}{4} \left(\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_z^2} \frac{dp_0}{dr} > 0. \quad (5.100)$$

$r(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu})$ をシアパラメーター (shear parameter) という。通常第2項は負である ($dp_0/dr < 0$)。第1項 $(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu})^2 > 0$ はシアの安定化効果を表している。(5.100) の条件をスイダム条件 (Suydam's criterion) という [5.12]。これは安定性の必要条件であり、必ずしも充分条件とはいえない。Newcomb は円筒プラズマの必要充分条件を導いた。彼の12の定理は [5.13] に記述されている。

5.5.3 トカマク配位

トカマク配位においては縦磁場 B_s が θ 方向の成分 B_a に比べて非常に大きい ($B_a \ll B_s$). このような配位における安定性について前述の結果を適用してみよう. $r \leq a$ の領域にプラズマがあり $a \leq r \leq b$ は真空, $r = b$ に理想導体があるとする. また $ka \ll 1, kb \ll 1$ とする. W_V における ζ は (5.99) より

$$\zeta = i \frac{(mB_a + kaB_s)}{1 - (a/b)^{2m}} \xi_r(a) \frac{a^m}{b^m} \left(\frac{b^m}{r^m} - \frac{r^m}{b^m} \right)$$

であり, W_V は

$$W_V = \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{(mB_a + kaB_s)^2}{m} \xi_r^2(a) \lambda, \quad \lambda \equiv \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}}$$

となる. トーラスの周期条件

$$\frac{2\pi n}{k} = -2\pi R$$

(n は整数) より, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})$ は安全係数 q_a を用いて

$$a(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = mB_a + kaB_s = mB_a \left(1 - \frac{nq_a}{m} \right)$$

と書ける. (5.93) における W_a の項は

$$\begin{aligned} k^2 B_s^2 - \left(\frac{m}{a} \right)^2 B_a^2 &= \left(kB_s + \frac{m}{a} B_a \right)^2 - 2 \frac{m}{a} B_a \left(kB_s + \frac{m}{a} B_a \right) \\ &= \left(\frac{nB_a}{a} \right)^2 \left(\left(1 - \frac{nq_a}{m} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{nq_a}{m} \right) \right) \end{aligned}$$

となる. したがってエネルギー積分は

$$\begin{aligned} W_P + W_V &= \frac{\pi}{2\mu_0} B_a^2 \xi_r^2(a) \left(\left(1 - \frac{nq_a}{m} \right)^2 (1 + m\lambda) - 2 \left(1 - \frac{nq_a}{m} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{2\mu_0} \int \left(f \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 + g \xi_r^2 \right) dr \end{aligned} \quad (5.101)$$

となる. (5.101) の第1項は,

$$1 - \frac{2}{1 + m\lambda} < \frac{nq_a}{m} < 1 \quad (5.102)$$

のとき, 負になる. $nq_a/m \sim 1$ の仮定は $ka \sim mB_a/B_s$ を意味する. $B_a/B_s \ll 1$ であるから $ka \ll 1$ の仮定と矛盾していない. $m = 1$ のとき g の表式 (5.96) の第2項の $(m^2 - 1)/m^2$ の寄与が0になるので g は $k^2 r^2$ のオーダーになり $kr \ll 1$ であるから小さい. $f(d\xi_r/dr)^2$ の項は $\xi_r \sim \text{const.}$ とすれば充分小さくできる. したがって $m = 1$ の場合, $a^2/b^2 < nq_a < 1$ のときは, 被積分項の寄与は無視でき, $W < 0$ になる. $m = 1$ モードは電流分布の形にほとんど依らず (5.102) の範囲で不安定になる. クルスカル-シャフラノフの条件を表面電流構成において導いたが分布電流の構成でも同様の形が導かれる由縁である. 成長率 $\gamma^2 = -\omega^2$ は

$$\gamma^2 \simeq \frac{-W}{\int (\rho_{m0} |\boldsymbol{\xi}|^2 / 2) d\mathbf{r}} = \frac{1}{\langle \rho_{m0} \rangle} \frac{B_a^2}{\mu_0 a^2} \left(2(1 - nq_a) - \frac{2(1 - nq_a)^2}{1 - a^2/b^2} \right), \quad (5.103)$$

$$\langle \rho_{m0} \rangle = \frac{\int \rho_{m0} |\boldsymbol{\xi}|^2 2\pi r dr}{\pi a^2 \xi_r^2(a)}$$

となる. また最大の成長率は $\gamma_{\max}^2 \sim (1 - a^2/b^2) B_a^2 / (\mu_0 \langle \rho \rangle a^2)$ である.

5.6 Hain-Lüst の電磁流体運動方程式

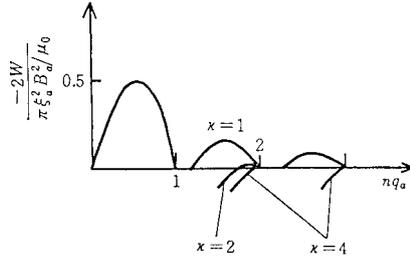


図 5.6 キンク不安定性の成長率 γ と nq_a との関係 [5.6]. $(-2W/(\pi\xi_a^2 B_a^2/\mu_0) = \gamma^2 a^2 \times (\rho_{m0}\mu_0/B_a^2))$.

$m \neq 1$ の場合は g の表式 (5.95) の第 2 項 $(m^2 - 1)/m^2$ の寄与が大きく $g \sim 1$ となる。したがって W_p の被積分項の寄与を一応考慮しなければならない。 $g < 0$ の領域は $\chi \equiv -krB_z/B_\theta = nq(r)$ として $\chi_1 < \chi < \chi_2$ となる。ただし

$$\chi_{1,2} = m - \frac{2}{m(m^2 - 1)} k^2 r^2 \pm \frac{2k^2 r^2}{m(m^2 - 1)} \left(1 - \frac{m^2(m^2 - 1) \mu_0 r p'_0}{2k^2 r^2 B_\theta^2} \right)^{1/2}. \quad (5.104)$$

$kr \ll 1$ であるから $g < 0$ の範囲は $nq(r) = m$ の特異点のせまい近傍であり、 W_p への負の寄与はあまり大きくなく無視できる。 nq_a/m の値が (5.102) の範囲にある場合は、プラズマ表面の変位 $\xi_r(a)$ の項により、不安定になる。電流分布が $j(r) = j_0 \exp(-\kappa^2 r^2/a^2)$, $b = \infty$ の場合のオイラー方程式の解を用いて (5.103) から $\gamma^2 = -W/\int \rho_{m0} |\xi|^2 / 2dr$ を計算し、 γ^2 の q_a に対する依存性を求めることができる。その結果を図 5.6 に示す [5.6].

nq_a/m が (5.102) の範囲外にあるときは表面におけるプラズマの変位はあまり影響せず、むしろ W_p における積分項が不安定性に主な役割を果たす。しかしながら (5.104) の考察により不安定性の成長率 (5.103) の γ^2 よりおよそ $k^2 r^2$ 倍だけ小さい。

逆転磁場ピンチ (12.1 節参照) の配位の安定性の判定には、 B_a , B_s の大きさが同じ程度であるという特徴に留意する必要がある。 $B_a \ll B_s$ あるいは $ka \ll 1$ の近似は使えないからである。この場合の解析は文献 [5.14] に要領よくまとめられている。

5.6 Hain-Lüst の電磁流体運動方程式

変位 ξ を

$$\xi(r, \theta, z, t) = \xi(r) \exp i(m\theta + kz - \omega t)$$

とし、平衡磁場 B が

$$B(r) = (0, B_\theta(r), B_z(r))$$

で与えられているとき、電磁流体力学運動方程式の (r, θ, z) 成分は

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_r &= \frac{d}{dr} \left(\mu_0 \gamma p (\nabla \cdot \xi) + B^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + iD(\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta) \right) \\ &\quad - \left(F^2 + r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 \right) \xi_r - 2ik \frac{B_\theta}{r} (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_\theta &= i \frac{m}{r} \gamma \mu_0 p (\nabla \cdot \xi) + iDB_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + 2ik \frac{B_\theta B_z}{r} \xi_r \\ &\quad - H^2 B_z (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_z &= ik \gamma \mu_0 p (\nabla \cdot \xi) - iDB_\theta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) - 2ik \frac{B_\theta^2}{r} \xi_r \\ &\quad + H^2 B_\theta (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), \end{aligned} \quad (5.107)$$

ただし

$$F = \frac{m}{r}B_\theta + kB_z = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}), \quad D = \frac{m}{r}B_z - kB_\theta, \quad H^2 = \left(\frac{m}{r}\right)^2 + k^2,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) + \frac{im}{r}\xi_\theta + ik\xi_z$$

となる. (5.106), (5.107) によって ξ_θ, ξ_z を消去すると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left(\frac{(\mu_0 \rho_m \omega^2 - F^2)}{\Delta} (\mu_0 \rho_m \omega^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) - \gamma \mu_0 p F^2) \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) \right) \\ & + \left[\mu_0 \rho_m \omega^2 - F^2 - 2B_\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right) - \frac{4k^2}{\Delta} \frac{B_\theta^2}{r^2} (\mu_0 \rho_m \omega^2 B^2 - \gamma \mu_0 p F^2) \right. \\ & \left. + r \frac{d}{dr} \left(\frac{2kB_\theta}{\Delta r^2} \left(\frac{m}{r}B_z - kB_\theta \right) (\mu_0 \rho_m \omega^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) - \gamma \mu_0 p F^2) \right) \right] \xi_r \\ & = 0, \end{aligned} \tag{5.108}$$

ただし Δ は

$$\Delta = \mu_0^2 \rho_m^2 \omega^4 - \mu_0 \rho_m \omega^2 H^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) + \gamma \mu_0 p H^2 F^2$$

となる. この方程式は Hain-Lüst によって導かれた [5.15]. この解はプラズマ領域 $0 < r < a$ における $\xi_r(r)$ を与える. 真空領域 $a < r < a_w$ (導体壁の半径を a_w とする) における解は

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$$

であるので

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \psi, \quad \Delta \psi = 0,$$

$$\psi = (bI_m(kr) + cK_m(kr)) \exp(im\theta + ikz),$$

$$B_{1r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = (bI'_m(kr) + cK'_m(kr)) \exp(im\theta + ikz)$$

となる. プラズマ領域の B_{1r} は

$$B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_r = iF\xi_r$$

である. $r = a$ における境界条件は

$$B_{1r}(a) = iF\xi_r(a),$$

$$B'_{1r}(a) = i(F'\xi_r(a) + F\xi'_r(a))$$

となり, 係数 b, c を決めることができる.

この方程式を固有値問題として取り扱うには境界条件を定めなければならない. 一つは $r = 0$ において $\xi_r \propto r^{m-1}$, もう一つは $r = a_w$ において $B_{1r}(a_w) = 0$ である. 適切な ω^2 の値を選び $r = 0$ から出発して (5.105) の $\xi_r(r)$ を解き, 導体壁 $r = a_w$ において $B_{1r}(a_w) = 0$ となるように操作を繰り返す. そして成長率 $\gamma^2 \equiv -\omega^2$ を求めることができる [5.16].

5.7 バルーンング不安定性

ある擾乱の伝播ベクトル \mathbf{k} の磁場に平行な成分を $k_{\parallel} = \Pi(k, B)/B$ とするとき, 交換不安定性は $k_{\parallel} = 0$ であり, 平均最小磁場はこの不安定性の安定化に寄与できる. 前に述べたスイダム条件は $k_{\parallel} = 0$ 付近の局所モードに関するものであった. この節では $k_{\parallel} \neq 0$ ではあるけれども

5.7 バルーンング不安定性

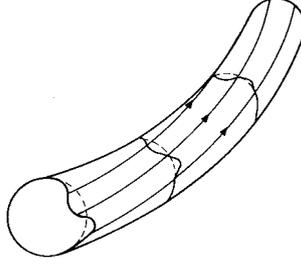


図 5.7 バルーンングモード.

$|k_{\parallel}/k_{\perp}| \ll 1$ の場合を調べる. トーラス系の場合, 平均最小磁場であってもトーラス系の外側の悪い領域で局所的に $k_{\parallel} \neq 0$ の揺動が成長する場合がある. このような不安定性をバルーンングモード (ballooning mode) という (図 5.7 参照). このバルーンングモードが起こらないためにはこれから述べるようにプラズマのベータ比 β に対して上限 β_c がある. 平均最小磁場 $\min.B$ の尺度が良いほど β_c をより大きくとれる. またシアアの導入によってバルーンング・モードの成長率を押さえることができ安定化することができる. したがって $\min.B$ の性質とシアアは閉じ込め磁場系の重要な尺度になる [5.17].

エネルギー積分 δW は

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \left((\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0))^2 - (\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \right. \\ \left. + \gamma \mu_0 p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \mu_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \right) d\mathbf{r}$$

で与えられる. $\boldsymbol{\xi}$ として

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2}$$

と表される場合を考える ($\boldsymbol{\xi}_{\parallel} = 0$). ϕ は揺動電場のスカラーポテンシャルの時間積分と見做すことができる.

$$\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0 = \nabla_{\perp} \phi$$

であるので, エネルギー積分は

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \left((\nabla \times \nabla_{\perp} \phi)^2 - \left(\frac{(\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \times \mu_0 \mathbf{j}_0}{B_0^2} \right) \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \phi \right. \\ \left. + \gamma \mu_0 p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \mu_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \right) d\mathbf{r}$$

に還元される. $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2} \right) = \nabla \phi \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0^2} \right) = \nabla \phi \cdot \left(\left(\nabla \frac{1}{B^2} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{B^2} \nabla \times \mathbf{B} \right)$$

である. () における第 2 項は, 低ベータ比の場合は第 1 項に比べて無視できる. $\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$ を用いると δW は次のようになる.

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int (\nabla \times \nabla_{\perp} \phi)^2 + \frac{\mu_0 \nabla p_0 \cdot (\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \left(\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \phi}{B_0^2} \right) \\ - \frac{\mu_0 (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \nabla_{\perp} \phi \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \phi + \gamma \mu_0 p_0 \left(\nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \right)^2 d\mathbf{r}$$

$$+\frac{\mu_0 \nabla p_0 \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi)}{B_0^2} \left(\nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \right) dr.$$

z 座標を磁力線に沿った座標にとり, r を磁気面に垂直な径方向の座標, θ をポロイダル角とする. 各々のベクトル量の r, θ, z 成分は近似的に下記のようになる.

$$\nabla p_0 = (p'_0, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, B_{\theta}(r), B_0(1 - rR_c^{-1}(z))),$$

$$\nabla \phi = (\partial \phi / \partial r, \partial \phi / r \partial \theta, \partial \phi / \partial z), \quad \phi(r, \theta, z) = \phi(r, z) \text{Re}(\exp im\theta).$$

$R_c(z)$ は磁力線の曲率半径を表し,

$$\frac{1}{R_c(z)} = \frac{1}{R_0} \left(-w + \cos 2\pi \frac{z}{L} \right)$$

とする. $R_c(z) < 0$ が負の良い曲率であるから平均最小磁場であるために $w > 0$ ($R_0 > 0$) とする. また悪い曲率の領域も存在するためには $w < 1$ でなくてはならない. $B_{\theta}/B_0 \approx r/R_0 \approx r/L$ は小さい量であるとする

$$\nabla_{\perp} \phi = \nabla \phi - \nabla_{\parallel} \phi \approx \text{Re} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{im}{r} \phi, 0 \right),$$

$$\nabla \times (\nabla_{\perp} \phi) \approx \text{Re} \left(\frac{-im}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r}, 0 \right),$$

$$\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi \approx \text{Re} \left(\frac{-im}{r} B_0 \phi, B_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}, 0 \right)$$

となるので, δW は ($\phi(r, z)$ は複素数)

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{m^2}{r^2} \left(\left| \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \right|^2 - \frac{\beta}{r_p R_c(z)} |\phi(r, z)|^2 \right) 2\pi r dr dz$$

となる. ただし $-p_0/p'_0 = r_p$, $\beta = p_0/(B_0^2/2\mu_0)$ とした. 第1項はエネルギー積分の被積分項の $(\nabla \times \nabla_{\perp} \phi)^2$ に由来し, 磁力線を曲げるエネルギーである. これは安定化に寄与する.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \approx ik_{\parallel} \phi \sim i \frac{\phi}{q_s R}.$$

第2項は $\xi \cdot \nabla p_0$ に由来し, 圧力による動きに費やされるエネルギーであり, 不安定に寄与する. したがってバルーニングモードによるベーター上限は下記のように与えられる.

$$\beta < \frac{r_p}{Rq_s^2}. \quad (5.109)$$

磁気シアがある配位の場合は, より厳密な解析が必要である. トロイダルモード数が大きく ($n \gg 1$) かつ $m - nq \sim 0$ (5.5節 参照) のバルーニングモードに対して安定なシアパラメーター S と圧力勾配の尺度 α の領域は 図 5.8 に示されるようになる [5.18]. シアパラメーター S はつぎのように定義される.

$$S = \frac{r}{q_s} \frac{dq_s}{dr}.$$

ここで q は安全係数 ($q \equiv 2\pi/\iota$: ι は回転変換角) で, 圧力勾配の尺度 α はつぎのように定義される.

$$\alpha = -\frac{q_s^2 R}{B^2/2\mu_0} \frac{dp}{dr}.$$

5.7 バルーンング不安定性

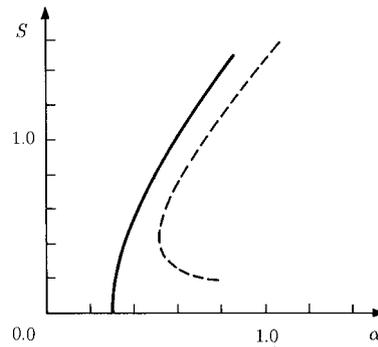


図 5.8 バルーンングモードに対して安定な最大圧力勾配 α とシアパラメーター S の関係. 点線は揺動に対してある制限を加えた場合の安定領域を示す [5.18].

大きな正のシア領域 ($S > 0.8$) における最大安定圧力勾配を直線 $\alpha \sim 0.6S$ で近似する (図 5.8 参照).

$$\beta = \frac{1}{B_0^2/2\mu_0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p 2\pi r dr = -\frac{1}{B_0^2/2\mu_0} \frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr$$

の関係より, バルーンングに対して安定な最大ベータ値は

$$\beta = 0.6 \frac{a}{R} \left(\frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{1}{q_s^3} \frac{dq_s}{dr} r^3 dr \right)$$

となる. 最適な q の分布の場合, 最大ベータ値は

$$\beta_{\max} \sim 0.28 \frac{a}{R q_a} \quad (q_a > 2) \quad (5.110)$$

で与えられる [5.18]. ここで q_a はプラズマ境界における安全係数である. また (5.110) を導くにあたって $q_a > 2$, $q_0 = 1$ を仮定した. このベータ上限の式は, 計算機シミュレーションによる Troyon の結果 (11.45) と整合している.

負のシア領域でバルーンングモードが安定であることが図 5.9 によって示されていることに留意する必要がある. シアパラメーター S が負である場合 ($q(r)$ が外側に向かって減る), 外側の磁力線はトーラスの小軸の周りを内側の磁力線より速く回る. プラズマの圧力が増加すると, プラズマは大半径の外側に広がろうとする (シャフラノフシフト, 11.2.4 節参照). そのためトカマクの外側でポロイダル磁場が圧縮され強くなる. 圧力勾配の強い領域ではポロイダル磁場が大きくなり, 磁力線は小軸の周りをますます速く回る. そしてシアパラメーターはより負になる [5.19].

現実には, 通常のコマク配位では, シアパラメーターは正である. しかしながら, 負磁気シア領域でバルーンングモードが安定であるという事実は, バルーンングモードに対して安定なコマク配位を研究する上で重要である.

$$\frac{r}{R q_s} = \frac{B_\theta}{B_0} = \frac{1}{B_0} \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_0^r j(r) 2\pi r dr$$

であるので, 安全係数の形 $q(r)$ は

$$\frac{1}{q_s(r)} = \frac{R}{2B_0} \left(\frac{\mu_0}{\pi r^2} \int_0^r j 2\pi r dr \right) \equiv \frac{\mu_0 R}{2B_0} \langle j(r) \rangle_r$$

のようになる. したがってプラズマ中心部でへこんだ電流密度分布 (hollow current profile) の場合に負のシア配位が実現する. 負シア配位の MHD 安定性の詳しい解析は [5.20] を参照されたい.

5.8 密度勾配と温度勾配がある場合の η_i モード

z 方向の磁場中に密度勾配 dn_0/dr , および温度勾配 dT_{e0}/dr , dT_{i0}/dr をもつプラズマがあるとする. この系に擾乱がおきたとし, イオン密度が $n_i = n_{i0} + \tilde{n}_i$ とする. 連続の式

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0$$

は, 線形化により

$$-i\omega \tilde{n}_i + \tilde{v}_r \frac{\partial n_0}{\partial r} + n_0 i k_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} = 0 \quad (5.111)$$

となる. 揺動項は $\exp i(k_{\theta} r \theta + k_{\parallel} z - \omega t)$ で変化するものとし, $k_{\theta}, k_{\parallel}$ は θ, z 方向の伝播ベクトル成分である. 揺動静電ポテンシャルを $\tilde{\phi}$ とすると, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度の r 成分は $\tilde{v}_r = E_{\theta}/B = ik_{\theta} \tilde{\phi}/B$ である. 電子密度はボルツマン分布に従うと考えられるので

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \quad (5.112)$$

となる. イオンの運動方程式の磁力線平行成分は

$$n_i m_i \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\nabla_{\parallel} p_i - en \nabla_{\parallel} \phi$$

であり, 線形化すると

$$-i\omega n_i m_i \tilde{v}_{\parallel} = -ik_{\parallel} (\tilde{p}_i + en_0 \tilde{\phi}) \quad (5.113)$$

となる. 断熱状態方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i n_i^{-5/3}) + \mathbf{v} \cdot \nabla (p_i n_i^{-5/3}) = 0$$

であり, 線形化すると

$$-i\omega \left(\frac{\tilde{p}_i}{p_i} - \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}_i}{n_i} \right) - \frac{ik_{\theta} \tilde{\phi}}{B} \left(\frac{dT_{i0}}{dr} - \frac{2}{3} \frac{dn_0}{dr} \right) = 0 \quad (5.114)$$

となる. 電子ドリフト周波数 $\omega_{ne}^*, \omega_{Te}^*$ およびイオンドリフト周波数 $\omega_{ni}^*, \omega_{Ti}^*$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \omega_{ne}^* &\equiv -\frac{k_{\theta} T_e}{e B n_e} \frac{dn_e}{dr}, & \omega_{ni}^* &\equiv \frac{k_{\theta} T_i}{e B n_i} \frac{dn_i}{dr}, \\ \omega_{Te}^* &\equiv -\frac{k_{\theta}}{e B} \frac{dT_e}{dr}, & \omega_{Ti}^* &\equiv \frac{k_{\theta}}{e B} \frac{dT_i}{dr}. \end{aligned}$$

また温度勾配の密度勾配に対する比を次のように定義する.

$$\eta_e \equiv \frac{dT_e/dr}{T_e} \frac{n_e}{dn_e/dr} = \frac{d \ln T_e}{d \ln n_e}, \quad \eta_i \equiv \frac{dT_i/dr}{T_i} \frac{n_i}{dn_i/dr} = \frac{d \ln T_i}{d \ln n_i}.$$

これらの量の間には

$$\omega_{ni}^* = -\frac{T_i}{T_e} \omega_{ne}^*, \quad \omega_{Te}^* = \eta_e \omega_{ne}^*, \quad \omega_{Ti}^* = \eta_i \omega_{ni}^*$$

の関係がある. (5.111), (5.112), (5.113), (5.114) はそれぞれ下記のようになる.

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{\omega/k_{\parallel}} + \frac{\omega_{ne}^* e\tilde{\phi}}{\omega T_e},$$

5.9 アルフベン固有モード

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{n}_e}{n_0} &= \frac{e\tilde{\phi}}{T_e}, \\ \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{\omega/k_{\parallel}} &= \frac{1}{m_i(\omega/k_{\parallel})^2} \left(e\tilde{\phi} + \frac{\tilde{p}_i}{n_0} \right), \\ \left(\frac{\tilde{p}_i}{p_{i0}} - \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \right) &= \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right) \frac{e\tilde{\phi}}{T_e}.\end{aligned}$$

電荷中性の関係 $\tilde{n}_i/n_0 = \tilde{n}_e/n_0$ 用いると分散式が導かれる.

$$1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} - \left(\frac{v_{Ti}}{\omega/k_{\parallel}} \right)^2 \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{5}{3} + \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right) \right) = 0$$

($v_{Ti}^2 = T_i/m_i$). $\omega \ll \omega_{ne}^*$ の場合の解は [5.21]

$$\omega^2 = -k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right). \quad (5.115)$$

となる [5.21]. これから $\eta_i > 2/3$ になると不安定になることが導かれる. このモードを η_i モードという. イオン温度勾配不安定性 (ITG モード, Ion Temperature Gradient mode) ともいう.

擾乱の磁力線方向の伝播速度 $|\omega/k_{\parallel}|$ がイオンの熱速度 v_{Ti} に近づくと第10章で述べる粒子と波動の相互作用 (ランダウ減衰) が効いてくるので電磁流体力学が適用できなくなる. したがって η_i が大きいことがこの取り扱いの適用条件である. η_i があまり大きくないときは運動論的取り扱いが必要となる. 運動論的取り扱いの結果では, 不安定になる η_i のしきい値は $\eta_{i,cr} \sim 1.5$ 程度となる.

5.9 アルフベン固有モード

一様無限大に広がるプラズマ中のアルフベン波は5.2.2節で述べた. シアアルフベン波, 磁気音波の速波, 遅波が存在する. 非圧縮プラズマの場合 ($\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ もしくは $\gamma \rightarrow \infty$), シアアルフベン波のみが存在できる.

円柱プラズマで軸対称な平衡磁場の場合, MHD 揺動による変位 $\boldsymbol{\xi}(r, \theta, z) = \boldsymbol{\xi}(r) \exp i(-m\theta + kz - \omega t)$ はハイン-リュスト方程式 (5.105-108) で記述される (5.6節参照). 非圧縮性プラズマの場合, ハイン-リュスト方程式 (5.108) は次のようになる. [5.6節では揺動項は $\boldsymbol{\xi}(r) \exp i(m\theta + kz - \omega t)$ と仮定していることに注意]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(\frac{F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2}{m^2/r^2 + k^2} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + \left(-(F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2) + 2B_{\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right) \right. \\ \left. + \frac{4k^2 B_{\theta}^2 F^2}{r^2 (m^2/r^2 + k^2) (F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2)} + 2r \frac{d}{dr} \left(\frac{(m/r) F B_{\theta}}{r^2 (m^2/r^2 + k^2)} \right) \right) \xi_r = 0, \quad (5.116)\end{aligned}$$

$$F = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = \left(\frac{-m}{r} B_{\theta}(r) + \frac{n}{R} B_z(r) \right) = \frac{B_z}{R} \left(n - \frac{m}{q_s(r)} \right), \quad q_s(r) = \frac{R}{r} \frac{B_z}{B_{\theta}}.$$

$F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$, $v_A^2 \equiv B^2/\mu_0 \rho_m$ を満たす半径は特異半径である. この特異半径 (共鳴層, resonant layer) でシアアルフベン波は運動論的アルフベン波 (kinetic Alfvén wave) にモード変換し, ランダウ減衰により吸収されることを長谷川と Liu Chen が指摘している [5.22]. したがってアルフベン波は円柱プラズマでは安定である.

トロイダル アルフベン固有モード

トロイダルプラズマのシアアルフベン波を考察しよう. $(-m, n)$ モードのポテンシャル揺動は

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r) \exp i(-m\theta + n \frac{z}{R} - \omega t) \quad (5.117)$$

で与えられる. R はトーラス大半径で, k_{\parallel} は

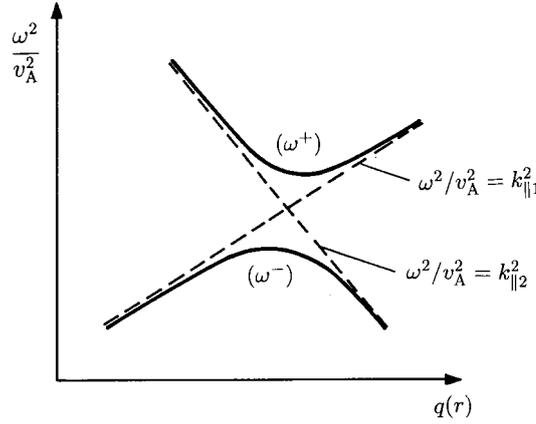


図 5.9 トロイダルにカップルした m と $m+1$ のモードのアルフベン共鳴周波数 ω の半径依存性.

$$k_{\parallel} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{B} = \frac{1}{R} \left(n - \frac{m}{q_s(r)} \right)$$

である. 円筒プラズマにおける m および $m+1$ モードの共鳴条件はそれぞれ

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 = 0, \quad \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 = 0$$

である. しかしながらトロイダルプラズマではトロイダル磁場の大きさが $B_z = B_{z0}(1 - (r/R)\cos\theta)$ であるため, m モードは $m \pm 1$ モードと組み合わせる. したがってトロイダルプラズマにおける m と $m+1$ モードの共鳴条件は

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 & \alpha \epsilon \frac{\omega^2}{v_A^2} \\ \alpha \epsilon \frac{\omega^2}{v_A^2} & \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 \end{vmatrix} = 0$$

となる. $\epsilon = r/R$ であり, α は 1 のオーダーの定数である. 解は下記のようになる.

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{v_A^2} = \frac{k_{\parallel m}^2 + k_{\parallel m+1}^2 \pm \left((k_{\parallel m}^2 - k_{\parallel m+1}^2)^2 + 4\alpha\epsilon^2 k_{\parallel m}^2 k_{\parallel m+1}^2 \right)^{1/2}}{2(1 - \alpha^2\epsilon^2)}. \quad (5.118)$$

共鳴条件 (5.118) を図 5.9 示す. $k_{\parallel m}^2 = k_{\parallel m+1}^2$ を満たす半径で ω_{\pm} の差が最小になるが, その半径は

$$\frac{1}{R} \left(n - \frac{m}{q_s(r)} \right) = -\frac{1}{R} \left(n - \frac{m+1}{q_s(r)} \right), \quad q_s(r_0) = \frac{m+1/2}{n}, \quad (5.119)$$

$$k_{\parallel m} = -k_{\parallel m+1} = \frac{1}{2q_s(r_0)R}$$

で与えられる. ($m=1, n=1$), ($m=2, n=1$) の場合 $q_s(r_0) = 1.5$ となる. したがってアルフベン周波数ギャップ $\omega_- < \omega < \omega_+$ においてはアルフベン共鳴するところがない.

コンティニウムアルフベン波 (continuum Alfvén waves) は その周波数が共鳴条件 $\omega^2 = k_{\parallel m}^2 v_A^2(r)$ を満たすような磁気面があり, そこで波の減衰が起こるシアアルフベン波をいう. しかしスペクトルギャップの中にある周波数のときには共鳴するところがなく, 減衰をしない. このような条件のときは不連続な固有周波数を持つトロイダルアルフベン固有モードが存在できる可能性が生まれる. これからトロイダルアルフベン固有モードを TAE (Toroidal Alfvén Eigenmode) と略称するが, このような TAE は高エネルギー粒子の運動論的效果によって不安定化されやすい. TAE の方程式は [5.23] に詳しく記述されている.

5.9 アルフベン固有モード

高エネルギー粒子によるアルフベン波の成長率

高エネルギー粒子の振る舞いは運動論によって扱わなければならない。高エネルギー粒子によってアルフベン波が励起、不安定になるときの成長率は [5.24] で解析されている。すなわち

$$\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} = \sum_j \frac{2\pi^2 \mu_0 m_j^2 R q_0^3}{2B^2} \int \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)^2 \left(\omega_r \frac{\partial F_j}{\partial \epsilon} + \frac{n}{q_j} \frac{\partial F_j}{\partial \psi} \right) v_{\perp} dv_{\perp} \Bigg|_{v_{\parallel}=v_A} + \dots \Bigg|_{v_{\parallel}=v_A/3}. \quad (5.120)$$

(この導入は [5.10] の 13.2 節に詳しく述べられている。) $F_j(\epsilon, p_{\psi})$ は j 粒子の 0 次の分布関数である。 $v_{\parallel} = v_A/3$ の下付きの項はトロイダルカップリングによるサイドバンド共鳴 (sideband resonance) の項と考えることができる。成長率はプラズマ本体の熱イオン、熱電子、そして核融合反応による α 粒子あるいは加熱による高エネルギーイオンの寄与の和で与えられる。

$$\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} = -q_0^2 \left(\beta_i G_{mi}^T + \beta_e G_{me}^T + \beta_{\alpha} (G_{s\alpha}^T - n q_0 \delta_{\alpha} H_{s\alpha}^T) \right). \quad (5.121)$$

ここで $\beta_i, \beta_e, \beta_{\alpha}$ はイオン、電子、 α 粒子のベータである。熱イオン、熱電子はランダウ減衰によりアルフベン波の安定化に寄与する。高エネルギーイオンはアルフベン波を不安定にする。したがってアルフベン固有モード (AEM) を不安定にする β_{α} には閾値がある。核融合プラズマにおいて、高エネルギーアルファ粒子のベータ比に閾値があることは留意すべきである。

計算機シミュレーションによる解析

MHD と運動論との混成モデルはプラズマ本体の熱化プラズマを非線形 MHD 方程式で取り扱い、高エネルギーイオンの分布関数は 4 次元フォッカー・プランクの式で解き、その効果は高エネルギーイオンによる電流 j'_{α} を非線形 MHD 方程式の中に組み込むことにより考慮される [5.25]。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j}'_{\alpha} \right) \times \mathbf{B} - \nabla p,$$

$$\mathbf{j}'_{\alpha} = \int (v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_d) f_{\alpha} d^3 \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = - \int \mu \mathbf{b} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}.$$

ここで μ は磁気モーメント、 \mathbf{v}_d は曲率および ∇B ドリフト速度である。高エネルギーイオンの分布関数 f_{α} は 4D (R, φ, z, v) フォッカー・プランク方程式 (v は \mathbf{v} の平行成分) で計算する。このシミュレーションは、実験で観測されるアルフベン固有モードの周期的バーストをある程度再現している。

種々のアルフベンモード

これまでの節で、弱く減衰するトロイダルモード数 n の比較的小さい TAE が、アルフベン速度を超える高エネルギー粒子によって励起され不安定になる現象を解析してきた [5.23]。このほかに高 n TAE がある [5.26]。

高温プラズマになると、プラズマ自身の非理想的 MHD 効果たとえば有限なラーマー半径効果がギャップ領域で重要になってきて、アルフベンコンティニウムが、TAE 周波数の少し上の方にあるいくつかの運動論的アルフベン固有モード (kinetic Alfvén eigenmode, KTAE) の固有周波数に変わる [5.27]。

プラズマの中心部分はシアが小さい。その中心付近に局所化した TAE ができる。これを、中心に局所化したモード (core-localized mode, CLM) [5.28] という。

プラズマ断面が非円形になると磁気線に沿う磁場の大きさに $m=2, m=3$ などの成分が含まれてくる。そのため楕円形の場合は TAE 周波数の 2 倍のところにギャップが生じる。そこで楕円誘起アルフベン固有モード (ellipticity-induced Alfvén eigenmode, EAE) [5.23] が励起される。同様に非円形三角度誘起アルフベン固有モード (noncircular-triangularity-induced Alfvén eigenmode, NAE) が 3 倍のところで励起される [5.23]。

理想 MHD あるいは運動論的 TAE は皆 "キャピティ" モードで、その周波数はバルクのプラズマで決まっている。この他に "ビーム" モードというプラズマの自然な固有モードではないモードが高エネルギー粒子の集団によって起こり、不安定になりえる。このモードを高エネルギー粒子モード (energetic particle mode, EPM) [5.29] と呼ぶ。このモードは TAE ギャップの外に、高エネルギー粒子のトロイダル歳差周波数あるいは通過/バウンス周波数に関連する周波数を

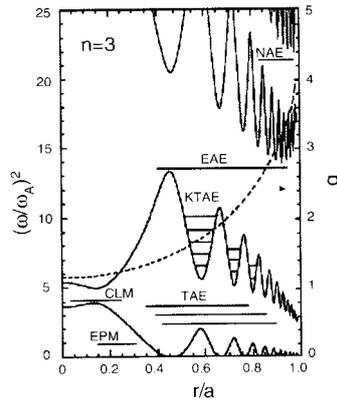


図 5.10 代表的シアアルフベン共鳴周波数の曲線を小半径 r の関数として描いた図 [5.29]. 水平な線はトロイダルアルフベン固有モード (TAE), 運動論的 TAE (KTAE), 中心に局所化したモード (CLM), 楕円誘起アルフベン固有モード (EAE), 非円形三角度誘起アルフベン固有モード (NAE), 高エネルギー粒子モード (EPM) などが存在する小半径の場所とモードの周波数を凡そ表している. [5.30].

もつ. 図 5.10 はこれら種々のアルフベンモードを表した図である. 文献 [5.30, 5.31] に TAE の解説がある.

フィッシュボン不安定性についてのノート

トカマクにおける捕捉イオン (バナナ) はトロイダル方向に $v_\phi = mv_\perp^2 / (2eBr)$ の速度, $\omega_\phi = mv_\perp^2 / (2eBRr)$ の角速度で歳差運動をしている (2.5.7 節参照). この場合 フィッシュボン不安定性が, 高エネルギーイオンのバナナの歳差運動と $m = 1, n = 1$ MHD 揺動との間に, $\omega \sim \omega_\phi$ の周波数で共鳴的相互作用 (逆ランダウ減衰) によって励起される [5.32]. フィッシュボン不安定性の詳しい説明は [5.10] の 13.1 節に記述されている.

問題

1. レイリテイラー不安定性 質量密度 $\rho_0(x)$ が $\rho_0(x) = \rho_2 (x > d)$, $\rho_0(x) = (\rho_2 - \rho_1)x/d (d > x > 0)$, $\rho_0(x) = \rho_1 (0 > x)$ である場合のレイリテイラー不安定性の成長率を求めよ. (5.57) を参照のこと.
2. ソーセイジ不安定性 ソーセイジ不安定性 ($m = 0$ モード) の安定条件は $B_z^2 > B_\theta^2/2$ である ((5.69 参照). この安定条件を次の考察から導け. 円筒プラズマの半径 r が $\delta r < 0$ の値だけ, ある z の位置付近で断熱的に締め付けられたとする. その場合プラズマ内の縦 (z) 方向の磁束は保存される. すなわち $\delta(B_z \pi r^2) = 0$. またそのときプラズマ電流は変わらない ($\delta(B_\theta 2\pi r) = 0$). $\delta r < 0$ のとき $\delta(B_z^2/2\mu_0 - B_\theta^2/2\mu_0) > 0$ であることが安定性にとって必要なことである. ソーセイジの擾乱に対して, 必要条件の第 1 項は安定に寄与する磁気圧であり, 第 2 項は不安定に寄与するからである.
3. キンク不安定性 大きなアスペクト比をもつトロイダルプラズマが $m = 1, n = -1$ キンク不安定性の擾乱を受けている. このトロイダルプラズマの変位 $\xi(r) \exp(i(\theta - z/R))$ の幾何学的配位を説明せよ. この場合非圧縮変位 $1/r(\partial r \xi_r(r)/\partial r) + i/r \xi_\theta(r) + (i/R)\xi_z(r) = 0$ を考え, ξ_z 項を無視すると, $\xi_r = \xi_r(r) \cos(\theta - z/R)$ および $\xi_\theta = (\partial/\partial r)(r \xi_r(r)) \sin(\theta - z/R) \sim \xi_r(r) \sin(\theta - z/R)$ である.
4. エネルギー積分 エネルギー積分の q の式 (5.96) を (5.95) から導け.
5. $m = -1, n = 1$ のエネルギー積分 導体の壁に囲まれた円筒プラズマの単位長さ当りのエネルギー積分は (5.93) により, $W_p = (\pi/2) \int_0^a (f |d\xi_r/dr|^2 + g |\xi_r|^2) dr$ で与えられる. $m = -1, n = 1$ 揺動は $r = r_s, q(r_s) = 1$ で特異半径をもつが, オイラー方程式 (5.97) の解 ξ_r は $\xi_r(r) = \xi_0 = \text{const.} (0 < r < r_s)$ および $\xi_r(r) = 0 (r_s < r < a)$ である. この解は $r = 0, a$ における境界条件を満たす (5.5.1 節参照). この $m = -1, n = 1$ の解を用いて, エネルギー積分が

$$W_p = \frac{\pi B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_0|^2 \left(\frac{r_s}{R}\right)^2 \left(-\frac{\beta_p}{2} - \int_0^1 \rho^3 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{2}{q} - 3\right) d\rho\right)$$

で与えられることを確かめよ. ただし $\rho = r/r_s, q(r_s) = 1, B_{\theta s} \equiv (r_s/R)B_z, \beta_p \equiv 2\mu_0 \langle p_0 \rangle / B_{\theta s}^2, \langle p_0 \rangle \equiv -\int_0^{r_s} (r/r_s)^2 (dp_0/dr) dr = r_s^{-2} \int_0^{r_s} (p_0 - p_s) 2r dr$ である. [5.33] を参照.

5.9 アルフベン固有モード

6. 負のシア トカマクの負のシア配位は，正のシア配位に較べてバルーニングモードに対し安定である．この理由を定性的に述べよ．5.7節参照．

解答 (ヒント)

2. ソーセイジ不安定性 安定条件は， $\delta r < 0$ のとき

$B_z \delta B_z - B_\theta \delta B_\theta > 0$ である． z 方向の磁束およびプラズマ電流はプラズマ半径が変化しても保存されるから

$$\frac{\delta B_z}{B_z} + 2 \frac{\delta r}{r} = 0, \quad \frac{\delta B_\theta}{B_\theta} + \frac{\delta r}{r} = 0$$

である．したがって安定条件は， $\delta r / r < 0$ のとき

$$B_z \delta B_z - B_\theta \delta B_\theta = (2B_z^2 - B_\theta^2) \frac{-\delta r}{r} > 0$$

である．すなわち $B_z^2 > B_\theta^2 / 2$.

第6章 抵抗不安定性

これまで取り扱ってきたプラズマは抵抗が0の理想的な場合であり、プラズマは磁力線に凍りついている (frozen) 状態であった。しかし一般には荷電粒子間の衝突があるため抵抗は有限であり、そのためプラズマは磁力線からずれることが起こる。したがって理想的な場合には安定であっても抵抗の有限性を導入すると不安定になる場合がある。

まずオームの法則を

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

とする。簡単のため $\mathbf{E} = 0$ の場合を考えると $\mathbf{j} = \mathbf{V} \times \mathbf{B} / \eta$ となり、 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の力

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{V}B^2}{\eta} \quad (6.2)$$

がプラズマに作用する。 $\eta \rightarrow 0$ とするとこの力は無限大となりプラズマが磁力線からずれるのを防ぐ。しかし磁場の大きさ B が小さいときはこの力は小さくなり、 η が小さくてもプラズマは磁力線からずれることになる。 \mathbf{k} の伝播ベクトルをもつある摂動を考えたとき、問題の \mathbf{B} の値は後で示すように \mathbf{k} 方向の磁場の成分のみが関与するので、ある磁場があったとき、たとえシアアがあっても、ある点で \mathbf{B} に垂直な伝播ベクトルを選ぶことができる。すなわち

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (6.3)$$

したがって、このような条件でプラズマを擾乱するある力が \mathbf{F}_s より大きくなることもあり不安定になりうる。このような不安定性を抵抗不安定性という。

6.1 ティアリング不安定性

直交座標系 (x, y, z) において磁場 \mathbf{B}_0 が x のみに依存するような平板 (スラブ) モデルを考える。そして \mathbf{B}_0 は

$$\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}(x)\mathbf{e}_z \quad (6.4)$$

で与えられるとする。オームの法則 (6.1) より

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times ((\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta \mathbf{j}) = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \quad (6.5)$$

となる。ここで η は一定と考える。またプラズマは非圧縮性 (incompressibility) であるとする。抵抗不安定性の成長時間は MHD の特徴的時間に比べて遅く、その変位は音速よりゆっくりしているから、非圧縮性の仮定は正当化される。すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (6.6)$$

また磁場 \mathbf{B} は常に

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.7)$$

を満たすので、運動方程式は

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p$$

6.1 ティアリング不安定性

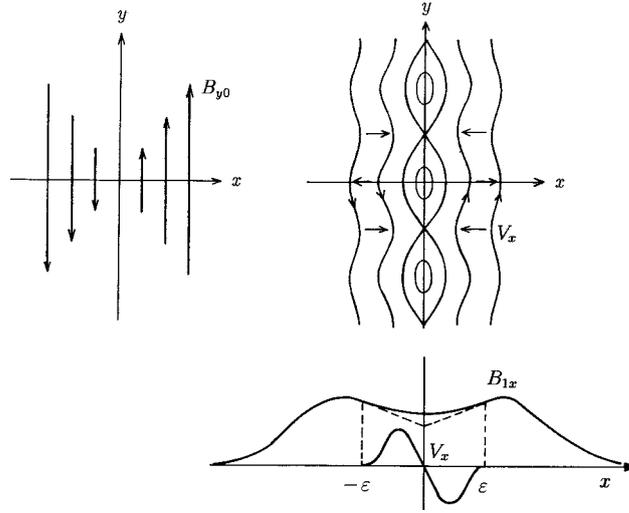


図 6.1 0 次の磁場配位とティアリング不安定性による磁気アイランド. B_{1x} および V_x の x 依存性も示す.

$$= \frac{1}{\mu_0} \left((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \frac{\nabla B^2}{2} \right) - \nabla p \quad (6.8)$$

となる. 摂動項として $f_1(\mathbf{r}, t) = f_1(x) \exp(i(k_y y + k_z z) + \gamma t)$ で表わされる場合を考える. (6.5) は

$$\gamma B_{1x} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) V_x + \frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x} \quad (6.9)$$

となる. ここで $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ である. (6.8) の中の右辺第 1 項は $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1$ となる. (6.8) の回転 (rotation) をとると

$$\mu_0 \rho_m \gamma \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \left(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1 + \left(B_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{B}_0 \right) \quad (6.10)$$

となる. また (6.6) (6.7) は

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} + i k_y B_{1y} + i k_z B_{1z} = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + i k_y V_y + i k_z V_z = 0 \quad (6.12)$$

である. (6.10) の z 成分に k_y をかけ, y 成分に k_z をかけて, その差をとる. そして (6.11) (6.12) の関係を用いると

$$\mu_0 \rho_m \gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) V_x = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)'' B_{1x} \quad (6.13)$$

が導かれる [6.1]. $''$ は x による 2 階微分を表わす. オームの式と運動方程式は (6.9) および (6.13) に還元されたが, すでに述べたように 0 次の \mathbf{B}_0 は $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)$ の形でのみ現われてくる.

$$F(x) \equiv (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \quad (6.14)$$

を導入するとき $F(x) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = 0$ の位置が不安定性の起こりやすいところである. この位置を $x = 0$ に選ぶ (図 6.1). $x = 0$ の付近では $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \simeq (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' x$ となる. (6.9) および (6.13) より $x = 0$ の付近では B_{1x} は偶関数, V_x は奇関数となる. $x = 0$ 付近 $|x| < \varepsilon$ においてのみ

$\Delta B_{1x} \sim i\mu_0 k_y j_{1z}$ の項が大きくなる。抵抗不安定性の成長率は MHD 不安定性の成長率より小さいので、 $|x| > \varepsilon$ では運動方程式 (6.13) の左辺は無視できる。そして

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - k^2 B_{1x} = \frac{F''}{F} B_{1x}, \quad |x| > \varepsilon \quad (6.15)$$

である。 $x > 0$ では

$$B_{1x} = e^{-kx} \left(\int_{-\infty}^x e^{2k\xi} d\xi \int_{\infty}^{\xi} (F''/F) B_{1x} e^{-k\eta} d\eta + A \right),$$

$x < 0$ における解は

$$B_{1x} = e^{kx} \left(\int_{\infty}^x e^{-2k\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\xi} (F''/F) B_{1x} e^{k\eta} d\eta + B \right)$$

である。ここで $x = +\varepsilon$ における $B'_{1x}(+\varepsilon)$ と $x = -\varepsilon$ における $B'_{1x}(-\varepsilon)$ との差 Δ' を下記のように定義する。

$$\Delta' = \frac{B'_{1x}(+\varepsilon) - B'_{1x}(-\varepsilon)}{B_{1x}(0)}. \quad (6.16)$$

Δ' は $|x| > \varepsilon$ の外部の解から得られる。

$$\Delta' = -2k - \frac{1}{B_{1x}(0)} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \exp(-k|x|) (F''/F) B_{1x} dx. \quad (6.17)$$

1 例として

$$F(x) = F_s x / L_s \quad (|x| < L_s), \quad F(x) = F_s x / |x| \quad (|x| > L_s)$$

を考える場合は、(6.15) を解くことができ、 Δ' を求めると、 $\alpha \equiv kL_s$ として

$$\Delta' = \left(\frac{2\alpha}{L_s} \right) \frac{e^{-2\alpha} + (1 - 2\alpha)}{e^{-2\alpha} - (1 - 2\alpha)} \approx \frac{2}{L_s} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right)$$

である。ここで L_s はシアー長 $L_s = (F_s/F')_{x=0}$ である。もっと一般的な $F(x)$ の場合、 $F''/F \propto 1/x$ であるので、 $B_{1x}(x)$ は $x=0$ において対数関数的特異性を示す。文献 [6.2] は対数関数的特異性からくる困難さをさける解析方法を述べている。

$|x| < \varepsilon$ の内部においては (6.9) および (6.13) は

$$\frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} - \left(k^2 + \frac{\gamma\mu_0}{\eta} \right) B_{1x} = -i \frac{\mu_0}{\eta} F' x V_x, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} - \left(k^2 + \frac{(F')^2}{\rho_m \eta \gamma} x^2 \right) V_x = i \left(F' x \frac{1}{\rho_m \eta} - \frac{F''}{\mu_0 \rho_m \gamma} \right) B_{1x} \quad (6.19)$$

となる。 $|x| < \varepsilon$ における (6.18) の解からえられる Δ' の値は

$$\begin{aligned} \Delta' \times B_{1x}(0) &= \frac{\partial B_{1x}(+\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}(-\varepsilon)}{\partial x} \\ &= \frac{\mu_0}{\eta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\left(\gamma + \frac{\eta}{\mu_0} k^2 \right) B_{1x} - i F' x V_x \right) dx \end{aligned} \quad (6.20)$$

になる。外部の解と内部の解とが矛盾なく一致するためには (6.17) の Δ' と (6.20) の Δ' とが同じでなければならない。これより固有値 γ が求まり不安定性の成長率を求めることができる [6.1]。ここではやや定性的な取り扱いで成長率を求めてみよう。 $|x| < \varepsilon$ では

$$\frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon}$$

6.1 ティアリング不安定性

と書ける. (6.9) の左辺誘導電場の項, 右辺第 1 項 $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$, 第 2 項オームの項の三つはほぼ同程度であるとする.

$$\gamma B_{1x} \sim \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon}, \quad (6.21)$$

$$\gamma B_{1x} \sim iF' \varepsilon V_x. \quad (6.22)$$

(6.21) より

$$\gamma \sim \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\Delta'}{\varepsilon} \quad (6.23)$$

をえる. したがって

$$\Delta' > 0 \quad (6.24)$$

ならば不安定となる. γ の値を求めるためには ε の大きさを評価しなければならない. (6.13) より

$$\mu_0 \rho_m \gamma \left(\frac{-V_x}{\varepsilon^2} \right) \sim iF' \varepsilon \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon} \quad (6.25)$$

となる. (6.21), (6.22), (6.25) より V_x, B_{1x}, γ を消去すると

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 &\sim \left(\frac{\eta}{\mu_0 a^2} \right)^2 (\Delta' a) \frac{\rho_m \mu_0}{(F' a)^2} a^5, \\ \frac{\varepsilon}{a} &\sim \left(\left(\frac{\tau_A}{\tau_R} \right)^2 (\Delta' a) \left(\frac{B_0}{F' a^2} \right)^2 \right)^{1/5} \sim S^{-2/5} (\Delta' a)^{1/5} \left(\frac{B_0}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2} \right)^{2/5} \end{aligned} \quad (6.26)$$

となる. ただし

$$\begin{aligned} \tau_R &= \frac{\mu_0 a^2}{\eta}, \\ \tau_A &= \frac{a}{B_0 / (\mu_0 \rho_m)^{1/2}} \end{aligned}$$

はそれぞれ抵抗拡散時間およびアルフベン通過時間である. また無次元数

$$S = \tau_R / \tau_A$$

は磁気レイノルズ数である. a は典型的なプラズマの大きさである. したがって成長率 γ は

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\eta}{\mu_0 a^2} \frac{a}{\varepsilon} (\Delta' a) = \frac{(\Delta' a)^{4/5} \eta^{3/5}}{\mu_0^{4/5} \rho_m^{1/5} a^{8/5}} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0} \right)^{2/5} \\ &= \frac{(\Delta' a)^{4/5}}{\tau_R^{3/5} \tau_A^{2/5}} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0} \right)^{2/5} = \frac{(\Delta' a)^{4/5}}{S^{3/5}} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0} \right)^{2/5} \frac{1}{\tau_A} \end{aligned} \quad (6.27)$$

となる. 図 6.1 に示すようにプラズマがいくつかの磁気アイランドにちぎられるようになるので, このような不安定性をティアリング不安定性という [6.1].

$|x| \ll \varepsilon$ の内部領域における (6.18) および (6.19) の解は [6.3] で求められていて, Δ' が導かれている. この結果によれば γ は (6.27) の 0.55 倍になる. (この章の問題 2 参照).

以上の議論は平面モデルで進めたがトカマク配置との対応を考えてみよう. トーラスにおける擾乱の伝播ベクトルのポロイダル成分は m/r , トロイダル成分は $-n/R$ である. したがって $k_y \leftrightarrow m/r$, $k_z \leftrightarrow -n/R$ と対応させれば

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{m}{r} B_\theta - \frac{n}{R} B_z = \frac{n}{r} B_\theta \left(\frac{m}{n} - q_s \right), \quad q_s \equiv \frac{r}{R} \frac{B_z}{B_\theta}$$

となる。したがって危険な位置 $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = 0$ は有理面の位置 $q_s(r_s) = m/n$ に対応する。そして

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' = \frac{-n}{r} B_\theta \frac{dq_s}{dr}, \quad \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' r_s^2}{B_0} = -n \left(\frac{r_s}{R} \right) \frac{q_s' r_s}{q_s}$$

となる。ティアリング不安定性はトカマクにおける内部破壊モードと関連した重要な不安定モードである (11.3 節参照)。

これまでは比抵抗 η および密度 ρ_m が一様で加速度 $\mathbf{g} = 0$ の場合について解析した。 η が x に依存する場合はオームの式 (6.5) の抵抗項は $\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) / \mu_0$ となるし、運動方程式 (6.8) の右辺は $\rho \mathbf{g}$ の項がつけ加わる。電子温度の勾配がある場合 ($\eta' \neq 0$) は、波長の短い ($kL_s \gg 1$) リップリングモード (rippling mode) が $x = 0$ の位置より比抵抗の小さい側 (高温側) で起こりうる。また重力場 \mathbf{g} の向きが $\nabla \rho_m$ と反対方向の場合 (\mathbf{g} が低密度側に向かうとき) 重力交換型モード (gravitational interchange mode) が生ずる [6.1]。ティアリングモードはトカマクの内部ディスラプションに関わって、重要な役割を果たすことは 11.3 節で述べる。

6.2 新古典ティアリング不安定性

非理想的 MHD 不安定性、例えばブートストラップ電流によって誘起される磁気アイランドの効果など、によるトカマクの圧力限界について、関心が集まっている。高ポロイダルベータ β_p で、かつ稀な衝突領域のプラズマでは、圧力勾配によりブートストラップ電流が誘起される (4.5.3 節参照)。磁気アイランドが大きくなり、磁気アイランド内の圧力が平坦になると、そこでブートストラップ電流が無くなる。したがってブートストラップ電流分布の中にヘリカルホールができることになる。このことがまた磁気アイランドの幅を大きくする。

ティアリングモードは前節においてスラブモデルで取り扱った。0 次の磁場 \mathbf{B}_0 は x のみに依存するとして、 $\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}\mathbf{e}_z$, $|B_{0y}(x)| \ll |B_{0z}|$, $B_{0z} = \text{const.}$ で与えられるとする。基礎方程式は下記のように与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (6.28)$$

$$-\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = (0, 0, -\psi), \quad (6.29)$$

$$B_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = (v_x B_y - v_y B_x) - \eta j_z = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi - \eta j_z, \quad (6.30)$$

$$\nabla^2 \psi = \mu_0 j_z. \quad (6.31)$$

速度成分は

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \left(\frac{E_y}{B_{0z}}, -\frac{E_x}{B_{0z}}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{B_{0z}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{1}{B_{0z}} \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

で与えられるから、次のような流れ関数 (stream function) φ を導入することができる。

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

渦度 $w_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z$ の z 成分を導入すると、 $w_z = \nabla^2 \varphi$ となる。(6.28) の回転は下記のようになる。

$$\rho \frac{\partial w_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_z = (\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}))_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla) j_z - (\mathbf{j} \cdot \nabla) B_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla) j_z. \quad (6.32)$$

ここで $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ の関係を用いた。0 次の磁束関数 ψ_0 およびその 1 次の揺動 $\tilde{\psi}$ は

6.2 新古典ティアリング不安定性

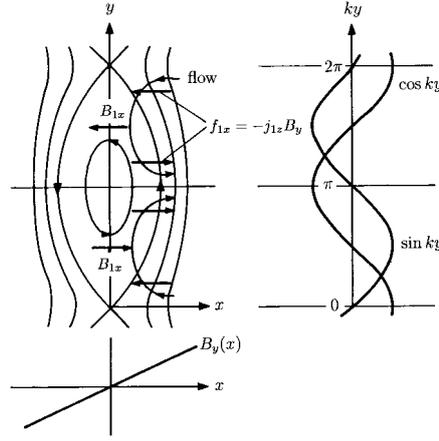


図 6.2 特異面 (有理面) 付近のティアリングモードの構造.

$$\psi_0(x) = B'_{0y} \frac{x^2}{2}, \quad \mathbf{B}_0 = (0, B'_{0y}x, B_{0z}),$$

$$\tilde{\psi}(y, t) = \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky, \quad \mathbf{B}_1 = (B_{1x}(t) \sin ky, 0, 0), \quad \tilde{\psi}_A(t) \equiv \frac{B_{1x}(t)}{k},$$

$$\psi = \psi_0(x) + \tilde{\psi}(y, t) = B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky \quad (6.33)$$

である. $x = 0$ は特異面 (有理面) の位置である. 磁気アイランドのセパトリックスは

$$B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky = \frac{B_{1x}(t)}{k}, \quad x_s = 2 \left(\frac{B_{1x}}{kB'_{0y}} \right)^{1/2}$$

で与えられる. x_s はアイランドの半巾であり, その全幅 $w = 2x_s$ は下記のようになる.

$$w = 4 \left(\frac{B_{1x}}{kB'_{0y}} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{\tilde{\psi}_A(t)}{B'_{0y}} \right)^{1/2}. \quad (6.34)$$

成長率 γ で大きくなる $B_{1x}(t) \sin ky$ は $j_{1z} = E_{1z}/\eta = \gamma B_{1x}/\eta k$ の電流を誘起し, そのため図 6.2 に示すように x 方向に 1 次之力 $f_{1x} = -j_{1z} B'_{0y} x$ が働く. そしてその図が示すような小さな渦の流れができる. x 方向の流れの速度は $v_x = -E_z/B_y = -\gamma B_{1x} \cos ky / (kB'_{0y}x)$ である. 非圧縮性流 (強い磁場 B_{0z} のため) により, y 方向のシアのある流れが $v_y(x)$ の速度で, 層の厚さ $x \sim x_T$ 程度の狭い渦のパターンが図 6.2 のように生ずる. そして

$$v_y x_T \sim v_x/k, \quad v_y \sim v_x/kx_T \sim \gamma B_{1x}/(k^2 B'_{0y} x_T)$$

の関係が導かれる. この 1 次之力によるトルクによって, このシアのある流れが作られるから

$$x_T j_{1z} B_{0y} = \gamma \rho v_y/k, \quad B_{0y} = B'_{0y} x_T, \rightarrow x_T^4 = \frac{\gamma \rho}{j_{1z} k B'_{0y}} \frac{\gamma B_{1x}}{k^2 B'_{0y}} = \frac{\gamma \rho \eta}{(kB'_{0y})^2}$$

であることが要求される. ただし $j_{1z} = E_z/\eta = \gamma B_{1x}/\eta k$ の関係を用いた. このようにして揺動の幅 x_T は

$$x_T = \frac{(\gamma \rho \eta)^{1/4}}{(kB'_{0y})^{1/2}} \quad (6.35)$$

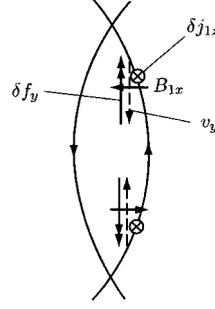


図 6.3 ティアリングモードにおける v_y の流れを減速する非線形力.

となる. これは 6.1 節で述べたティアリング不安定性の線形理論によってえられた結果 (6.26) と一致している (6.1 節では x_T の代わりに ε の記号を用いている).

Rutherford はもし非線形効果を考慮すればこのモードの成長率は劇的に減り, 揺動は時間に比例する形でしか増えないことを示した [6.4]. 流れの渦は y に依存しない 2 次の渦電流 $\delta j_{1z} = -v_y B_{1x}/\eta \sim \gamma B_{1x}^2/(\eta k^2 B_{0y} x_p^2)$ を誘起する ($\eta \delta j_{1z} = \delta E_z$). 図 6.3 に示すように, y 方向 3 次の非線形力 $\delta f_y \sim \delta j_z B_{1x}$ が渦流を押さえるトルクの働きをして, v_y の流れを減速する. (6.32) 式において慣性の項が無視できる場合に限定して議論を進めよう.

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) j_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial j_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial j_z}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad j_z = j_z(\psi).$$

(6.30) は次のように還元される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= -v_x B'_{0y} x + \eta j_{1z}, & \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= \eta j_{0z}, \\ \rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} B'_{0y} x + \eta j_{1z} - \eta j_{0z}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

(6.36) を x で割り, ψ 一定のもとに y で平均をとることにより, φ を消去することができる. (6.33) より, x は

$$x = \left(\frac{2}{B'_{0y}} (\psi - \tilde{\psi}) \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{B'_{0y}} \right)^{1/2} \tilde{\psi}_A^{1/2} (W - \cos ky)^{1/2}, \quad W \equiv \frac{\psi}{\tilde{\psi}_A} \quad (6.37)$$

で表される. (6.36), (6.37) より and

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle (\eta j_{1z}(\psi) - \eta j_{0z}(\psi)) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}(y, t)/\partial t}{(\psi - \tilde{\psi}(y, t))^{1/2}} \right\rangle, \\ j_{1z}(\psi) &= j_{0z}(\psi) + \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}/\partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (6.38)$$

が導かれる. ただし

$$\langle f \rangle \equiv \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} f dy.$$

有理面の外側の解との接続のため, 有理面をはさんで外側の解の対数微分の不連続性 Δ' に内側の解を合わせなければならない. すなわち

$$\Delta' \equiv \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_A}{\partial x} \Big|_{+0} - \frac{\partial \tilde{\psi}_A}{\partial x} \Big|_{-0} \right) \frac{1}{\tilde{\psi}_A} = \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{\psi}_A \Big|_{-0}^{+0}.$$

6.2 新古典ティアリング不安定性

そのため $\nabla^2 \tilde{\psi} = \mu_0 j_{1z}$ と $\partial^2 \tilde{\psi} / \partial x^2 \approx \mu_0 j_{1z}$ の関係を利用する.

$$\Delta' \tilde{\psi}_A = \frac{\partial \tilde{\psi}_A}{\partial x} = 2\mu_0 \left\langle \cos ky \int_{-\infty}^{\infty} j_{1z} dx \right\rangle, \quad (6.39)$$

$$dx = \left(\frac{1}{2B'_{0y}} \right)^{1/2} \frac{d\psi}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}}.$$

(6.38) を (6.39) に代入することにより次の関係をえる.

$$\begin{aligned} \Delta' \tilde{\psi}_A &= 2 \frac{\mu_0}{\eta(2B'_{0y})^{1/2}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi} / \partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \rangle^{-1} \\ &\quad \times \left\langle \frac{\cos ky}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle d\psi \\ &= \frac{4\mu_0}{\eta(2B'_{0y})^{1/2}} \int_{\psi_{\min}}^{\infty} d\psi \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}_A \cos ky / \partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \rangle^{-1} \left\langle \frac{\cos ky}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \\ &\quad \int d\psi \left\langle \frac{\cos ky}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle^2 \frac{1}{\langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \rangle} \\ &= \int \left\langle \frac{\cos ky}{(W - \cos ky)^{1/2}} \right\rangle^2 \frac{dW \tilde{\psi}_A^{1/2}}{\langle (W - \cos ky)^{-1/2} \rangle} \equiv A \tilde{\psi}_A^{1/2} \end{aligned}$$

であるので

$$\Delta' \tilde{\psi}_A = \frac{4\mu_0 A}{\eta(2B'_{0y})^{1/2}} \frac{\partial \tilde{\psi}_A}{\partial t} \tilde{\psi}_A^{1/2}$$

が導かれ, 求めている下記の関係式がえられる.

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_A^{1/2}}{\partial t} = \frac{\eta(2B'_{0y})^{1/2}}{8\mu_0 A} \Delta'.$$

(6.34) を用いると, アイランド中の時間変化は

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2^{1/2} A \mu_0} \eta \Delta' \approx \frac{\eta}{\mu_0} \Delta', \quad \tau_R \frac{d w}{dt} r_s = \Delta' r_s, \quad \tau_R \equiv \frac{\mu_0 r_s^2}{\eta} \quad (6.40)$$

になる. 次にスラブモデルから, 図 6.4 に示すトロイダルプラズマに移ろう. 磁場

$$B_p - \frac{nr}{mR} B_t = \left(\frac{1}{q_s(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t \quad \left(q_s = \frac{m}{n} \right)$$

はスラブモデルの B_{0y} に対応する. スラブモデルの座標 (x, y, z) はそれぞれ径方向 $(r - r_s)$, ポロイダル方向 ($\sim r\theta$) トロイダルプラズマの有理面における磁場の方向の座標に対応する (図 6.4 参照). 磁気アイランドの幅がプラズマ半径に比べて非常に小さい場合は, この対応は正当化される. 磁束関数は

$$\psi(x, y) = \int_0^{r-r_s} \left(\frac{1}{q_s(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t dx + \frac{B_{1x}}{k} \cos ky \quad (6.41)$$

で, 磁場成分は

$$B_{1x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = B_{1x} \sin ky,$$

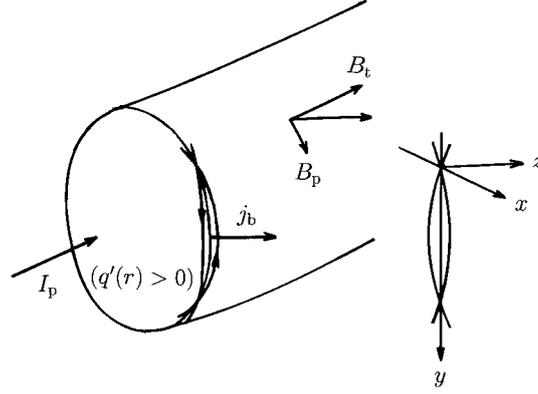


図 6.4 トロイダルプラズマにおける座標とスラブモデルにおける座標との対応. 座標 (x, y, z) はそれぞれ径方向 $(r - r_s)$, ポロイダル方向 $(\sim r\theta)$ およびトロイダルプラズマの有理面における磁場方向の座標に対応する. 磁気アイランド上の矢印は $B_p - (nr/mR)B_t$ の方向を示す. (6.42) 式参照.

$$B_{0y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \left(\frac{1}{q_s(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t = -\frac{q'_s}{q_s} B_p x = B'_{0y} x \quad (6.42)$$

である. (6.41) は

$$\psi(x, y) = B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}}{k} \cos ky \quad (6.43)$$

になる. ブートストラップ電流 δj_{1z}^b は磁束関数の変化 $\delta\psi_b$ および それに伴う電場 E_z を誘起する.

$$E_z = \frac{\partial\psi_b}{\partial t} = \eta \delta j_{1z}^b.$$

δj_{1z}^b による対数微分の不連続値は

$$\Delta'_b = \frac{1}{\tilde{\psi}_A} \left(\left. \frac{\partial\tilde{\psi}_A^b}{\partial r} \right|_{r_{s+}} - \left. \frac{\partial\tilde{\psi}_A^b}{\partial r} \right|_{r_{s-}} \right) = \frac{1}{\tilde{\psi}_A} \int_{r_{s-}}^{r_{s+}} \mu_0 \delta j_{1z}^b dr$$

である. ただし

$$\tilde{\psi}_A = \frac{B_{1x}}{k} = \frac{w^2 B'_{0y}}{16}.$$

したがって

$$\Delta'_b = \frac{16}{w^2 B'_{0y}} \int_{r_{s-}}^{r_{s+}} \mu_0 \delta j_{1z}^b dr$$

となる. 磁気アイランドの発生による圧力分布の平坦化による電流密度の変化 δj_{1z}^b は (4.28) より

$$\delta j_{1z}^b = 0 - \left(-\frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr} \right) = \frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr} \quad (6.44)$$

である. これをブートストラップ電流のヘリカルホール (helical hole) という. δj_{1z}^b による対数微分の項は下記の通りである.

$$\Delta'_b r_s = \frac{16\mu_0}{w^2 B'_{0y}} \left(\frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr} \right)_{r_s} w r_s = \frac{8r_s}{w} \frac{p}{B_p^2 / 2\mu_0} \epsilon_s^{1/2} \frac{L_q}{L_p},$$

6.3 抵抗性ドリフト不安定性

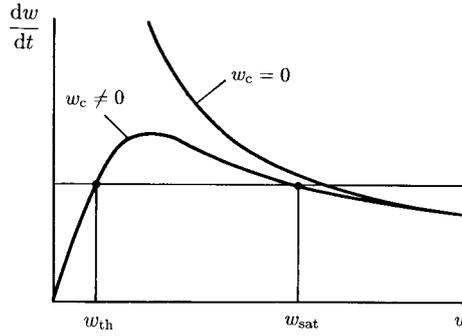


図 6.5 (6.46) を表す曲線. w_{th} は新古典ティアリングモードを発生させる磁気アイランドの幅の閾値であり, w_{sat} は幅の飽和値である.

$$B'_{0y} = -\frac{q'}{q}B_p \equiv -\frac{B_p}{L_q}, \quad \frac{dp}{dr} \equiv -\frac{p}{L_p}.$$

磁気アイランドの幅の時間変化は

$$\tau_R \frac{d}{dt} \frac{w}{r_s} = \Delta' r_s + a \epsilon_s^{1/2} \beta_p \frac{L_q r_s}{L_p w} \quad a \sim 8 \quad (6.45)$$

となる. (6.45) の右辺第 1 項は ラザフォード項であり, 第 2 項はブートストラップ電流による不安定項である. この式が新古典ティアリングモードの方程式である. もし磁気アイランドを横切る輸送現象を考慮すると, 圧力分布がそこで完全には平坦化されず, ブートストラップ電流の変化が若干減少する. そして第 2 項が修正され, (6.45) は次のように変形される.

$$\tau_R \frac{d}{dt} \frac{w}{r_s} = \Delta' r_s + a_1 \beta_p \epsilon_s^{1/2} \frac{L_q}{L_p} \frac{r_s w}{w^2 + w_c^2} + a_2 \beta_p \left(\frac{L_q}{L_p} \right)^2 \frac{r_s \rho^2}{w^3}. \quad (6.46)$$

右辺第 2 項における w_c は $\chi_{\perp}/\chi_{\parallel}$ モデル [6.5] による磁気アイランドを横切る輸送の効果を表すパラメーターで

$$w_c = 1.8 r_s \left(\frac{8 R L_q}{r_s^2 n} \right)^{1/2} \left(\frac{\chi_{\perp}}{\chi_{\parallel}} \right)^{1/4}$$

である. 第 3 項はイオン分極電流の効果を表し, [6.6] により導かれた. 図 6.5 は (6.46) の曲線を表す. w_c の項を含めると新古典ティアリングモードの発生のためには幅 w が閾値 w_{th} を超える必要がある. w が大きくなるとブートストラップ電流による不安定化効果が減り, 幅は飽和する. 新古典ティアリングモードは有理面に局所的電流駆動を行うことにより, 安定化できることが確かめられた [6.7].

6.3 抵抗性ドリフト不安定性

プラズマの境界においては密度勾配や温度勾配が常に存在する. このような領域ではある条件のもとで不安定になる. ここで平面モデルを考え, z 方向に一様な磁場 $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ 中に低ベータ比のプラズマがあり, x 方向に密度勾配があるとする ($p_0 = p_0(x)$, 図 6.6 参照. x はプラズマの外側に向かって正). したがって 0 次のプラズマ電流 $\mathbf{j}_0 = (0, p'_0/B_0, 0)$ およびプラズマの 0 次の流速および電場は $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{E}_0 = 0$ とする (抵抗の有限性のため古典拡散による項があるが無視する). また温度の不均一性は密度の不均一性に比べて無視できるとする. 電子の慣性も無視できるとする. このような場合, 運動方程式およびオーム則などの式は

$$Mn \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (6.47)$$

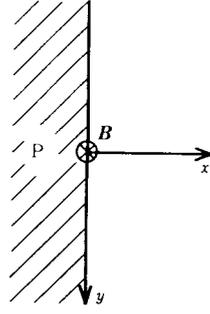


図 6.6 抵抗性ドリフト波のスラブモデル.

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e), \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0, \quad (6.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.50)$$

である. M はイオンの質量である. 揺動項として静電的な場合を考える. 電場の 1 次の揺動項が $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$, 磁場の 1 次の揺動項は $\mathbf{B}_1 = 0$ となる. また簡単のため $T_i = 0$ とする. 密度の揺動項を n_1 とし

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1(x) \exp i(ky + k_{\parallel}z - \omega t), \\ \phi_1 &= \phi_1(x) \exp i(ky + k_{\parallel}z - \omega t) \end{aligned}$$

とする. (6.47) (6.48) より

$$-i\omega M n_0 \mathbf{V}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 - \kappa T_e \nabla n_1, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 - \kappa T_e \nabla n_1 = en_0 (-\nabla\phi_1 + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mathbf{j}_1). \quad (6.52)$$

(6.51), (6.52) は

$$i\omega \left(\frac{M}{e} \right) \mathbf{V}_1 = \nabla\phi_1 - \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 + \eta \mathbf{j}_1 \quad (6.53)$$

となる. η が充分小さい ($\nu_{ei} \ll \Omega_e$) とき, (6.53) において $\eta \mathbf{j}$ の寄与を無視できる. すなわち

$$V_x = -ik \frac{\phi_1}{B_0}, \quad V_y = \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right) \frac{k\phi_1}{B_0}, \quad V_z = \left(-\frac{\Omega_i}{\omega} \right) \frac{k_{\parallel}\phi_1}{B_0}.$$

Ω_i はイオンサイクロトロン周波数 ($\Omega_i = -eB/M$) である. ここで $(\omega/\Omega_i)^2 \ll 1$ の条件を満たす低周波の波を考えた. (6.51) の x, y 成分および (6.52) の z 成分より

$$j_x = -ik \frac{T_e n_1}{B_0}, \quad j_y = kn_0 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right) \frac{e\phi_1}{B_0}, \quad j_z = \frac{ik_{\parallel}}{e\eta} \left(\kappa T_e \frac{n_1}{n_0} - e\phi_1 \right)$$

となる. (6.50) より $j'_x + ikj_y + ik_{\parallel}j_z = 0$, また (6.49) より $-i\omega n_1 + n'_0 V_x + n_0 ik V_y + n_0 ik_{\parallel} V_z = 0$ であるから

$$\frac{n_1}{n_0} - \left(1 + i \left(\frac{k}{k_{\parallel}} \right)^2 \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{en_0\eta}{B_0} \right) \frac{e\phi_1}{T_e} = 0, \quad (6.54)$$

6.3 抵抗性ドリフト不安定性

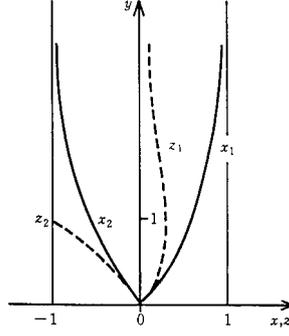


図 6.7 抵抗性ドリフト波の周波数 $\omega/\omega_e^* = x + iz$ の $y \propto k_{\parallel}/k$ に対する依存性.

$$\frac{n_1}{n_0} - \left(\left(\frac{k_{\parallel}}{\omega} \right)^2 \frac{T_e}{M} + k^2 \frac{T_e}{eB_0\Omega_i} + \frac{k(-n'_0/n_0)T_e}{eB_0} \frac{1}{\omega} \right) \frac{e\phi_1}{\kappa T_e} = 0 \quad (6.55)$$

が導かれる. 分散式は (6.54) および (6.55) の係数のデターミナントから得られる. すなわち

$$1 + i \left(\frac{k}{k_{\parallel}} \right)^2 \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e} - \left(\frac{k_{\parallel}}{\omega} \right)^2 c_s^2 + (k\rho_{\Omega})^2 - \frac{\omega_e^*}{\omega} = 0. \quad (6.56)$$

ここで $\eta = m_e\nu_{ei}/ne^2$, $(n_0e\eta)/B_0 = \nu_{ei}/\Omega_e$, $c_s^2 \equiv T_e/M$, $\rho_{\Omega} \equiv c_s/|\Omega_i|$, $\omega_e^* \equiv k(-n'_0/n_0)(T_e/eB_0)$ である. 密度勾配 ∇n_0 によるイオンおよび電子のドリフト速度を \mathbf{v}_{di} , \mathbf{v}_{de} とすると

$$\mathbf{v}_{di} = \frac{-(T_i\nabla n_0/n_0) \times \mathbf{b}}{eB_0} = \frac{-T_i}{eB_0} \left(\frac{-n'_0}{n_0} \right) \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{v}_{de} = \frac{(T_e\nabla n_0/n_0) \times \mathbf{b}}{eB_0} = \frac{T_e}{eB_0} \left(\frac{-n'_0}{n_0} \right) \mathbf{e}_y$$

である. これらのドリフト速度は 1 個の粒子のドリフト速度には現れない. イオンおよび電子の反磁性速度 (diamagnetic velocities) といわれる. 反磁性速度の起源は密度勾配による巨視的效果である ([2.4] の 2 章, [6.8] の 3.4 章参照). MHD 平衡の式に現れる反磁性電流 (4.41) は $\mathbf{j}_{\perp} = ne(\mathbf{v}_{di} - \mathbf{v}_{de})$ と書ける. イオンおよび電子のドリフト周波数をそれぞれ $\omega_i^* \equiv kv_{di} = -k(-n'_0/n_0)(T_i/eB_0)$ および $\omega_e^* \equiv kv_{de} = k(-n'_0/n_0)(T_e/eB_0)$ によって定義する. ($n'_0/n_0 < 0$, $\omega_e^* > 0$, $\omega_i^* = -(T_i/T_e)\omega_e^* < 0$.) これらの記号を用いると分散方程式は下記のようになる.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_e^*} \right)^2 - i \left(1 + (k\rho_{\Omega})^2 - \frac{k_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega^2} \right) \frac{\Omega_e \Omega_i}{\nu_{ei} \omega_e^*} \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_e^*} \right) + i \frac{\Omega_e \Omega_i}{\nu_{ei} \omega_e^*} \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 = 0. \quad (6.57)$$

$\omega/\omega_e^* = x + iz$, および $-(\Omega_e \Omega_i / \nu_{ei} \omega_e^*) (k_{\parallel}/k)^2 = y^2$ とし, $(k\rho_{\Omega})^2 - (k_{\parallel} c_s/\omega)^2 \ll 1$ を仮定すれば

$$(x + iz)^2 + iy^2(x + iz) - iy^2 = 0 \quad (6.58)$$

となる. (6.58) の解 $x_1(y)$, $z_1(y)$ および $x_2(y)$, $z_2(y)$ の $y \propto (k_{\parallel}/k)$ に対する依存を図 6.7 に示す. $z_2(y) < 0$ であるので, $z_2 = \text{Im}(\omega/\omega_e^*) < 0$ で安定である. この解はイオンのドリフト方向に伝播する. $x_1, z_1 > 0$ の解は電子のドリフト方向に伝播し, 不安定である. この波の成長率は (k_{\parallel}/k) を適当にとって $y \simeq 1.3$ になるようにすると $z_1 \simeq 0.25$ となり $\text{Im} \omega \simeq 0.25 \omega_e^*$ の値がえられる. もし η が小さくなると一番不安定なモードの波長が長くなり, 不安定を起こすに必要なだけ電子の運動を妨げるための衝突回数を保とうとする. したがって適当な方法で k_{\parallel} に対して下限を設定することができれば $\eta \propto \nu_{ei}$ が小さくなるにしたがって, 成長率は

$$\text{Im}(\omega/\omega_e^*) \approx y^{-2} = \frac{\nu_{ei} \omega_e^*}{\Omega_e |\Omega_i|} \left(\frac{k}{k_{\parallel}} \right)^2$$

となり、衝突周波数に比例する ($\eta \propto \nu_{ei}$)。この不安定性を抵抗性ドリフト不安定性あるいは散逸性ドリフト不安定性という [6.9, 6.10]。

もしイオンの慣性項を無視 ((6.56) において $M \rightarrow 0$, $|\Omega_i| \rightarrow \infty$) すると、分散式は $\omega^2 - \omega k v_{de} - k_{\parallel}^2 T_e / M = 0$ となり不安定性は現われない。すなわち不安定性はイオンの慣性のために電子とイオンの間に荷電分離が起こることに起因している。その電荷を中性化するために磁力線に沿って電子が運動するが、衝突、すなわち抵抗によってその運動がさまたげられると荷電分離が起こり、それによって生ずる電場が擾乱を成長させることになる。したがって衝突ドリフト不安定性とも呼ばれる。

電磁流体力学的近似においては無衝突の場合、不安定性が現われない。しかしながら運動論的解析によると不安定性が現われることがある (8.6.1 節参照)。これを無衝突ドリフト波という

6.4 抵抗性壁モード

トカマクの MHD キンク不安定性は、それがベータ上限を与えるため、非常に重要である。導体壁のない場合、種々の電流および圧力分布をもつプラズマのベータ上限が $\beta(\%) / (I_p(\text{MA}) / a(\text{m}) B(\text{T})) \equiv \beta_N < 2.8$ ((11.45) 参照) の形に記述されることが示された [6.11]。

しかしながら、プラズマに近接した導体壁を置くことにより β_N のより大きい値で外側のキンクが安定化される。理想 MHD 不安定性が、完全な導体壁の場合は安定であるが、壁を除いた場合は不安定になるようなときに、抵抗のある壁を置いた場合、状況は複雑になる。この場合、抵抗性壁モードが壁の散逸時間の程度で成長する。また抵抗性壁の中でプラズマをトーラス方向に回転させた場合、抵抗性壁モードが安定化できるかどうかは興味深い。

スラブモデルにおける基礎方程式は (6.9) および (6.13) で与えられている。 $\eta = 0$ で、 $|d^2/dx^2| \gg k^2$ の場合

$$B_{1x} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_x,$$

$$\mu_0 \gamma^2 \nabla(\rho_m \nabla \xi_x) = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \Delta B_{1x} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})'' B_{1x}$$

である。円筒プラズマの場合も、同様な数学的過程を経て

$$(r B_{1r}) = iF(r \xi_r), \quad (6.59)$$

$$\frac{\mu_0 \gamma^2}{F} \nabla(\rho_m \nabla(ir \xi_r)) = -\nabla^2(r B_{1r}) + \frac{F''}{F}(r B_{1r}) \quad (6.60)$$

となる。ここで

$$F = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = \left(\frac{-m}{r} B_\theta + \frac{n}{R} B_z \right) = \frac{B_z}{R} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right) = \frac{B_\theta}{r} (nq(r) - m).$$

磁束関数 $\psi = A_z(r, \theta) = A_z(r) \exp(-m\theta)$ すなわちベクトルポテンシャルの z 成分を導入すると

$$B_{1r} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -i \frac{m}{r} \psi, \quad B_z = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

である。(6.60) は下記のように還元される。

$$\frac{\mu_0 \gamma^2}{F} \nabla \left(\rho_m \nabla_{\perp} \frac{\psi}{F} \right) = -\nabla^2 \psi - \frac{m \mu_0 j'_r}{F} \psi, \quad F'' \approx -\frac{m \mu_0 j'_r}{r}. \quad (6.61)$$

Finn によって用いられた円筒プラズマの段階関数モデル [6.12] に沿って解析をする。質量密度、電流密度の分布は、は図 6.8 に示すようにプラズマ内 $r < a$ では平坦であるとする。すなわち

$$j(r) = j_0, \quad \rho(r) = \rho_0, \quad q(r) = q, \quad r < a.$$

そして $r > a$ では $j(r) = 0$, $\rho(r) = 0$, $q(r) = q(r)$ とする。for $r > a$. $r < a$ における (6.61) は

$$\left(1 + \frac{\mu_0 \rho_0 \gamma^2}{F^2} \right) \nabla^2 \psi = 0, \quad \psi(r) = \psi_0 \left(\frac{r}{a} \right)^m, \quad \frac{\psi(a_-)' }{\psi(a)} = \frac{m}{a} \quad (6.62)$$

6.4 抵抗性壁モード

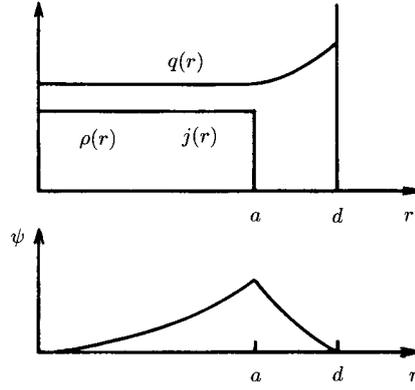


図 6.8 上図: 質量密度 $\rho(r)$, 電流密度 $j(r)$, および q 分布 $q(r)$. プラズマ半径 $r = a$, 壁の位置 $r = d$.
下図: 導体壁がある場合の磁束関数 $\psi(r)$.

で, $r > a$ の (6.61) は

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \psi(r) = \frac{\psi(a)}{1 - \alpha} \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{-m} - \alpha \left(\frac{r}{a} \right)^m \right)$$

となる. 導体壁が $r = d$ にある場合 $\psi(d) = 0$ を満たさなければならない. $\alpha = (a/d)^{2m}$ とすると

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = -\frac{m}{a} \frac{1 + (a/d)^{2m}}{1 - (a/d)^{2m}}. \quad (6.63)$$

プラズマ境界を挟んで (6.61) から

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} - \left(1 + \frac{\mu_0 \rho_0 \gamma^2}{B_\theta^2 (nq - m)^2 / a^2} \right) \frac{\psi'(a_-)}{\psi(a)} = \frac{m \mu_0}{Fa} j_0 = \frac{m}{a} \frac{2}{(nq - m)} \quad (6.64)$$

が得られる ($\mu_0 j'(a) = -2B_\theta / a \delta(r - a)$). 導体壁が $r = d$ にある場合の MHD 揺動の成長率 $\gamma_c(d)$ は (6.62), (6.63), (6.64) より

$$\gamma_c(d)^2 \tau_{A\theta}^2 = -2(nq - m) \left(1 + \frac{(nq - m)}{1 - (a/d)^{2m}} \right) \quad (6.65)$$

となる. $d/a - q$ ダイアグラムにおける安定領域を図 6.9 に示す.

薄い抵抗性壁が $r = d$ にある場合について考察しよう. ψ のプラズマ外部の解は $r > d$ でも 0 ではなくなる (図 6.10 参照). そして下記のようなになる.

$$\psi(r) = \psi(d)(r/d)^{-m}, \quad (r > d),$$

$$\psi(r) = \frac{\psi(d)}{1 - \alpha_{\text{res}}} \left((r/d)^{-m} - \alpha_{\text{res}} (r/d)^m \right), \quad (d > r > a). \quad (6.66)$$

壁に流れる電流および壁の比抵抗率をそれぞれ j_w および η_w とすると, 次の関係がある.

$$\nabla^2 \psi = -\mu_0 j_w, \quad j_w = E_z / \eta_w = -\frac{\gamma}{\eta_w} \psi.$$

$r = d$ における対数部分の不連続値は

$$\frac{\psi(d_+)' - \psi(d_-)'}{\psi(d)} = -\frac{\mu_0 \int j_w dr}{\psi} = \frac{\mu_0 \gamma / \eta_w \int \psi dr}{\psi} = \frac{\mu_0 \gamma \delta_w}{\eta_w} = \frac{\gamma \tau_w}{d},$$

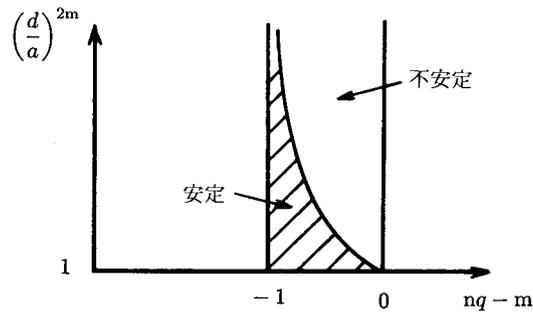


図 6.9 $nq - m - d/a$ -ダイアグラムにおける安定領域.

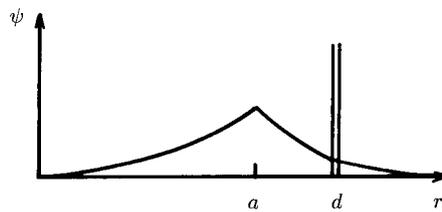


図 6.10 薄い抵抗性壁が $r = d$ にある場合の $\psi(r)$ の分布図

$$\tau_w \equiv \mu_0 d \delta_w / \eta_w$$

となる. ここで δ_w は薄い壁の厚さである. $\psi(d_+)/\psi(d) = -m/d$ であるから

$$\frac{\psi(d_-)'}{\psi(d)} = -\frac{m}{d} - \frac{\gamma_{\text{res}} \tau_w}{d}$$

が導かれる. したがって (6.66) における α_{res} は

$$\alpha_{\text{res}} = \frac{\gamma_{\text{res}} \tau_w / (2m)}{1 + \gamma_{\text{res}} \tau_w / (2m)} \quad (6.67)$$

でなければならない. (6.64) より $\psi'(a_+)/\psi(a)$ は

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = \frac{m}{a} \left(1 + \frac{\gamma_{\text{res}}^2 \tau_{A\theta}^2}{(nq - m)^2} + \frac{2}{(nq - m)} \right)$$

である. 他方 (6.66) より $\psi'(a_+)/\psi(a)$ は次のように与えられる.

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = -\frac{m}{a} \frac{1 + \alpha_{\text{res}} (a/d)^{2m}}{1 - \alpha_{\text{res}} (a/d)^{2m}}.$$

したがって抵抗性壁モードの成長率は

$$\gamma_{\text{res}}(d)^2 \tau_{A\theta}^2 = -2(nq - m) \left(1 + \frac{(nq - m)}{1 - \alpha_{\text{res}} (a/d)^{2m}} \right) \quad (6.68)$$

となる. (6.67) の α_{res} および

$$R \equiv (1 - (a/d)^{2m}) \frac{\gamma_{\text{res}}(d) \tau_w}{2m}$$

を用いると

6.4 抵抗性壁モード

$$\frac{1}{1 - \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}} = \frac{1}{1 + R} + \frac{R}{1 + R} \frac{1}{1 - (a/d)^{2m}}$$

である。(6.65)の $\gamma_c^2(d)$ および $\gamma_c^2(\infty)$ ($d \rightarrow \infty$)を用いると、(6.68)は

$$\gamma_{\text{res}}(d)^2 = \frac{\gamma_c^2(\infty) + R\gamma_c^2(d)}{1 + R} \quad (6.69)$$

のように表すことができる。モードが $r = d$ に導体壁があるとき安定で、壁がないとき不安定な場合を考えよう。すなわち $\gamma_c^2(d) < 0$, $\gamma_c^2(\infty) > 0$ 。 $r = d$ に薄い抵抗性壁があるときの成長率は、 $\gamma_{\text{res}}(d)^2 \ll \gamma_c^2(d), \gamma_c^2(\infty)$ の条件で

$$R = -\frac{\gamma_c^2(\infty)}{\gamma_c^2(d)}, \quad \gamma_{\text{res}}(d)\tau_w = \frac{2m}{1 - (a/d)^{2m}} \left(-\frac{\gamma_c^2(\infty)}{\gamma_c^2(d)} \right) \quad (6.70)$$

となる。したがってこの成長率は抵抗性壁時定数の逆数程度である。 $d \rightarrow a$ のとき $\gamma_{\text{res}}(d)\tau_w \rightarrow -2m(1 + nq - m)/(nq - m)$ は有限の値を保っている。このモードを抵抗性壁モード(resistive wall mode, RWM)という。壁の位置 d が、理想MHDモードが不安定になる臨界値 d_{cr} に近づくと、(6.70)よりRWMの成長率は無限大に近づき、理想MHDモードにつながる。

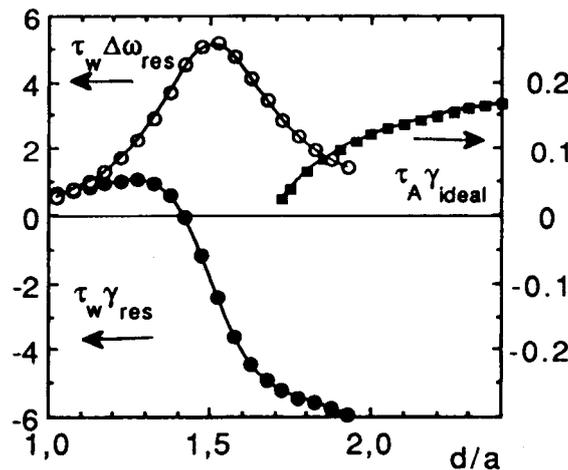


図 6.11 $n = 1$ の抵抗性壁モードの成長率 γ_{res} およびスリップ周波数 $\Delta\omega_{\text{res}} = \omega_{\text{rot}} - \omega_{\text{res}}$ とプラズマモードの成長率 γ_{ideal} の抵抗性壁半径 d/a に対する依存性。 $\omega_{\text{rot}} = 0.06$ は $\tau_A^{-1} = B/(a(\mu_0\rho)^{1/2}) = (B/B_\theta)\tau_{A\theta}^{-1}$ を単位としている [6.13].

抵抗性壁の中でプラズマが剛体回転をした場合、抵抗性壁モードがどのようなになるかを、WardとBondesonは、数値コードにより解析した [6.13]。数値解析によると、二つのモードがある。一つはプラズマと一緒に回転するモード(プラズマから見て揺動周波数が0)で、揺動は静止する抵抗性壁に殆ど侵入しないプラズマモード(plasma mode)である。いいかえれば剛体回転角速度 $\omega_{\text{rot}} \equiv (n/R)v_0 \gg \tau_w^{-1}$ のとき、抵抗性壁が理想導体壁のように振舞う。もう一つのモードは、揺動が抵抗性壁に対して非常にゆっくり回転する(ほとんど静止している)抵抗性壁モードである。すなわち、揺動がプラズマに対して回転する。二つのモードは、壁とプラズマの距離により相反する影響を受ける。プラズマモードは、壁がプラズマから離れるにしたがって不安定になる。他方抵抗性壁モードは、壁とプラズマとの距離が大きくなると安定になる。これはインダクタンス因子 $1 - (a/d)^{2n}$ が大きくなり、効果的な磁束減衰時間が長くなりあたかも壁がより理想導体壁に近づくとような効果のためと考えられる。幸いにも両方のモードが安定であるような壁位置の窓がある(図 6.11)。

抵抗性壁モードの安定化に必要な回転速度のしきい値が調べられている [6.14]。外部回路による抵抗性壁モードの負帰還制御の研究も行われている [6.15]。また抵抗性壁モードの詳しい解説がある [6.16]。

問題

1. ティアリング不安定性 $F(x) = F_s x/L_s$ ($|x| < L_s$) および $F(x) = F_s x/|x|$ ($|x| > L_s$) の場合, 外部領域の解によって求めた Δ' (6.16) が

$\Delta' = (2\alpha/L_s)((e)^{-2\alpha} + (1-2\alpha))/((e)^{-2\alpha} - (1-2\alpha))$, $\alpha \equiv kL_s$ であることを確かめよ. F'' は $x = \pm L_s$ においてデルタ関数であることに留意せよ. 6.1 節参照.

2. 内部領域の解による Δ' (6.18) および (6.19) の内部領域の解を解くために, $x < \varepsilon$ において $F'' \rightarrow 0$, $\partial^2/\partial y^2 = k^2 \ll \partial^2/\partial x^2$, $B_{1x} = \text{const.}$ を仮定する. そうすると (6.19) は下記のようになる.

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = i\alpha x B_{1x} + \beta x^2 V_x, \quad \alpha = \frac{F'}{\rho_m \eta}, \quad \beta = \frac{F'^2}{\rho_m \eta \gamma}.$$

x, V_x を $x = \beta^{1/4} X$, $V_x = i\alpha B_{1x} \beta^{-3/4} U_x$ に変換すると, この方程式は $\partial^2 U_x / \partial X^2 = X(1 + XU_x)$ となり, 解は次のように与えられる [6.3].

$$U_x(X) = -\frac{X}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{X^2}{2} \cos \theta\right) \sin^{1/2} \theta d\theta.$$

(6.18) より $(\partial B_{1x} / \partial x) = (\gamma \mu_0 / \eta) \int^x (B_{1x} - (i/\gamma) F' x V_x) dx$ であるので, Δ' は下記ようになる.

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{B'_{1x}(+\varepsilon) - B'_{1x}(-\varepsilon)}{B_{1x}(0)} = \frac{\mu_0 \gamma}{\eta B_{1x}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{iF'}{\gamma B_{1x}} x V_x\right) dx \\ &= \frac{\mu_0 \gamma}{\eta B_{1x}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - XU_x) dX \left(\frac{F'^2}{\rho_m \eta \gamma}\right)^{-1/4} = \frac{\gamma^{5/4} \rho_m^{1/4} \mu_0}{\eta^{3/4} F'^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 U_x}{\partial X^2} dX. \end{aligned}$$

上の式の定積分は 2.12 である. 成長率は

$$\gamma_{\text{Rutherford}} = 0.55 (\Delta' a)^{4/5} \left(\frac{\eta}{\mu_0 a^2}\right)^{3/5} \left(\frac{B_0^2}{\rho_m \mu_0 a^2}\right)^{1/5} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0^2}\right)^{2/5}$$

で与えられる. (6.27) の成長率はこの値の 0.55 倍である. $U_x(X)$ が $\partial^2 U_x / \partial X^2 = X(1 + XU_x)$ の方程式の解であることを確かめよ.

3. アイランドの中 安全係数が $q_s(r) = 1 + 2(r/a)^2$ で与えられアスペクト比 $A = 3$ のトカマクにおいて, $m = 2, n = -1$ モードの揺動磁場の径成分 δB_r のトロイダル磁場 B_t に対する比が $\delta B_r / B_t = 10^{-4}$ のとき, $m = 2, n = -1$ モードのアイランド中のプラズマ小半径 a に対する比を求めよ. $a = 2\text{m}$ のときにアイランド中を計算せよ.

第7章 ボルツマン方程式およびランダウ減衰

プラズマは数多くのイオンと電子の集まりから成り立っている。したがってプラズマの個々の粒子を観測することはできず、我々はその平均的な量を観測している。プラズマの性質を記述するために、ある空間座標および速度座標からなる位相空間座標におけるプラズマの粒子密度を表す分布関数を定義する。そしてその分布関数が位相空間においてどのように変化するかを記述する基礎方程式が必要となる。7.1節ではリューヴィユの定理より分布関数 $f(q_i, p_i, t)$ に対する方程式を導く。7.2節においては分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ のボルツマン方程式について述べる。衝突項を無視したボルツマン方程式はブラゾフ方程式とも呼ばれている。7.3節では、フォッカー-プランクの衝突項を記述する。

7.1 ボルツマン方程式

7.1.1 位相空間と分布関数

粒子はその座標 (x, y, z) 、速度 (v_x, v_y, v_z) 、および時間 t によって指定される。そしてさらにもっと一般的に正準変数 $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ および t で指定し記述する。位相空間における粒子の運動はハミルトン方程式によって与えられる。正準変数の位相空間においてはその微小体積 $\Delta = \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3$ はリュービルの定理により保存される。位相空間における粒子の運動はハミルトン方程式によって与えられる。

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_i}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7.1)$$

正準変数の位相空間においてはその微小体積 Δ はリュービルの定理により

$$\Delta = \text{const.} \quad (7.2)$$

である (図 7.1 参照)。

位相空間の微小体積中の粒子の数 δN は分布関数 $F(q_i, p_i, t)$ を用いて

$$\delta N = F(q_i, p_i, t) \delta \mathbf{q} \delta \mathbf{p} \quad (7.3)$$

で与えられる。ここで $\delta \mathbf{q} = \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3$ 、 $\delta \mathbf{p} = \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3$ である。もし衝突による粒子の散乱がなく運動方程式にしたがって粒子群が移動するとすれば、微小体積 Δ 中に存在する粒子の数 δN は保存する。 Δ も保存するから $\delta N / \Delta \equiv F(q_i, p_i, t)$ の分布関数も保存する。すなわち

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (7.4)$$

以上の考察では衝突による F の変化を無視したが、この変化を $(\delta F / \delta t)_{\text{coll}}$ と記述すれば (7.4) は

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (7.5)$$

になる。

7.1.2 ボルツマン方程式およびブラゾフ方程式

正準変数の代わりに、空間変数および速度変数 $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$ を使う。ハミルトニアンおよびハミルトンの運動方程式は

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (7.6)$$

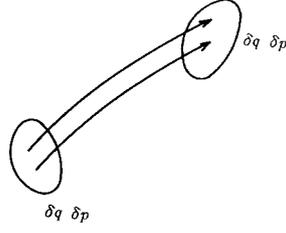


図 7.1 位相空間における粒子の移動.

$$p_i = mv_i + qA_i, \quad (7.7)$$

$$q_i = x_i \quad (7.8)$$

および

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i, \quad (7.9)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_k \frac{(p_k - qA_k)}{m} q \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (7.10)$$

で与えられる。そして (7.5) は以下のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i v_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + q \sum_i \left(\sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (7.11)$$

(7.7) (7.8) を用い、独立変数を (q_i, p_i, t) から (x_j, v_j, t) に変えると。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{m} \delta_{ij}, \\ \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial x_i} &= -\frac{q}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial t} &= -\frac{q}{m} \frac{\partial A_j}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。つぎに $F(x_i, p_i, t) = F(x_i, p_i(x_j, v_j, t), t) \equiv f(x_j, v_j, t)/m^3$ とすると $m^3 F(x_i, p_i, t) = f(x_j, v_j(x_i, p_i, t), t)$ である。そして

$$\begin{aligned} m^3 \frac{\partial}{\partial p_i} F(x_h, p_h, t) &= \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_j, v_j(x_h, p_h, t), t) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{1}{m}, \\ m^3 \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, p_h, t) &= \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_i, v_i(x_h, p_h, t), t) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \\ m^3 \frac{\partial}{\partial t} F(x_h, p_h, t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_i, v_i(x_h, p_h, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

7.1 ボルツマン方程式

したがって (7.11) の左辺は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_k v_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \\ & \quad + \sum_i \left(\sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{q}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} \\ & \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{q}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} \end{aligned}$$

となる。次のような関係

$$\sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i = \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$$

があるので

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \quad (7.12)$$

が導かれる。この式をボルツマン方程式という。電子およびイオンの分布関数が与えられていると、電荷密度 ρ 、電流密度 \mathbf{j} は

$$\rho = \sum_{i,e} q \int f dv_1 dv_2 dv_3, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i,e} q \int \mathbf{v} f dv_1 dv_2 dv_3 \quad (7.14)$$

となる。したがってマクスウェル方程式は以下で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i,e} q \int f d\mathbf{v}, \quad (7.15)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum_{i,e} q \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad (7.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.18)$$

プラズマが十分希薄で粒子間の衝突を無視することができる場合、 $(\delta f / \delta t)_{\text{coll}}$ を無視できる。しかしイオンおよび電子の分布関数の変化によって電荷および電流分布が変化し、マクスウェルの電磁方程式を通して \mathbf{E} , \mathbf{B} が変化し、ボルツマン方程式を通して分布関数に影響が及ぶ。したがって $(\delta f / \delta t)_{\text{coll}}$ の項を無視しても粒子間の長距離相互作用は組み込まれている。このような方程式を無衝突ボルツマン方程式あるいはブラゾフ方程式と呼んでいる。衝突項としてフォッカー-プランク衝突項 (7.1.3 節参照) を採用したボルツマン方程式をフォッカー-プランク方程式という。

7.1.3 フォッカー・プランクの衝突項

クーロン力は長距離相互作用であり ($\propto 1/r^2$), デバイ長内にある'場の粒子'の数は多いので, 'テスト粒子'は同時に多くの'場の粒子'と相互作用する. したがってクーロン衝突を統計的に扱うのが適切である. ある一つの粒子の速度 \mathbf{v} がクーロン衝突により, Δt 後に $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ に変化したとする. この過程の確率を $W(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$ とする. 分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ は

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \Delta t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t) W(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d(\Delta\mathbf{v}) \quad (7.19)$$

の形式になる. $t + \Delta t$ における状態が t の状態のみに依存するのでマーコフ過程 (Markoff process) である. そうすると分布関数のクーロン衝突による変化は

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \Delta t = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

となる. (7.19) の被積分項をテイラー展開すると以下の式に還元される.

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t) W(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) W(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) - \sum_r \frac{\partial(fW)}{\partial v_r} \Delta v_r + \sum_{rs} \frac{1}{2} \frac{\partial^2(fW)}{\partial v_r \partial v_s} \Delta v_r \Delta v_s + \dots \end{aligned} \quad (7.20)$$

$W(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$ の定義により, W の積分は

$$\int W d(\Delta\mathbf{v}) = 1$$

である. 以下の量を導入すると

$$\int W \Delta\mathbf{v} d(\Delta\mathbf{v}) = \langle \Delta\mathbf{v} \rangle_t \Delta t, \quad \int W \Delta v_r \Delta v_s d(\Delta\mathbf{v}) = \langle \Delta v_r \Delta v_s \rangle_t \Delta t$$

衝突項は

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} = -\nabla_v \cdot (\langle \Delta\mathbf{v} \rangle_t f) + \sum \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta v_r \partial \Delta v_s} (\langle \Delta v_r \Delta v_s \rangle_t f) \quad (7.21)$$

で与えられる. これをフォッカー-プランクの衝突項 (Fokker-Planck collision term) という. $\langle \Delta\mathbf{v} \rangle_t$, $\langle \Delta v_r \Delta v_s \rangle_t$ はフォッカー-プランク係数という. $\int W \Delta v_r \Delta v_s d(\Delta\mathbf{v})$ は Δt に比例する. Δv_r は Δt 間の i 番目の衝突による v_r の変化 Δv_r^i の和 $\Delta v_r = \sum_i \Delta v_r^i$ で表され, $\Delta v_r \Delta v_s = \sum_i \sum_j \Delta v_r^i \Delta v_s^j$ となる. 衝突は統計的に独立であるので, 統計的平均 $\langle \Delta v_r^i \Delta v_s^j \rangle_t$ ($i \neq j$) は 0 である. すなわち

$$\langle \Delta v_r \Delta v_s \rangle_t \Delta t = \sum_i \langle \Delta v_r^i \Delta v_s^i \rangle_t.$$

この右辺は Δt に比例する.

フォッカー-プランクの方程式は下記のようなになる [7.1].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m} \nabla_v f + \nabla_v \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (7.22)$$

ここで

$$\begin{aligned} J_i &= A_i f - \sum_j D_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j}, \\ A_i &= \langle \Delta v_i \rangle_t - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial v_j} \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_t, \end{aligned}$$

7.2 ランダウ減衰

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_t.$$

テンサー D を速度空間における拡散テンサーといい、 A を動的摩擦係数という。 J テンサーをテスト粒子の速度 v に平行および垂直の成分を考える。場の粒子の分布関数は等方的であるとすると、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} J_{\parallel} &= -D_{\parallel} \nabla_{\parallel} f + A f, \\ J_{\perp} &= -D_{\perp} \nabla_{\perp} f. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

A は v に平行で、拡散テンサーはダイアゴナルテンサーである [7.1]。場の粒子の分布関数がマクスウェル分布である場合は

$$m v D_{\parallel} = -T^* A, \quad (7.24)$$

$$D_{\parallel} = \frac{(q q^*)^2 n^* \ln \Lambda \Phi_1(b^*)}{8 \pi \epsilon_0^2 v m^2 b^{*2} v^2}, \quad (7.25)$$

$$D_{\perp} = \frac{(q q^*)^2 n^* \ln \Lambda}{8 \pi \epsilon_0^2 v m^2} \left(\Phi(b^* v) - \frac{\Phi_1(b^* v)}{2 b^{*2} v^2} \right) \quad (7.26)$$

となる。 q^* , n^* , b^* , T^* は場の粒子の量であり、 q , m , v はテスト粒子の量である。 $\Phi(x)$ および $\Phi_1(x)$ は次のような関数である。

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi,$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - \frac{2x}{\pi^{1/2}} \exp(-x^2).$$

$x > 2$ のとき、 $\Phi(x) \approx \Phi_1(x) \approx 1$ である。

7.2 ランダウ減衰

プラズマが速度分布に拡がりをもっているとき、無衝突プラズマでも波からエネルギーを吸収して減衰させる機構があることをランダウが導いた。このランダウ減衰は、衝突のない場合でも、粒子と波との間のエネルギー交換が行われる機構であり、大変興味深い現象である。したがって波を励起して、その波で粒子を加熱する場合や、波の不安定性を調べる場合にはこれらの機構は重要な役割を果たす。速度分布に拡がりを持つ熱いプラズマの波動現象を取り扱う体系的な解析は第 12 章において説明するが、その重要性のために、この章においてはランダウ減衰の機構の物理的概念を単純化したモデルを用いて説明する。速度分布に拡がりがある場合は冷たいプラズマの場合と比較して誘電率テンサーにプラズマの圧力による項が現われる他、これから述べる波と粒子の相互作用がつけ加わる。

磁力線に沿って多くの荷電粒子群がそれぞれ異なる速度 v_0 でドリフトしているとする。そこへ静電波 ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$ を満たす縦波) が磁力線に平行に伝播するとすると、その波の伝播速度と同じくらいのドリフト速度を持つ粒子が多くあると粒子群と波との間に相互作用が現われる (図 7.2)。いま磁力線方向に z 軸をとり、その単位ベクトルを \hat{z} とすると $\mathbf{v} = v \hat{z}$ の運動方程式は

$$\mathbf{E} = \hat{z} E \cos(kz - \omega t), \quad (7.27)$$

$$m \frac{dv}{dt} = q E \cos(kz - \omega t) \quad (7.28)$$

となる。電場 E は 1 次の微小量とすると、(7.28) の 0 次の解は

$$z = v_0 t + z_0$$

で、1 次の運動方程式は

$$m \frac{dv_1}{dt} = q E \cos(kz_0 + kv_0 t - \omega t) \quad (7.29)$$

である。 $t = 0$ で $v_1 = 0$ の初期値をとり、(7.29) の解を求めると

$$v_1 = \frac{q E \sin(kz_0 + kv_0 t - \omega t) - \sin kz_0}{m (kv_0 - \omega)} \quad (7.30)$$

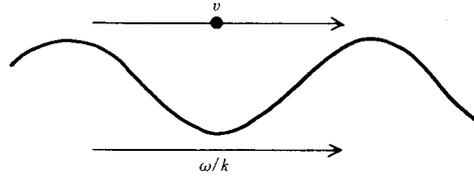


図 7.2 ランダウ減衰における波の伝播と粒子の運動.

となる. そこで粒子の運動エネルギーの変化を計算すると, 以下のようになる.

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = v \frac{d}{dt} mv = v_1 \frac{d}{dt} mv_1 + v_0 \frac{d}{dt} mv_2 + \dots \quad (7.31)$$

(7.28) (7.30) より

$$\begin{aligned} m \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} &= qE \cos(k(z_0 + v_0 t + z_1) - \omega t) \\ &= qE \cos(kz_0 + \alpha t) - qE \sin(kz_0 + \alpha t) k z_1, \\ z_1 &= \int_0^t v_1 dt = \frac{qE}{m} \left(\frac{-\cos(kz_0 + \alpha t) + \cos kz_0}{\alpha^2} - \frac{t \sin kz_0}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

をえる. ただし

$$\alpha \equiv kv_0 - \omega.$$

この関係を用いると, (7.31) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} &= \frac{q^2 E^2}{m} \left(\frac{\sin(kz_0 + \alpha t) - \sin kz_0}{\alpha} \right) \cos(kz_0 + \alpha t) \\ &\quad - \frac{kv_0 q^2 E^2}{m} \left(\frac{-\cos(kz_0 + \alpha t) + \cos kz_0}{\alpha^2} - \frac{t \sin kz_0}{\alpha} \right) \sin(kz_0 + \alpha t) \end{aligned}$$

となる. この値を初期位置 z_0 に関して平均をとる.

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0} = \frac{q^2 E^2}{2m} \left(\frac{-\omega \sin \alpha t}{\alpha^2} + t \cos \alpha t + \frac{\omega t \cos \alpha t}{\alpha} \right). \quad (7.32)$$

つぎに (7.32) を分布関数の重みをつけて速度 v_0 で平均すれば, 粒子が波からえるエネルギーの時間的割合を求めることができる. 分布関数を $f(v_0)$ とし, $\alpha \equiv kv_0 - \omega$ として

$$\hat{f}(v_0) = \hat{f}\left(\frac{\alpha + \omega}{k}\right) = g(\alpha)$$

なる関数を考える. $f(v_0)$ を正規化して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v_0) dv_0 = \frac{1}{k} \int g(\alpha) d\alpha = 1$$

とする. (7.32) の第 2 項の積分

$$\frac{1}{k} \int g(\alpha) t \cos \alpha t d\alpha = \frac{1}{k} \int g\left(\frac{x}{t}\right) \cos x dx \quad (7.33)$$

は $t \rightarrow \infty$ のとき 0 となる. (7.32) の第 3 項の積分は

$$\frac{\omega}{k} \int \frac{g(\alpha) t \cos \alpha t}{\alpha} d\alpha = \frac{\omega}{k} \int \frac{t}{x} g\left(\frac{x}{t}\right) \cos x dx \quad (7.34)$$

7.2 ランダウ減衰

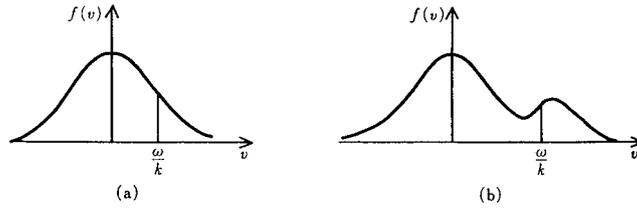


図 7.3 (a) ランダウ減衰と (b) ランダウ増幅.

となる. $g(\alpha)$ の偶関数の部分は積分に寄与しない. $g(\alpha)$ の奇関数の部分から積分に寄与する項は $g(\alpha)$ が $\alpha = 0$ で滑らかであれば $t \rightarrow \infty$ で 0 になる. したがって (7.32) における第 1 項からの寄与のみが残り

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -\frac{\omega q^2 E^2}{2mk} P \int \frac{g(\alpha) \sin \alpha t}{\alpha^2} d\alpha \quad (7.35)$$

をえる. ここで P はコーシーの積分主値である. 積分の主な寄与は $\alpha = 0$ の付近からくるので $g(\alpha)$ を展開する.

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2} g''(0) + \dots$$

$\sin \alpha t / \alpha^2$ は奇関数であるから, 上の式の第 2 項が残り t の大きな値に対して下記のような結果が導かれる [7.2].

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} &= -\frac{\omega q^2 E^2}{2m|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(0) \sin \alpha t}{\alpha} d\alpha \\ &= \frac{-\pi q^2 E^2}{2m|k|} \left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{\partial f(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0 = \omega/k} \end{aligned} \quad (7.36)$$

波の位相速度よりわずかに遅い速度を持つ粒子の数がわずかに速い速度を持つ粒子の数より多ければ, すなわち $v_0 \partial f_0 / \partial v_0 < 0$ ならば, 粒子系は波よりエネルギーをもらい波が減衰する. 逆に $v_0 = \omega/k$ において $v_0 \partial f_0 / \partial v_0 > 0$ ならば粒子系は波にエネルギーを供給して波の振幅は増大する (図 7.3). このような機構を発見者ランダウ [7.4] の名にちなんでランダウ減衰 (Landau damping) あるいは増幅という. 発見されてから約 20 年後の 1965 年, Malmberg らによって無衝突過程による波のランダウ減衰の現象が見事に実験的に検証された [7.4].

粒子の運動エネルギーの増加分 (7.36) は波のエネルギー W の減少分に対応するはずである. 波の振幅の成長率を γ とすると (減衰の場合は $\gamma < 0$ である),

$$n \left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -2\gamma W$$

となり, 波の振幅の成長率 γ は

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\Pi}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{|k|} \right) \left(v_0 \frac{\partial f(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0 = \omega/k} \quad (7.37)$$

で与えられる (ただし $\Pi^2 = nq^2/\epsilon m$, $W \approx 2\epsilon E^2/4$, $\int f(v_0) dv_0 = 1$).

上に述べた線形ランダウ減衰が成立するためには, 実際の粒子軌道が線形近似で解いた解からあまりずれない時間内で現象が終わる条件をみたすことが必要である. この時間の尺度として波の電場のポテンシャルの井戸の中を振動する周期 τ_{osc} が考えられる ($m\omega^2 x = eE$ より $\omega^2 \sim eEk/m$). すなわち

$$\tau_{\text{osc}} = \frac{1}{\omega_{\text{osc}}} \approx \left(\frac{m}{ekE} \right)^{1/2}.$$

したがって波のランダウ減衰時間 $1/\omega_i$ が τ_{osc} より小さいこと、あるいは粒子の衝突時間 $1/\nu_{\text{coll}}$ が τ_{osc} より小さいことが条件になる。

$$|\gamma\tau_{\text{osc}}| > 1, \quad (7.38)$$

$$|\nu_{\text{coll}}\tau_{\text{osc}}| > 1. \quad (7.39)$$

一方ランダウ減衰を導く過程で粒子が無衝突であることを仮定している。(7.35)を積分するとき $t \rightarrow \infty$ の漸近近似を用いたが、そのためには衝突時間 $1/\nu_{\text{coll}}$ が λ/v_{rms} より長いことが必要である。ここで λ は波の波長であり v_{rms} は速度分布の拡がりを示す。すなわち速度の拡がり v_{rms} を持った粒子群が衝突する間に1波長以上拡がるのが条件となる。

$$\frac{1}{\nu_{\text{coll}}} > \frac{2\pi}{kv_{\text{rms}}}. \quad (7.40)$$

トランジットタイム減衰

低周波領域では磁気モーメント μ_m の保存が成立し、磁力線に沿った運動の方程式は以下のようになる。

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\mu_m \frac{\partial B_{1z}}{\partial z}. \quad (7.41)$$

この式は $-\mu_m$ を電荷に、 $\partial B_{1z}/\partial z$ を電場に置き換えると、ランダウ減衰の場合と全く同じになる。そして同様な経過を辿って

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -\frac{\pi\mu_m^2 |k|}{2m} |B_{1z}|^2 \left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{\partial \hat{f}(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0=\omega/k} \quad (7.42)$$

をえる。このような機構による波と粒子のエネルギーのやりとりをトランジットタイム減衰という。

サイクロトロン減衰

サイクロトロン減衰は、ランダウ減衰と異なり、磁力線に沿う粒子のドリフト方向に対して直角な電場の成分があり、その波のドップラーシフトした周波数がサイクロトロン高調波周波数に近い場合、粒子ドリフト方向に対して直角方向に加速あるいは減速が加わる場合に起こりうる。

$$\omega - kV + n\Omega = 0 \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

この現象をサイクロトロン減衰 (cyclotron damping) あるいはサイクロトロン増幅という [7.2].

7.3 準線形理論による分布関数の変化

これまで擾乱が小さく1次の状態は変化しないという仮定のもとで、1次の微小変化量に関して方程式を線形化し、プラズマ中の波動現象を解析してきた。しかし擾乱が成長し大きくなると、0次の状態が変化し、それにもなって擾乱の成長率が小さくなり、やがて定常状態に移ると考えられる。この節ではこのような現象を簡単な例について考察してみよう。

簡単のため磁場は0であり、0次の状態は時間的にゆっくり変化し、空間的に一様であるとする。擾乱は静電的であり ($\mathbf{B}_1 = 0$)、空間的に1次元であるとし、イオンは一様に分布して静止しているとする。この場合電子の分布関数 f は次のようなボルツマン方程式にしたがう。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (7.43)$$

分布関数を0次の項と1次の擾乱項に分ける。

$$f(x, v, t) = f_0(v, t) + f_1(x, v, t). \quad (7.44)$$

ゆっくり変化する f_0 の時間微分は2次のオーダーであるとする。(7.44)を(7.43)に代入し1次と2次の項に分けると

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (7.45)$$

7.3 準線形理論による分布関数の変化

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_1}{\partial v} \quad (7.46)$$

となる. f_1 および E をフーリエ積分で表すと, 次のようになる.

$$f_1(x, v, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int f_k(v) \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk, \quad (7.47)$$

$$E(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int E_k \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk. \quad (7.48)$$

f_1 および E は実数であるので, $f_{-k} = f_k^*$, $E_{-k} = E_k^*$, $\omega(-k) = -\omega^*(k)$, $\omega(k) = \omega_r(k) + i\gamma(k)$ である. (7.47) および (7.48) を (7.46) に代入すると

$$f_k(v) = \frac{e}{m} \left(\frac{i}{\omega(k) - kv} \right) E_k \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (7.49)$$

をえる. (7.48) および (7.49) を (7.46) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int E_{k'} \exp(i(k'x - \omega(k')t)) dk' \right. \\ &\quad \left. \times \frac{i}{\omega(k) - kv} E_k \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk \right\rangle \end{aligned} \quad (7.50)$$

が導かれる. (7.50) の統計的平均をとると (右辺を x で積分し平均すると)

$$\frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D_v(v) \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \right), \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} D_v(v) &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i|E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t)}{\omega_r(k) - kv + i\gamma(k)} dk \\ &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(k)|E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t)}{(\omega_r(k) - kv)^2 + \gamma(k)^2} dk \end{aligned}$$

となる. ただし L は統計的平均のための x の積分範囲である. $|\gamma(k)| \ll |\omega_r(k)|$ の場合, 速度空間における拡散係数は

$$\begin{aligned} D_v(v) &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\pi}{L} \int |E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t) \delta(\omega_r(k) - kv) dk \\ &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\pi}{|v|L} |E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t) \Big|_{\omega/k=v} \end{aligned} \quad (7.52)$$

で与えられる. ポアソンの式および (7.49) より, 分散式は下記のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 dv, \quad ikE_k = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_k dv, \\ 1 + \frac{\Pi_e^2}{k} \frac{1}{n_0} \int \left(\frac{1}{\omega(k) - kv} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv &= 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

v が $\omega - kv = 0$ を満たす値は特異点である. $k > 0$ の場合, 積分経路は図 7.4 のように選ぶ必要がある (8.5.5 節参照). $|\gamma| \ll |\omega_r|$ ($\omega = \omega_r + i\gamma$) $k > 0$ の場合, (7.53) は

$$D(k, \omega_r + \gamma i) \equiv 1 - \frac{\Pi_e^2}{k^2} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v}}{v - \omega_r/k} dv - \frac{\Pi_e^2}{k^2} \int_{\text{half circle}} \frac{\frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v}}{v - \omega_r/k} dv = 0 \quad (7.54)$$



図 7.4 $k > 0$ の場合の (7.53) の積分経路. $\zeta = (\omega/k - v)/(2^{1/2}v_T)$.

に還元される. P は コーシーの主値を意味する. (7.54) は

$$D(k, \omega_r + \gamma i) = D(k, \omega_r) + \frac{\Pi_e^2}{k^2} i\pi \frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{\omega_r/k} \quad (7.55)$$

に変形できる. ここで $D(k, \omega_r)$ は $D(k, \omega_r + \gamma i)$ の実数部で (7.54) の右辺第 1 項と第 2 項の和である. $|\gamma| \ll |\omega_r|$ のとき $D(k, \omega_r + \gamma i) = D(k, \omega_r) + (\partial D/\partial \omega)\gamma i$ と書けるので, 成長率 γ は下記のようになる.

$$\gamma = \pi \frac{\Pi_e^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{\omega_r/k} \left(\frac{\partial D(k, \omega_r)}{\partial \omega_r} \right)^{-1} \approx \omega \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{\omega_r/k}. \quad (7.56)$$

位相速度 ω_r/k が, $\partial f_0/\partial v$ があまり小さくない領域の v より非常に大きければ, $D(k, \omega_r) \approx 1 - \Pi_e^2/\omega^2$ となり, (7.56) は (7.37) と殆ど同じである.

(7.51) は速度空間における拡散方程式である. 電子の分布関数が図 7.3(b) のように, ある v_1 で $v \partial f/\partial v > 0$ の場合, $\omega/k \approx v_1$ の位相速度をもつ波はランダウ増幅によって振幅 $|E_k|$ が大きくなる. したがって速度拡散係数 D_v も大きくなり, 拡散の効果によって $v \sim v_1$ 付近の $\partial f/\partial v$ の値が小さくなり, やがて $v \sim v_1$ 付近の分布関数の形が平坦になって波の成長はとまる.

また電子の分布関数が図 7.3(a) のようにマクスウェル分布をしているとき, 波を外部からプラズマ中に入射すると $v = \omega/k$ 付近の速度拡散係数 D_v が大きくなるから, 拡散効果によって $v = \omega/k$ 付近の分布関数の勾配が平坦になり, 9 章の図 9.7 に示すような分布関数に近づく. そして電子電流を波の伝播方向に駆動する (9.3 節参照).

問題

1. 電子プラズマ波 電子プラズマ波の分散式は (7.53) の実数部で与えられる. $(\omega - kv)^{-1} = \omega^{-1}(1 + (kv/\omega) + (kv/\omega)^2 + (kv/\omega)^3 + \dots)$ を展開し, 電子分布関数がマクスウェル分布 $f_0 = n_0(1/2\pi)^{-1/2}v_T^{-1} \exp(-v^2/(2v_T^2))$ とする. 分散式が $\approx 1 - (\Pi_e/\omega)^2 - 3(k/\omega)^2(T_e/m_e) = 0$ で与えられることを確かめよ.
2. ランダウ減衰率 ランダウ減衰率と電子プラズマ波の周波数 ω との比を求めよ. ランダウ減衰が効果的になる条件を導け.

解答 (ヒント)

1. 電子プラズマ波 分散式 (7.53) において $(\omega - kv)^{-1} = \omega^{-1}(1 - kv/\omega)^{-1}$ を展開すると

$$1 + \frac{\Pi_e^2}{k\omega} \int \left(1 + \frac{kv}{\omega} + \left(\frac{kv}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{kv}{\omega} \right)^3 + \dots \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{v_T} \frac{-v}{v_T^2} \exp\left(\frac{-v^2}{2v_T^2} \right) dv = 0,$$

$$1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} (1 + 3(k^2/\omega^2)(T_e/m_e) + \dots) \approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} - 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{T_e}{m_e} = 0.$$

第8章 電磁波伝播媒質としてのプラズマ

プラズマは数多くの動くイオンと電子の集まりから成り、荷電粒子は互いに相互作用している。これらの系を記述するために第10章において分布関数を導入し、その分布関数に対してボルツマン方程式あるいはブラソフの方程式を導いた。これら数多くの粒子からなる系は非常に多くの自由度を持っており、簡単化されたモデルを用いてのみ、プラズマの運動を数学的に解析することができる。

第3章においては質量密度、流体速度、圧力など、速度空間における平均量を導入しこれらの平均量に対して電磁流体力学の方程式を導いた。そしてこのモデルを用いて平衡やMHD不安定性などを取り扱ってきた。しかし、このモデルにおいては速度空間における平均量を取り扱うので、分布関数の速度空間における形によって引き起される不安定性あるいは波の減衰などの現象を記述するには全く無力である。また電磁流体モデルで取り扱われる現象は多くの場合低周波で変化する ($\omega < |\Omega_i|, \Omega_e$) 現象であって、イオン・サイクロトロン周波数あるいは電子サイクロトロン周波数より高い周波数の振動現象は記述できない。

この章ではプラズマ中の波を取り扱うのに適し、数学的解析が比較的簡単でしかもプラズマの力学的性質の基本的部分を保持するようなモデルを導入する。すなわち一様磁場中に空間的に均一に存在する温度0のプラズマ・モデルである。したがって無擾乱状態ではイオンも電子も静止している。1次の擾乱によって生ずる電場、磁場によってイオンや電子が運動し、その結果生ずる電場、磁場が自己矛盾なく取り扱われる。このような冷たいプラズマの運動論的取り扱いによってプラズマ中の波の性質を表わす分散式を導き、いろいろな場合における波の性質を記述する。したがってプラズマはある誘電率テンソル \mathbf{K} を持つ電磁波伝播媒質と考えることができる。

このモデルは一様な磁場、密度、温度0という場合を想定しているが、磁場や密度が変化する特徴的長さ(プラズマの大きさ)に比べて、取り扱う波の波長が短く、かつ粒子の熱速度に比べて波の位相速度が大きければよい近似で適用できる。この誘電率テンソル \mathbf{K} は磁場、密度の関数となるから、磁場、密度が空間的に変化する場合はプラズマは不均一、非等方で、かつ強い分散性を示す媒質と見なすことができる。

この章の後半では、熱いプラズマ内における波動の一般的解析法を述べる。プラズマの温度が0でなく有限な場合には、速度空間で広がりをもつときに現われてくる粒子と波動の相互作用が重要な役割をする。その代表的相互作用はランダウ減衰である。熱いプラズマの誘電率テンソル \mathbf{K} にはランダウ減衰の効果が取り入れられている。文献[8.1]にプラズマ波が詳しく記述されている。

8.1 冷たいプラズマの誘電テンソル

0次の無擾乱状態の冷たいプラズマにおいては密度 n や磁場 \mathbf{B}_0 は空間的に一様で時間的にも一定であり、イオンおよび電子は静止しているとする。

1次の擾乱項は $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ の形で変化するものとする。位相速度 v_{ph} は $v_{\text{ph}} = \omega/k$ ($k = |\mathbf{k}|$) で与えられ、 \mathbf{k} の方向に伝播する。プラズマ中のイオンや電子は、擾乱による電場 \mathbf{E} や磁気誘導 \mathbf{B}_1 によって運動し、その速度を \mathbf{v}_k とする (k は電子、イオン(多種類のこともある)の種類を表わす)。プラズマ粒子の運動によって生ずる電流 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j} = \sum_k n_k q_k \mathbf{v}_k \quad (8.1)$$

である。 n_k と q_k はそれぞれ k 種の粒子の密度および電荷である。電気変位 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (8.2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P} \quad (8.3)$$

となる。ここで \mathbf{E} は電場、 \mathbf{P} は電気分極、 ϵ_0 は真空中の誘電率を表わす。したがって \mathbf{D} は次のように表される。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega} \mathbf{j} \equiv \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.4)$$

\mathbf{K} を誘電率テンソル (dielectric tensor) という。等方的媒質で、誘電率が ϵ ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$) の場合、 $\mathbf{K} = \hat{\epsilon} \mathbf{I}$ ($\hat{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$, \mathbf{I} は単位マトリックスである。 k 種の単一荷電粒子の運動は

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = q_k (\mathbf{E} + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}) \quad (8.5)$$

である。ここで $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ であり、 \mathbf{v}_k , \mathbf{E} , \mathbf{B}_1 は 1 次の微小量である。したがって、これらの 1 次の微小量に関する 1 次方程式は

$$-i\omega m_k \mathbf{v}_k = q_k (\mathbf{E} + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_0) \quad (8.6)$$

である。 \mathbf{B}_0 の方向に z 軸をとると運動方程式の解は

$$\left. \begin{aligned} v_{k,x} &= \frac{-iE_x}{B_0} \frac{\Omega_k \omega}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{E_y}{B_0} \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \\ v_{k,y} &= \frac{E_x}{B_0} \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{iE_y}{B_0} \frac{\Omega_k \omega}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \\ v_{k,z} &= \frac{-iE_z}{B_0} \frac{\Omega_k}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

となる。ここで Ω_k は k 種の荷電粒子のサイクロトロン周波数で

$$\Omega_k = \frac{-q_k B_0}{m_k} \quad (8.8)$$

である (電子の場合 $\Omega_e > 0$, イオンの場合 $\Omega_i < 0$)。 (8.7) より \mathbf{v}_k を \mathbf{E} で表わし、 j の式 (8.1) に代入しさらに \mathbf{D} の式 (8.4) を用いると誘電率テンソル \mathbf{K} は

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} K_{\perp} & -iK_{\times} & 0 \\ iK_{\times} & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

で表わされる。ただし

$$K_{\perp} \equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \quad (8.10)$$

$$K_{\times} \equiv - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2} \frac{\Omega_k}{\omega}, \quad (8.11)$$

$$K_{\parallel} \equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2}, \quad (8.12)$$

$$\Pi_k^2 \equiv \frac{n_k q_k^2}{\epsilon_0 m_k}. \quad (8.13)$$

Stix の記号に従い次の量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_k} = K_{\perp} + K_{\times}, \\ L &\equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_k} = K_{\perp} - K_{\times}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8.15)$$

8.1 冷たいプラズマの誘電テンサー

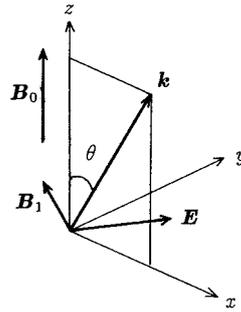


図 8.1 伝播ベクトルと xyz 座標.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (8.16)$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}_1, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H}_1 &= -\omega \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

そして

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8.17)$$

をえる. 無次元ベクトル

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{k}c}{\omega}$$

を定義すると (c は光速), $N = |\mathbf{N}|$ は光速と波の位相速度との比で, 屈折率を表わす. \mathbf{N} を用いると (8.17) は

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8.18)$$

となる. \mathbf{N} と \mathbf{B}_0 とのなす角を θ とし (図 8.1), \mathbf{N} ベクトルが zx 面にあるように x 軸をとると (8.18) は

$$\begin{bmatrix} K_{\perp} - N^2 \cos^2 \theta & -iK_{\times} & N^2 \sin \theta \cos \theta \\ iK_{\times} & K_{\perp} - N^2 & 0 \\ N^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & K_{\parallel} - N^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (8.19)$$

で表わされる. $\mathbf{E} \neq 0$ の解が存在するためには行列のデターミナントが 0 でなくてはならない.

$$AN^4 - BN^2 + C = 0, \quad (8.20)$$

$$A = K_{\perp} \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta, \quad (8.21)$$

$$B = (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) \sin^2 \theta + K_{\parallel} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta), \quad (8.22)$$

$$C = K_{\parallel} (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) = K_{\parallel} RL. \quad (8.23)$$

この (8.20) が伝播ベクトル \mathbf{k} と周波数 ω との関係きをきめる. \mathbf{k} と ω との関係式を分散式という. この解は

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \\ &= ((K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) \sin^2 \theta + K_{\parallel} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad \pm [(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 - K_{\parallel} K_{\perp})^2 \sin^4 \theta + 4K_{\parallel}^2 K_{\times}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}) \\ &\quad \times (2(K_{\perp} \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta))^{-1} \end{aligned} \quad (8.24)$$

となる. $\theta = 0$ すなわち磁力線方向に伝播する波について, 分散式 (8.20) は

$$K_{\parallel}(N^4 - 2K_{\perp}N^2 + (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)) = 0 \quad (8.25)$$

で, 解は

$$K_{\parallel} = 0, \quad N^2 = K_{\perp} + K_{\times} = R, \quad N^2 = K_{\perp} - K_{\times} = L \quad (8.26)$$

となる. また $\theta = \pi/2$ すなわち磁力線と直角方向に伝播する波については

$$K_{\perp}N^4 - (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 + K_{\parallel}K_{\perp})N^2 + K_{\parallel}(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) = 0, \quad (8.27)$$

$$N^2 = \frac{K_{\perp}^2 - K_{\times}^2}{K_{\perp}} = \frac{RL}{K_{\perp}}, \quad N^2 = K_{\parallel} \quad (8.28)$$

の分散式がえられる.

8.2 波の諸性質

8.2.1 波の偏光性と粒子の運動

前節で分散式を導いたが, 波の電場やそれにもなう粒子の運動について述べる. (8.19) の y 成分をとると

$$\begin{aligned} iK_{\times}E_x + (K_{\perp} - N^2)E_y &= 0, \\ \frac{iE_x}{E_y} &= \frac{N^2 - K_{\perp}}{K_{\times}} \end{aligned} \quad (8.29)$$

となる. また速度成分に関しては次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{iv_{k,x}}{v_{k,y}} &= \frac{i\left(\frac{-iE_x}{E_y} \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{\Omega_k}{\omega^2 - \Omega_k^2}\right)}{\frac{E_x}{E_y} \frac{\Omega_k}{\omega^2 - \Omega_k^2} - i\frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_k^2}} \\ &= \frac{(\omega + \Omega_k)(N^2 - L) + (\omega - \Omega_k)(N^2 - R)}{(\omega + \Omega_k)(N^2 - L) - (\omega - \Omega_k)(N^2 - R)}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

$\theta = 0$ で $N^2 = R$ を満たす波については $iE_x/E_y = 1$ であり, 電場は円偏光しており, 右向きすなわち電子のラーマー運動の方向に回転する. 同様に荷電粒子の運動も右向きの円運動となる. $\theta = 0$ で $N^2 = L$ を満たす波は $iE_x/E_y = -1$ であり, 左向きすなわちイオンのラーマー運動の方向に回転する円偏光をしており, 粒子の運動も左向きの円運動となる. 伝播方向を磁力線方向に向けたとき, すなわち $\theta \rightarrow 0$ としたとき $N^2 = R$ の分散式になる波を **R** 波といい, $N^2 = L$ の分散式になる波を **L** 波と呼ぶ. $\theta = 0$ の波の分散式 (8.25) の解は

$$N^2 = \frac{1}{2} \left(R + L \pm \frac{|K_{\parallel}|}{K_{\parallel}} |R - L| \right) \quad (8.31)$$

と書き表わされるので, K_{\parallel} が変化して $K_{\parallel} = 0$ を横切り符号を変えると R 波と L 波とが入れ替わる. また $K_{\times} = R - L$ が符号を変えると, すなわち $R = \infty$ あるいは $L = \infty$ のところでも R 波と L 波とが入れ替わる.

$\theta = \pi/2$ のとき, $N^2 = K_{\parallel}$ の分散式を満たす波においては $E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$ となる. また $N^2 = RL/K_{\perp}$ を満たす波は $iE_x/E_y = -(R - L)/(R + L) = -K_{\times}/K_{\perp}, E_z = 0$ となる. θ を $\pi/2$ に近づけたとき $N^2 = K_{\parallel}$ になる波を正常波 (O) といい, $N^2 = RL/K_{\perp}$ になる波を異常波 (X) という. $\theta = \pi/2$ のとき異常波の電場は磁力線に垂直であり正常波の電場は磁力線に平行であることを指摘しておく. $\theta = \pi/2$ のときの波の分散式は (8.24) より

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{1}{2K_{\perp}} (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 + K_{\parallel}K_{\perp} + |K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 - K_{\parallel}K_{\perp}|) \\ &= \frac{1}{2K_{\perp}} (RL + K_{\parallel}K_{\perp} \pm |RL - K_{\parallel}K_{\perp}|) \end{aligned} \quad (8.32)$$

8.3 2成分プラズマの波

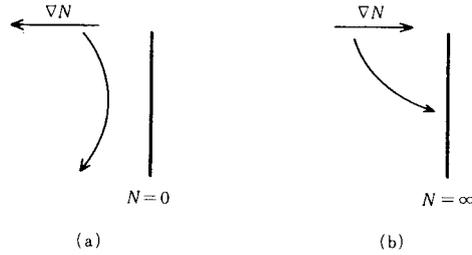


図 8.2 波の伝播. (a) カット・オフ領域付近, (b) 共鳴領域付近.

となるので $RL - K_{\parallel}K_{\perp} = 0$ のところを通過すると正常波と異常波とが入れ替わる.

R 波, L 波, 正常波, 異常波の分類の他に $\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ の間の位相速度の大小によって速波あるいは速進波と遅波あるいは遅進波に区別される. $N^2 = (B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2})/2A$ の平方根の中は (8.24) より正であるので $\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ の間で位相速度の大小関係が変わることはない.

8.2.2 カット・オフと共鳴

分散式の解 (8.24) においてある条件によって屈折率 N が 0 になったり無限大になったりする. $N^2 = 0$ のときをカット・オフといい, 波の位相速度

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{N} \quad (8.33)$$

は無限大になる. (8.20) (8.23) より明かなように

$$K_{\parallel} = 0, \quad R = 0, \quad L = 0 \quad (8.34)$$

の条件においてカット・オフが起る. $N^2 = \infty$ のときを共鳴といい, 波の位相速度は 0 に近づく. そこでは波の吸収が起りうる. 共鳴条件は

$$\tan^2 \theta = -\frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}} \quad (8.35)$$

である. $\theta = 0$ においては $K_{\perp} = (R + L)/2 \rightarrow \pm\infty$ が共鳴条件で, $R \rightarrow \pm\infty$ の条件は ω が正のときで $\omega = \Omega_e$ すなわち電子サイクロトロン周波数のとき満たされる. これを電子サイクロトロン共鳴という. $L \rightarrow \pm\infty$ の条件は ω が $\omega = -\Omega_i > 0$ のとき満たされ, これをイオン・サイクロトロン共鳴という.

$\theta = \pi/2$ においては, $K_{\perp} = 0$ が共鳴条件となる. この共鳴条件を混成共鳴という. またハイブリッド共鳴ともいう.

屈折率が減少してカット・オフの領域に波が近づくと, その波の光路は図 8.2(a) のように曲がり反射されてしまう. また屈折率が無限大になる共鳴領域に近づくと光路は共鳴領域に垂直に進行し (図 8.2b), その位相速度は 0 に近づく. そしてプラズマによる吸収が起る.

8.3 2成分プラズマの波

1 種類のイオンと電子からなるプラズマを考えると電荷の中性より

$$n_i Z_i = n_e \quad (8.36)$$

である. 便利のため無次元パラメーターを導入する.

$$\delta = \frac{\mu_0(n_i m_i + n_e m_e)c^2}{B_0^2}. \quad (8.37)$$

また電子について (8.13) で定義された量 (2.2 節でも導入された)

$$\Pi_e^2 = n_e e^2 / (\epsilon_0 m_e) \quad (8.38)$$

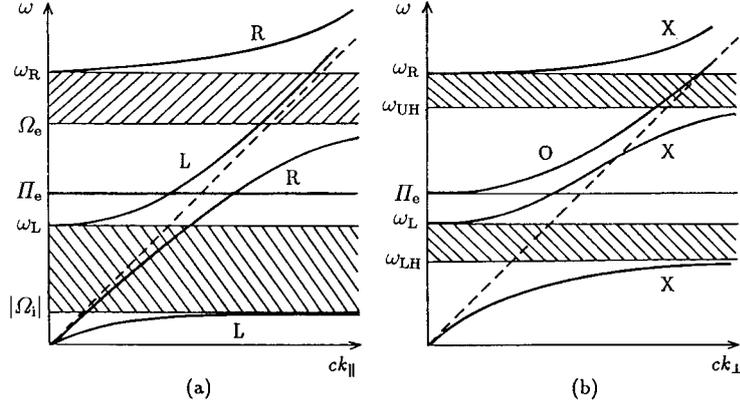


図 8.3 (a) $\theta = 0$ 方向に伝播する R 波, L 波の分散関係 ($\omega - ck_{\parallel}$) (b) $\theta = \pi/2$ 方向に伝播する正常波 (O 波) と異常波 (X 波) の分散関係 ($\omega - ck_{\parallel}$).

を電子プラズマ周波数という. そうすると

$$\begin{aligned} \Pi_e^2 / \Pi_i^2 &= m_i / m_e \gg 1, \\ \frac{\Pi_i^2 + \Pi_e^2}{|\Omega_i| \Omega_e} &= \delta \approx \frac{\Pi_i^2}{\Omega_i^2} \end{aligned} \quad (8.39)$$

の関係がある. また K_{\perp} , K_{\times} , K_{\parallel} , R , L は

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \\ K_{\times} &= -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \frac{\Omega_i}{\omega} - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{\omega}, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

$$R = 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)} \simeq \frac{\omega^2 - (\Omega_i + \Omega_e)\omega + \Omega_i\Omega_e - \Pi_e^2}{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)}, \quad (8.41)$$

$$L = 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)} \simeq \frac{\omega^2 + (\Omega_i + \Omega_e)\omega + \Omega_i\Omega_e - \Pi_e^2}{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)} \quad (8.42)$$

で与えられる. 磁場 \mathbf{B}_0 に平行に伝播する波 ($\theta = 0$) は分散式において $K_{\parallel} = 0$, $N^2 = R$, $N^2 = L$ に対応して次の式を得る.

$$\omega^2 = \Pi_e^2, \quad (8.43)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} = \frac{1}{R} = \frac{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)}{\omega^2 - \omega\Omega_e + \Omega_e\Omega_i - \Pi_e^2} = \frac{(\omega + |\Omega_i|)(\omega - \Omega_e)}{(\omega - \omega_R)(\omega + \omega_L)}, \quad (8.44)$$

ただし ω_R , ω_L は次式で与えられる.

$$\omega_R = \frac{\Omega_e}{2} + \left(\left(\frac{\Omega_e}{2} \right)^2 + \Pi_e^2 + |\Omega_e\Omega_i| \right)^{1/2} > 0, \quad (8.45)$$

8.3 2成分プラズマの波

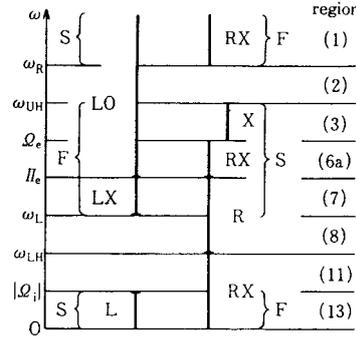


図 8.4 $\theta = 0$ における R 波, L 波, $\theta = \pi/2$ における O 波 (正常波), X 波 (異常波), そして F 波 (速進波), S 波 (遅進波) の存在する ω 領域 ($\omega_L < \Pi_e < \Omega_e$ の場合). 右に示した番号 (1)~(13) は図 8.5 に示す領域の番号である.

$$\omega_L = -\frac{\Omega_e}{2} + \left(\left(\frac{\Omega_e}{2} \right)^2 + \Pi_e^2 + |\Omega_e \Omega_i| \right)^{1/2} > 0, \quad (8.46)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} = \frac{1}{L} = \frac{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)}{\omega^2 + \omega \Omega_e + \Omega_e \Omega_i - \Pi_e^2} = \frac{(\omega - |\Omega_i|)(\omega + \Omega_e)}{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}. \quad (8.47)$$

ここで, $\Omega_e > 0$, $\Omega_i < 0$ であることに注意しておく. また $\omega_R > \Omega_e$ である. $\omega - ck_{\parallel}$ の分散関係を, $\Omega_e > \Pi_e$ の場合, 定性的にグラフに描くと図 8.3(a) のようになる. 磁場 \mathbf{B}_0 に垂直に伝播する波は $N^2 = K_{\parallel}$ の正常波 (O 波) と $N^2 = (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)/K_{\perp}$ の異常波 (X 波) に対応して

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} = \frac{1}{K_{\parallel}} = \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^{-1} = 1 + \frac{\Pi_e^2}{c^2 k_{\perp}^2}, \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} &= \frac{K_{\perp}}{K_{\perp}^2 - K_{\times}^2} = \frac{K_{\perp}}{RL} \\ &= \frac{2(\omega^2 - \Omega_i^2)(\omega^2 - \Omega_e^2) - \Pi_e^2((\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e) + (\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e))}{2(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)} \\ &= \frac{\omega^4 - (\Omega_i^2 + \Omega_e^2 + \Pi_e^2)\omega^2 + \Omega_i^2 \Omega_e^2 - \Pi_e^2 \Omega_i \Omega_e}{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)} \end{aligned} \quad (8.49)$$

である. (8.48) は電子プラズマ波あるいはラングミュア波という. ω_{UH} および ω_{LH} を

$$\omega_{UH}^2 \equiv \Omega_e^2 + \Pi_e^2, \quad (8.50)$$

$$\frac{1}{\omega_{LH}^2} \equiv \frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} + \frac{1}{|\Omega_i| \Omega_e} \quad (8.51)$$

によって定義する., ω_{UH} を高域混成共鳴周波数または高ハイブリッド共鳴周波数, ω_{LH} を低域混成共鳴周波数または低ハイブリッド共鳴周波数と呼ぶ. これらを用いると (8.49) は下記のようになる.

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)}{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)}. \quad (8.52)$$

$\omega_R > \omega_{UH} > \Pi_e, \Omega_e$ および $\omega_{LH}^2 < \Omega_e |\Omega_i|, \Omega_i^2 + \Pi_i^2$ の関係がある. $\Omega_e > \Pi_e$ の場合 $\omega - ck_{\perp}$ の分散関係をグラフに定性的に描くと図 8.3(b) のようになる. また $\omega - ck$ のグラフの勾配 ω/ck

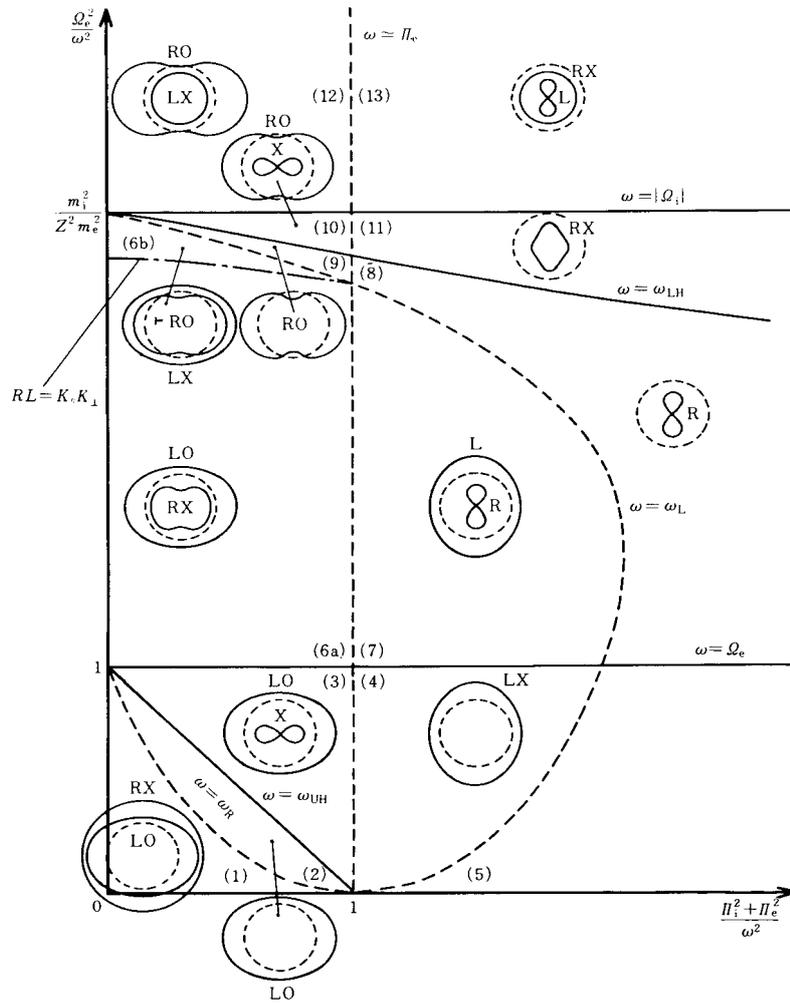


図 8.5 2成分プラズマのCMAダイアグラム. この図で垂直軸は磁場, 水平軸は密度に対応する. 各領域において波面が描かれており, 点線は真空中の波面である (ただし磁場方向は垂直軸).

8.4 種々の波

は位相速度 v_{ph} と c との比を表わし、勾配の急なほど位相速度が速い。図 8.4 に R 波, L 波; 正常波 (O 波), 異常波 (X 波), 速波 (F 波), 遅波 (S 波) の領域を $\omega_L < \Pi_e < \Omega_e$ の場合について示す。

冷たいプラズマの波の分類をわかりやすくするために P.C.Clemmow と R.F.Mullaly によって導入され, W.P.Allis によって改良されたいわゆる **CMA** ダイアグラムについて述べる [8.2]. 縦軸に Ω_e^2/ω^2 , 横軸に $(\Pi_i^2 + \Pi_e^2)/\omega^2$ をとりカット・オフの条件 (鎖線) $R = 0$ ($\omega = \omega_R$), $L = 0$ ($\omega = \omega_L$), $K_{\parallel} = 0$ ($\omega = \Pi_e$) および共鳴条件 (実線) $R = \infty$ ($\omega = \Omega_e$), $L = \infty$ ($\omega = \Omega_i$), $K_{\perp} = 0$ ($\omega = \Omega_{LH}, \omega = \Omega_{UH}$) の境界線を図 8.5 に引く。また O 波と X 波とが入れ替わる境界線 $RL = K_{\parallel}K_{\perp}$ を一点鎖線で描く。これらの境界線で区切られた領域において R 波, L 波; O 波, X 波の波面を描く。CMA ダイアグラムの縦軸および横軸はそれぞれ B_0 および n_e のパラメーターにも対応するので, 周波数 ω の値によってどの領域に入るかがすぐに判るようになっている。

8.4 種々の波

8.4.1 アルフベン波

周波数 ω がイオンサイクロトロン周波数 $|\Omega_i|$ より小さい ($\omega \ll |\Omega_i|$) とし誘電率テンサー \mathbf{K} は

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 + \delta, \\ K_{\times} &= 0, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

で与えられる。ここで $\delta = \mu_0 n_i m_i c^2 / B_0^2$ である。 $\Pi_e^2 / \omega^2 = (m_i / m_e) (\Omega_i^2 / \omega^2) \delta$ ゆえ $\Pi_e^2 / \omega^2 \gg \delta$ である。また $\Pi_e^2 / \omega^2 \gg 1$ とすると $|K_{\parallel}| \gg |K_{\perp}|$ となり, (8.20) の A, B, C の値は

$$\left. \begin{aligned} A &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \cos^2 \theta, \\ B &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} (1 + \delta) (1 + \cos^2 \theta), \\ C &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} (1 + \delta)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

となり, 分散式は

$$\frac{c^2}{N^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \delta} = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_0 \rho_m c^2}{B_0^2}} \simeq \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m}, \quad (8.55)$$

$$\frac{c^2}{N^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \delta} \cos^2 \theta \quad (8.56)$$

となる (ρ_m は質量密度)。これらの分散式を満たす波をアルフベン波という。

$$v_A^2 = \frac{c^2}{1 + \delta} = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_0 \rho_m c^2}{B_0^2}} \simeq \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m} \quad (8.57)$$

をアルフベン速度という。(8.55) (8.56) は CMA ダイアグラムの (13) 領域に現われるモードである。(8.55) (8.56) を (8.19) に代入すると両者のモードとも $E_z = 0$, (8.55) のモード (R 波, F 波, X 波) に対しては $E_x = 0$, (8.56) のモード (L 波, S 波) に対しては $E_y = 0$ となることがわかる。また (8.6) より $\omega \ll |\Omega_i|$ に対しては

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (8.58)$$

であるので, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0) / B_0^2$ より (8.55) のモードについては

$$\mathbf{v}_i \propto \hat{\mathbf{x}} \cos(k_x x + k_z z - \omega t), \quad (8.59)$$

(8.56) のモードについては

$$\mathbf{v}_i \propto \hat{\mathbf{y}} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \quad (8.60)$$

となる ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ は x 軸, y 軸方向の単位ベクトルを表わす). したがって (8.55) (8.59) の速波を圧縮モードと呼び ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \neq 0$), また (8.56) (8.60) の遅波を振れモードと呼んでいる ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$). また (8.55) の R 波は CMA ダイアグラムの領域 (13) から領域 (11) (8) へと形をかえて存続するが (8.56) の L 波は (13) で消えてしまう. これらの波は 5.4 節で述べた圧縮アルフベン波 (5.59) および振れアルフベン波 (5.57) に対応する波である. (5.60) の磁気音波の遅進波は温度が 0 のときにはなくなり, 冷たいプラズマ中では現れない.

(8.58) より明かなようにプラズマは磁力線にくっついて運動する. 磁場により磁力線に沿って張力 $B^2/2\mu_0$, 磁力線に直角方向に $B^2/2\mu_0$ の圧力が加わっている. したがって一様な圧力 $B^2/2\mu_0$ の中で磁力線に沿って張力 B^2/μ_0 が働いていると考えてもよい. この磁力線に質量密度 ρ_m のプラズマがくっついているので磁力線の糸を伝わる波の速度は $B_0^2/(\mu_0\rho_m)$ で与えられるわけである.

8.4.2 イオン・サイクロトロン波および速波

周波数 ω が低周波数からイオンサイクロトロン周波数に近づけ, かつ $\Pi_e^2/\omega^2 \gg 1$ の場合について考察する. これは CMA ダイアグラムの領域 (13) (11) を考慮することに相当する. $\omega^2 \ll \Omega_e^2, \omega^2 \ll \Pi_e^2, \delta \gg 1$, のとき, $K_\perp, K_\times, K_\parallel$ は

$$K_\perp = \frac{-\delta\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \quad K_\times = \frac{-\delta\omega\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \quad K_\parallel = -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \quad (8.61)$$

となる. $\Pi_e^2/\omega^2 = (m_i/m_e)(\Omega_i^2/\omega^2)\delta \gg \delta$ であるので, 係数 A, B, C は下記のようなになる.

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \cos^2 \theta, \\ B &= \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \frac{\delta\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} (1 + \cos^2 \theta), \\ C &= \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \frac{\delta^2\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.62)$$

分散式は ($\Pi_i^2 = \Omega_i^2\delta, v_A^2 = c^2/\delta$)

$$N^4 \cos^2 \theta - N^2 \frac{\delta\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\delta^2\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} = 0 \quad (8.63)$$

となる. $N^2 \cos^2 \theta = c^2 k_\parallel^2/\omega^2, N^2 \sin^2 \theta = c^2 k_\perp^2/\omega^2$ とすると, (8.63) は次のようになる.

$$k_\perp^2 c^2 = \frac{\omega^4 \delta^2 \Omega_i^2 - \omega^2 (2\delta\Omega_i^2 k_\parallel^2 c^2 + k_\parallel^4 c^4) + \Omega_i^2 k_\parallel^4 c^4}{\omega^2 (\delta\Omega_i^2 + k_\parallel^2 c^2) - \Omega_i^2 k_\parallel^2 c^2}, \quad (8.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_\perp^2}{k_\parallel^2} &= \frac{(\omega/v_A k_\parallel)^4 - 2(\omega/v_A k_\parallel)^2 - (\omega/\Omega_i)^2 + 1}{(\omega/v_A k_\parallel)^2 - (1 - \omega^2/\Omega_i^2)} \\ &= \frac{((\omega/v_A k_\parallel)^2 - (1 - \omega/\Omega_i))((\omega/v_A k_\parallel)^2 - (1 + \omega/\Omega_i))}{(\omega/v_A k_\parallel)^2 - (1 - \omega^2/\Omega_i^2)}. \end{aligned} \quad (8.64')$$

したがってイオンサイクロトロン共鳴は

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k_\parallel^2 c^2}{k_\parallel^2 c^2 + \delta\Omega_i^2} = \Omega_i^2 \frac{k_\parallel^2 c^2}{k_\parallel^2 c^2 + \Pi_i^2}, \quad (8.65)$$

8.4 種々の波

$$\left(\frac{\omega}{v_A k_{\parallel}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 \quad (8.65')$$

の条件で起る。分散式 (8.63) は $|\omega|$ が $|\Omega_i|$ に近づくと下記のようなになる。

$$N^2 \approx \frac{\delta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (8.66)$$

$$N^2 \cos^2 \theta \approx \delta(1 + \cos^2 \theta) \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2}. \quad (8.67)$$

(8.66) は前節における圧縮モードにつながるものでイオンサイクロトロン共鳴で影響を受けない。(8.67) はイオン・サイクロトロン波の分散式を表わし、次のように書きなおすことができる。

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\Pi_i^2}{k_{\parallel}^2 c^2} + \frac{\Pi_i^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2}\right)^{-1}. \quad (8.68)$$

したがって ω^2 は Ω_i^2 より大きくなることはない。

$\omega \simeq |\Omega_i|$ におけるイオンの運動は両方の波において左向き (イオンのラーマー運動の方向) の円運動である ((8.30) 参照)。(8.66) の波においては $iE_x/E_y = 1$ で円偏光しており、イオンのラーマー運動と反対方向に回転する。

イオンサイクロトロン波においては

$$\frac{iE_x}{E_y} \approx -\frac{\omega}{|\Omega_i|} \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2}\right)} \quad (8.69)$$

となり、楕円偏光でイオンのラーマー運動と同じ向きに回転する。

8.4.3 低域混成共鳴

低域混成共鳴の周波数は $\theta = \pi/2$ において

$$\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2, \quad \frac{1}{\omega_{\text{LH}}^2} = \frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} + \frac{1}{|\Omega_i|\Omega_e}, \quad \frac{\omega_{\text{LH}}^2}{|\Omega_i|\Omega_e} = \frac{\Pi_i^2 + \Omega_i^2}{\Pi_i^2 + |\Omega_i|\Omega_e + \Omega_i^2} \quad (8.70)$$

で与えられる。密度が高く $\Pi_i^2 \gg |\Omega_i|\Omega_e$ のときは $\omega_{\text{LH}} = (|\Omega_i|\Omega_e)^{1/2}$ となり、 $\Pi_i^2 \ll |\Omega_i|\Omega_e$ のときは $\omega_{\text{LH}}^2 = \Pi_i^2 + \Omega_i^2$ となる。低域混成共鳴では $E_y = E_z = 0$, $E_x \neq 0$ となる。

高密度の場合は ($\Pi_i^2 > |\Omega_i|\Omega_e$), $|\Omega_i| \ll \omega_{\text{LH}} \ll \Omega_e$ となるのでイオンと電子の運動の取り扱いが容易になる。このときのイオンおよび電子の運動は (8.7) より

$$v_{k,x} = \frac{i\epsilon_k E_x}{B_0} \frac{\omega |\Omega_k|}{\omega^2 - \Omega_k^2} \quad (8.71)$$

である。 $v_{k,x} = dx_k/dt = -i\omega x_k$ より

$$x_k = \frac{-\epsilon_k E_x}{B_0} \frac{|\Omega_k|}{\omega^2 - \Omega_k^2} \quad (8.72)$$

となる。 $\omega^2 = |\Omega_i|\Omega_e$ のとき $x_i \approx -E_x/B_0\Omega_e$, $x_e \approx -E_x/B_0\Omega_e$ で $x_i \approx x_e$ となる (図 8.6 参照)。

したがって荷電分離が起らず、ハイブリッドの振動が持続できる。

これまでの議論は $\theta = \pi/2$ の場合についてであるが、 $\theta = \pi/2$ から若干ずれた場合について考えよう。この場合には (8.24) より

$$K_{\perp} \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta = 0 \quad (8.73)$$

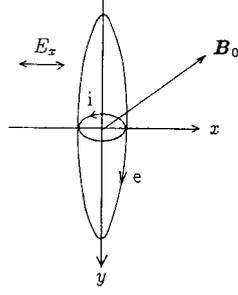


図 8.6 低域混成共鳴におけるイオンおよび電子の運動.

が共鳴条件になる. (8.46),(8.50),(8.51) より K_{\perp} を求めると (8.73) は

$$\frac{(\omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)}{(\omega^2 - \Omega_i^2)(\omega^2 - \Omega_e^2)} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}\right) \cos^2 \theta = 0 \quad (8.74)$$

となる. θ が $\pi/2$ 付近で ω が ω_{LH} からわずかしかずれていない場合は

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2 &= \frac{(\omega_{\text{LH}}^2 - \Omega_e^2)(\omega_{\text{LH}}^2 - \Omega_i^2)}{\omega_{\text{LH}}^2 - \omega_{\text{UH}}^2} \frac{\Pi_e^2 - \omega_{\text{LH}}^2}{\omega_{\text{LH}}^2} \cos^2 \theta \\ &\approx \frac{\Omega_e^2 \Pi_e^2}{\omega_{\text{UH}}^2} \left(1 - \left(\frac{\Omega_i}{\omega_{\text{LH}}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{LH}}}{\Pi_e}\right)^2\right) \cos^2 \theta \end{aligned}$$

となる. $\omega_{\text{UH}}^2 \omega_{\text{LH}}^2 = \Omega_i^2 \Omega_e^2 + \Pi_e^2 |\Omega_i| \Omega_e$ であるから

$$\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2 \left[1 + \frac{m_i}{Z m_e} \cos^2 \theta \left(1 - \left(\frac{\Omega_i}{\omega_{\text{LH}}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{LH}}}{\Pi_e}\right)^2\right) \left(1 + \frac{|\Omega_i| \Omega_e}{\Pi_e^2}\right)^{-1} \right] \quad (8.75)$$

となる. $\Pi_e^2 / |\Omega_i| \Omega_e \approx \delta = c^2 / v_A^2 \gg 1$ の場合 (8.75) は

$$\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2 \left(1 + \frac{m_i}{Z m_e} \cos^2 \theta\right) \quad (8.76)$$

となる. θ が $\pi/2$ から $(Z m_e / m_i)^{1/2}$ だけずれても $\omega^2 \approx 2\omega_{\text{LH}}^2$ となる. この関係式は θ が $\pi/2$ にごく近い領域でのみ成立する.

8.4.4 高域混成共鳴

高域混成共鳴の周波数 ω_{UH} は

$$\omega_{\text{UH}}^2 = \Pi_e^2 + \Omega_e^2 \quad (8.77)$$

で与えられる. この場合周波数が $|\Omega_i|$ より大きいのでイオン運動は無視できる.

8.4.5 電子サイクロトロン波

周波数が高くイオンの運動が無視できるような波について考慮する. $\omega \gg |\Omega_i|$ のとき

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &\approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \\ K_{\times} &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{\omega}, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

8.4 種々の波

となる. 分散式 (10.20) すなわち $AN^4 - BN^2 + C = 0$ の解

$$N^2 = \frac{B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A}$$

を変形して

$$\begin{aligned} N^2 - 1 &= \frac{-2(A - B + C)}{2A - B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}} \\ &= \frac{-2\Pi_e^2(1 - \Pi_e^2/\omega^2)}{2\omega^2(1 - \Pi_e^2/\omega^2) - \Omega_e^2 \sin^2 \theta \pm \Omega_e \Delta}, \end{aligned} \quad (8.79)$$

$$\Delta = \left(\Omega_e^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2} \quad (8.80)$$

となる. (8.79) における正, 負の符号にしたがって正常波 (O 波) と異常波 (X 波) になる. Δ の中の 2 つの項の大小によって近似を行なう.

準垂直方向伝播の場合

$$\Omega_e^2 \sin^4 \theta \gg 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^2 \cos^2 \theta \quad (8.81)$$

には, 以下のようなになる.

$$N^2 = \frac{1 - \Pi_e^2/\omega^2}{1 - (\Pi_e^2/\omega^2) \cos^2 \theta}, \quad (8.82)$$

$$N^2 = \frac{(1 - \Pi_e^2/\omega^2)^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(1 - \Pi_e^2/\omega^2) \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}. \quad (8.83)$$

正常波 (8.82) は $\theta \sim \pi/2$ のとき $N^2 = K_{\parallel} = 1 - \Pi_e^2/\omega^2$ となり, 磁場の大きさによらない. この波はマイクロ波干渉計による密度測定に利用される.

磁場に準平行方向に伝播する場合

$$\Omega_e^2 \sin^4 \theta \ll 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^2 \cos^2 \theta \quad (8.84)$$

かつ次の条件も満たす場合

$$\Omega_e^2 \sin^2 \theta \ll \left| 2\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right) \right| \quad (8.85)$$

分散関係は

$$N^2 = 1 - \frac{\Pi_e^2}{(\omega + \Omega_e \cos \theta)\omega}, \quad (8.86)$$

$$N^2 = 1 - \frac{\Pi_e^2}{(\omega - \Omega_e \cos \theta)\omega} \quad (8.87)$$

となる. (8.86) は L 波である, (8.87) は R 波で電子サイクロトロン周波数で共鳴現象を起こす. この R 波は CMA ダイアグラムの (7) (8) の領域においても伝播し, プラズマ周波数より低い周波数で伝播できる電子モードの波であるので重要である. この波を電子サイクロトロン波という. (8.84) および (8.85) の条件は $K_{\parallel} = 1 - \Pi_e^2/\omega^2 \simeq 0$ 付近では満足されないことに注意する必要がある. この R 波はまたホイスラー波とも呼ばれる.

地上の雷によって発生した電磁波が地球磁気圏のプラズマ中を磁力線に沿って伝播する波は、ホイッスラー波と同定された。この自然現象では周波数は可聴領域にあり、この電磁波の群速度は高い周波数ほど速い。しり下りの口笛を吹くような音として観測される。whistler(口笛)波と呼ばれる由縁である。

8.4.6 静電波の分散式

プラズマ中の波の電場 \mathbf{E} がポテンシャル ϕ を用いて

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -i\mathbf{k}\phi \quad (8.88)$$

と書けるとき、この波を静電波という。この場合には電場 \mathbf{E} は伝播ベクトル \mathbf{k} に平行であり縦波の性質を持っている ($\mathbf{E}_\perp = 0$)。また \mathbf{B}_1 は0となる。

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega = 0. \quad (8.89)$$

したがってアルフベン波は明かに静電波ではない。この節では静電波の性質を調べてみよう。一般の波の分散関係

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0$$

と \mathbf{N} とのスカラ積をとると

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp) = 0$$

になる。ただし \mathbf{E}_\parallel , \mathbf{E}_\perp はそれぞれ \mathbf{k} ベクトルに対して平行および垂直な電場の成分である。もし $|\mathbf{E}_\parallel| \gg |\mathbf{E}_\perp|$ ならば (静電波の場合は $\mathbf{E}_\perp = 0$)、分散式は下記のようになる。

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (8.90)$$

一般の波の、分散式を書き直すと

$$(\mathbf{N}^2 - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{E}_\perp = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_\parallel$$

となるから、すべての K_{ij} について

$$|\mathbf{N}^2| \gg |K_{ij}| \quad (8.91)$$

ならば、 $|\mathbf{E}_\parallel| \gg |\mathbf{E}_\perp|$ が成立し、静電波の分散式がえられる。すなわち

$$k_x^2 K_{xx} + 2k_x k_z K_{xz} + k_z^2 K_{zz} = 0. \quad (8.92)$$

静電波の条件 (8.91) より静電波の位相速度 $\omega/k = c/N$ は遅い場合が多い。 K_{ij} は冷たいプラズマの場合、(8.9) ~ (8.12) で与えられるが、高温プラズマの誘電率テンソルは8.5節で与えられる。静電波においては (8.89) より $\mathbf{B}_1 = 0$ である。磁場の擾乱はアルフベン速度 $v_A \simeq B_0^2/(\mu_0 n_i m_i)$ で伝播するが、いま考えている波の位相速度が v_A より充分遅ければその波の特徴的な時間内に磁場の擾乱はおさまって $\mathbf{B}_1 = 0$ になることを前提としている。波の位相速度として電子の熱速度 v_{Te} 程度あるいはそれ以下のものを考えると $v_A > v_{Te}$ の条件は

$$\frac{B_0^2}{\mu_0 n_i m_i v_{Te}^2} = \frac{2m_e}{\beta_e m_i} > 1,$$

$$\beta_e < \frac{2m_e}{m_i}$$

となる。この条件は静電波近似が使えるかどうかの一つの目安となる。

共鳴条件においては $N \rightarrow \infty$ となるが高域共鳴および低域共鳴では K_{ij} は有限であるので、これらの共鳴条件の近くでは静電波である。イオン・サイクロトロン共鳴あるいは電子サイクロトロン共鳴では無限大になる K_{ij} の項があるので必ずしも静電波にはならない。

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

プラズマの温度が高くなって速度分布に熱速度程度の拡がりができ、波の位相速度が熱速度と同じ程度になる場合、ランダウ減衰が起りうることを第10章で述べた。高温プラズマにおける波動の伝播、吸収あるいは擾乱の増幅(不安定性の励起)を体系的に取り扱うためには、高温プラズマの誘電率テンサーを用いなければならない。

高温プラズマによる波の吸収過程で、ランダウ減衰やサイクロトロン減衰が最も重要な役割を果たすが、この減衰過程は、波といわゆる共鳴粒子すなわち

$$\omega - k_z v_z - n\Omega = 0 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

を満たす粒子との相互作用である。粒子と共に動く座標系においては、電場は定常($\omega = 0$)かサイクロトロン高調波($\omega = n\Omega$)である。 $n = 0$ はランダウ減衰、 $n = 1$ は電子サイクロトロン減衰、 $n = -1$ はイオンサイクロトロン減衰に対応する($\omega > 0$ の場合)。

波動加熱には非線形あるいは統計的過程が伴うが、実験結果は線形あるいは準線形理論で説明できる場合が多い。加熱現象は波の減衰過程であるからである。線形理論の基礎は高温プラズマの誘電率テンサー \mathbf{K} である。

8.5.1 熱いプラズマにおける分散関係の公式化

前節では冷たいプラズマ中の波の分散式を導いた。この場合は無擾乱状態においてはイオンも電子も静止していることを仮定している。しかし熱いプラズマ中では、無擾乱状態において、いろいろな速度をもつ荷電粒子がラーマー運動をしていてらせん軌道を描いている。一様な磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ における荷電粒子の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{v}', \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q}{m} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0 \quad (8.93)$$

で与えられる。 $t' = t$ のとき、 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} = (v_\perp \cos \theta, v_\perp \sin \theta, v_z)$ である (8.93) の解は以下の通りである。

$$\begin{aligned} v'_x(t') &= v_\perp \cos(\theta + \Omega(t' - t)), \\ v'_y(t') &= v_\perp \sin(\theta + \Omega(t' - t)), \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$v'_z(t') = v_z,$$

$$\begin{aligned} x'(t') &= x + \frac{v_\perp}{\Omega} (\sin(\theta + \Omega(t' - t)) - \sin \theta), \\ y'(t') &= y - \frac{v_\perp}{\Omega} (\cos(\theta + \Omega(t' - t)) - \cos \theta), \end{aligned} \quad (8.95)$$

$$z'(t') = z + v_z(t' - t).$$

ここで $\Omega = -qB_0/m$, $v_x = v_\perp \cos \theta$, $v_y = v_\perp \sin \theta$ である。 k 種の粒子の分布関数 $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ はブラゾフ方程式に従う。

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_k + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_k = 0. \quad (8.96)$$

マクスウェル方程式は以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_k d\mathbf{v}, \quad (8.97)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_k d\mathbf{v}, \quad (8.98)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8.99)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8.100)$$

無擾乱状態の0次の量をサフィックス0で表わし、1次の擾乱項はサフィックス1で表わし $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ で変化するものとする。

$$f_k = f_{k0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + f_{k1}, \quad (8.101)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (8.102)$$

$$\mathbf{E} = 0 + \mathbf{E}_1 \quad (8.103)$$

を用いて, (8.96)~(8.100) を次のように線形化する.

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{k0} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0} = 0, \quad (8.104)$$

$$\sum_k q_k \int f_{k0} d\mathbf{v} = 0, \quad (8.105)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 = \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k0} d\mathbf{v} = \mathbf{j}_0, \quad (8.106)$$

$$\frac{\partial f_{k1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{k1} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k1} = -\frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0}, \quad (8.107)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int f_{k1} d\mathbf{v}, \quad (8.108)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = -\omega \left(\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \frac{i}{\omega} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k1} d\mathbf{v} \right), \quad (8.109)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1). \quad (8.110)$$

(8.108) の右辺は, (8.110) を考慮すると \mathbf{E}_1 の線形関数であるので, f_{k1} も \mathbf{E}_1 である. 高温プラズマの誘電率テンソル \mathbf{K} ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}$ で定義される) は次のように与えられる.

$$\mathbf{E}_1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \mathbf{j} = \mathbf{E}_1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k1} d\mathbf{v} \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_1. \quad (8.111)$$

\mathbf{E}_1 の成分間の線形関係は (8.109) および (8.110) から

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (8.112)$$

となる. 分散式は \mathbf{E} の 1 次方程式の係数行列の行列式を 0 にすることによって求めることができる (8.110). したがって f_{k1} を (8.107) によって求めることができれば, \mathbf{K} を計算することができる. そして冷たいプラズマにおける分散式と全く同じ形式で解けば, 波の伝播の性質を調べることができる.

8.5.2 線形化ブラゾフ方程式の解

(8.107) のブラゾフ方程式の解は, 無擾乱状態における粒子の軌道 (8.94) (8.95) に沿って, (8.107) の右辺を時間積分をすることによって, 次のように求めることができる.

$$f_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t') + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}'(t') \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t')) \right) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}} f_{k0}(\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t')) dt'. \quad (8.113)$$

(8.113) を (8.107) に代入すると

$$\begin{aligned} & -\frac{q_k}{m_k} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0} \\ & -\frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) [\text{Integrand of (8.113)}] dt' \\ & = -\frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0} \end{aligned} \quad (8.114)$$

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

となるから, (8.114) 左辺第2項が0になることが証明できれば, (8.113) が (8.107) の解であることが証明できたことになる. その変数を (8.94) (8.95) によって $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ から $(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$ に変換すると, (8.114) 左辺第2項の微分オペレータ項は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \cdot \nabla'_r + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \cdot \nabla'_v \\
&= \frac{\partial(t' - t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial(t' - t)} \cdot \nabla'_r + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial(t' - t)} \cdot \nabla'_v \right) \\
&= -\mathbf{v}' \cdot \nabla'_r - \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla'_v, \\
\mathbf{v} \cdot \nabla_r &= \mathbf{v} \cdot \nabla'_r, \\
\frac{\partial}{\partial v_x} &= \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial v_x} \cdot \nabla'_r + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial v_x} \cdot \nabla'_v \\
&= \frac{1}{\Omega} \left(\sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial x'} + [-\cos \Omega(t' - t) + 1] \frac{\partial}{\partial y'} \right) \\
&\quad + \left(\cos \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_x} + \sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_y} \right), \\
\frac{\partial}{\partial v_y} &= \frac{1}{\Omega} \left((\cos \Omega(t' - t) - 1) \frac{\partial}{\partial x'} + \sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial y'} \right) \\
&\quad + \left(-\sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_x} + \cos \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_y} \right), \\
\frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_v &= -\Omega \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) \\
&= v'_x \frac{\partial}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial}{\partial y'} - \left(v_x \frac{\partial}{\partial x'} + v_y \frac{\partial}{\partial y'} \right) - \Omega \left(v'_y \frac{\partial}{\partial v'_x} - v'_x \frac{\partial}{\partial v'_y} \right) \\
&= (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \nabla'_r + \frac{q}{m} (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla'_v.
\end{aligned}$$

(8.114) 左辺第2項は0となり, (8.113) が解であることが証明された.

1次の項は $\exp(-i\omega t)$ のように変化するので, 積分 (8.113) は ω の虚数部が正のとき収斂する. 虚数部が負のときは, 虚数部が正の領域から解析接続をすることにより与えられる.

8.5.3 熱いプラズマの誘電テンサー

0次の分布関数 f_0 は (8.104) を満たす必要がある.

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(v_\perp, v_z), \quad v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')$$

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}.$$

(8.113) より, $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ は

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{q}{m} \exp i(k_x x + k_z z - \omega t) \int_\infty^t \left(\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \mathbf{E} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{k}}{\omega} \right) \cdot \nabla'_v f_0 \\
&\quad \times \exp \left(i \frac{k_x v_\perp}{\Omega} \sin(\theta + \Omega(t' - t)) - i \frac{k_x v_\perp}{\Omega} \sin \theta + i(k_z v_z - \omega)(t' - t) \right) dt'
\end{aligned}$$

が導かれる. $\tau = t' - t$ を導入する. ベッセル関数の公式より

$$\exp(ia \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \exp im\theta,$$

$$J_{-m}(a) = (-1)^m J_m(a),$$

$$\exp\left(\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m \exp(-im\theta) J_n \exp(in(\theta + \Omega\tau)) \exp i(k_z v_z - \omega)\tau$$

である。

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega}\right) \mathbf{E} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{k}}{\omega} \right) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \left(\left(1 - \frac{k_x v'_x}{\omega}\right) E_z \right. \\ & \left. + (v'_x E_x + v'_y E_y) \frac{k_z}{\omega} \right) + \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(\left(1 - \frac{k_z v'_z}{\omega}\right) \left(E_x \frac{v'_x}{v_{\perp}} + E_y \frac{v'_y}{v_{\perp}} \right) + v_z E_z \frac{k_x v'_x}{\omega v_{\perp}} \right) \\ & = \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \right) \left(\frac{E_x}{2} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} + e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) + \frac{E_y}{2i} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} \right. \\ & \left. - e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) \right) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \frac{k_x v_z}{\omega} - \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \frac{k_x v_{\perp}}{\omega} \right) \frac{E_z}{2} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} + e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} E_z \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & -\frac{q}{m} \exp i(k_x x + k_z z - \omega t) \sum_{m,n} \left(U \left(\frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} \right) E_x - iU \left(\frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2} \right) E_y \right. \\ & \left. + \left(W \frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} J_n \right) E_z \right) \cdot \frac{J_m(a) \exp(-i(m-n)\theta)}{i(k_z v_z - \omega + n\Omega)} \end{aligned}$$

が導かれる。ここで

$$U = \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (8.115)$$

$$W = \frac{k_x v_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} - \frac{k_x v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (8.116)$$

$$a = \frac{k_x v_{\perp}}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{-qB}{m}, \quad (8.117)$$

であり

$$\frac{J_{n-1}(a) + J_{n+1}(a)}{2} = \frac{nJ_n(a)}{a}, \quad \frac{J_{n-1}(a) - J_{n+1}(a)}{2} = \frac{d}{da} J_n(a).$$

の公式がある。 f_1 が得られると、高温プラズマの誘電率テンサー \mathbf{K} は (8.111) より

$$(\mathbf{K} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E} = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sum_j q_j \int \mathbf{v} f_{j1} d\mathbf{v} \quad (8.118)$$

によって与えられる。 $v_x = v_{\perp} \cos \theta$, $v_y = v_{\perp} \sin \theta$, $v_z = v_z$ であるので、(12.69) の x, y 成分は (8.118) の $e^{i(m-n)\theta} = e^{\pm i\theta}$ の項のみが積分に寄与し、(8.118) の z 成分は $e^{i(m-n)\theta} = 1$ の項のみが積分に寄与する。すなわち

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} - \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega n_{j0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} \frac{S_{jn}}{k_z v_z - \omega + n\Omega_j}, \quad (8.119)$$

$$S_{jn} = \begin{bmatrix} v_{\perp} (n \frac{J_n}{a})^2 U & -i v_{\perp} (n \frac{J_n}{a}) J'_n U & v_{\perp} (n \frac{J_n}{a}) J_n \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W \right) \\ i v_{\perp} J'_n (n \frac{J_n}{a}) U & v_{\perp} (J'_n)^2 U & i v_{\perp} J'_n J_n \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W \right) \\ v_z J_n (n \frac{J_n}{a}) U & -i v_z J_n J'_n U & v_z J_n^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W \right) \end{bmatrix}$$

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

ただし

$$\Pi_j^2 = \frac{n_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j}$$

である。

$$\frac{v_z U - v_\perp \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n\Omega}{k_x v_\perp} W \right)}{k_z v_z - \omega + n\Omega} = -\frac{v_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n J'_n = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2 = 0 \quad (J_{-n} = (-1)^n J_n)$$

の関係を用いる。そして n を $-n$ に置き換え (8.119) を書き換えると

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} - \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int T_{jn} \frac{v_\perp^{-1} U_j n_{j0}^{-1}}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} d\mathbf{v} \\ - \mathbf{L} \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{1}{n_{j0}} \int \frac{v_z^2}{v_\perp} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_\perp} d\mathbf{v} \right),$$

$$T_{jn} = \begin{bmatrix} v_\perp^2 \left(n \frac{J_n}{a} \right) \left(n \frac{J_n}{a} \right) & i v_\perp^2 \left(n \frac{J_n}{a} \right) J'_n & -v_\perp v_z \left(n \frac{J_n}{a} \right) J_n \\ -i v_\perp^2 J'_n \left(n \frac{J_n}{a} \right) & v_\perp^2 J'_n J'_n & i v_\perp v_z J'_n J_n \\ -v_\perp v_z J_n \left(n \frac{J_n}{a} \right) & -i v_\perp v_z J_n J'_n & v_z^2 J_n J_n \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで \mathbf{L} 行列は $L_{zz} = 1$ 、それ以外の成分はすべて 0 である。つぎに

$$\frac{U_j}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_\perp} + \frac{1}{\omega(k_z v_z - \omega - n\Omega_j)} \left(-n\Omega_j \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_\perp} + k_z v_\perp \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_z} \right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (J'_n)^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(a)}{a^2} = \frac{1}{2}$$

の関係を用いると、誘電率テンサーは

$$\mathbf{K} = \left(1 - \frac{\Pi_j^2}{\omega^2} \right) \mathbf{I} - \sum_{j,n} \frac{\Pi_j^2}{\omega^2} \int \frac{T_{jn}}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} \left(\frac{-n\Omega_j}{v_\perp} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_z} \right) \frac{1}{n_{j0}} d\mathbf{v}$$

(8.120)

に変形される。

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{k}}{\omega} c$$

を用いると (8.112) は

$$(K_{xx} - N_\parallel^2) E_x + K_{xy} E_y + (K_{xz} + N_\perp N_\parallel) E_z = 0,$$

$$K_{yx} E_x + (K_{yy} - N^2) E_y + K_{yz} E_z = 0,$$

$$(K_{zx} + N_\perp N_\parallel) E_x + K_{zy} E_y + (K_{zz} - N_\perp^2) E_z = 0$$

となる。ただし N_\parallel は \mathbf{N} の z 成分 (\mathbf{B} に平行成分), N_\perp は \mathbf{N} の x 成分 (\mathbf{B} に垂直成分) である。分散式は係数行列の行列式を 0 としてえられる。

8.5.4 二重マクスウェル分布プラズマの誘電テンサー

0 次の分布関数が 2 重マクスウェル分布

$$f_0(v_\perp, v_z) = n_0 F_\perp(v_\perp) F_z(v_z), \quad (8.121)$$

$$F_\perp(v_\perp) = \frac{m}{2\pi T_\perp} \exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2T_\perp}\right), \quad (8.122)$$

$$F_z(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi T_z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m(v_z - V)^2}{2T_z}\right) \quad (8.123)$$

であるとする

$$\left(-\frac{n\Omega_j}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z}\right) \frac{1}{n_0} = m \left(\frac{n\Omega_j}{T_\perp} - \frac{k_z(v_z - V)}{T_z}\right) F_\perp(v_\perp) F_z(v_z)$$

となる. v_z に関する積分はプラズマ分散関数 $Z(\zeta)$ を用いて行う. 分散関数 $Z(\zeta)$ は

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2)}{\beta - \zeta} d\beta \quad (8.124)$$

で定義される. 以下の関係式を用いると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \frac{1}{\omega_n} \zeta_n Z(\zeta_n), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z(v_z - V) F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= 1 + \zeta_n Z(\zeta_n), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_z(v_z - V))^2 F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \omega_n (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_z(v_z - V))^3 F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \frac{k_z^2 (\kappa T_z)}{m} + \omega_n^2 (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \end{aligned}$$

$$\omega_n \equiv \omega - k_z V + n\Omega,$$

$$\zeta_n \equiv \frac{\omega - k_z V + n\Omega}{k_z (2T_z/m)^{1/2}},$$

$$\int_0^{\infty} J_n^2(b^{1/2}x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) x dx = \alpha I_n(ab) e^{-b\alpha},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) = e^b, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n(b) = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 I_n(b) = be^b$$

($I_n(x)$ は n 次の変形ベッセル関数)

2 重マクスウェル分布のプラズマの誘電率テンソルは次のように与えられる [8.3]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left(\sum_n \left(\zeta_n Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T}\right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \mathbf{X}_n + 2\eta_0^2 \lambda_T \mathbf{L} \right), \quad (8.125)$$

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

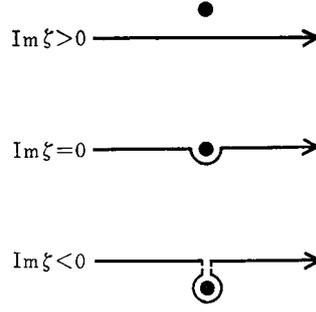


図 8.7 $k_z > 0$ のとき, $\text{Im}\zeta > 0$, $\text{Im}\zeta = 0$, および $\text{Im}\zeta < 0$ の場合について (8.128) の積分経路を示す.

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} n^2 I_n / b & in(I'_n - I_n) & -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n \\ -in(I'_n - I_n) & (n^2/b + 2b)I_n - 2bI'_n & i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) \\ -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n & -i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) & 2\lambda_T \eta_n^2 I_n \end{bmatrix} \quad (8.126)$$

$$\eta_n \equiv \frac{\omega + n\Omega}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad \lambda_T \equiv \frac{T_z}{T_\perp}, \quad b \equiv \left(\frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega} \right)^2,$$

$$\alpha \equiv \frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega}, \quad v_{Tz}^2 \equiv \frac{T_z}{m}, \quad v_{T\perp}^2 \equiv \frac{T_\perp}{m} = v_{Tx} = v_{Ty}.$$

プラズマが等方マクスウェル分布 ($T_z = T_\perp$) で, $V = 0$ の場合, $\eta_n = \zeta_n$, $\lambda_T = 1$ となり, (8.125) は次式に還元される.

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_0 Z(\zeta_n) e^{-b} \mathbf{X}_n + 2\zeta_0^2 \mathbf{L} \right]. \quad (8.127)$$

8.5.5 プラズマ分散関数

次式で定義されるプラズマ分散関数 $Z_p(\zeta)$ の性質を調べよう.

$$Z_p(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2)}{\beta - \zeta} d\beta. \quad (8.128)$$

ただし $\text{Im}\zeta > 0$ であるとする. 1次のブラゾフ方程式 (8.113) は粒子の軌道に沿って $\exp(-i\omega t)$ を $-\infty$ から t まで時間積分することにより得られている. したがって ω の虚数部 ω_i は正でなければならない. 先ず $k_z > 0$ の場合を考えよう. この場合 $\text{Im}\zeta > 0$ でなければならない. $\text{Im}\zeta < 0$ の場合の $Z_p(\zeta)$ は, $\text{Im}\zeta > 0$ のときの $Z_p(\zeta)$ から解析接続をしなければならぬ. $\text{Im}\zeta > 0$, $\text{Im}\zeta = 0$, $\text{Im}\zeta < 0$ の場合における積分経路を図 8.7 に示す. ζ が実数で x としたとき $Z_p(x)$ は

$$Z_p(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2)}{\beta - x} dx + i\pi^{1/2} \exp(-x^2)$$

で与えられる. P はコーシーの主値 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right)$ である. (8.128) の中で $\beta - \zeta = \gamma$ とし, 下記の関係式を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma^2 - 2\zeta\gamma)}{\gamma} d\gamma = -2\pi^{1/2} \int_{+i\infty}^{\zeta} \exp(t^2) dt$$

(右辺と左辺を ζ で微分すれば上記の関係式は明らか), $Z_p(\zeta)$ は次のようになる.

$$Z_p(\zeta) = 2i \exp(-\zeta^2) \int_{-\infty}^{i\zeta} \exp(-t^2) dt = i\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2)(1 + \operatorname{erf}(i\zeta)),$$

$$\operatorname{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-t^2) dt - 1 = 2\Phi(2^{1/2}\eta) - 1,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

この表式は $\operatorname{Im}\zeta$ の正負にかかわらず成り立つ. $Z_p(\zeta)$ を級数展開すると

$$Z_p(\zeta) = i\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) - \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\zeta^2)^n \pi^{1/2}}{\Gamma(n+3/2)}$$

$$= i\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) - 2\zeta \left(1 - \frac{2\zeta^2}{2} + \frac{4\zeta^4}{15} - \dots\right).$$

$Z_p(\zeta)$ の漸近展開は以下のようになる [8.1, 8.3].

$$Z_p(\zeta) = i\sigma\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-(2n+1)} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{1/2}}$$

$$= i\sigma\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) - \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4} \dots\right),$$

$|\operatorname{Im}\zeta| > 0, |\operatorname{Im}\zeta| > |\operatorname{Re}\zeta|$ のとき $\sigma = 0$
 $|\operatorname{Im}\zeta| < |\operatorname{Re}\zeta|$ のとき $\sigma = 1$
 $|\operatorname{Im}\zeta| < 0, |\operatorname{Im}\zeta| > |\operatorname{Re}\zeta|$ のとき $\sigma = 2$.

図 8.8 は $Z_p(x)$ (x is real) の実数部と虚数部を示す.

誘電率テンサー (8.126) にある関数 $Z(\zeta)$ は $\operatorname{Im}\omega > 0$ を前提としている. それは線形ブラゾフ方程式を解くに当たって粒子の軌道に沿って $\exp(-i\omega t)$ を $-\infty$ から t まで時間積分することにより得られている ($|\exp(-i\omega t)| = \exp \operatorname{Im}\omega t$). したがって $k > 0$ の場合, 誘電率テンサー (8.126) に現れる関数 $Z(\zeta)$ は, (8.128) で定義される $Z_p(\zeta)$ に等しい. すなわち

$$k > 0 \text{ のとき, } Z(\zeta) = Z_p(\zeta).$$

$k < 0$ の場合も, 誘電率テンサー (8.126) にある関数 $Z(\zeta)$ は $\operatorname{Im}\omega > 0$ を前提としている. したがってこの関数 $Z(\zeta)$ は $\operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im}\omega / (2^{1/2} k_z v_{Tz}) < 0$ を前提としている.

$\operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im}\omega / (2^{1/2} k_z v_{Tz}) > 0$ の領域には解析接続をしなければならない. $Z(\zeta)$ と $Z_p(\zeta)$ との関係は

$$k < 0 \text{ のとき, } Z(\zeta) = Z_p(\zeta) - 2\pi i \exp(-\zeta^2)$$

である.

したがって, $Z(\zeta)$ の級数展開は ([8.1, 8.3], [2.3] の 11 章)

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2} \frac{k_z}{|k_z|} \exp(-\zeta^2) - 2\zeta \left(1 - \frac{2\zeta^2}{2} + \frac{4\zeta^4}{15} - \dots\right), \quad (8.129)$$

また $Z_p(\zeta)$ の漸近展開は以下のようになる.

$$Z(\zeta) = i\sigma\pi^{1/2} \frac{k_z}{|k_z|} \exp(-\zeta^2) - \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4} \dots\right). \quad (8.130)$$

$Z(\zeta)$ の虚数部はランダウ減衰とサイクロトロン減衰を表している.

$T \rightarrow 0$ すなわち $\zeta_n \rightarrow \pm\infty, b \rightarrow 0$ のとき, 高温プラズマの誘電率テンサーは, 冷たいプラズマの誘電率テンサー (8.9)~(8.13) に近づく.

8.5 熱いプラズマの誘電テンサー

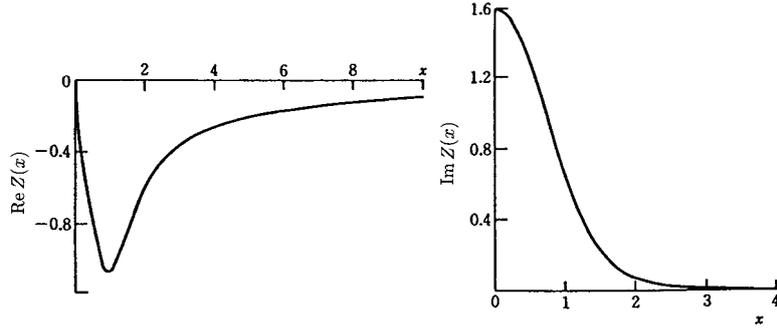


図 8.8 $Z(x)$ の実数部 $\text{Re} Z(x)$ および 虚数部 $\text{Im} Z(x)$.

8.5.6 静電波の分散式

プラズマ中の波の電場 \mathbf{E} がポテンシャル ϕ で表される場合 ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$), この波を静電波という. 静電波の分散式は (8.92) より

$$k_x^2 K_{xx} + 2k_x k_z K_{xz} + k_z^2 K_{zz} = 0 \quad (8.131)$$

である. (8.125) および (8.126) で与えられる K_{xx}, K_{xz}, K_{zz} を (8.131) に代入すると

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left(k_z^2 2\eta_0^2 \lambda_T + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{n^2 I_n}{b} k_x^2 - (2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n 2k_x k_z + 2\lambda_T \eta_n^2 I_n k_z^2 \right] \right. \\ \left. \times \left(\zeta_0 Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T}\right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \right) = 0$$

となる. $[\] = m\omega^2 I_n / T_{\perp}$ であるので

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left(\frac{m\omega^2}{T_{\perp}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m\omega^2}{T_{\perp}} I_n \left(\zeta_0 Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T}\right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \right) = 0$$

となる. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) e^{-b} = 1$ を用いると下記のようなになる.

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{T_z} \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{T_z}{T_{\perp}} \left(\frac{-n\Omega}{\omega_n} \right) \right) \zeta_n Z(\zeta_n) I_n e^{-b} \right) = 0. \quad (8.132)$$

波の周波数がサイクロトロン周波数より非常に大きい ($|\omega| \gg |\Omega|$) あるいは磁場が非常に弱い場合 ($B \rightarrow 0$), $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, $n\Omega/\omega_n \rightarrow 0$, $\sum I_n(b) e^{-b} = 1$ の関係がある. したがって分散式は

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{T_z} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) = 0 \quad (|\omega| \gg |\Omega|) \quad (8.133)$$

に還元される. $B = 0$ の場合の分散式は

$$k^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{T} (1 + \zeta Z(\zeta)) = 0 \quad \left(\zeta = \frac{\omega - kV}{2^{1/2} k v_T}, B = 0 \right) \quad (8.134)$$

となる. $\zeta_n \rightarrow \infty$ ($n \neq 0$) ($k_z \rightarrow 0$, あるいは磁場が非常に強くなり $|\Omega| \rightarrow \infty$) のとき, $\zeta_n Z_n \rightarrow -1$ ($\sum I_n(b) e^{-b} = 1$) である. (8.132) は

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{T_z} \left(I_0 e^{-b} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) + \frac{T_z}{T_{\perp}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(I_n(b) e^{-b} \frac{2n^2 \Omega^2}{n^2 \Omega^2 - \omega^2} \right) \right) = 0 \quad (8.135)$$

となる。この波を Bernstein 波という。

不均一プラズマにおけるドリフト波

0 次の分布関数の密度や温度が y 方向に変化する場合は、(8.108) および (8.113) にもどって解析しなければならない。ここでは静電波 $\mathbf{E} = -\nabla\phi_1$, $\mathbf{B}_1 = 0$ の解析に限るので、(8.108) および (8.113) は

$$-\nabla^2\phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int f_{k1} d\mathbf{v}, \quad (8.136)$$

$$f_{k1} = \frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \nabla'_r \phi_1(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla'_v f_{k0}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') dt' \quad (8.137)$$

に還元される。0 次の分布関数 f_{k0} は (8.104) を満たす必要がある。すなわち

$$v_y \frac{\partial f_0}{\partial y} - \Omega(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y}) f_0 = 0. \quad (8.138)$$

$v_\perp^2 = \alpha$, $(v_z - V)^2 = \beta$ および $y + v_x/\Omega = \gamma$ は荷電粒子の運動方程式の解であるから、 $f_0(\alpha, \beta, \gamma)$ は (8.138) を満たす。そしてつぎの 0 次分布関数を採用する。

$$\begin{aligned} & f_0 \left(v_\perp^2, (v_z - V)^2, y + \frac{v_x}{\Omega} \right) \\ &= \frac{n_0 (1 - \epsilon(y + v_x/\Omega)) \exp \left(-\frac{v_\perp^2}{2v_{T\perp}^2 (1 - \delta_\perp(y + v_x/\Omega))} - \frac{(v_z - V)^2}{2v_{Tz}^2 (1 - \delta_z(y + v_x/\Omega))} \right)}{2\pi v_{T\perp}^2 (1 - \delta_\perp(y + v_x/\Omega)) (2\pi)^{1/2} v_{Tz} (1 - \delta_z(y + v_x/\Omega))^{1/2}} \\ &= n_0 \left(1 - \left((\epsilon - \delta_\perp - \frac{\delta_z}{2}) + \delta_\perp \frac{v_\perp^2}{2v_{T\perp}^2} + \delta_z \frac{(v_z - V)^2}{2v_{Tz}^2} \right) \left(y + \frac{v_x}{\Omega} \right) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{1}{2\pi v_{T\perp}^2} \right) \left(\frac{1}{2\pi v_{Tz}^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{v_\perp^2}{2v_{T\perp}^2} - \frac{(v_z - V)^2}{2v_{Tz}^2} \right). \end{aligned} \quad (8.139)$$

密度勾配および温度勾配は以下の通りである。

$$-\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = \epsilon, \quad -\frac{1}{T_\perp} \frac{dT_\perp}{dy} = \delta_\perp, \quad -\frac{1}{T_z} \frac{dT_z}{dy} = \delta_z.$$

擾乱項として $\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_1(y) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t)$ を考え、 $|(k_x^2 + k_z^2)\phi_1| \gg |\partial^2 \phi_1 / \partial y^2|$ を仮定する。8.5.3 節で計算した過程と同様な方法で、(8.136) は次のような不均一プラズマの静電波の分散式に還元される ([8.4], [2.3] の 11 章)。

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2) - \sum_j \Pi_j^2 \frac{1}{n_{0j}} \int \int \int []_j d\theta dv_\perp dv_\parallel dv_z = 0, \\ & k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left\{ \frac{1}{v_{Tz}^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) e^{-b} \left[\left(\frac{1}{v_{Tz}^2} - \frac{1}{v_{T\perp}^2} \frac{n\Omega}{\omega_n} \right) \zeta_n Z(\zeta_n) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{v_{T\perp}^2} \frac{n}{k_x} \left((\epsilon' - \delta_\perp + f_n(b)\delta_\perp) \left(1 + \frac{n\Omega}{\omega_n} \zeta_n Z(\zeta_n) \right) + \frac{\delta_z}{2} \left(1 + \frac{n\Omega\omega_n}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) \right) \right] \right\} \\ & \quad \left. + \frac{1}{v_{Tz}^2} \frac{n}{k_x} \left((\epsilon' - \delta_z + f_n(b)\delta_\perp) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) + \frac{\delta_z}{2} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

8.6 速度空間不安定性

$$\left. + \frac{k_x}{\Omega} \left((\epsilon' + f_n(b)\delta_\perp) \frac{\zeta_n}{\omega_n} Z(\zeta_n) + \frac{\delta_z}{2} \frac{\omega_n}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) \right]_n \Bigg\}_j = 0. \quad (8.140)$$

ここで $f_n(b) \equiv (1-b) + bI'_n(b)/I_n(b)$, $\epsilon' \equiv \epsilon - \delta_\perp - \delta_z/2$ である. また下記の関係を用いた.

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_n^2(b^{1/2}x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} dx = f_n(b) I_n(b) e^{-b}.$$

y 軸に平行な加速度 $\mathbf{g} = g\hat{\mathbf{y}}$ の効果 (例えば磁力線の曲率による加速度 $g = v_{\parallel}^2/R$) を分散式 (8.140) に取り込むことは可能である ([8.4], [2.3] の 11 章).

低周波の場合 ($\omega \ll |\Omega|$), $\zeta_n \gg 1$ ($n \neq 0$), $\zeta_n Z(\zeta_n) \rightarrow -1$ ($n \neq 0$) および $1 + \zeta_n Z(\zeta_n) \rightarrow -(1/2)\zeta_n^{-2}$ ($n \neq 0$) であるので, (8.140) は次のようになる.

$$\begin{aligned} k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left(\frac{1}{v_{Tz}^2} + I_0(b)e^{-b} \left(\frac{1}{v_{Tz}^2} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) - \frac{1}{v_{T\perp}^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_x}{\Omega\omega_0} (\epsilon' + f_0(b)\delta_\perp) \zeta_0 Z(\zeta_0) + \frac{k_x}{\Omega\omega_0} \delta_z \zeta_0^2 (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.141)$$

ここで $\sum_{-\infty}^{\infty} I_n(b)e^{-b} = 1$ を用いた.

等方的なプラズマで ($v_{T\perp} = v_{Tz} = v_T$), 温度勾配がなく ($\delta_\perp = \delta_z = 0$), $V = 0$ の場合には, よく用いられる密度勾配によるドリフト波の分散式がえられる.

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left(\frac{1}{v_T^2} + I_0(b)e^{-b} \left(\frac{1}{v_T^2} \zeta_0 Z(\zeta_0) + \frac{k_x}{\Omega\omega_0} \epsilon \zeta_0 Z(\zeta_0) \right) \right) = 0.$$

通常, 電子については $b_e = 0$ としてよい.

$$\begin{aligned} 0 = (k_x^2 + k_z^2) \frac{v_{Te}^2}{\Pi_e^2} + 1 + \zeta_e Z(\zeta_e) \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} \right) \\ + \frac{ZT_e}{T_i} \left(1 + I_0(b)e^{-b} \zeta_i Z(\zeta_i) \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} \right) \right). \end{aligned} \quad (8.142)$$

ただし

$$\omega_e^* = -\frac{k_x \epsilon v_{Te}^2}{\Omega_e} = -\frac{k_x \epsilon T_e}{eB}, \quad \omega_i^* = -\frac{k_x \epsilon v_{Ti}^2}{\Omega_i} = \frac{k_x \epsilon T_i}{ZeB}.$$

ω_e^* および ω_i^* はドリフト周波数と呼ばれる.

z の向きは磁場方向, y の向きは密度勾配の負の方向 (プラズマの外向き) をとっているのので, x の向きは電子のドリフト速度と逆方向に向いていることに注意されたい.

8.6 速度空間不安定性

速度分布関数が安定なマクスウェル分布からずれると, ランダウ増幅あるいはサイクロトロン増幅により不安定になることがある. このようなタイプの不安定性を速度空間不安定性あるいは微視的不安定性という.

8.6.1 ドリフト不安定性 (無衝突)

密度勾配のみのドリフト不安定性の分散式は (8.142) で与えられている. 成長率が周波数 (実数部) より非常に小さい場合は, $\zeta Z(\zeta) = \zeta Z_r(\zeta) + ik_z/|k_z| \pi^{1/2} \zeta \exp(-\zeta^2)$. (8.142) の解は ($Z=1$ の場合)

$$\frac{\zeta_e Z(\zeta_e) \omega_e^* + I_0 e^{-b} \zeta_i Z(\zeta_i) (T_e/T_i) \omega_i^*}{\omega_r + i\gamma} = 1 + \zeta_e Z(\zeta_e) + \frac{T_e}{T_i} (1 + I_0 e^{-b} \zeta_i Z(\zeta_i)),$$

$$\frac{\omega_e^*}{\omega_r} = \frac{\frac{T_e}{T_i}(1 + e^{-b}I_0\zeta_i Z_r(\zeta_i)) + 1 + \zeta_e Z_r(\zeta_e)}{\zeta_e Z_r(\zeta_e) - e^{-b}I_0\zeta_i Z_r(\zeta_i)},$$

$$\frac{\gamma}{\omega_r} = \pi^{1/2} \frac{k_z}{|k_z|} \frac{\zeta_e \left(1 - \frac{\omega_r}{\omega_e^*}\right) \exp(-\zeta_e^2) - e^{-b}I_0\zeta_i \left(1 + \frac{\omega_r}{\omega_e^*} \frac{T_e}{T_i}\right) \exp(-\zeta_i^2)}{\zeta_e Z_r(\zeta_e) - e^{-b}I_0\zeta_i Z_r(\zeta_i)}$$

である。\$\gamma/\omega_r\$ の分子の第2項はイオンによるランダウ減衰の寄与であり、第1項は電子による項で \$\omega_r/\omega_e^* < 1\$ のとき不安定に寄与する。\$k_z/\omega\$ が \$v_{Ti} < \omega/k_z < v_{Te}\$ の範囲にあるとき、\$|\zeta_e| < 1\$、\$|\zeta_i| > 1\$ となり、イオンのランダウ減衰の寄与が減り、第1項が支配的になる。\$b < 1\$ のとき

$$\frac{\omega_e^*}{\omega_r} = \frac{1 + (T_e/T_i)b}{1 - b} \approx 1 + \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)b,$$

$$\frac{\gamma}{\omega_r} = \pi^{1/2} \frac{k_z}{|k_z|} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) b \zeta_e \exp(-\zeta_e^2) \approx \frac{b\omega_e^*}{|k_z|v_{Te}}$$

となる。無衝突ドリフト不安定性の成長率は、イオンラーマー半径が大きくなるにしたがって、大きくなる。電子のランダウ増幅の運動論的効果がドリフト波を不安定にする。ドリフト波のMHDによる解析(9.3節参照)では、無衝突のとき抵抗性MHDの時間スケールでは安定であった。

8.6.2 種々の速度空間不安定性

前小節では比較的簡単なドリフト不安定性について述べたが、多くの速度空間不安定性がある。ミラー磁場に閉じ込められたプラズマの分布関数はロスコーンの領域 \$(v_\perp/v)^2 < 1/R_M\$ (\$R_M\$ で0である(2.4節)。この欠落による不安定性をロスコーン不安定性という[8.5]。

ICRFで加熱されたプラズマ(特にミラー磁場の場合)は磁場に垂直方向のイオン温度が平行方向の温度より大きい。この場合イオンサイクロトロン高調波の不安定性が起こる。このようなタイプの不安定性を **Harris** 不安定性という[8.6, 8.7]。Harris 不安定性は静電的で、分散式(8.132)で解析できる。

一般的にプラズマは中心で高温、高密度で、端では低温、低密度である。イオン温度勾配(密度勾配を伴う)による不安定性をイオン温度勾配不安定性、電子温度勾配(密度勾配を伴う)による不安定性を電子温度勾配不安定性という。[8.4]。

トロイダルプラズマでは、磁場の弱いトーラス外側に捕捉粒子が必ず存在する。捕捉粒子による不安定性を捕捉粒子不安定性[8.8]という。

問題

1. 密度測定 準垂直伝播 (\$\theta = \pi/2\$) の正常波の屈折率は \$N = (1 - \Pi_e^2/\omega^2)^{1/2}\$ で与えられる((8.82)参照)。高周波 \$\omega^2 \gg \Pi_e^2\$ のマイクロ波あるいはレーザー光を用いて、レーザー干渉計により、密度測定をする場合、プラズマによる行路長の変化 \$\Delta\$ は \$\Delta = \int \Delta N dl \approx -(1/2)(\Pi_e^2/\omega^2)l\$ である。\$l\$ は光路に沿うプラズマの位置で、\$\Delta\$ は線平均電子密度に比例する。CO₂ レーザー光(真空波長 \$\lambda_0 = 10.6 \mu\text{m}\$)を用いたとき、光路長の変化によるフリッジシフトが0.2、すなわち \$\Delta = 0.2\lambda_0\$ としたとき、プラズマの大きさが \$l = 2\text{m}\$ のときの線平均密度を求めよ。

2. 冷たいプラズマと高温プラズマの誘電率テンソル 高温プラズマの誘電率テンソルは(8.125)および(8.126)で与えられる。温度 \$T_\perp\$ および \$T_z\$ を0に近づけたとき、高温プラズマの誘電率テンソルが冷たいプラズマの誘電率テンソル(8.9)に成ることを証明せよ。第9章の(9.13)を参照すること。

3. Bernstein 波 (8.132) の静電波が磁場に垂直に伝播するとき (\$k_z = 0\$)、この Bernstein 波の分散式(8.135)を導け。

4. ドリフト不安定性 ドリフト不安定性は \$v_{Te} \gg \omega/k_z \gg v_{Ti}\$ の関係が必要である。この理由を述べよ。\$k_\parallel/k_\perp\$ に対してどのような条件が必要か? \$\omega \sim \omega_e^* = \kappa_n k_\perp T_e / eB\$ に留意すること。

5. イオン温度勾配不安定性 分散式(8.141)はイオン温度勾配不安定性(ITGモード)の解析に利用できる。イオンは冷たく電子は高温と仮定する。すなわち、\$\zeta_i = \omega/k_\parallel v_{Ti} \gg 1\$、

\$\zeta_e = \omega/k_\parallel v_{Te} \ll 1\$。ITGモードの分散式は

$$1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} + (k_\perp \rho_s)^2 \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega}\right) - \frac{k_\parallel^2 c_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ip}^*}{\omega}\right) = 0$$

であることを導け。ここで \$\omega_e^* \equiv \epsilon k_\perp T_e / (eB)\$、\$\omega_i^* \equiv -\epsilon k_\perp T_i / (eB)\$、\$\omega_{ip}^* \equiv -(\epsilon + \delta_i) k_\perp T_i / (eB)\$、\$c_s^2 = T_e/m_i\$ and \$\rho_s^2 = c_s^2/\Omega_i^2\$。また \$\epsilon\$ は密度勾配の尺度、\$\delta_i\$ はイオン温度勾配の尺度である。

8.6 速度空間不安定性

$k_{\perp}\rho_s \ll 1$, $\omega_e^*/\omega \ll 1$, $|\omega_{ip}|/\omega \gg 1$ ($\epsilon \ll \delta_i$) のとき, 分散式は $\omega^3 = k_{\parallel}^2 c_s^2 |\omega_{ip}|$, すなわち $\omega = (k_{\parallel}^2 c_s^2 |\omega_{ip}|)^{1/3} \exp(2\pi/3)i$ となる. [8.9] 参照.

解答 (ヒント)

4. ドリフト不安定性 イオンランダウ減衰を抑え, 電子ランダウ増幅を助長するためには $v_{Te} \gg \omega/k_z \gg v_{Ti}$ が必要である. $\omega \approx \omega_e^*$ を仮定する.

$$\frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \gg \frac{k_z v_{Te}}{\omega_e^*} \gg 1,$$

$$\frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \gg \frac{k_z v_{Te}}{k_{\perp} \kappa_n (T_e/T_i) (m_i v_{Ti}^2 / eB)} \gg 1.$$

すなわち

$$\kappa_n \rho_i \frac{T_e}{T_i} \gg \frac{k_z}{k_{\perp}} \gg \kappa_n \rho_i \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

5. イオン温度勾配不安定性 (8.141) より

$$k_x^2 + k_z^2 + \Pi_i^2 \left(\frac{m_i}{T_i} + I_0(b) e^{-b} \left(\frac{m_i}{T_i} \zeta_i Z(\zeta_i) - \frac{k_x}{\Omega_i \omega} ((\kappa_n - \kappa_T/2) \zeta_i Z(\zeta_i) + \kappa_T \zeta_i^2 (1 + \zeta_i Z(\zeta_i))) \right) \right) + \Pi_e^2 \left(\frac{m_e}{T_e} (1 + \zeta_e Z(\zeta_e)) + \frac{k_x}{\Omega_e \omega} (\kappa_n \zeta_e Z(\zeta_e)) \right) = 0,$$

ここで $\kappa_n = \epsilon$, $\kappa_T = \delta$ とし, 電子の温度勾配を 0 とした. 冷たいイオンおよび熱い電子を仮定すると, 分散式は

$$1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2} + \frac{T_e}{T_i} \left(1 + (1-b) \left(-1 - \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_i^*}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \frac{\omega_i^*}{\omega} (1 + \kappa_T/\kappa_n) \right) \right) = 0,$$

$$1 - \omega_e^* + b_s \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} \right) - \frac{k_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} \right) = 0$$

に還元される. ここで $b_s = bT_e/T_i$, $c_s^2 = T_e/m_i$, $\omega_{pi}^* = \omega_i(1 + \kappa_T/\kappa_n)$ である.

第9章 波動加熱および非誘導電流駆動

はじめに波動加熱について述べる。9.2節でイオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱 (ICRF, ion cyclotron range of frequency), 9.3節で低域混成加熱 (LHH, lower hybrid heating), 9.4節で電子サイクロトロン加熱 (ECH, electron cyclotron heating) を取り扱う。波動加熱の機構はやや複雑であり、波と波動との相互作用は多様であるが、それだけに研究の進展によっては多くの応用が可能になる。

プラズマの外側にある導波管あるいはアンテナによって、プラズマ中に電磁プラズマ波を励起する (波の励起, 波-プラズマ結合)。励起する波の電場 \mathbf{E} がプラズマの閉じ込め磁場に平行な場合は、電子が磁力線に沿って動きうるので、電場が消去され波が入りにくい。しかし周波数が、電子プラズマ周波数より大きくなると電子の慣性項のため振動電場についていけず、電子が動けなくなってそのため波がプラズマ中に伝播することができる。励起された波の電場が磁場に対して垂直な場合、 $\omega < \Omega_e$ のとき電子は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の方向に振動する。そのため波の周波数がプラズマ振動数より小さくても電場が消去されず伝播できる。波の励起のために外部から高周波電磁場を結合系を通じてプラズマに加えるが、プラズマ中の固有モードの波長と同じ周期性を結合系に持たせることによって共鳴的に励起する方が効率が良い。

電子サイクロトロン加熱と中性粒子入射加熱 (2.2.2節) は、プラズマ境界において減衰したり、相互作用をすることなく真空中からプラズマへ直接入射できる。したがって波や高速中性粒子を入射する構造体をプラズマに近接して設置する必要がなく、プラズマからの熱負荷や損傷の問題に対して、有利である。

励起された波はプラズマ中を伝播するが、ある場合はプラズマ中心部を減衰せずに (加熱せずに) 通り抜け、ある場合にはプラズマ中心に至る前に屈折または反射して外部に戻ってきたりする (波の伝播) (図 9.1 参照)。またモード変換によって別の性質のモードに移行する。

波がプラズマ中を伝播する場合、ランダウ減衰やサイクロトロン減衰の条件を満たすところでは、波のエネルギーがプラズマに吸収され、その振幅は減衰しプラズマ加熱に寄与する (加熱)。したがってプラズマ中心部を加熱するためにはまず中心部まで近接伝播できる波を励起し、中心部に達するまではあまり吸収されず、かつ中心部に達したときに初めて吸収が行なわれるようにしなければならない。

9.1 エネルギーの流れ

プラズマ媒質における波の伝播、エネルギー輸送はプラズマ加熱にとって重要である。波のエネルギーの流れはマクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (9.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.2)$$

から導かれるエネルギー保存則からえられる。(9.1) と \mathbf{H} , (9.2) と \mathbf{E} のスカラー積の差をとると

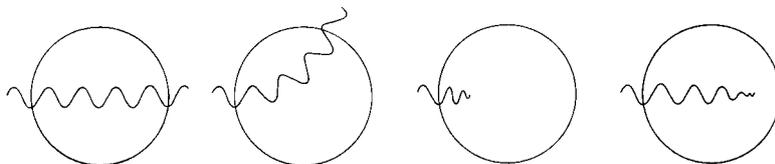


図 9.1 波の通り抜け, 屈折反射, 周辺部および中心部の波動加熱。

9.1 エネルギーの流れ

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

がえられる。 $\mathbf{P} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はポインティング・ベクトルでエネルギーの流れを表わす。ここで電子・イオン衝突による電気抵抗損失は考慮していない。

プラズマは分散媒質であり誘電率テンソルは伝播ベクトル \mathbf{k} および周波数 ω に依存する。 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ および $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ のフーリエ成分をそれぞれ $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega)$ および $\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega)$ とすると

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\mathbf{r} \, dt,$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\mathbf{r} \, dt$$

であり、両者の間には

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega)$$

の関係がなりたつ。そして

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \epsilon_0 \int \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\mathbf{k} \, d\omega,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\mathbf{k} \, d\omega$$

となる。フーリエ積分の公式により下記の式が得られる。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' \, dt'.$$

ただし $\widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\mathbf{k} \, d\omega$$

である。したがって分散媒質中の電磁波の一般的解析は簡単ではない。しかし電場がある伝播ベクトル \mathbf{k}_0 、ある周波数 ω_0 付近のフーリエ成分のみから成り立っていて、 \mathbf{K} が \mathbf{k}, ω に対してゆるやかに変化してる場合には

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{K}(\mathbf{k}_0, \omega_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

としてよい。これからは上記のような場合についてのみ考察する。磁気誘導 \mathbf{B} と磁場強度 \mathbf{H} との関係は $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。

準周期的関数 A, B があり

$$A = A_0 \exp\left(-i \int_{-\infty}^t (\omega_r + i\omega_i) dt'\right) = A_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i),$$

$$B = B_0 \exp\left(-i \int_{-\infty}^t (\omega_r + i\omega_i) dt'\right) = B_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i)$$

と書けるとする (ϕ_r と ϕ_i は実数)。 A と B の積の1周期の時間平均 \overline{AB} は A の実数部と B の実数部との積をとって時間平均をしなければならない。

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \langle (A_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i) + A_0^* \exp(i\phi_r + \phi_i)) \\ &\quad \times (B_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i) + B_0^* \exp(i\phi_r + \phi_i)) \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(A_0 B_0^* + A_0^* B_0) \exp(2\phi_i) = \frac{1}{2} \text{Re}(AB^*). \quad (9.4)$$

ポインティングの方程式の時間平均をとると次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (9.5)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*) \exp 2 \int_{-\infty}^t \omega_i dt', \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\left(\frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(-i\omega \frac{\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} + \epsilon_0 (-i\omega) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*}{\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} (\omega_i \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) + \omega_r \text{Im}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E})). \end{aligned} \quad (9.7)$$

以下の関係

$$\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \sum_i E_i^* \sum_j K_{ij} E_j,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{E}^* &= \sum_i E_i \sum_j K_{ij}^* E_j^* = \sum_j E_j^* \sum_i (K_{ji}^T)^* E_i \\ &= \sum_i E_i^* \sum_j (K_{ij}^T)^* E_j \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{E}^* \cdot \frac{\mathbf{K} + (\mathbf{K}^T)^*}{2} \cdot \mathbf{E}, \\ \text{Im}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{E}^* \cdot \frac{(-i)[\mathbf{K} - (\mathbf{K}^T)^*]}{2} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

が導かれる。 $(\mathbf{K}^T)^*$ は転置行列 \mathbf{K}^T (要素の行と列とを入れ替えた行列) すなわち $K_{ij}^T \equiv K_{ji}$ の共役複素数である。 \mathbf{M} と $(\mathbf{M}^T)^*$ の行列が等しいとき、これをエルミート行列という。この場合 $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{E})$ は実数になる。誘電率テンサー \mathbf{K} は

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{K}_I(\mathbf{k}, \omega)$$

に分けることができる。 \mathbf{k}, ω が実数のとき、 \mathbf{K}_H と \mathbf{K}_I はエルミート行列であることが9.3節で導かれる。また $i\mathbf{K}_I$ の項は、ランダウ減衰およびサイクロトロン減衰の項になることが示される。 ω の虚数部が実数部より非常に小さい場合は ($\omega = \omega_r + i\omega_i$, $|\omega_i| \ll |\omega_r|$)、下記のようなになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega_r + i\omega_i) &\approx \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega_r) + i\mathbf{K}_I(\mathbf{k}, \omega_r), \\ \frac{\mathbf{K} + (\mathbf{K}^T)^*}{2} &= \mathbf{K}_H, \quad \frac{-i[\mathbf{K} - (\mathbf{K}^T)^*]}{2} = \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_I. \end{aligned}$$

W の中で \mathbf{K}_H に関連する項を W_0 とすると、 W_0 は

$$W_0 = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{K}_H \cdot \mathbf{E}_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \mathbf{K}_H \right) \cdot \mathbf{E}_0 \right)$$

9.1 エネルギーの流れ

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \mathbf{K}_H) \right) \cdot \mathbf{E}_0 \right) \quad (9.8)$$

となる. (9.5) および (9.7) より

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\omega_r \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{E}_0 - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (9.9)$$

が導かれる. (9.8) は分散媒質における波動場のエネルギー密度を表す. その第1項は磁場エネルギー密度, 第2項は電場エネルギーおよび波とコヒーレントに動く荷電粒子の運動エネルギー (第2項) とから成る. (9.9) の右辺第1項はランダウ減衰およびサイクロトロン減衰の項, 第2項は波の放射の発散である.

したがってプラズマの単位体積当り吸収される入力 P^{ab} は, (9.9) の右辺第1項で与えられる.

$$P^{\text{ab}} = \omega_r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{E}.$$

$\mathbf{K}_H, \mathbf{K}_I$ は, \mathbf{k}, ω が実数の場合, エルミート行列であるから, 吸収される入力 P^{ab} は

$$P^{\text{ab}} = \omega_r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \text{Re} (\mathbf{E}^* \cdot (-i) \mathbf{K} \cdot \mathbf{E})_{\omega=\omega_r} \quad (9.10)$$

となる. そして P^{ab} は以下のように還元される.

$$\begin{aligned} P^{\text{ab}} = & \omega \frac{\epsilon_0}{2} \left(|E_x|^2 \text{Im} K_{xx} + |E_y|^2 \text{Im} K_{yy} + |E_z|^2 \text{Im} K_{zz} \right. \\ & \left. + 2 \text{Im} (E_x^* E_y) \text{Re} K_{xy} + 2 \text{Im} (E_y^* E_z) \text{Re} K_{yz} + 2 \text{Im} (E_x^* E_z) \text{Re} K_{xz} \right). \end{aligned} \quad (9.11)$$

(8.3) より $\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P} = -i\epsilon_0 \omega (\mathbf{K} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}$ であり, (9.10) は

$$P^{\text{ab}} = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j})_{\omega=\omega_r} \quad (9.12)$$

と表すことができる.

$b = (k_x \rho_\Omega)^2 \ll 1$ の場合 ($\rho_\Omega = v_{T\perp} / \Omega$ はラーマー半径), $e^{-b} \mathbf{X}_n$ を b によって展開する.

$$\begin{aligned} I_n(b) &= \left(\frac{b}{2} \right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(n+l)!} \left(\frac{b}{2} \right)^{2l} \\ &= \left(\frac{b}{2} \right)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{1!(n+1)!} \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2!(n+2)!} \left(\frac{b}{2} \right)^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

b で展開し, 2次高調波までとると, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} K_{xx} = & 1 + \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left((Z_1 + Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} + \dots \right) \right. \\ & \left. + (Z_2 + Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} - \frac{b^2}{2} + \dots \right) + \dots \right)_j \\ K_{yy} = & 1 + \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left(Z_0 (2b + \dots) + (Z_1 + Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - \frac{3b}{2} + \dots \right) \right. \\ & \left. + (Z_2 + Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} - b^2 + \dots \right) + \dots \right)_j \\ K_{zz} = & 1 - \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left(2\zeta_0 W_0 (1 - b + \dots) + (\zeta_1 W_1 + \zeta_{-1} W_{-1}) (b + \dots) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\zeta_2 W_2 + \zeta_{-2} W_{-2}) \left(\frac{b^2}{4} + \dots \right) + \dots \Big)_j \\
K_{xy} = & i \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left((Z_1 - Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - b + \dots \right) \right. \\
& \left. + (Z_2 - Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} + \dots \right) + \dots \right)_j \\
K_{xz} = & 2^{1/2} \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 b^{1/2} \zeta_0 \left((W_1 - W_{-1}) \left(\frac{1}{2} + \dots \right) \right. \\
& \left. + (W_2 - W_{-2}) \left(\frac{b}{4} + \dots \right) + \dots \right)_j \\
K_{yz} = & -2^{1/2} i \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 b^{1/2} \zeta_0 \left(W_0 \left(-1 + \frac{3}{2} b + \dots \right) \right. \\
& \left. + (W_1 + W_{-1}) \left(\frac{1}{2} + \dots \right) + (W_2 - W_{-2}) \left(\frac{b}{4} + \dots \right) + \dots \right)_j \\
& K_{yx} = -K_{xy}, \quad K_{zx} = K_{xz}, \quad K_{zy} = -K_{yz}.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

ここで

$$\begin{aligned}
Z_{\pm n} & \equiv Z(\zeta_{\pm n}), \quad W_n \equiv -(1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \\
\zeta_n & = (\omega + n\Omega) / (2^{1/2} k_z (T_z/m)^{1/2})
\end{aligned}$$

である. $x \gg 1$ のとき $\text{Re}W(x)$ は

$$\text{Re}W(x) = (1/2)x^{-2}(1 + (3/2)x^{-2} + \dots)$$

である. ランダウ減衰(トランジットタイム減衰を含む)の項は, (9.13) の K_{ij} にある $\zeta_0 Z(\zeta_0)$ の虚数部である G_0 に関わる項である.

$$G_0 \equiv \text{Im}\zeta_0 Z(\zeta_0) = (k_z/|k_z|)\pi^{1/2}\zeta_0 \exp(-\zeta_0^2).$$

$$(\text{Im}K_{yy})_0 = (\Pi_j/\omega)^2 2bG_0,$$

$$(\text{Im}K_{zz})_0 = (\Pi_j/\omega)^2 2\zeta_0^2 G_0,$$

$$(\text{Re}K_{yz})_0 = (\Pi_j/\omega)^2 2^{1/2} b^{1/2} \zeta_0 G_0$$

を用いると, 吸收入力 (9.11) は

$$P_0^{\text{ab}} = \omega(\Pi_j/\omega)^2 G_0 \epsilon_0 (|E_y|^2 b + |E_z|^2 \zeta_0^2 + \text{Im}(E_y^* E_z)(2b)^{1/2} \zeta_0) \tag{9.14}$$

となる. 第1項はトランジット・タイム減衰項を表し (7.42) と同じ値である. 第2項はランダウ減衰項を表し (7.36) と同じ値である. 第3項は両者の干渉項である.

サイクロトロン減衰およびその高周波減衰による吸收入力は

$$G_{\pm n} \equiv \text{Im}\zeta_0 Z_{\pm n} = (k_z/|k_z|)\pi^{1/2}\zeta_0 \exp(-\zeta_{\pm n}^2)$$

の項に関わる. $b \ll 1$ の場合

9.1 エネルギーの流れ

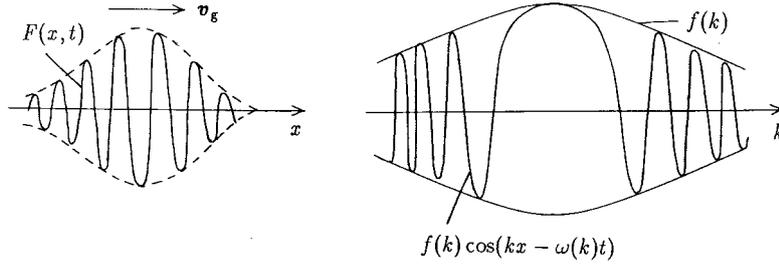


図 9.2 $F(x, t)$ および $f(k) \cos(kx - w(k)t)$.

$$\begin{aligned}
 (\text{Im}K_{xx})_{\pm n} &= (\text{Im}K_{yy})_{\pm n} = (\Pi_j/\omega)^2 G_{\pm n} \alpha_n, \\
 (\text{Im}K_{zz})_{\pm n} &= (\Pi_j/\omega)^2 2\zeta_{\pm n}^2 G_{\pm n} b \alpha_n n^{-2}, \\
 (\text{Re}K_{xy})_{\pm n} &= -(\Pi_j/\omega)^2 G_{\pm n} (\pm \alpha_n), \\
 (\text{Re}K_{yz})_{\pm n} &= -(\Pi_j/\omega)^2 (2b)^{1/2} \zeta_{\pm n} G_{\pm n} \alpha_n n^{-1}, \\
 (\text{Im}K_{xz})_{\pm n} &= -(\Pi_j/\omega)^2 (2b)^{1/2} \zeta_{\pm n} G_{\pm n} (\pm \alpha_n) n^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\alpha_n = n^2 (2 \cdot n!)^{-1} (b/2)^{n-1}$$

となる。これらの項の吸收入力 (9.11) への寄与は以下のようになる。

$$P_{\pm n}^{\text{ab}} = \omega \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 G_n \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \alpha_n |E_x \pm iE_y|^2. \quad (9.15)$$

$$\zeta_n = (\omega + n\Omega_i) / (2^{1/2} k_z v_{Ti}) = (\omega - n|\Omega_i|) / (2^{1/2} k_z v_{Ti})$$

であるから、 $+n$ 項の寄与がイオンサイクロトロン減衰の場合、支配的になる ($\omega > 0$, $\Omega_i < 0$)。また $-n$ 項の寄与は電子サイクロトロン減衰の場合、支配的になる ($\omega > 0$, $\Omega_e > 0$)。

E の各成分の比は、次の式から評価できる。

$$\begin{aligned}
 (K_{xx} - N_{\parallel}^2)E_x + K_{xy}E_y + (K_{xz} + N_{\perp}N_{\parallel})E_z &= 0, \\
 -K_{xy}E_x + (K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2)E_y + K_{yz}E_z &= 0, \\
 (K_{xz} + N_{\perp}N_{\parallel})E_x - K_{yz}E_y + (K_{zz} - N_{\perp}^2)E_z &= 0.
 \end{aligned} \quad (9.16)$$

冷たいプラズマの場合、(9.16) において $K_{xx} \rightarrow K_{\perp}$, $K_{yy} \rightarrow K_{\perp}$, $K_{zz} \rightarrow K_{\parallel}$, $K_{xy} \rightarrow -iK_{\times}$, $K_{xz} \rightarrow 0$, $K_{yz} \rightarrow 0$ を代入し、 $E_x : E_y : E_z = (K_{\perp} - N^2) \times (K_{\parallel} - N_{\perp}^2) : -iK_{\times}(K_{\parallel} - N_{\perp}^2) : -N_{\parallel}N_{\perp}(K_{\perp} - N^2)$ が得られる。

電場の大きさの空間分布を求めるためには (8.125) および (8.126) で与えられる誘電率テンサーを用いてマクスウェル方程式の解を求めることが必要である。この場合プラズマの密度、温度、磁場は空間座標の関数である。したがって簡単化されたモデルを用いて解析的に解くか、あるいは計算機コードによって数値的に求める方法がとられている。

群速度

伝播ベクトル \mathbf{k} と ω との間に分散式

$$\omega = \omega(\mathbf{k})$$

が与えられたとする。そして次式で表わされる波の塊り (wave packet) の移動する速度を考える。

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{k}) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) d\mathbf{k}. \quad (9.17)$$

$f(\mathbf{k})$ が \mathbf{k} に対してゆっくり変化する関数ならば、図 9.2 から判るように、積分 (9.17) に寄与するのは位相 $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)$ の定常な点

$$\frac{\partial}{\partial k_\alpha}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) = 0 \quad (\alpha = x, y, z)$$

付近からである。したがって、波の塊りの移動速度はつぎのように与えられる。

$$\left(\frac{x}{t} = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_x}, \quad \frac{y}{t} = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_y}, \quad \frac{z}{t} = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_z} \right),$$

すなわち

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (9.18)$$

この速度を群速度という。これはエネルギーの流れる速度を表す。

光線追跡

プラズマ中の波の波長がプラズマの特徴的な大きさ (小半径 a) に比べて非常に小さい場合は WKB 近似の方法 (幾何光学的近似) が適用できる。分散式を $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$ とすると、波のエネルギーの流れの方向は群速度 $\mathbf{v}_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k} \equiv (\partial \omega / \partial k_x, \partial \omega / \partial k_y, \partial \omega / \partial k_z)$ で与えられ、光線の軌跡は $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_g$ から求めることができる。これを光線追跡という。この場合 \mathbf{k}, ω も光線の座標 \mathbf{r} の変化に従って変化するが常に分散式 $D = 0$ を満たす必要がある。この場合光線は次式で与えられる。

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{ds} = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}}, \quad (9.19)$$

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{\partial D}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (9.20)$$

ここで s は光線に沿う長さのある尺度を表わす。この軌跡に沿っては

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{k} + \frac{\partial D}{\partial \omega} \cdot \delta \omega + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \delta t = 0 \quad (9.21)$$

となり、 $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$ が満足されている。また (9.19), (9.20) から

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\mathbf{r}, t = \text{const.}} = \mathbf{v}_g$$

となり、光線の軌跡を与えてくれる。(9.19) は D をハミルトニアンとする運動方程式と同じ形をしている。したがってエネルギー保存則に対応する積分が $D = 0$ である。また、運動量保存に対応する積分も存在する場合がある。たとえばプラズマ系が x のみに依存する、いわゆるシート・モデルで取り扱うことができる場合は、 k_z は保存され $N_{\parallel} = \text{const.}$ というスネルの法則 (屈折の法則) が成り立つ。

つぎに実数の ω を与え、分散式によって $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i$ を解くとき、もし $|\mathbf{k}_i| \ll |\mathbf{k}_r|$ である場合は

$$D(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i, \omega) = \text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega) + \frac{\partial \text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega)}{\partial \mathbf{k}_r} \cdot i\mathbf{k}_i + i\text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega) = 0,$$

および

$$\text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega) = 0,$$

$$\mathbf{k}_i \cdot \frac{\partial \text{Re}D(\mathbf{k}_r, \omega)}{\partial \mathbf{k}_r} = -\text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega) \quad (9.22)$$

9.2 イオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱 (ICRF)

をえる。そうすると波の強度 $I(\mathbf{r})$ は

$$I(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}_0) \exp\left(-2 \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{k}_i \cdot d\mathbf{r}\right), \quad (9.23)$$

$$\int \mathbf{k}_i \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{k}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} ds = - \int \text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega) ds = - \int \frac{\text{Im}D(\mathbf{k}_r, \omega)}{|\partial D / \partial \mathbf{k}|} dl \quad (9.24)$$

となる。ただし dl は光線に沿う長さである。したがって (9.23) で何本かの光線を追跡し、(9.23) (9.24) によって、波のエネルギー吸収の空間分布を求めることができる。光線が交差する場合は両者の干渉により強度パターンが波長の大きさ程度の範囲で空間的に変化するであろうが、幾何光学的近似では波長より (2~3 倍) 大きい空間的分解能の範囲で近似値を与えると考えられる。したがって光線がプラズマ中を 1 回通過しただけでかなり吸収されるような場合は比較的良い近似を示す。

9.2 イオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱 (ICRF)

イオン・サイクロトロン周波数付近の領域の波 (ICRF 波) の分散式は (8.64) で与えられる。これらの式は

$$N_{\parallel}^2 = \frac{N_{\perp}^2}{2[1 - (\omega/\Omega_i)^2]} \\ \times \left(- \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \right) + \frac{2\omega^2}{k_{\perp}^2 v_A^2} \pm \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_A} \right)^4 \right]^{1/2} \right)$$

の形に書き表される。+ 記号は遅波 (L 波, イオン・サイクロトロン波), - 記号は速波 (R 波, 異常波) に対応する。 $1 - \omega^2/\Omega_i^2 \ll 2(\omega/k_{\perp} v_A)^2$ のとき、遅波の分散式は

$$k_z^2 = 2 \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right)^{-1}$$

となる。プラズマ外部から励起される波は、通常 $0 < k_z^2 < (\pi/a)^2$, $k_{\perp}^2 > (\pi/a)^2$ の伝播ベクトルをもつから

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{2}{(1 - \omega^2/\Omega_i^2)} < \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \\ n_{20} a^2 < 1.3 \times 10^{-3} \frac{A}{Z^2} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right)$$

の制約が遅波に対してある。速波の分散式は次のようになる [9.1].

$$k_z^2 = -\frac{k_{\perp}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2v_A^2}.$$

速波に対しては以下の制約がある。

$$\frac{\omega^2}{2v_A^2} > \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \\ n_{20} a^2 > 0.5 \times 10^{-2} \frac{A}{Z^2} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}.$$

ここで n_{20} は 10^{20} m^{-3} 単位のイオン密度であり、 a はメートル単位のプラズマ半径で、 A は原子量を表す。

イオン・サイクロトロン波は Stix コイルによって励起され [9.1], 低密度プラズマにおいては伝播可能であるが、トカマク・プラズマの高密度プラズマでは中心部に伝播することができない。

速波はこの周波数領域では異常波でもあるので、磁場に垂直な高周波電場を発生するループ・アンテナによって励起することができ、高密度プラズマ中を伝播できる。単一イオン・プラズマにおいては $\omega = |\Omega_i|$ のとき、冷たいプラズマ近似では $E_x + iE_y = 0$ となるので、イオン・サイクロトロン減衰による波の吸収は起らない。しかし2種類のイオンから成るプラズマにおいては $E_x + iE_y \neq 0$ となり、イオン加熱が有効に起り得る。

M イオンと m イオンの2イオン成分プラズマにおける速進波による加熱について考える。M イオンおよび m イオンの質量、電荷、密度をそれぞれ $m_M, Z_M, n_M; m_m, Z_m, n_m$ とする。

$$\eta_M \equiv \frac{Z_M^2 n_M}{n_e}, \quad \eta_m \equiv \frac{Z_m^2 n_m}{n_e}$$

とすると、 $n_e = Z_M n_M + Z_m n_m$ ゆえ $\eta_M/Z_M + \eta_m/Z_m = 1$ となる。ICRF 波では $(\Pi_e/\omega)^2 \gg 1$ であるから、冷たいプラズマモデルの分散式は、(8.64') を導いたと同じようにして、以下のようになる。

$$\begin{aligned} N_{\perp}^2 &= \frac{(R - N_{\parallel}^2)(L - N_{\parallel}^2)}{K_{\perp} - N_{\parallel}^2}, \\ R &= -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega}{\omega + |\Omega_m|} + \frac{\eta_M\omega}{\omega + |\Omega_M|} - \frac{\omega}{|\Omega_M|/Z_M} \right), \\ L &= -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega}{\omega - |\Omega_m|} + \frac{\eta_M\omega}{\omega - |\Omega_M|} + \frac{\omega}{|\Omega_M|/Z_M} \right), \\ K_{\perp} &= -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega^2}{\omega^2 - \Omega_m^2} + \frac{\eta_M\omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} \right), \\ \Pi_i^2 &\equiv \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_M}. \end{aligned}$$

したがって $K_{\perp} - N_{\parallel}^2 = 0$ でイオン・イオン混成共鳴が起る。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m(m_M/m_m)\omega^2}{\omega^2 - \Omega_m^2} + \frac{\eta_M\omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} &\approx -\frac{\omega^2}{\Pi_i^2} N_{\parallel}^2 \approx 0, \\ \omega^2 &\approx \omega_{\text{IH}} \equiv \frac{\eta_M + \eta_m(\mu^2/\mu')}{\eta_M + \eta_m/\mu'} \Omega_m^2, \\ \mu' &\equiv \frac{m_m}{m_M}, \quad \mu \equiv \frac{\Omega_M}{\Omega_m} = \frac{m_m Z_M}{m_M Z_m}. \end{aligned}$$

図 9.3 に、M イオンが D^+ 、m イオンが H^+ の2成分トカマクプラズマについて $K_{\perp} - N_{\parallel}^2 = 0$ (イオン・イオン混成共鳴)、 $L - N_{\parallel}^2 = 0$ (L カット・オフ)、 $R - N_{\parallel}^2 = 0$ (R カット・オフ) の位置を示す。高温プラズマ・モデルにおいても誘電率テンサーの K_{zz} 成分の大きさが他に比べて非常に大きいので、分散式は

$$\begin{vmatrix} K_{xx} - N_{\parallel}^2 & K_{xy} \\ -K_{xy} & K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.25)$$

となり [9.2], $K_{yy} \equiv K_{xx} + \Delta K_{yy}$ とすると、 $|\Delta K_{yy}| \ll |K_{xx}|$ であり

$$\begin{aligned} N_{\perp}^2 &= \frac{(K_{xx} - N_{\parallel}^2)(K_{xx} + \Delta K_{yy} - N_{\parallel}^2) + K_{xy}^2}{K_{xx} - N_{\parallel}^2} \\ &\approx \frac{(K_{xx} + iK_{xy} - N_{\parallel}^2)(K_{xx} - iK_{xy} - N_{\parallel}^2)}{K_{xx} - N_{\parallel}^2} \end{aligned}$$

9.2 イオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱 (ICRF)

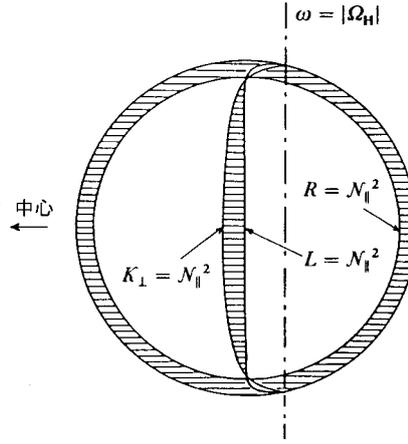


図 9.3 D^+ , H^+ の 2 成分トカマク・プラズマにおけるイオンサイクロトロン周波数領域の波の L カットオフ ($L = N_{\parallel}^2$), R カットオフ ($R = N_{\parallel}^2$), イオンイオン混成共鳴 ($K_{\perp} = N_{\parallel}^2$) の位置. 横線入りの領域は $N_{\perp}^2 < 0$ の領域である

となる. K_{xx} は ω^2 が ω_{IH}^2 付近では ((9.13) 参照)

$$K_{xx} = -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{m_M}{2m_m} \eta_m \zeta_0 Z(\zeta_1) + \frac{\eta_M \omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} \right)$$

で与えられる. 共鳴条件は $K_{xx} = N_{\parallel}^2$ で与えられるが, 高温プラズマの分散式に現われる $Z(\zeta_1)$ は $0 > Z(\zeta_1) > -1.08$ となり有限であるので

$$\eta_m \geq \eta_{cr} \equiv \frac{2}{1.08} \frac{m_m}{m_M} 2^{1/2} N_{\parallel} \frac{v_{Ti}}{c} \left(\frac{\eta_M \omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} + N_{\parallel}^2 \frac{\omega^2}{\Pi_i^2} \right)$$

のときにのみ共鳴条件を満たすことができる. この点が冷たいプラズマの分散式と異なってくる (K_{xx} と K_{\perp} の表式の違いに注目されたい).

$\eta_m \geq \eta_{cr}$ の場合は, 共鳴付近で速波からイオン・バーンスタイン波へのモード変換が起ることが (9.25) の分散式から導かれる [9.2]. L カット・オフとイオンイオン混成共鳴の位置が図 9.3 に示すように接近している場合は, トーラス外側から速波が伝播してきてもトンネル効果で波の一部は L カット・オフを通り抜け, イオン・バーンスタイン波に変換される. 変換された波は電子のランダウ減衰およびイオンのサイクロトロン減衰によって吸収される. モード変換加熱の理論については [9.1] の 10 章に述べられている. また TFR などにおいてくわしい実験が行なわれた.

$\eta_m < \eta_{cr}$ の場合には $K_{\perp} = N_{\parallel}^2$ の線が消える. トーラス外側からループ・アンテナによって速進波を励起すると波は R カット・オフ領域を (その幅が狭いために) 通り抜けるが, L カット・オフで反射され, $R = N_{\parallel}^2$ と $L = N_{\parallel}^2$ とで囲まれた領域を往復する. この領域には $\omega = |\Omega_m|$ を満たすところがあり, ここで少数派の m イオンによる 1 次サイクロトロン減衰が起り m イオンの加熱が起る. 多数派の M イオンは m イオンとのクーロン衝突で加熱される. また M イオンの質量が m イオンの l 倍であるときは $\omega = l|\Omega_M|$ となり, l 次のサイクロトロン減衰で M イオンが加熱される. このような加熱をマイノリティ加熱という. この実験は PLT 装置で行なわれ, 良い加熱効率がえられた. 電子のランダウ減衰による単位体積当りの吸収入力 P_{e0} は (9.14) で与えられるが, 吸収が問題となるのは $\zeta_0 \leq 1$ の場合であり, そのとき $E_y/E_z \approx K_{zz}/K_{yz} \approx 2\zeta_0^2/(2^{1/2}b^{1/2}\zeta_0(-i))$ となり, P_{e0} は

$$P_{e0} = \frac{\omega \epsilon_0}{4} |E_y|^2 \left(\frac{\Pi_e}{\omega} \right)^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{Te}}{\Omega_e} \right)^2 2\zeta_0 e \pi^{1/2} \exp(-\zeta_0^2) \quad (9.26)$$

となる. n 次のイオン・サイクロトロン高調波減衰による単位体積当りの吸収入力 P_{in} は (9.15) より, 次のようになる.

$$P_{\text{in}} = \frac{\omega \epsilon_0}{2} |E_x + iE_y|^2 \left(\frac{\Pi_i}{\omega} \right)^2 \left(\frac{n^2}{2 \times n!} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^{n-1} \times \frac{\omega}{2^{1/2} k_z v_{\text{Ti}}} \pi^{1/2} \exp \left(-\frac{(\omega - n|\Omega_i|)^2}{2(k_z v_{\text{Ti}})^2} \right). \quad (9.27)$$

第2高周波サイクロトロン減衰による吸収力は、プラズマのベータ値に比例する。(9.26)(9.27)より吸収力を評価するためには、 E_x , E_y の空間分布を求める必要があるが、簡単化したモデルについては、文献[9.4]などで求められている。

イオンサイクロトロン高調波 ($\omega \sim 2\Omega_i, 3\Omega_i$) 周波数領域の波動加熱では、イオン・バーンスタイン波を磁場に平行な高周波電場を発生する外部アンテナあるいは導波管によって励起する方法が研究されている [9.5].

9.3 低域混成波加熱 (LHH)

低域混成共鳴周波数 ω_{LH} はトカマク・プラズマの場合、 $|\Omega_i| \ll \Pi_i$ であるので

$$\omega_{\text{LH}}^2 = \frac{\Pi_i^2 + \Omega_i^2}{1 + \Pi_e^2/\Omega_e^2 + Z m_e/m_i} \approx \frac{\Pi_i^2}{1 + \Pi_e^2/\Omega_e^2}$$

である。また $\Omega_e \gg \omega_{\text{LH}} \gg |\Omega_i|$ である。上の式を変形して、与えられた周波数 ω に対して、次の条件を満たすとき遅波で低域混成共鳴が起る ($\omega = \omega_{\text{LH}}$)。

$$\frac{\Pi_e^2(x)}{\Omega_e^2} = \frac{\Pi_{\text{res}}^2}{\Omega_e^2} \equiv p, \quad p = \frac{\omega^2}{\Omega_e |\Omega_i| - \omega^2}.$$

ここで $\Pi_i/\Pi_e = |\Omega_i|/\Omega_e$ の関係を用いた。

冷たいプラズマの分散式 (9.20) において $N^2 = N_{\parallel}^2 + N_{\perp}^2$ とし、 N_{\perp}^2 について解くと

$$N_{\perp}^2 = \frac{K_{\perp} \widetilde{K}_{\perp} - K_{\times}^2 + K_{\parallel} \widetilde{K}_{\perp}}{2K_{\perp}} \pm \left[\left(\frac{K_{\perp} \widetilde{K}_{\perp} - K_{\times}^2 + K_{\parallel} \widetilde{K}_{\perp}}{2K_{\perp}} \right)^2 + \frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}} (K_{\times}^2 - \widetilde{K}_{\perp}^2) \right]^{1/2}$$

をえる。ただし $\widetilde{K}_{\perp} = K_{\perp} - N_{\parallel}^2$ である。 $h(x) \equiv \Pi_e^2(x)/\Pi_{\text{res}}^2$, $K_{\perp} = 1 - h(x)$, $K_{\times} = ph(x)\Omega_e/\omega$, $K_{\parallel} = 1 - \beta_{\Pi} h(x)$, $\beta_{\Pi} \equiv \Pi_{\text{res}}^2/\omega^2 \sim O(m_i/m_e)$, $\alpha \equiv \Pi_{\text{res}}^2/(\omega\Omega_e) \sim O(m_i/m_e)^{1/2}$, $\beta_{\Pi} h \gg 1$ の諸関係を用いることにより

$$N_{\perp}^2(x) = \frac{\beta_{\Pi} h}{2(1-h)} \left(N_{\parallel}^2 - (1-h+ph) \pm \left[(N_{\parallel}^2 - (1-h+ph))^2 - 4(1-h)ph \right]^{1/2} \right) \quad (9.28)$$

となる。遅波は (9.28) において \pm 符号の正の場合に対応する。密度の低いプラズマ周辺 ($h \ll 1$) から密度の高い ($\Pi_e^2 = \Pi_{\text{res}}^2$, $h = 1$) プラズマ中心にまで遅波を伝播させるためには $N_{\perp}(x)$ は実数である必要がある。したがって

$$N_{\parallel} > (1-h)^{1/2} + (ph)^{1/2}$$

の条件が必要である。不等式の右辺は範囲 $0 < h < 1$ で最大値 $(1+p)^{1/2}$ をとるので、低域混成波の近接条件として

$$N_{\parallel}^2 > N_{\parallel, \text{cr}}^2 = 1 + p = 1 + \frac{\Pi_{\text{res}}^2}{\Omega_e^2} \quad (9.29)$$

をえる。もしこの条件が満たされない場合は、外から励起された遅波は (9.28) 中の平方根が0となる場所 (2重根をもつところ) で速波に移り、低い密度側にもどっていく (図 9.4 参照)。近

9.3 低域混成波加熱 (LHH)

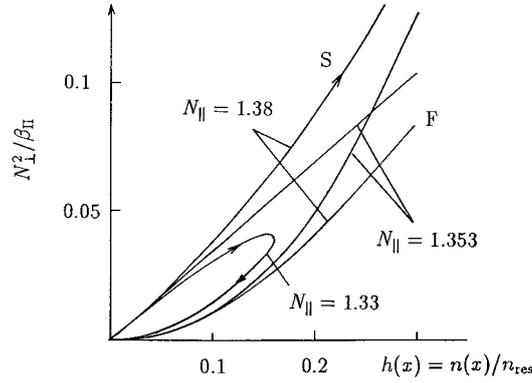


図 9.4 $N_{\perp}^2 - h(x) (= \Pi_e^2(x) / \Pi_{\text{res}}^2)$ ダイアグラムにおける低域混成波の軌跡 ($p = 0.353$, $N_{\parallel \text{cr}}^2 = 1 + p = 1.353$ の場合). $f = \omega/2\pi = 10^9 \text{Hz}$, $B = 3 \text{T}$, H^+ プラズマの場合に相当する. このとき $\beta_{\Pi} = 7.06 \times 10^3$, $\Pi_{\text{res}}^2 = p\Omega_e^2$ に対応する電子密度は $n_{\text{res}} = 0.31 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ となる

接条件を満たす遅波は共鳴領域に近づくことができ, それにつれて N_{\perp} が大きくなり熱いプラズマの分散式を用いる必要がある. 低域混成共鳴付近では, 静電波近似の式 (8.131) がよく成立する. $|\Omega_i| \ll \omega \ll \Omega_e$ であるので, イオンの寄与については (8.133) の表式, 電子の寄与については (8.135) を用いればよい.

$$1 + \frac{\Pi_e^2}{k^2} \frac{m_e}{T_e} (1 + I_0 e^{-b} \zeta_0 Z(\zeta_0)) + \frac{\Pi_i^2}{k^2} \frac{m_i}{T_i} (1 + \zeta Z(\zeta)) = 0.$$

ここで $\zeta_0 = \omega / (2^{1/2} k_z v_{Te})$, $\zeta = \omega / (2^{1/2} k v_{Ti}) \approx \omega / (2^{1/2} k_{\perp} v_{Ti})$ である. $I_0 e^{-b} \approx 1 - b + (3/4)b^2$, $\zeta_0 \gg 1$, $\zeta \gg 1$, $1 + \zeta Z(\zeta) \approx -(1/2)\zeta^{-2} - (3/4)\zeta^{-4}$ の関係を用いると

$$\left(\frac{3\Pi_i^2}{\omega^4} \frac{\kappa T_i}{m_i} + \frac{3}{4} \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^4} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) k_{\perp}^4 - \left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \right) k_{\perp}^2 - \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right) k_z^2 = 0 \quad (9.30)$$

になる. $\rho_i = v_{Ti} / |\Omega_i|$ および

$$s^2 \equiv 3 \left(\frac{|\Omega_e \Omega_i|}{\omega^2} + \frac{1}{4} \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2}{|\Omega_e \Omega_i|} \right) = 3 \left(\frac{1+p}{p} + \frac{1}{4} \frac{T_e}{T_i} \frac{p}{1+p} \right)$$

の無次元量を用いると,

$$\left(\frac{3\Pi_i^2}{\omega^4} \frac{\kappa T_i}{m_i} + \frac{3}{4} \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^4} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) = \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{Ti}^2 s^2}{\Omega_i},$$

$$\left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \right) = \frac{1}{1+p} \frac{1-h}{h} \frac{\Pi_i^2}{\omega^2}$$

の関係がある. (9.30) の無次元化された式は

$$(k_{\perp} \rho_i)^4 - \frac{1-h}{h} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{(1+p)s^2} (k_{\perp} \rho_i)^2 + \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \frac{1}{s^2} (k_z \rho_i)^2 = 0 \quad (9.31)$$

に還元される. この分散式は二つの解を持ち, 一つは冷たいプラズマの遅波に対応し, もう一つは熱いプラズマの波である. 遅波は (9.30) (9.31) が 2 重根を持つところでプラズマ波にモード変換 (mode conversion) される [9.8]. その位置は 判別式=0, すなわち, $1/h = 1 + 2k_z \rho_i (1+p)s$ より

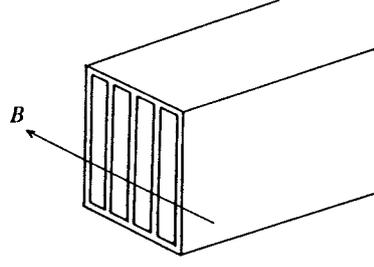


図 9.5 低域混成波 (遅波) 加熱のための導波管列.

$$\frac{\Omega_e^2}{\Pi_e^2(x)} p = 1 + 2k_z \rho_i (1 + p) s$$

で与えられる. したがってモード変換する位置は

$$\frac{\omega^2}{\Pi_i^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{|\Omega_i| \Omega_e} \right) + \frac{N_{\parallel} v_{Te} 2\sqrt{3}}{c} \left(\frac{T_i}{T_e} + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega^2}{\Omega_i \Omega_e} \right)^2 \right)^{1/2}$$

である. この位置での $k_{\perp}^2 \rho_i^2$ の値は

$$k_{\perp}^2 \rho_i^2 |_{\text{M.C.}} = \frac{m_i}{m_e} \frac{k_z \rho_i}{s}$$

である. 中心部の電子温度が高く電子熱速度 v_{Te} が $v_{Te} > (1/3)c/N_{\parallel}$ である場合は, 電子のランダウ減衰によって波のエネルギーが電子に吸収される.

プラズマ波へのモード変換によって N_{\perp} が大きくなると, やがて $c/N_{\perp} \sim v_{Ti}$ となる場合がある. $\omega \gg |\Omega_i|$ であるので, ω^{-1} 程度の時間の相互作用においてはイオンの運動は磁場の影響を受けないと考えてよい. c/N の位相速度を持つ波は, $c/N \sim v_{Ti}$ のイオンによってランダウ減衰を受けて吸収される. また $v_i > c/N_{\perp}$ のイオンは, $v_i \cos(\Omega_i t) \approx c/N_{\perp}$ の時刻ごとに波によって加速あるいは減衰を受け, 統計加熱を受けることが予想される.

励起方法は図 9.5 に示すように導波管を並べ, その間の位相差を適当に選んで必要な $N_{\parallel} = k_z c / \omega = 2\pi c / (\lambda_z \omega)$ の波を励起する. プラズマ周辺部の低密度領域では, 遅進波の磁場に平行な電場成分は速進波の場合より大きいので, 磁力線方向に電場が向くよう導波管を配列する. プラズマとのカップリングについての議論は [9.9] に, 低域混成加熱の実験は [9.10] にくわしい.

低域混成波による電流駆動の場合は, 近接条件 (9.29) を満たし, かつ $c/N_{\parallel} \gg v_{Te}$ である必要がある. しかし電子温度が高く $T_e \sim 10 \text{ keV}$ 程度になると, $v_{Te}/c \sim 1/7$ であるから N_{\parallel} を (9.29) の条件下で小さい値を選んでも, 電子のランダウ減衰により波が吸収され, プラズマの中心部まで伝播しないことが予想される.

$N_{\parallel} \sim (1/3)(c/v_{Te})$ に選ぶと電子加熱が起るはずで実験的にも観測されている. プラズマ波へのモード変換が起る条件下ではイオン加熱が期待されるが, 実験結果は電子加熱の場合ほど明確でない.

9.4 電子サイクロトロン加熱 (ECH)

電子サイクロトロン周波数における冷たいプラズマの分散式は (8.79) で与えられる. この式の正負の符号にしたがって正常波 (O 波) と異常波 (X 波) に対応する. 正常波は分散式 (8.86) より明かなように, $\omega^2 > \Pi_e^2$ ($\theta = \pi/2$ のとき) でないと伝播できない. 励起方法は導波管を用い, 波の電場を磁力線に平行にする導波管列 (array) を磁力線方向に並べ, 各導波管における波の位相を変えて $N_{\parallel} = k_z c / \omega_L^2 = 2\pi c / (\omega \lambda_z)$ の値を最適に選ぶことができる (図 9.5 参照).

異常波の分散式は (8.87) あるいは (8.52) ($\theta = \pi/2$ のとき) で与えられて, $\omega^2 > \omega_L^2$ ($\omega_L < \Pi_e$) であることが必要である. また図 8.5 の CMA ダイアグラムからわかるとおり, 高磁場側 (図 8.5 の 6a 領域) からプラズマ中心部に接近できる (低磁場側からは $\omega = \omega_R$ のカット・オフにぶつかる). 異常波の励起方法は波の電場の向きを磁力線に直角にするように導波

9.4 電子サイクロトロン加熱 (ECH)

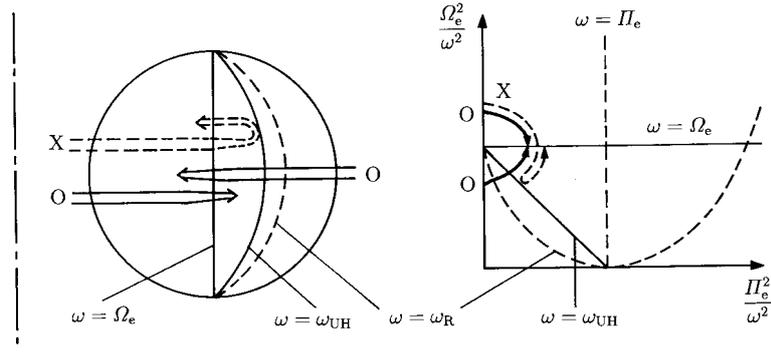


図 9.6 左図: $\Omega_{e0} > \Pi_{e0}$ の場合の電子サイクロトロン共鳴 ($\omega = \Omega_e$), 高域混成共鳴 ($\omega = \omega_{UH}$), R カット・オフ ($\omega = \omega_R$) の位置. ただし Ω_{e0} , Π_{e0} はプラズマ中心における値. 右図: 電子サイクロトロン周波数付近の CMA ダイアグラム.

管を配列する (9.2.1 節参照). 高温プラズマの誘電率テンサーにおいてはイオン項は無視でき, また $b \ll 1$, $\zeta_0 \gg 1$ である. したがって誘導率テンサーは以下のようなになる.

$$K_{xx} = K_{yy} = 1 + X\zeta_0 Z_{-1}/2, \quad K_{zz} = 1 - X + N_{\perp}^2 \chi_{zz},$$

$$K_{xy} = -iX\zeta_0 Z_{-1}/2, \quad K_{xz} = N_{\perp} \chi_{xz}, \quad K_{yz} = iN_{\perp} \chi_{yz},$$

$$\chi_{xz} \approx \chi_{yz} \approx 2^{-1/2} XY^{-1} \frac{v_T}{c} \zeta_0 (1 + \zeta_{-1} Z_{-1}),$$

$$\chi_{zz} \approx XY^{-2} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \zeta_0 \zeta_{-1} (1 + \zeta_{-1} Z_{-1}),$$

$$X \equiv \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}, \quad Y \equiv \frac{\Omega_e}{\omega}, \quad \zeta_{-1} = \frac{\omega - \Omega_e}{2^{1/2} k_z v_T}, \quad N_{\perp} = \frac{k_{\perp} c}{\omega}.$$

マクスウェル方程式は

$$(K_{xx} - N_{\parallel}^2)E_x + K_{xy}E_y + N_{\perp}(N_{\parallel} + \chi_{xz})E_z = 0,$$

$$-K_{xy}E_x + (K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2)E_y + iN_{\perp}\chi_{yz}E_z = 0,$$

$$N_{\perp}(N_{\parallel} + \chi_{xz})E_x - iN_{\perp}\chi_{yz}E_y + (1 - X - N_{\perp}^2(1 - \chi_{zz}))E_z = 0$$

となる. これを解くと

$$\frac{E_x}{E_z} = -\frac{iN_{\perp}^2 \chi_{xz} (N_{\parallel} + \chi_{xz}) + K_{xy} (1 - X - N_{\perp}^2 (1 - \chi_{zz}))}{N_{\perp} (i\chi_{xz} (K_{xx} - N_{\parallel}^2) + K_{xy} (N_{\parallel} + \chi_{xz}))},$$

$$\frac{E_y}{E_z} = -\frac{N_{\perp}^2 (N_{\parallel} + \chi_{xz})^2 - (K_{xx} - N_{\parallel}^2) (1 - X - N_{\perp}^2 (1 - \chi_{zz}))}{N_{\perp} (i\chi_{xz} (K_{xx} - N_{\parallel}^2) + K_{xy} (N_{\parallel} + \chi_{xz}))}.$$

単位体積当り吸収される電磁波の入力 P_{-1} は (9.15) より

$$P_{-1} = \omega X \zeta_0 \frac{\pi^{1/2}}{2} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} |E_x - iE_y|^2$$

となる. $\omega = \Omega_e$ のとき $\zeta_{-1} = 0$, $Z_{-1} = i\pi^{1/2}$, $K_{xx} = 1 + ih$, $K_{xy} = h$, $\chi_{yz} = \chi_{xz} = 2^{1/2}X(v_{Te}/c)\zeta_0 = X/(2N_{\parallel})$, $\chi_{zz} = 0$, $h \equiv \pi^{1/2}\zeta_0X/2$ であるので誘電率テンサー \mathbf{K} は

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 + ih & h & N_{\perp}\chi_{xz} \\ -h & 1 + ih & iN_{\perp}\chi_{xz} \\ N_{\perp}\chi_{xz} & -iN_{\perp}\chi_{xz} & 1 - X \end{bmatrix}$$

となる.

正常波 (O 波) については

$$\frac{E_x - iE_y}{E_z} = \frac{iN_{\perp}^2(O)N_{\parallel}(N_{\parallel} + \chi_{xz}) - i(1 - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(O))}{N_{\perp}(O)(N_{\parallel}h + i\chi_{xz}(1 - N_{\parallel}^2))}$$

である. $N_{\parallel} \ll 1$ で垂直入射に近いときは (11.82) より $1 - X - N_{\perp}^2(O) = (1 - X)N_{\parallel}^2$ となり, また $\chi_{xz} = X/2N_{\parallel}$ であるので $\chi_{xz} \gg N_{\parallel}$ である. したがって

$$\frac{E_x - iE_y}{E_z} = \frac{iN_{\perp}(O)N_{\parallel}\chi_{xz}}{N_{\parallel}h + i\chi_{xz}}$$

となる.

異常波 (X 波) については

$$\frac{E_x - iE_y}{E_y} = -\frac{iN_{\perp}^2(X)N_{\parallel}(N_{\parallel} + \chi_{xz}) - i(1 - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(X))}{N_{\perp}^2(X)(N_{\parallel} + \chi_{xz})^2 - (K_{xx} - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(X))}$$

である. $N_{\parallel} \ll 1$ で $\omega = \Omega_e$ のときは (8.83) より $1 - X - N_{\perp}^2(X) \approx -1 + N_{\parallel}^2$ となり, また $\chi_{xz}^2 = (2\pi)^{-1/2}(v_{Te}/cN_{\parallel})Xh \ll h$ であるので

となる.

単位体積当りの $\omega = \Omega_e$ の位置における吸收入力を求めると, 正常波については

$$\begin{aligned} P_{-1}(O) &\approx \frac{\omega\epsilon_0}{2}|E_z|^2 \frac{hN_{\perp}^2(O)N_{\parallel}\chi_{xz}^2}{(N_{\parallel}h)^2 + \chi_{xz}^2} \exp(-\zeta_{-1}^2) \\ &\approx \frac{\omega\epsilon_0}{2}|E_z|^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\Pi_e}{\omega}\right)^2 \left(\frac{v_{Te}}{cN_{\parallel}}\right) \frac{N_{\perp}^2(O)N_{\parallel}^2}{N_{\parallel}^2 + (v_{Te}/c)^2(2/\pi)}, \end{aligned} \quad (9.32)$$

異常波については

$$P_{-1}(X) \sim \frac{\omega\epsilon_0}{2}|E_y|^2 \frac{1}{h} = \frac{\omega\epsilon_0}{2}|E_y|^2 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\Pi_e}{\omega}\right)^{-2} \left(\frac{N_{\parallel}v_{Te}}{c}\right) \quad (9.33)$$

となる.

$P(O) \propto n_e T_e^{1/2}/N_{\parallel}$, $P(X) \propto N_{\parallel} T_e^{1/2}/N_e$ であるから, 正常波は垂直入射に近いほど, そして密度が高いほど吸収が良く, 異常波はその逆であることを示している.

[9.12] に電子サイクロトロン加熱, 電流駆動についてのすぐれた解説がある.

トカマクにおけるプラズマ電流の非電磁誘導駆動

11.6 節で述べるように, トカマク装置でプラズマ電流を変流器により電磁誘導で駆動する限り, 放電は有限時間のパルス運転にならざるを得ない. もしプラズマ電流を非電磁誘導によって駆動

9.5 低域混成電流駆動 (LHCD)

できれば、定常トカマク炉が原理的には可能になる。中性粒子ビーム (NBI) による電流駆動は、大河によって提案された [9.13]。また進行波による電流駆動は Wort によって提案された [9.14]。NBI によって入射された粒子や進行波の運動量が、プラズマ中の荷電粒子に移され、その結果荷電粒子の流れがプラズマ電流を生成する。NBI による電流駆動は DITE, TFTR 等で実証された。Fisch によって提案された低域混成波 LHW による電流駆動は JFT-2, JIPPT-II, WT-2, PLT, Alcator C, Versator 2, T-7, Wega, JT-60 等で実証された。また電子サイクロトロン波による電流駆動は Cleo, T-10, WT-3, Compass-D, DIII-D, TCV 等で実証された。

9.5 低域混成電流駆動 (LHCD)

低域混成波による電流駆動 (LHCD) の理論を Fisch らの記述にしたがって述べる [9.15]。プラズマ中に磁力線に沿った進行波があると、電子の速度分布関数は波の位相速度に近いところで平坦化する。波による速度空間の拡散係数を D_{rf} とするとフォッカー-プランク方程式は (7.1 節参照)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D_{\text{rf}} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{F.P.}} \quad (9.34)$$

で与えられる。ただし $(\delta f / \delta t)_{\text{F.P.}}$ はフォッカー・プランク衝突項である (7.1.3 節)。すなわち

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{F.P.}} = - \sum_{i,e} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 J_v) + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta J_\theta) \right), \quad (9.35)$$

$$J_v = -D_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v} + A f, \quad J_\theta = -D_{\perp} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (9.36)$$

テスト粒子の速度 v が場の粒子の熱速度 v_{T}^* より大きい場合 ($v > v_{\text{T}}^*$), 速度空間における拡散テンソル D_{\parallel}, D_{\perp} および動的摩擦係数 A は次のように与えられる (7.1.3 節参照)。

$$D_{\parallel} = \frac{v_{\text{T}}^{*2} \nu_0}{2} \left(\frac{v_{\text{T}}^*}{v} \right)^3, \quad D_{\perp} = \frac{v_{\text{T}}^{*2} \nu_0}{2} \frac{v_{\text{T}}^*}{2v},$$

$$A = -D_{\parallel} \frac{m}{m^*} \frac{v}{v_{\text{T}}^{*2}}.$$

ただし v_{T}^* および ν_0 は

$$v_{\text{T}}^{*2} = \frac{T^*}{m^*}, \quad \nu_0 = \left(\frac{qq^*}{\epsilon_0} \right)^2 \frac{n^* \ln \Lambda}{2\pi v_{\text{T}}^{*3} m^2} = \Pi^{*4} \frac{\ln \Lambda}{2\pi v_{\text{T}}^{*3} n^*}$$

であり、 $\Pi^{*2} \equiv qq^* n^* / (\epsilon_0 m)$ である。 (v, θ, ψ) は速度空間の球座標である。 v_{T}^*, q^*, n^* はそれぞれ場の粒子の熱速度、電荷、密度であり、 v, q, n はテスト粒子の量である。電子分布関数について考え、座標空間的に一様で外力 \mathbf{F} も 0 とする。衝突項については電子・電子、電子・イオン (電荷 Z) の両者を考慮する。さらに無次元量 $\tau = \nu_0 e t$, $u = v / v_{\text{Te}}^*$, $w = v_z / v_{\text{Te}}^*$, $D(w) = D_{\text{rf}} / v_{\text{Te}}^{*2} \nu_0 e$ を導入するとフォッカー-プランクの式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial f}{\partial w} \right) + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + f \right) + \frac{1+Z}{4u^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

また $(v_x, v_y, v_z) \equiv (v_1, v_2, v_3)$ 座標を用いてフォッカー-プランクの衝突項を書き直すと ($v > v_{\text{T}}^*$ を仮定)

$$A_i = -D_0 v_{\text{T}}^* \frac{m}{m^*} \frac{v_i}{v^3}, \quad (9.37)$$

$$D_{ij} = \frac{D_0}{2} \frac{v_{\text{T}}^*}{v^3} \left((v^2 \delta_{ij} - v_i v_j) + \frac{v_{\text{T}}^{*2}}{v^2} (3v_i v_j - v^2 \delta_{ij}) \right), \quad (9.38)$$

$$J_i = A_i f - \sum_j D_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j}, \quad (9.39)$$

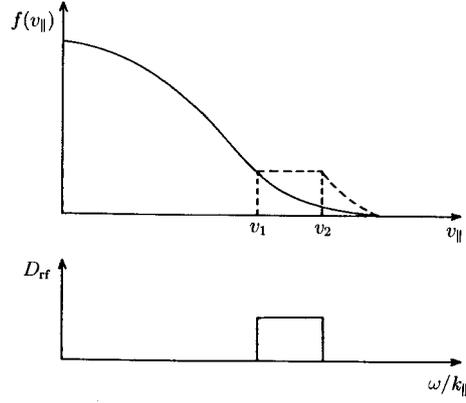


図 9.7 磁力線方向の屈折率 N_{\parallel} が $N_1 \sim N_2$ の範囲にスペクトルを持つ低域混成波との相互作用によって $v_1 = c/N_1 \sim v_2 = c/N_2$ のところが平坦化された速度分布関数 $f(v_{\parallel})$.

$$D_0 \equiv \frac{(qq^*)^2 n^* \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v_{\text{T}}^*} = \frac{v_{\text{T}}^{*2} \nu_0}{2}, \quad (9.40)$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{F.P.}} = -\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{J}$$

となる. A_i は動的摩擦係数の i 成分, D_{ij} は拡散テンソアの ij 成分である. 磁場に垂直方向の速度 v_x, v_y の分布関数をマクスウェル分布とし, 垂直方向の速度で積分すると磁場に平行な速度 $w = v_z/v_{\text{T}e}^*$ の分布関数 $F(w) = \int f dv_x dv_y$ に関する 1 次元のフォッカー-プランクの式を導くことができる.

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{F.P.}} dv_x dv_y &= \iint (-\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{J}) dv_x dv_y \\ &= \iint \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-A_z f + \sum_j D_{zj} \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) dv_x dv_y. \end{aligned}$$

$|v_z| \gg |v_x|, |v_y|$ のとき, $v \approx |v_z|$ の近似をすることができる. その結果 $F(w)$ の 1 次元フォッカー-プランクの式は

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \left(1 + \frac{Z}{2} \right) \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w^3} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{w^2} \right) F(w)$$

となる. 定常解は

$$F(w) = C \exp \int^w \frac{-w dw}{1 + w^3 D(w)/(1 + Z/2)}$$

となり, 図 9.7 のようになる ($D(w) = 0$ のときはマクスウェル分布になる). したがって $F(w)$ は $w = 0$ に対して非対称になり, 磁場方向に電流成分が生ずる. このときの電流密度 J は

$$J = en v_{\text{T}e}^* j$$

となる. ただし $j = \int w F(w) dw$ である. すなわち

$$j \approx \frac{w_1 + w_2}{2} F(w_1)(w_2 - w_1). \quad (9.41)$$

一方, この電流成分はクーロン衝突によって散逸する. 単位時間当りの散逸エネルギーは, 電流成分を保つために外からおぎなわなければならない. 定常状態で必要な入力 P_d は

$$P_d = - \int \frac{nmv^2}{2} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{F.P.}} d\mathbf{v} = \int \frac{nmv^2}{2} \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D_{\text{rf}} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) d\mathbf{v}$$

9.6 電子サイクロトロン電流駆動 (ECCD)

$$= nmv_{Te}^{*2}\nu_0 \int \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial F}{\partial w} \right) dw = nmv_{Te}^{*2}\nu_0 p_d$$

である. p_d は F の定常解を用いると $w^3 D(w) \gg 1$ のとき次のように与えられる.

$$p_d = \left(1 + \frac{Z}{2}\right) F(w_1) \ln \left(\frac{w_2}{w_1}\right) \approx \left(1 + \frac{Z}{2}\right) F(w_1) \frac{w_2 - w_1}{w_1},$$

$$\frac{j}{p_d} = \frac{1.5}{1 + 0.5Z_i} \frac{2}{3} w^2. \quad (9.42)$$

より正確には, この比は [9.15]

$$\frac{j}{p_d} = \frac{1.12}{1 + 0.12Z_i} 1.7w^2 \quad (9.43)$$

になる. 電流密度 J を維持するために必要な単位体積当りの入力を P_d としたとき, その比 J/P_d は

$$\frac{J}{P_d} = \frac{env_{Te}^* j}{nT_e\nu_0 p_d} = 0.16 \frac{T_{e\text{keV}}}{n_{19}} \langle w^2 \rangle \frac{1.12}{1 + 0.12Z_i} \left(\frac{\text{A/m}^2}{\text{W/m}^3} \right) \quad (9.44)$$

である. ただし T_{keV} は 1 keV 単位の電子温度, n_{19} は 10^{19} m^{-3} 単位の電子密度である. 全駆動電流 I_{CD} の LHCD 出力 W_{LH} に対する比は

$$\frac{I_{CD}}{W_{LH}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{\int J 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr}$$

であり, LHCD の電流駆動効率 η_{LH}^T は

$$\eta_{LH}^T \equiv \frac{Rn_{19}I_{CD}}{W_{LH}} = \frac{\int \eta_{LH}(r) P_d(r) 2\pi r dr}{\int P_d(r) 2\pi r dr} \left(10^{19} \frac{\text{A}}{\text{Wm}^2} \right)$$

となる. ここで $\eta_{LH}(r)$ は局所的電流駆動効率で

$$\eta_{LH}(r) = \frac{Rn_{19}J(r)}{2\pi R P_d(r)} = 0.026 (T_e)_{\text{keV}} \langle w^2 \rangle \frac{1.12}{1 + 0.12Z_i} \left(10^{19} \frac{\text{A}}{\text{Wm}^2} \right) \quad (9.45)$$

である (R は m 単位の大半径). 波の磁力線方向の位相速度と電子の熱速度の比の 2 乗平均 $\langle w^2 \rangle$ は 20 ~ 50 のオーダーである. JT60U の実験 (1994) でプラズマ電流 $I_p = 3 \text{ MA}$ を $W_{LH} = 4.8 \text{ MW}$ の LHCD で駆動した. このときの実験条件は $n = 1.2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $\langle T_e \rangle \sim 2 \text{ keV}$, $R = 3.5 \text{ m}$, $B_t = 4 \text{ T}$ ($\eta_{LH} \sim 3$) である. 実験比例則 $\eta_{LH} = 12 \langle T_{e\text{keV}} \rangle / (5 + Z_{\text{eff}}) 10^{19} \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ W})$ を提案している. これらの結果は理論的結果とよく一致している.

電流駆動効率は密度に逆比例して減少し, 低域混成波ではある密度以上では近接性のために電流を駆動できなくなることが観測されている (9.3 節参照). また炉心プラズマの中央部では電子温度が高いため, 低域混成波は中央部に達する前にランダウ減衰によって吸収されてしまう. しかしながら LHCD の電流駆動効率は他の方法より良いので, LHCD はプラズマの中心部を外れた外部領域の電流駆動 (off-axis current drive) に役立つことが期待される.

9.6 電子サイクロトロン電流駆動 (ECCD)

電子サイクロトロン電流駆動 (Electron Cyclotron Current Drive, ECCD) は, トロイダル方向の一方に動いている電子を選択的に加熱することにより, 方向に対して非対称な抵抗を作ることによっている. Fisch と Boozer [9.16] はプラズマの衝突性を変え, 例えば左に動く電子は右に動

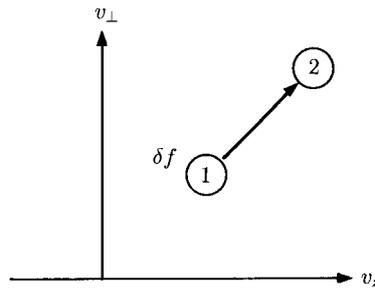


図 9.8 速度空間において 1 と付けられた位置から 2 と付けられた位置へ僅かの電子 δf が移動することを示す.

く電子にくらべてイオンとの衝突が少なくなるようにする. その結果平均として電子が左に動き、イオンは右に動き、正味電流が流れる.

図 9.8 に示されるように、速度空間において 1 と付けられた位置から 2 と付けられた位置へ僅かの電子 δf が移動する場合を考察しよう. この移動に要するエネルギーは

$$\Delta E = (E_2 - E_1)\delta f$$

である. E_i ($i=1,2$) は速度空間の i の位置に対応する運動エネルギーである. 1 の位置にいる電子は磁場に平行な運動量を ν_1 の率で失っていたのが, 2 の位置に変わって今度は ν_2 の率で失う. いま磁場の方向を z にとる. z 方向の電流密度 $j(t)$ は

$$j(t) = -e\delta f(v_{z2}\exp(-\nu_2 t) - v_{z1}\exp(-\nu_1 t)) \quad (9.46)$$

で与えられる. $1/\nu_1$ および $1/\nu_2$ より長い時間間隔 Δt で電流密度の平均をとると

$$J = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} j(t) dt = -\frac{e\delta f}{\Delta t} \left(\frac{v_{z2}}{\nu_2} - \frac{v_{z1}}{\nu_1} \right)$$

になる. したがって電流密度を誘起するために必要な入力密度 P_d は

$$P_d = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} \delta f$$

である. したがって J/P_d の比は

$$\frac{J}{P_d} = -e \frac{v_{z2}/\nu_2 - v_{z1}/\nu_1}{E_2 - E_1} \Rightarrow -e \frac{\mathbf{s} \cdot \nabla(v_z/\nu)}{\mathbf{s} \cdot \nabla E} \quad (9.47)$$

になる. ここで \mathbf{s} は速度空間における移動方向の単位ベクトルを示す. (9.47) で使った運動量の減衰率 ν を求めてみよう. テスト電子が場の電子とイオンとの衝突により減速する割合より ((2.23),(2.15) を参照)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau_{ee\parallel}} - \frac{p}{\tau_{ei\parallel}} = -\left(1 + \frac{Z_i}{2}\right) \frac{\nu_0}{u^3} p$$

となる. ここで ν_0 は

$$\nu_0 = \left(\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{\ln \Lambda}{2\pi n_e v_{Te}^3}, \quad u \equiv \frac{v}{v_{Te}}$$

である. $v_{Te} = (\kappa T_e/m_e)^{1/2}$ は電子の熱速度である. したがって

$$\frac{dp}{dt} = -\nu_M p, \quad \nu_M \equiv (2 + Z_i) \frac{\nu_0}{2u^3}$$

9.6 電子サイクロトロン電流駆動 (ECCD)

となる。 du/dt を求めるために、エネルギー緩和時間 τ_{ee}^e ((2.24) 参照) を用いる。

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{\tau_{ee}^e}, \quad E = \frac{m_e}{2} u^2 v_{Te}^2$$

すなわち

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{2\tau_{ee}^e} = -\frac{\nu_0}{2u^3} u.$$

$j(t)$ の式 (9.46) の各項は次のように変更しなくてはならない。

$$j(t) = j_0 \exp\left(-\int \nu_M dt\right) = j_0 \left(\frac{u(t)}{u_0}\right)^{2+Z_i}. \quad (9.48)$$

なぜなら

$$-\int \nu_M dt = -\int \nu_M \frac{dt}{du} du = (2 + Z_i) \int \frac{du}{u} = (2 + Z_i) \ln \frac{u(t)}{u_0}$$

であるからである。そして (9.48) の $j(t)$ の積分は

$$\int_0^\infty j(t) dt = j_0 \int_{u_0}^0 \left(\frac{u(t)}{u_0}\right)^{2+Z_i} \frac{dt}{du} du = \frac{j_0}{\nu_0} \frac{2u_0^3}{5 + Z_i}$$

に還元される。したがって (9.47) の ν は

$$\nu = \nu_0 \frac{5 + Z_i}{2u^3} \quad (9.49)$$

となり

$$\frac{J}{P_d} = \frac{en_e v_{Te}}{n_e T_e \nu_0} \frac{j}{p_d}, \quad \frac{j}{p_d} \equiv \frac{4}{5 + Z_i} \frac{\mathbf{s} \cdot \nabla(u^3 w)}{\mathbf{s} \cdot \nabla u^2}$$

がえられる。ここで $w \equiv v_z/v_{Te}$ である。ECCD の場合 $j/p_d \approx 6wu/(5 + Z_i)$ であるので

$$\frac{J}{P_d} = \frac{en_e v_{Te}}{n_e T_e \nu_0} \frac{\langle 6wu \rangle}{5 + Z_i} = 0.096 \frac{T_{e \text{ keV}}}{n_{19}} \frac{\langle 6wu \rangle}{5 + Z_i} \quad (9.50)$$

が導かれる。駆動された電流 I_{CD} の ECCD 入力 W_{EC} は

$$\frac{I_{CD}}{W_{EC}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{\int J 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr}$$

である。ECCD の電流駆動効率 η_{EC}^T は

$$\eta_{EC}^T \equiv \frac{R n_{19} I_{CD}}{W_{CD}} = \frac{\int \eta_{EC}(r) P_d(r) 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr}$$

である。ただし $\eta_{EC}(r)$ は局所的電流駆動効率

$$\eta_{EC}(r) = \frac{R n_{19} J(r)}{2\pi R P_d} = 0.015 T_{e \text{ keV}} \frac{\langle 6wu \rangle}{5 + Z_i} \left(10^{19} \frac{\text{A}}{\text{Wm}^2}\right) \quad (9.51)$$

で与えられる。電流駆動効率の実験結果は、 $T_{e0} = 7 \sim 20 \text{keV}$ の場合、 $\eta_{EC} = 0.4 \sim 0.8 \times 10^{19} \text{Am}^{-2}\text{W}^{-1}$ である。まだ実験のパラメーター領域は限られているが、電子サイクロトロン波は真空領域から送りだされ、プラズマの境界付近で邪魔されずに直接的にプラズマ中に伝播できる。EC 波はきわめて局所的に吸収されるので、電流分布の制御に非常に有効な手段となる。

9.7 中性粒子電流駆動 (NBCD)

高速中性粒子ビームをプラズマ中に入射すると荷電交換などの過程により高速イオンに変わる。高速イオンビームのエネルギー E が (2.31) で与えられる値 $E_{\text{cr}} = m_b v_{\text{cr}}^2 / 2$ より大きく高速の場合は、主として電子によって減速され、 $E < E_{\text{cr}}$ ではイオンによって減速される。イオンビームの分布関数 $f_b(v)$ はフォッカー-プランク方程式から導かれるが、イオンビームが高速のときはフォッカー-プランク衝突項 (9.35), (9.36) のうち、電子による動的摩擦係数 A の項が主である。 $v < v_{\text{T}}^*$ の条件における高速イオンの電子による動的摩擦係数の項は

$$A = -\frac{v}{2\tau_{\text{be}}^\epsilon}$$

で与えられる (7.1.3 節)。フォッカー-プランクの式は

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-v f_b}{2\tau_{\text{be}}^\epsilon} \right) = \phi \delta(v - v_b) \quad (9.52)$$

に還元される。ここで v_b は初期の入射速度で、 $\tau_{\text{be}}^\epsilon$ は (2.32) で与えられるビームイオンと電子とのエネルギー緩和時間である。右辺はビームイオン源の項である。その定常解は

$$f_b \propto 1/v$$

であるが、 $v < v_{\text{cr}}$ のところではイオンによる動的摩擦項あるいは拡散項が貢献するので $f_b \propto v^2 / (v^3 + v_{\text{cr}}^3)$ と近似できる。すなわち

$$f_b(v) = \frac{n_b}{\ln(1 + (v_b/v_{\text{cr}})^3)^{1/3}} \frac{v^2}{v^3 + v_{\text{cr}}^3} \quad (v \leq v_b), \quad (9.53)$$

$$f_b(v) = 0 \quad (v > v_b). \quad (9.54)$$

イオンビームを定常に保つために必要な単位体積、単位時間当りの粒子数 ϕ は、フォッカー-プランクの式に解いた $f_b(v)$ を代入することにより導かれる。すなわち

$$\phi = \frac{n_b}{2\tau_{\text{be}}^\epsilon} \frac{(1 + (v_{\text{cr}}/v_b)^3)^{-1}}{(\ln(1 + (v_b/v_{\text{cr}})^3))^{1/3}}.$$

その必要な出力は

$$P_b = \frac{m_b v_b^2}{2} \phi \approx \frac{m_b v_b^2 n_b}{4 \ln(v_b/v_{\text{cr}}) \tau_{\text{be}}^\epsilon} \quad (9.55)$$

であり、減速されつつあるイオンビームの平均速度は

$$\bar{v}_b = v_b (\ln(v_b/v_{\text{cr}}))^{-1} \quad (9.56)$$

である。このときプラズマ中に駆動される電流密度 J は高速イオンの項、プラズマのイオンおよび電子の項よりなる。

$$J = Z_i n_i \bar{v}_i + Z_b n_b \bar{v}_b - n_e \bar{v}_e,$$

$$n_e = Z_i n_i + Z_b n_b.$$

ここで \bar{v}_i と \bar{v}_e は、それぞれ密度 n_i のイオンおよび密度 n_e の電子の平均速度である。プラズマ中の電子はイオンビームとの衝突により運動量を受けとり、イオンとの衝突で失い、定常状態になる。すなわち

$$m_e n_e \frac{d\bar{v}_e}{dt} = m_e n_e (\bar{v}_b - \bar{v}_e) \nu_{\text{eb}\parallel} + m_e n_e (\bar{v}_i - \bar{v}_e) \nu_{\text{ei}\parallel} = 0.$$

これより

$$(Z_i^2 n_i + Z_b^2 n_b) \bar{v}_e = Z_b^2 n_b \bar{v}_b + Z_i^2 n_i \bar{v}_i$$

9.7 中性粒子電流駆動 (NBCD)

が得られ, $n_b \ll n_i$ より

$$n_e \bar{v}_e = \frac{Z_b^2}{Z_i} n_b \bar{v}_b + Z_i n_i \bar{v}_i$$

となる. したがって

$$J = \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i}\right) Z_b e n_b \bar{v}_b \quad (9.57)$$

が導かれる [9.13]. 駆動された電流密度は高速イオンビームの項 $Z_b e n_b \bar{v}_b$ と高速イオンによって引きずられた電子 (dragged electrons) の項 $-Z_b^2 e n_b \bar{v}_b / Z_i$ とから成る. J/P_d の比は

$$\frac{J}{P_d} = \left(1 - Z_b/Z_i\right) \frac{Z_b e n_b \bar{v}_b}{m_b n_b v_b \bar{v}_b / 4\tau_{be}^\epsilon} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i}\right) \quad (9.58)$$

である. もしビームイオンの電荷とプラズマイオンの電荷が等しい場合 ($Z_b = Z_i$), 直線プラズマのときは, 全駆動電流は 0 になる. しかしトラスプラズマの場合は, 周回電子の運動は捕捉電子 (バナナ電子) との衝突により影響を受け, ひきずられた電子の項の値は小さくなる. そのため J/P_d は [9.17]

$$\frac{J}{P_d} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right), \quad (9.59)$$

$$G(Z_{\text{eff}}, \epsilon) = \left(1.55 + \frac{0.85}{Z_{\text{eff}}}\right) \epsilon^{1/2} - \left(0.2 + \frac{1.55}{Z_{\text{eff}}}\right) \epsilon \quad (9.60)$$

となる. ここで ϵ はアスペクト比の逆数である. 電離したイオンビームのピッチ角の影響を考慮すると, $\xi \equiv v_{\parallel}/v = R_{\text{tang}}/R_{\text{ion}}$ の因子を (9.59) 式に掛ける必要がある. ここで R_{tang} は中性粒子ビームの径路に沿う R の最小値であり, R_{ion} は電離したときの R の位置である.

バウンス時間で平均したフォッカー-プランクの式より求めた電流駆動効率 [9.17]

$$\begin{aligned} \frac{J}{P_d} &= \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right) \xi_0 F_{\text{nc}} x_b J_0(x_b, y), \\ \frac{J}{P_d} &= \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_{\text{cr}}} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right) \xi_0 F_{\text{nc}} J_0(x_b, y) \end{aligned} \quad (9.61)$$

となる. ただし

$$x_b \equiv \frac{v_b}{v_{\text{cr}}}, \quad y = 0.8 \frac{Z_{\text{eff}}}{A_b},$$

$$J_0(x, y) = \frac{x^2}{x^3 + (1.39 + 0.61y^{0.7})x^2 + (4 + 3y)}$$

である. $F_{\text{nc}} = 1 - b\epsilon^\sigma$ は補正項である [9.18]. そして

$$\frac{J}{P_d} \left(\frac{\text{Am}}{\text{W}}\right) = \frac{15.8 T_{\text{e keV}} \xi_0}{Z_b n_{e19}} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G)\right) (1 - b\epsilon^\sigma) J_0(x_b, y) \quad (9.62)$$

が得られた. 中性粒子ビーム電流駆動 (Neutral Beam Current Drive, NBCD) の局所的電流駆動効率 η_{NB} は

$$\begin{aligned} \eta_{\text{NB}} &\equiv \frac{R n_{e19} J}{2\pi R P_d} \left(10^{19} \frac{\text{A}}{\text{Wm}^2}\right) \\ &= 2.52 T_{\text{e keV}} \xi_0 \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G)\right) (1 - b\epsilon^\sigma) J_0(x_b, y) \end{aligned} \quad (9.63)$$

となる. $Z_b = 1, Z_{\text{eff}} = 1.5, A_b = 2, x_b^2 = 4$ のとき $((1 - be^\sigma)J_0) \sim 0.2$ である. $\langle \epsilon \rangle \sim 0.15$, のとき, $\eta_{\text{NB}} \sim 0.29(T_e)_{\text{keV}}(10^{19}\text{A/Wm}^2)$ である. 3.5 MeV のビームエネルギーを持つ負イオン源による中性粒子ビーム入射の実験が JT60-U で行われた. 電流駆動効率は, 電子温度 $T_{e0} \sim 4\text{keV}$ のとき, $\eta_{\text{NB}} \sim 0.6 \times 10^{19}\text{A/Wm}^2$ であった. ビームエネルギーが 1 MeV になると, 炉心プラズマの中心部の電流駆動が NBCD によって可能になる. 中性粒子ビームは真空領域から入射可能であり, 入射装置構造体がプラズマに近接する必要がないという利点をもっている.

$n_e \sim 10^{20}\text{m}^{-3}$ の密度をもつ炉心プラズマに電流駆動を適用すると, プラズマ電流のすべてを駆動するのに必要な出力は, 核融合炉の出力のかなりの部分を占めてしまう. したがってプラズマ電流のかなりの割合を次節で述べるブートストラップ電流によって駆動する必要がある.

問題

1. 波動加熱の必要条件 波動加熱によってプラズマ中心部を加熱するのに必要な条件を述べよ.
2. 群速度 位相速度は $v_{\text{ph}} = (\omega(\mathbf{k})/k)\hat{\mathbf{k}}$ である. ここで $\hat{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 方向の単位ベクトルである. 群速度は $\mathbf{v}_g = (\partial\omega(\mathbf{k})/\partial k_x, \partial\omega(\mathbf{k})/\partial k_y, \partial\omega(\mathbf{k})/\partial k_z)$ である. 圧縮性アルフベン波および捩れアルフベン波 (8.4.1 節参照) の v_{ph} および \mathbf{v}_g を求めよ. また電子プラズマ波 (7 章の問題 1 参照) の v_{ph} および \mathbf{v}_g を求めよ.
3. 電流駆動 ITER の非誘導電流駆動のシナリオは 11.7 節で紹介するが, 表 11.5 に示した例は次の通りである. すなわちプラズマ全電流は $I_p = 9\text{MA}$ で, その内ブートストラップ電流は $I_{\text{bs}} \approx 5\text{MA}$, 駆動電流は $I_{\text{CD}} = 4\text{MA}$ である. 用意されている中性粒子ビームおよび低域混成波の入力は, それぞれ $P_{\text{NB}} = 34\text{MW}$ および $P_{\text{LH}} \approx 30\text{MW}$ である. 大半径は $R = 6.35\text{m}$, 電子密度は $\langle n_e \rangle = 0.67 \times 10^{20}\text{m}^{-3}$, 電子温度は $\langle T_e \rangle = 11\text{keV}$ である. 中心領域のプラズマ電流 $I_{\text{NB}} = 2\text{MA}$ を NBCD で駆動し, 外部領域領域のプラズマ電流 $I_{\text{LH}} = 2\text{MA}$ を LHCD で駆動するとした場合, 必要な NBCD および LHCD の電流駆動効率を計算せよ.

解答 (ヒント)

2. 群速度 圧縮性アルフベン波の分散式, 位相速度, 群速度は

$$\omega = v_A k, \quad v_{\text{ph}} = v_A \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{v}_g = v_A \left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}, \frac{k_z}{k} \right) = v_A \hat{\mathbf{k}}$$

である. 捩れアルフベン波の分散式, 位相速度, 群速度は

$$\omega = v_A k \cos \theta = v_A k_z, \quad v_{\text{ph}} = v_A \frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{v}_g = v_A (0, 0, 1) = v_A \hat{\mathbf{z}}$$

である.

電子プラズマ波の分散式, 位相速度, 群速度は

$$\omega^2 = \Pi_e^2 + 3k^2 v_{\text{Te}}, \quad v_{\text{ph}} = \frac{(\Pi_e^2 + 3k^2 v_{\text{Te}})^{1/2}}{k} \hat{\mathbf{k}} = v_{\text{Te}} (3 + 1/(k\lambda_D)^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \left(\frac{\partial k}{\partial k_x}, \frac{\partial k}{\partial k_y}, \frac{\partial k}{\partial k_z} \right) = 3 \frac{k}{\omega} v_{\text{Te}}^2 \hat{\mathbf{k}} = \frac{3v_{\text{Te}}}{(3 + 1/(k\lambda_D)^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

である. 電子プラズマ波には $v_{\text{ph}} v_g = 3v_{\text{Te}}^2$ の関係がある. $k\lambda_D \rightarrow \infty$ のとき, $v_{\text{ph}} \rightarrow \infty$, $v_g \rightarrow 0$ となる.

3. 電流駆動 NBCD および LHCD の必要な電流駆動効率は

$$\eta_{\text{NB}} = \frac{R n_{19} I_{\text{NB}}}{P_{\text{NB}}} > 2.5 [10^{19} \text{Am}^{-2} \text{W}^{-1}]$$

$$\eta_{\text{LH}} = \frac{R n_{19} I_{\text{NB}}}{P_{\text{LH}}} > 2.8 [10^{19} \text{Am}^{-2} \text{W}^{-1}]$$

である.

第10章 乱流によるプラズマ輸送

10.1 揺動損失, ボーム, ジャイロボーム拡散, 対流損失

プラズマは多くの場合, 多かれ少なかれ不安定な状態にあり, 密度や電位に揺動が生じて粒子の集団的運動が起こり, 異常損失をもたらす.

さて, プラズマの密度 $n(\mathbf{r}, t)$ が0次の値 $n_0(\mathbf{r}, t)$ と1次の擾乱項 $\tilde{n}_k(\mathbf{r}, t) = n_k \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$ とから成るとすると

$$n = n_0 + \sum_k \tilde{n}_k \quad (10.1)$$

である. n および n_0 は実数であるので

$$\tilde{n}_{-k} = (\tilde{n}_k)^*, \quad n_{-k} = n_k^*, \quad \omega_{-k} = -\omega_k^*$$

の関係がある. ただし $*$ は共役複素数をあらわす. ω_k は一般に複素数であり $\omega_k = \omega_{kr} + i\gamma_k$ である. したがって

$$\omega_{-kr} = -\omega_{kr}, \quad \gamma_{-k} = \gamma_k$$

である. またプラズマの擾乱によって静止していたプラズマが移動する. そしてその速度を

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \tilde{\mathbf{V}}_k = \sum_k \mathbf{V}_k \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t) \quad (10.2)$$

とすると, 同様にして $\mathbf{V}_{-k} = \mathbf{V}_k^*$ の関係がある. 連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0$$

より

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k n_0 \tilde{\mathbf{V}}_k + \sum_{k,k'} \tilde{n}_k \tilde{\mathbf{V}}_{k'} \right) = 0$$

がえられる. この式を1次と2次の項に分ける. すなわち

$$\sum_k \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_k n_0 \tilde{\mathbf{V}}_k = 0, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k,k'} \tilde{n}_k \tilde{\mathbf{V}}_{k'} \right) = 0. \quad (10.4)$$

ここで n_0 の時間変化は2次の項と考えた. (10.3) に \tilde{n}_{-k} を掛けて時間平均をとると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k |n_k|^2 + \nabla n_0 \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) + n_0 \mathbf{k} \cdot \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) &= 0, \\ \omega_{kr} |n_k|^2 + \nabla n_0 \cdot \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) - n_0 \mathbf{k} \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

が導かれる. ここで $\operatorname{Re}(\)$, $\operatorname{Im}(\)$ はそれぞれ $(\)$ の実数部, 虚数部を表す. また (10.4) を揺動の周期で時間平均すると

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp(2\gamma_k t) \right) = 0 \quad (10.6)$$

をえる。拡散係数を D とすると

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n_0)$$

となるから (10.6) と比較して、プラズマの外側に向かう粒子束 Γ は

$$\Gamma = -D \nabla n_0 = \sum_k \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp 2\gamma_k t \quad (10.7)$$

となる。(10.5) だけでは、 $\nabla n_0 \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp 2\gamma_k t$ を決めるには条件が足りない。そこで $\beta_k = n_0 \mathbf{k} \cdot \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) / \nabla n_0 \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k})$ とおくと、(10.7) より

$$D |\nabla n_0|^2 = \sum_k \frac{\gamma_k |n_k|^2 \exp 2\gamma_k t}{1 + \beta_k},$$

$$D = \sum_k \gamma_k \frac{|\tilde{n}_k|^2}{|\nabla n_0|^2} \frac{1}{1 + \beta_k} \quad (10.8)$$

が導かれる。これがプラズマの揺動損失による異常拡散係数である。

次にもう少し具体的な例について考察する。プラズマに擾乱が生ずると電場の揺動 $\tilde{\mathbf{E}}_k$ が生ずる。この電場が静電波でポテンシャル $\tilde{\phi}_k$ で表わすことができる場合について解析してみよう。この場合には、揺動電場は

$$\tilde{\mathbf{E}}_k = -\nabla \tilde{\phi}_k = -i\mathbf{k} \cdot \phi_k \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$$

で与えられる。すると $\tilde{\mathbf{E}}_k \times \mathbf{B}$ のドリフトが生ずる。すなわち

$$\tilde{\mathbf{V}}_k = (\tilde{\mathbf{E}}_k \times \mathbf{B}) / B^2 = -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \tilde{\phi}_k / B. \quad (10.9)$$

ただし $\mathbf{b} = \mathbf{B} / B$ である。(10.9) は磁場に垂直な揺動成分を与える。(10.9) を (10.3) に代入すると

$$\tilde{n}_k = \nabla n_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{k}}{B} \right) \frac{\tilde{\phi}_k}{\omega_k} \quad (10.10)$$

が導かれる。一般に ∇n_0 と \mathbf{b} とは直交する。 z 軸を \mathbf{b} の方向にとり、 x を $-\nabla n_0$ の方向にとる。すなわち $\nabla n_0 \equiv -\kappa_n n_0 \hat{\mathbf{x}}$ とする。ただし κ_n は密度勾配の空間スケールの逆数であり、 $\hat{\mathbf{x}}$ は x 方向の単位ベクトルである。(10.10) より

$$\frac{\tilde{n}_k}{n_0} = \frac{\kappa_n k_y}{B \omega_k} \tilde{\phi}_k = k_y \kappa_n \frac{T_e}{e B \omega_k} \frac{e \tilde{\phi}_k}{T_e} = \frac{\omega_k^* e \tilde{\phi}_k}{\omega_k T_e}$$

となる。ここで k_y は伝播ベクトル \mathbf{k} の y (ポロイダル) 成分である。また

$$\omega_k^* \equiv k_y \kappa_n \frac{T_e}{e B}$$

はドリフト周波数と呼ばれるものである。もし周波数 ω_k が実数で単なる振動項である場合には、 \tilde{n}_k と $\tilde{\phi}_k$ は同相であり $\gamma_k = 0$ であるから、(10.8) より明らかなようにプラズマの異常拡散には寄与しない。もし ω_k が複素数で $\gamma_k > 0$ の場合 ($\exp(-i\omega_k t) = \exp(-i\omega_{kr} t) \exp \gamma_k t$) は異常拡散に寄与し \tilde{n}_k と $\tilde{\phi}_k$ の位相差を生ずる ($\gamma_k < 0$ の場合は \tilde{n}_k の振幅が減衰して拡散には寄与しない)。 $\tilde{\mathbf{V}}_k$ は

$$\tilde{\mathbf{V}}_k = -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \frac{T_e}{e B} \frac{\tilde{\phi}_k}{T_e} = -i k_y \frac{T_e}{e B} \frac{\tilde{n}_k \omega_{kr} + \gamma_k i}{\omega_k^*} \hat{\mathbf{x}}$$

である。したがって拡散粒子束は (10.7) より次のように表される。

10.1 揺動損失, ボーム, ジャイロボーム拡散, 対流損失

$$\Gamma = D\kappa_n n_0 = \text{Re}(\tilde{n}_{-k} \tilde{V}_{kx}) = \left(\sum_k \frac{k_y \gamma_k}{\omega_k^*} \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \right) \frac{T_e}{eB} n_0,$$

$$D = \left(\sum_k \frac{k_y \gamma_k}{\kappa_n \omega_k^*} \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \right) \frac{T_e}{eB} = \sum_k \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \frac{\gamma_k}{\kappa_n^2}. \quad (10.11)$$

揺動損失による異常拡散係数は (7.35) (7.38) よりわかるように時間とともに増大する. そして成長率 $\gamma_k > 0$ の最も大きいモードの寄与が主になる. しかしやがて非線形要因により $|\tilde{n}_k|$ は飽和するであろう. この大きさは次のような値に落ち着くであろう.

$$|\tilde{n}_k| \approx |\nabla n_0| \Delta x \approx \frac{\kappa_n}{k_x} n_0.$$

ここで Δx は揺動の x 方向の相関長 (correlation length) であり, x (半径) 方向の波数 k_x の逆数である. したがって (10.11) は

$$D = \frac{\gamma_k}{\kappa_n^2} \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \approx \frac{\gamma_k}{k_x^2} \approx \frac{(\Delta x)^2}{\tau_c} \quad (10.12)$$

に還元される. ここで飽和状態にある揺動 (乱流) の場合, 成長率 γ_k は自己相関時間 τ_c の逆数と考えられる ($\gamma_k \tau_c \sim 1$ で飽和).

(10.11) においてカッコの内の無次元係数が $1/16$ で飽和すると仮定すると, いわゆるボーム拡散係数

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{T_e}{eB} \quad (10.13)$$

がえられる. (10.13) は拡散係数の最大値を与えると考えてよい.

密度およびポテンシャルの揺動 $\tilde{n}_k, \tilde{\phi}_k$ が測定できると (10.9) より \mathbf{V}_k が計算でき, (10.7) よりプラズマの外側に向かう粒子束 Γ を実験的に求めることができ, 拡散係数がえられる. \tilde{n}_k と $\tilde{\phi}_k$ とは (10.10) の関係にあるから, 両者の位相差を注目することにより ω_k が実数か, 成長するモード (不安定モード, $\gamma_k > 0$) かが予測できる. これらの関係式は実験と関連して有用である.

例としてイオン温度勾配ドリフト不安定性によって駆動される揺動 (9.8 節参照) について考察しよう. このモードの揺動ポテンシャルを

$$\phi(r, \theta, z) = \sum \phi_{mn}(r) \exp(-im\theta + inz/R)$$

とする. この揺動の成長率は, およそ $k_\theta = (-i/r)(\partial/\partial\theta) = -m/r \sim \rho_i^{-1}$ の付近で最大となる (ρ_i はイオンラーマー半径) [10.1], [10.2]. すなわち

$$|k_\theta| = \frac{m}{r} \sim \frac{\alpha_\theta}{\rho_i}, \quad \alpha_\theta = 0.7 \sim 0.8.$$

したがって θ 方向の相関長 Δ_θ は $\Delta_\theta \sim \rho_i/\alpha_\theta$ (ρ_i はイオンラーマー半径) 程度になる.

有理面 $q(r_m) = m/n$ 付近の, 磁力線に沿う伝播常数 k_\parallel は

$$\begin{aligned} k_\parallel &= -i\mathbf{b} \cdot \nabla = \frac{B_\theta}{B} \left(\frac{-m}{r} \right) + \frac{B_t}{B} \left(\frac{n}{R} \right) \approx \frac{1}{R} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right) \\ &= \frac{m}{rR} \frac{rq'}{q^2} (r - r_m) = \frac{s}{Rq} k_\theta (r - r_m) \end{aligned}$$

である. ここで $q(r) \equiv (r/R)(B_t/B_\theta)$ は安全係数であり (B_θ および B_t はそれぞれポロイダル磁場およびトロイダル磁場の大きさ), s はシアパラメーター $s \equiv rq'/q$ (5.5.2 節参照) である. $|k_\parallel|$ はトラスの連結長 (connection length) qR の逆数より大きく, 圧力勾配の特徴的な長さ L_p の逆数よりも小さい. すなわち

$$\frac{1}{qR} < |k_\parallel| < \frac{1}{L_p}$$

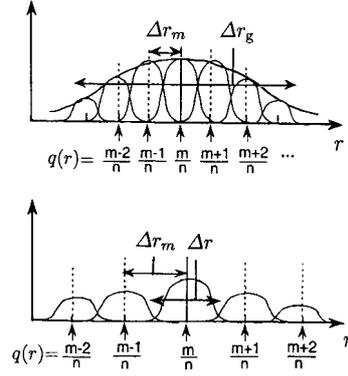


図 10.1 上の図は，固有モードの径方向の幅 Δr が，異なる有理面の径方向の間隔 Δr_m よりも大きい場合を示す．モード間の結合によりセミマクロ（メゾスケール）な幅 Δr_g の固有モード構造が形成される．下の図は，固有モードの径方向の幅 Δr が，異なる有理面の径方向の間隔 Δr_m よりも小さい場合を示す．この場合モード間の結合は起こらず， Δr の幅の固有モードが互いに無相関のまま存在する．

となる．それゆえ有理面 $r = r_m$ 付近のモードの幅 $\Delta r = |r - r_m|$ はおおざっぱにいて $\Delta r = |r - r_m| = (Rq/s)(k_{\parallel}/k_{\theta}) = (\rho_i/s\alpha_{\theta}) \sim O(\rho_i/s)$ の程度と予測される．イオン温度勾配ドリフト不安定性による固有モードの径方向の幅をより正確に計算すると [10.2, 10.3]

$$\Delta r = \rho_i \left(\frac{qR}{sL_p} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_k}{\omega_{kr}} \right)^{1/2}$$

で与えられる．隣接する有理面 r_m と r_{m+1} 間の径方向間隔 Δr_m は

$$q' \Delta r_m = q(r_{m+1}) - q(r_m) = \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n},$$

$$\Delta r_m = \frac{1}{nq'} = \frac{m/n}{r q' m} \sim \frac{1}{sk_{\theta}}$$

である．モード幅が有理面間の径方向間隔より大きい場合は，図 10.1 から判るように，隣接する異なるモードが互いに重なり合い，トラス効果によるモード結合が起こる．結合モードの包絡線の半値幅 Δr_g は次のように評価される [10.3, 10.4, 10.5]

$$\Delta r_g = \left(\frac{\rho_i L_p}{s} \right)^{1/2}.$$

したがって径方向の相関長は Δr_g ($\Delta r_g/\Delta r \sim (L_p/\rho_i)^{1/2}$) の大きな値となり，径方向の伝播常数は $k_r \sim 1/\Delta r_g$ となる．この場合の拡散係数 D は

$$D = (\Delta r_g)^2 \gamma_k \sim \frac{\rho_i L_p}{s} \omega_k^* \sim \frac{T}{eB} \frac{\alpha_{\theta}}{s}$$

となる．ここで ω_k^* はドリフト周波数である (6.3 節, 8.5 節)．この係数はボーム型である．

モード幅 Δr が有理面間の間隔 Δr_m より小さい場合 (弱いシアの場合)，異なるモード間の結合がない．径方向の相関長は

$$\Delta r = \rho_i \left(\frac{qR}{sL_p} \right)^{1/2}$$

となり，この場合のの拡散係数 D は

$$D \sim (\Delta r)^2 \omega_k^* \sim \rho_i^2 \left(\frac{qR}{sL_p} \right) \left(\frac{k_{\theta} T}{eB L_p} \right) \sim \frac{T}{eB} \frac{\rho_i}{L_p} \left(\frac{\alpha_{\theta} q R}{s L_p} \right) \propto \frac{T}{eB} \frac{\rho_i}{L_p} \quad (10.14)$$

10.2 磁気揺動による損失

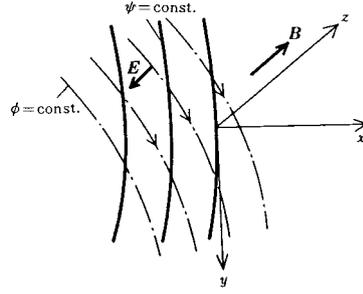


図 10.2 磁気面 $\psi = \text{const.}$ と電場 \mathbf{E} の等ポテンシャル面 $\phi = \text{const.}$ 、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは等ポテンシャル面に沿って動く。

となる。(10.14) 式を ジャイロボーム型拡散係数という。このことから 負シア配位の最小 q 値点 (11.5 節参照) 付近の弱いシア領域において、トーラス系の輸送が小さくなることが期待される。

次に磁力線を横切る対流損失について考察する。ある固定された点における密度や電場の揺動がなくても、プラズマが磁力線を横切って定常的に流れているときはプラズマの損失が起こる。定常電場の等ポテンシャル面が磁気面 $\psi = \text{const.}$ (圧力 p_0 は磁気面上では一定) と一致していないときがこの場合である。電場 \mathbf{E} は等ポテンシャル面 $\phi = \text{const.}$ に直交し、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは \mathbf{E} に直交するのでこのプラズマのドリフトはポテンシャル面に沿っていく (図 10.2 参照)。このような損失を磁力線を横切る対流損失と呼んでいる。この損失粒子束は

$$\Gamma_k = n_0 \frac{E_y}{B} \quad (10.15)$$

で与えられる。

前節で述べた 2 体衝突による拡散は多くの場合 B^{-2} に比例して減少するが、揺動損失、磁力線を横切る対流損失は B^{-1} に比例して減少することに留意する必要がある。

10.2 磁気揺動による損失

磁場に揺動がある場合、磁力線は半径方向にさまよう。その変位を Δr とし、磁場揺動 δB の r 成分を δB_r とすると

$$\Delta r = \int_0^L b_r dl$$

で与えられる。ここで l は磁力線に沿う長さである。 $b_r = \delta B_r / B$ とし $(\Delta r)^2$ の母集団平均を $\langle (\Delta r)^2 \rangle$ とすると

$$\begin{aligned} \langle (\Delta r)^2 \rangle &= \left\langle \int_0^L b_r dl \int_0^L b_r dl' \right\rangle = \left\langle \int_0^L dl \int_0^L dl' b_r(l) b_r(l') \right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^L dl \int_{-l}^{L-l} ds b_r(l) b_r(l+s) \right\rangle \approx L \langle b_r^2 \rangle l_{\text{corr}} \end{aligned}$$

となる。ただし l_{corr} は

$$l_{\text{corr}} = \frac{\langle \int_{-\infty}^{\infty} b_r(l) b_r(l+s) ds \rangle}{\langle b_r^2 \rangle}$$

である。電子が磁力線に沿って v_{Te} の速度で走るとすると、その拡散係数 D_e は [10.6]

$$D_e = \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} \langle b_r^2 \rangle l_{\text{corr}} = v_{Te} l_{\text{corr}} \left\langle \left(\frac{\delta B_r}{B} \right)^2 \right\rangle \quad (10.16)$$

となる。トカマクの場合 $l_{\text{corr}} \sim R$ 、逆転磁場ピンチ (12.2.2 節) の場合 $l_{\text{corr}} \sim a$ と考えられる。

10.3 輸送の次元解析

全エネルギー閉じ込め時間 τ_E の, 装置プラズマパラメータに対する依存性を表す比例則

$$\tau_E = f(n, T, B, a, q, a/R)$$

を定めることは, 大型装置の主な目的の一つであり, 比例則は通常次のような形式で表される.

$$\tau_E = n^p T^q B^r a^s.$$

エネルギー閉じ込め時間の次元解析を Connor および Taylor の方法にしたがって解説する [10.7].
A: 無衝突ブラゾフ方程式, 静電的 (無衝突, 低ベータ)

最初に無衝突ブラゾフ方程式を基礎方程式とするモデルを考える. そのときは, 分布関数は次の基礎方程式で表される.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_i + \frac{e_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (10.17)$$

$$\sum e_i \int f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0. \quad (10.18)$$

単位面積, 単位時間あたりのエネルギー損失 Q は

$$Q = \sum \int \mathbf{v} \frac{m_i v^2}{2} f_i d\mathbf{v} = Q(n, T, B, a)$$

で与えられる. 基礎方程式 (10.17) および (10.18) を不変に保つような, 独立変数, 従属変数の線形変換

$$f \rightarrow \alpha f, \quad v \rightarrow \beta v, \quad x \rightarrow \gamma x, \quad B \rightarrow \delta B, \quad t \rightarrow \epsilon t, \quad E \rightarrow \eta E$$

を探す. このような変換は三つある. すなわち

$$A_1: f \rightarrow \alpha f,$$

$$A_2: v \rightarrow \beta v, \quad B \rightarrow \beta B, \quad t \rightarrow \beta^{-1} t, \quad E \rightarrow \beta^2 E,$$

$$A_3: x \rightarrow \gamma x, \quad B \rightarrow \gamma^{-1} B, \quad t \rightarrow \gamma t, \quad E \rightarrow \gamma^{-1} E.$$

これらの変換を組み合わせると, 熱流束の変換は $Q \rightarrow \alpha \beta^6 Q$, 温度は $T \rightarrow \beta^2 T$, 密度は $n \rightarrow \alpha \beta^3 n$ である. もし熱流束が

$$Q = \sum c_{pqrs} n^p T^q B^r a^s$$

のように表されるとすると, これが $A_1 - A_3$ の変換に対して不変であることの要請から, 指数に次のような制約を負わせることになる.

$$p = 1, \quad 3p + 2q + r = 6, \quad s - r = 0.$$

したがって Q の表式は

$$Q = \sum c_q n a^3 B^3 \left(\frac{T}{a^2 B^2} \right)^q = n a^3 B^3 F \left(\frac{T}{a^2 B^2} \right)$$

に限定される. ここで F は未知の関数である. これに対応するエネルギー閉じ込め時間は $n T a / Q$ に比例するので

$$B \tau_E = F \left(\frac{T}{a^2 B^2} \right)$$

に還元される. この比例則は, もし境界条件が支配的な物理的效果をもたらさない限り, このモデルの正確な結論である. したがって比例則がパラメータの指数乗の積で表されると仮定すると以下のようなになる.

$$B \tau_E = \left(\frac{T}{a^2 B^2} \right)^q.$$

10.3 輸送の次元解析

更に局所的熱拡散係数が存在するというより強い仮定をすると、閉じ込め時間は a^2 に比例しなければならない。指数 q は -1 である。すなわち

$$\tau_E \propto a^2 \frac{B}{T}.$$

これは遍在する (ubiquitous) ボーム拡散係数に他ならない。

B: 衝突ブラゾフ方程式, 静電的 (衝突, 低ベータ)

基礎方程式は

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_i + \frac{e_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = C(f, f) \quad (10.19)$$

である。 $C(f, f)$ はクーロン衝突項であり、電荷中性および静電的近似 (10.18) を満たす。基礎方程式 (10.19) および (10.18) を不変にする線形変換は二つある。

$$B_1: f \rightarrow \beta f, \quad v \rightarrow \beta v, \quad B \rightarrow \beta B, \quad t \rightarrow \beta^{-1} t, \quad E \rightarrow \beta^2 E,$$

$$B_2: f \rightarrow \gamma^{-1} f, \quad x \rightarrow \gamma x, \quad B \rightarrow \gamma^{-1} B, \quad t \rightarrow \gamma t, \quad E \rightarrow \gamma^{-1} E.$$

これらの変換を組み合わせると $Q \rightarrow \beta^7 \gamma^{-1} Q$, $T \rightarrow \beta^2 T$, $n \rightarrow \beta^4 \gamma^{-1} n$ を得る。指数に対する制約は

$$4p + 2q + r = 7, \quad s - r - p = -1$$

であり、閉じ込め時間は以下のようになる。

$$Q = na^3 B^3 F \left(\frac{n}{B^4 a^3}, \frac{T}{a^2 B^2} \right), \quad B\tau_E = F \left(\frac{n}{B^4 a^3}, \frac{T}{a^2 B^2} \right),$$

$$B\tau_E = \left(\frac{n}{B^4 a^3} \right)^p \left(\frac{T}{a^2 B^2} \right)^q.$$

C: 無衝突ブラゾフ方程式, 高ベータ (無衝突, 高ベータ)

基礎方程式は (10.17) および マクスウェル方程式である。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sum e_i \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}. \quad (10.20)$$

二つの変換が存在する。すなわち

$$C_1: f \rightarrow \beta^{-3} f, \quad v \rightarrow \beta v, \quad B \rightarrow \beta B, \quad t \rightarrow \beta^{-1} t, \quad E \rightarrow \beta^2 E, \quad j \rightarrow \beta j,$$

$$C_2: f \rightarrow \gamma^{-2} f, \quad x \rightarrow \gamma x, \quad B \rightarrow \gamma^{-1} B, \quad t \rightarrow \gamma t, \quad E \rightarrow \gamma^{-1} E, \quad j \rightarrow \gamma^{-2} j.$$

指数の制約は以下のとおりである。

$$2p + r - s = 2, \quad r + 2q = 3.$$

エネルギー閉じ込め時間は以下のようになる。

$$B\tau_E = F \left(na^2, \frac{T}{a^2 B^2} \right) = F(N, \beta), \quad N \equiv na^2.$$

D: 衝突ブラゾフ方程式, 高ベータ (衝突, 高ベータ)

基礎方程式は衝突項 (10.19) を含むブラゾフ方程式とマクスウェル方程式 (10.20) そしてデバイ長が無視できる場合は荷電中性である。変換は次のとおりである。

$$D_1: f \rightarrow \beta^5 f, \quad v \rightarrow \beta v, \quad x \rightarrow \beta^{-4} x, \quad B \rightarrow \beta^5 B, \quad t \rightarrow \beta^{-5} t, \quad E \rightarrow \beta^6 E,$$

$$j \rightarrow \beta^9 j.$$

指数に対する制約は

$$2p + \frac{q}{2} + \frac{5r}{4} - s = \frac{11}{4}$$

である。閉じ込め時間は以下のようになる。

$$B\tau_E = F(na^2, Ta^{1/2}, Ba^{5/4}).$$

E: MHD 流体モデル

MHD 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m) \mathbf{v} &= 0, \\ \rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \mathbf{v} + \nabla p - \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\gamma \rho_m}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) (p \rho_m^\gamma) &= \eta j^2, \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{j}. \end{aligned}$$

そしてマクスウェル方程式 (10.20) である。理想 MHD 流体の場合、三つの変換が考えられる。

$$E_1: n \rightarrow \alpha n, \quad B \rightarrow \alpha^{1/2} B, \quad E \rightarrow \alpha^{1/2} E, \quad p \rightarrow \alpha p, \quad j \rightarrow \alpha^{1/2} j,$$

$$E_2: v \rightarrow \beta v, \quad t = \beta^{-1} t, \quad B \rightarrow \beta B, \quad E \rightarrow \beta^2 E, \quad p = \beta^2 p, \quad j \rightarrow \beta j, \\ T \rightarrow \beta^2 T,$$

$$E_3: x \rightarrow \gamma x, \quad t \rightarrow \gamma t, \quad j \rightarrow \gamma^{-1} j.$$

指数に対する制約は

$$p + r/2 = 1, \quad 2q + r = 3, \quad s = 0$$

であり、理想 MHD の場合は以下の通りである。

$$B\tau_E = (na^2)^{1/2} F\left(\frac{nT}{B^2}\right) = N^{1/2} F(\beta).$$

F: 抵抗 MHD 流体モデル

抵抗性 MHD 流体の場合、二つの変換が考えられる。すなわち

$$F_1: n \rightarrow \alpha n, \quad B \rightarrow \alpha^{1/2} B, \quad E \rightarrow \alpha^{1/2} E, \quad p \rightarrow \alpha p, \quad j \rightarrow \alpha^{1/2} j,$$

$$F_2: v \rightarrow \beta v, \quad x = \beta^{-4} x, \quad t = \beta^{-5} t, \quad B \rightarrow \beta B, \quad E \rightarrow \beta^2 E, \quad p = \beta^2 p, \\ j \rightarrow \beta^5 j, \quad T \rightarrow \beta^2 T.$$

指数に対する制約は以下の通りである。

$$p + r/2 = 1, \quad 2q + r - 4s = 3.$$

抵抗 MHD 流体の場合の閉じ込め時間は以下のようになる。

$$\frac{B\tau_E}{n^{1/2} a} = F\left(\frac{n}{B^2 a^{1/2}}, Ta^{1/2}\right) = F_1(\beta, Ta^{1/2}) = F_2\left(\beta, \frac{\tau_A}{\tau_R}\right).$$

Kadomtsev の視点から閉じ込め比例則の次元解析を議論してみる [10.8]。四つの変数 (n, T, B, a) から独立の無次元パラメータを構成できる。

$$(n, T, B, a) \rightarrow \left(\beta, \frac{\rho_i}{a}, \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e}, \frac{\lambda_D}{a}\right).$$

ここで ρ_i および λ_D はイオンラーマ半径およびデバイ長である。そうすると無次元閉じ込め比例則は以下のように書ける。

$$\Omega_e \tau_E = F\left(\beta, \frac{\rho_i}{a}, \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e}, \frac{\lambda_D}{a}\right).$$

10.4 ジャイロ運動論的粒子モデルと完全軌道粒子モデルによる.....

デバイ長が無視できる場合,あるいは荷電中性を仮定できるときは, (λ_D/a) を落とすことができる. すなわち

$$\Omega_e \tau_E = F\left(\beta, \frac{\rho_i}{a}, \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e}\right).$$

MHD 流体モデルにおいては, 粒子の属性を考慮しない. したがって無次元パラメータは β および τ_A/τ_R のみになる. ここで $\tau_A = (an^{1/2}/B)(2\mu_0/m_i)^{1/2}$, $\tau_R = \mu_0 a^2/\eta \propto a^2 T^{3/2}$ である. すなわち

$$\frac{\tau_E}{\tau_A} = F\left(\beta, \frac{\tau_A}{\tau_R}\right)$$

となる. この閉じ込め比例則は, 理想 MHD (**E**) および 抵抗 MHD (**F**) MHD 流体モデルで導かれた結果と同等である.

エネルギー閉じ込め時間の次元解析について [10.9] の解説がある.

10.4 ジャイロ運動論的粒子モデルと完全軌道粒子モデルによる計算機シミュレーション

乱流の複雑な非線形的振る舞い, モードモードカップリング, 自己組織化などを理解するために計算機を使うことが益々盛んになり, 計算機シミュレーションはプラズマの理論的研究において重要な分野をしめるに至った. プラズマの輸送現象を調べるとき, 揺動の飽和レベルを評価することが重要であるが, これを解析的に求めることは困難な場合が多い.

しかしながら計算機シミュレーションには幾つかの困難さがともなう. プラズマには特徴的長さ, 時間に広範囲の何段階かのレベルがあるという数値的にやっかいな問題がある (2.3 節参照). (典型的炉心プラズマの例において, 抵抗拡散時間 $\tau_R \sim 10^3$ s, クーロン衝突時間 $\tau_{ei} \sim 0.1$ ms, MHD アルフベン通過時間 $\tau_H \sim 0.1$ μ s, イオンおよび電子のサイクロトロン周期 $\tau_{ci} \sim 30$ ns, $\tau_{ce} \sim 7$ ps, 電子プラズマ振動周期 $\tau_p \sim 10$ ps; 自由行路長 $\lambda_{ei} \sim 10$ km, プラズマ半径 $a \sim 1$ m, ラーマー半径 $\rho_{ci} \sim 3$ mm, $\rho_{ce} \sim 50$ μ m, デバイ長 $\lambda_D \sim 70$ μ m). この困難さのため, すべての物理現象を含むシミュレーションを行うことは, 最も高性能の計算機をもってしても, すくなくとも近い将来においては不可能である. したがって狙った物理現象の本質を確保しながら, 数値的に可能な近似的モデルを使って計算機シミュレーションを行うことが必要である.

この章ではジャイロ運動論的粒子モデル, 完全軌道粒子モデルなどについて簡単な紹介をする. シミュレーションの数値解析法については触れない. これについては優れた教科書 [10.10]~[10.12] や引用文献を参照されたい.

10.4.1 ジャイロ運動論的粒子モデル

(\mathbf{x}, \mathbf{v}) 空間における分布 $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ のブラゾフ方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

で与えられる. 案内中心座標を \mathbf{R} , 磁気モーメントを $\mu \equiv v_\perp^2/2B$, ジャイロ位相を φ として, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) から $(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel, \varphi)$ に変換する. ただし

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_\perp)/\Omega, \quad \mathbf{v}_\perp = v_\perp (\cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\varphi \hat{\mathbf{e}}_2)$$

である. ここで $\Omega \equiv qB/m$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$ であり, $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \mathbf{b}$ は互いに直交する単位ベクトルである. 分布関数 $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ はジャイロ位相を含まない 0 次の項 f と, 含む 1 次の項 g の和

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel, t) + g(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel, \varphi, t)$$

で表される. 静電的擾乱 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ の場合, f, g は次のように与えられる [10.13].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_d - \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{b} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + \left(-\frac{q}{m} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \mathbf{b} - \mu \mathbf{b} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{R}} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} = 0,$$

(10.21)

$$g = \frac{q}{mB} \frac{\partial f}{\partial \mu} (\Phi(\mathbf{x}) - \langle \Phi \rangle).$$

\mathbf{v}_d は曲率および ∇B ドリフト ($\mathbf{v}_d = \mathbf{b} \times (\mu \cdot \nabla B + v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}) / \Omega$), $\langle \rangle = \oint d\varphi / 2\pi$ はジャイロ位相平均を表す. $\Phi(\mathbf{x})$ および $\langle \Phi \rangle$ は次式で表される.

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \exp i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}, \\ \langle \Phi \rangle &\equiv \langle \Phi(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) J_0 \left(\frac{\mathbf{k}_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}).\end{aligned}$$

f が v_{\perp} に関してマックスウエル分布をしている場合 ($f \propto \exp(-v_{\perp}^2/2v_{\text{T}}^2)/2\pi v_{\text{T}}^2$)

$$\frac{q}{mB} \frac{\partial f}{\partial \mu} = -\frac{q}{T} f, \quad \frac{T}{m} = v_{\text{T}}^2$$

となり, この場合 Ψ は

$$\Psi(\mathbf{R}) \equiv \langle \Phi \rangle + \frac{1}{2} \frac{q}{T} (\langle \Phi \rangle^2 - \langle \Phi^2 \rangle) \simeq \langle \Phi \rangle - \frac{1}{2} \frac{q}{T} \frac{v_{\perp}^2}{\Omega^2} \left| \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial \mathbf{R}} \right|^2$$

で与えられる. ここで

$$\langle \Phi^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{k}'} \phi(\mathbf{k}') \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right) J_0(k_{\perp} v_{\perp} / \Omega) \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$$

の関係を用いた.

(\mathbf{x}, \mathbf{v}) 空間における分布関数 F は

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \langle f(\mathbf{R}, \mu, v_{\parallel}, t) \left(1 - (q/T)(\Phi(\mathbf{x}) - \langle \Phi \rangle(\mathbf{R})) \right) \rangle, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}$$

となり, 静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x})$ に関するポアソンの式は

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -(e/\epsilon_0) \int (F_i - F_e) d\mathbf{v} \quad (10.22)$$

で与えられる. f は

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{v}_{\perp}, v_{\parallel}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}, v_{\parallel}, t) \frac{1}{2\pi v_{\text{T}}^2} \exp \left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{\text{T}}^2} \right) \exp i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})$$

で表すことができるので, $\langle f \rangle$ は次式のようになる.

$$\langle f(\mathbf{R}, \mathbf{v}_{\perp}, v_{\parallel}, t) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}, v_{\parallel}, t) \frac{1}{2\pi v_{\text{T}}^2} \exp \left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{\text{T}}^2} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) J_0(k_{\perp} v_{\perp} / \Omega).$$

$\tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t) &\equiv \int \langle f(\mathbf{R}, \mathbf{v}_{\perp}, v_{\parallel}, t) \rangle 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}, v_{\parallel}, t) \exp(-b/2) \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

ただし $\rho_{\text{T}} = v_{\text{T}}/\Omega$, $b \equiv (k_{\perp} \rho_{\text{T}})^2$. 更に $\tilde{\Phi}(\mathbf{x})$ を次のように定義する.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t) \tilde{\Phi}(\mathbf{x}) \equiv \int \langle \langle \Phi \rangle \rangle \langle f \rangle 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}.$$

そうすると

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) \simeq \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \Gamma_0(b) \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad \Gamma_0(b) \equiv I_0(b) \exp(-b)$$

10.4 ジャイロ運動論的粒子モデルと完全軌道粒子モデルによる.....

が得られる. ポアソンの式 (10.22) の右辺に現れる $\int F d\mathbf{v}$ の項は

$$\int F d\mathbf{v} = \hat{n}(\mathbf{x}) - q/T(\Phi - \tilde{\Phi})\hat{n}(\mathbf{x}),$$

$$\hat{n}(\mathbf{x}) \equiv \int \tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t) dv_{\parallel}$$

となる. したがって (10.22) は

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{e}{\epsilon_0}(\hat{n}_i - \hat{n}_e) + \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{\hat{n}_i}{n_0} (\Phi - \tilde{\Phi}) \quad (10.23)$$

に還元される. ここで電子のラーマー半径は無視できるとした. $\lambda_D = (\epsilon_0 T_e / n_0 e^2)^{1/2}$ はデバイ長である. (10.23) の右辺第 2 項は, $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ の場合

$$\frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\lambda_D^2} (\Phi - \tilde{\Phi}) \simeq \frac{T_e}{T_i} \frac{(k_{\perp} \rho_i)^2}{\lambda_D^2} \Phi \approx -\frac{\Pi_i^2}{\Omega_i^2} \nabla_{\perp}^2 \Phi$$

である, 通常 $\Pi_i^2 / \Omega_i^2 = (T_e / T_i)(\rho_i / \lambda_D)^2 \gg 1$ である. 次にジャイロ運動論的ブラゾフ-ポアソンの式 (10.21) および (10.23) の数値計算について述べる. N 個の粒子の分布関数の不連続的表式

$$f(\mathbf{R}, \mu, v_{\parallel}, t) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j(t)) \delta(\mu - \mu_j) \delta(v_{\perp} - v_{\perp j}(t))$$

を (10.21) に適用すると, j 番目のジャイロ運動論的粒子の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{R}_j}{dt} = v_{\parallel j} \mathbf{b} + \mathbf{v}_d - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{b} \right) \Big|_{R_j \mu_j} \quad (10.24)$$

$$\frac{dv_{\parallel j}}{dt} = -\frac{q}{m} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \mathbf{b} \right) \Big|_{R_j \mu_j} - \mu_j \mathbf{B} \cdot \nabla B \quad (10.25)$$

を満たさなくてはならない. また関数 \tilde{f} は

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t) = \int \langle f(\mathbf{R}, \mathbf{v}_{\perp}, v_{\parallel}, t) \rangle 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} = \sum_{j=1}^N \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j - \boldsymbol{\rho}_j) \rangle \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel j})$$

で与えられるので, (10.23) の右辺第 1 項の \hat{n}_i , \hat{n}_e は

$$\hat{n}_i = \int \tilde{f}(\mathbf{x}, v_{\parallel}, t) dv_{\parallel} = \sum_{j=1}^N \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j^i - \boldsymbol{\rho}_j^i) \rangle,$$

$$\hat{n}_e = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j^e)$$

である ($\rho_e = 0$). $k_{\perp} \rho_i < 1$ の場合, ジャイロ位相平均 $\langle \rangle$ は $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ の 4 点平均でよい近似となる.

文献 [10.14] でトカマクにおけるドリフト波捕捉電子モードが調べられた. シミュレーションの系の大きさは $L_x \times L_y \times L_z = 64\Delta \times 64\Delta \times 32\Delta_z$ ($\Delta = \rho_i$, $\Delta_z = 25\rho_i$), アスペクト比は $R_0/a = 4$, $n_0 = \langle n \rangle = 4$ ケ/セル (cell) (全イオン数 $\sim 0.5 \times 10^6$), $\langle T_e \rangle / T_i = 4$, $m_i / m_e = 1836$, $\Omega_i \Delta t = 0.1$, $\omega_e^* / \Omega_i = 0.1m$ (m はポロイダルモード数) ただし $\omega_e^* = k_{\theta} T_e / L_n e B_0$. $\eta_e \equiv d(\ln T_e) / d(\ln n_e) = 1$ の場合のドリフト波捕捉電子モードのシミュレーションの結果を図 10.3 に示す. $(m, n) = (5, -3)$ モードの強度の時間変化を上図に示す. 飽和した強度は $e\Phi / T_e \approx 0.035$ に達する. 初期における線形成長率および周波数は線形固有モードの理論解析値とよく一致する.

文献 [10.15] でイオン温度勾配 (ITG) モードが調べられた. この解析で $\delta f / f$ の方法 [10.16] が用いられた. 電子は断熱的 ($\delta n_e / n_0 = e\phi / T_e$) と仮定した. 全イオン数は $\sim 10^6$ の程度である.

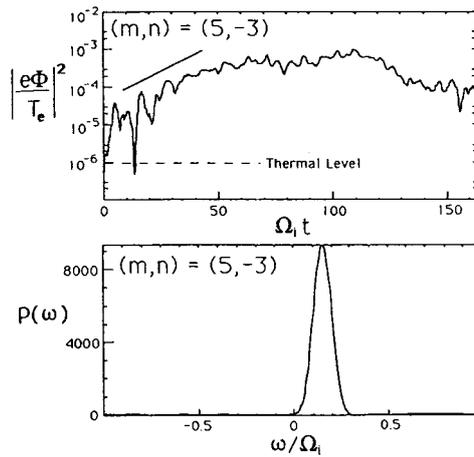


図 10.3 上図：ドリフト波捕捉電子モード $(m,n) = (5,-3)$ の強度の時間変化. 図中の直線は線形成長率を表している. 下図：スペクトル強度と周波数の関係. [10.14].

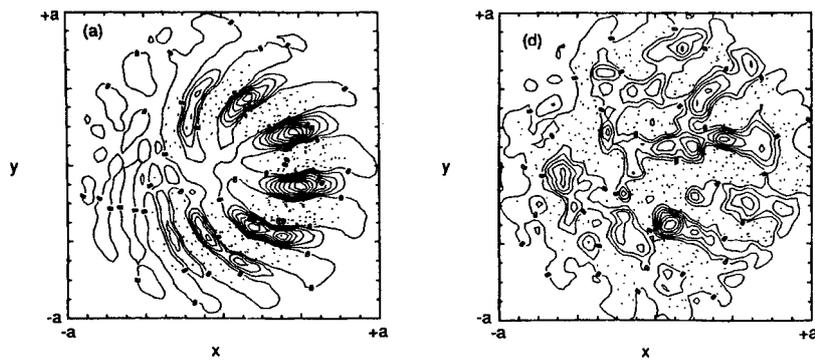


図 10.4 ITG 乱流の静電ポテンシャルのポロイダル断面図 [10.15]. 左側は初期の線形段階. 右側は非線形飽和段階の静電ポテンシャル

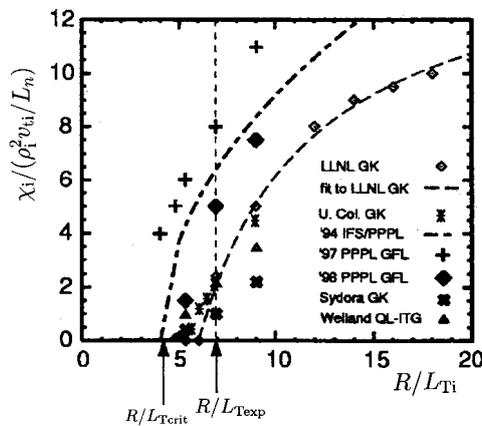


図 10.5 種々のコードで計算された ITG 乱流によるイオン熱拡散係数 χ_i と R/L_T との関係 [10.18]. 94IFS/PPPL, 97PPPL GFL, 98PPPL GFL はジャイロ流体コード. LLNL, U.Colorado flux-tube, UCLA(Sydora) はジャイロ運動論的粒子コード. $R/L_{Texp} = 7, \chi_i / (\rho_i^2 v_{ti} / L_n) = 0.16$ は DIII-D 実験データの値. ジャイロ流体コードによる, χ_i が立ち上がる臨界値 R/L_{Tcrit} は, ジャイロ運動論的粒子コードの結果とやや異なっている. ジャイロ運動論的粒子コードの結果の方が実験値に近い.

図 10.4 は線形段階の静電ポテンシャルおよび非線形的に飽和した段階での静電ポテンシャルをプロットしたものである。

文献 [10.17, 10.18] ではトカマクにおける ITG 乱流のイオン熱拡散係数について調べられた。このシミュレーションで行われた粒子数は $5 \times 10^5 \sim 1.34 \times 10^8$ の範囲である。 10^6 ケ (2 ケ/セル) 以上になると、計算の後半で χ_i の値が粒子数の増加によって変わることがなくなる。熱拡散係数を $\chi_i = 1.5 L_n \langle \tilde{v}_r \tilde{T}_i \rangle / T_i$ によって定義する。ただし \tilde{v}_r および \tilde{T}_i は径方向のイオン速度およびイオン温度の揺動成分を表す。いくつかの R/L_T に対する χ_i の値を計算し合せると、 R/L_T のオフセット-リニア (offset linear) な依存性を示すことが導かれた (図 10.5 参照)。すなわち

$$\frac{\chi_i}{\rho_i^2 v_{ti} / L_n} = 15.4(1.0 - 6.0(L_T/R)). \quad (10.26)$$

(10.26) の右辺第 2 項は **Dimit** シフトと呼ばれる。

これまでは静電揺動におけるジャイロ運動論的粒子モデルについて述べた。磁場の揺動をともなう電磁揺動のジャイロ運動論的粒子モデルの公式化およびシミュレーションについても研究が進められている [10.19]。

10.4.2 完全軌道粒子モデル

完全軌道粒子モデル (Full Orbit Particle Model) の基礎方程式は簡単であり次のように記述される [10.10]。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{sj}(t)}{dt} &= \mathbf{v}_{sj}(t), \\ \frac{d\mathbf{v}_{sj}(t)}{dt} &= \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E}(\mathbf{r}_{sj}(t), t) + \mathbf{v}_{sj}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{sj}(t), t)), \\ \rho &= \sum_{s=e,i} q_s \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}(t)), \\ \mathbf{j} &= \sum_{s=e,i} q_s \sum_j \mathbf{v}_{s,j}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}(t)), \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

m_s および q_s は s 種の質量および電荷である。他の記号は通常のものである。しかしながら、現実のプラズマの粒子数は、最も高性能の計算機の扱える上限 $10^7 \sim 10^8$ よりはるかに多い。そこで完全軌道粒子モデルにおいては、有限の大きさを持った超粒子 (superparticle) を導入する。 $V = L_x L_y L_z$ の体積に N_e の電子および N_i のイオンを含む系を考えよう。 Λ ケの粒子を一つの超粒子に纏め、その質量および電荷は ($\Lambda \gg 1$)

$$m_s^{\text{SP}} = \Lambda m_s, \quad q_s^{\text{SP}} = \Lambda q_s$$

とする。そうすると超粒子の平均密度と温度は

$$n_s^{\text{SP}} = n_s / \Lambda, \quad T_s^{\text{SP}} = \Lambda T_s$$

になる。超粒子プラズマのプラズマ振動数 Π_s^{SP} 、サイクロトロン周波数 Ω_s^{SP} 、熱速度 v_T^{SP} 、アルフベン速度 v_A^{SP} 、デバイ長 λ_{Ds}^{SP} 、ラーマー半径 ρ_{cs}^{SP} 、ベータ比 β^{SP} は元の系と全く同じである。しかしながらクーロン衝突周波数は非常に大きくなる。すなわち

$$\nu_{ei}^{\text{SP}} \sim 0.4 \frac{\Pi_e^{\text{SP}}}{n_e^{\text{SP}} (\lambda_{De}^{\text{SP}})^3} = 0.4 \frac{\Lambda \Pi_e}{n_e (\lambda_{De})^3} = \Lambda \nu_{ei}.$$

ゼロの大きさの超粒子のクーロン衝突周波数は、 $N_e^{\text{SP}} \equiv n_e^{\text{SP}} (\lambda_{De}^{\text{SP}})^3$ を数個から数十個に選ぶ場合は、電子プラズマ振動数の $1/10 \sim 1/100$ くらいになりえる。したがってそれより低い周波数の現

象はクーロン衝突によってマスクされてしまう。この効果をさけるために、有限の大きさを持った電荷分布関数シェイプ-ファクター $S(\mathbf{r})$ を導入する。

$$q_s^{\text{SP}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}) \rightarrow q_s^{\text{SP}} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj})$$

$$\int S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}) d\mathbf{r} = 1.$$

シェイプ-ファクターの実効的半径を R とする。この場合の実効的クーロン衝突周波数は、その半径 $R = (1 \sim 5)\lambda_D$ や $n_e(\lambda_{De})^3 = (10 \sim 10^3)$ の大きさに依存するが、 $R = 0$ の場合に較べて1桁ないし3桁小さくなる [10.20]。そして $k < R^{-1}$ の分散関係にはあまり影響しないことが確かめられている。したがって有限の大きさを持つ超粒子を用いたシミュレーションは R より大きな波長を持つ波動現象を再現できる。超粒子の運動方程式は次のように与えられる。

$$\frac{d\mathbf{r}_{sj}^{\text{SP}}(t)}{dt} = \mathbf{v}_{sj}^{\text{SP}}(t),$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{sj}^{\text{SP}}(t)}{dt} = \frac{q_s^{\text{SP}}}{m_s^{\text{SP}}} (\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_{sj}(t), t) + \mathbf{v}_{sj}^{\text{SP}}(t) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r}_{sj}(t), t)).$$

ここで \mathbf{E}^* , \mathbf{B}^* は有限な大きさの超粒子が感じる場であり、次のようになる。

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \equiv \int \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) S(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \equiv \int \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) S(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}',$$

$$\rho = \sum_{s=e,i} q_s^{\text{SP}} \sum_{j=1}^{N_s^{\text{SP}}} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}(t)),$$

$$\mathbf{j} = \sum_{s=e,i} q_s^{\text{SP}} \sum_{j=1}^{N_s^{\text{SP}}} \mathbf{v}_{s,j}(t) S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}(t)),$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

時間と長さを

$$\tilde{t} = t \Pi_e, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \Delta^{-1}$$

のように正規化し、 \mathbf{E} , \mathbf{B} , ρ および \mathbf{j} を

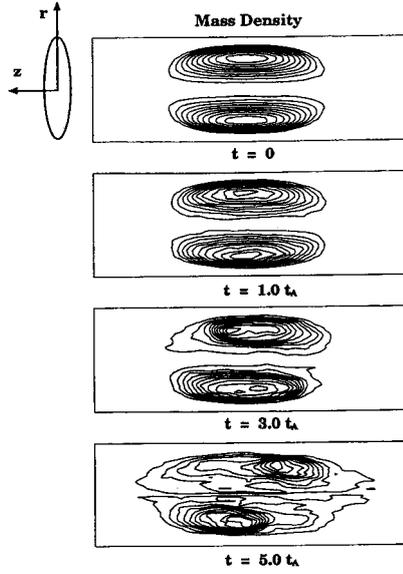
$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}}{m_e \Delta \Pi_e^2 / e}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{m_e \Pi_e / e},$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{en_e}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{j}}{en_e \Delta \Pi_e}$$

のように正規化する。ここで Δ はグリッドの大きさである。無次元化された運動方程式は次のようになる [10.21]。

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{v}}_{sj}(\tilde{t}), \tag{10.27}$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{sj}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{Q_s}{M_s} (\tilde{\mathbf{E}}^*(\tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t}), \tilde{t}) + \tilde{\mathbf{v}}_{sj}(\tilde{t}) \times \tilde{\mathbf{B}}^*(\tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t}), \tilde{t})), \tag{10.28}$$


 図 10.6 ポロイダル断面における逆磁場配位 (FRC) の $t/t_A = 0.0, 1.0, 3.0, 5.0$ のときの等密度面 [10.22].

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{L}_x \tilde{L}_y \tilde{L}_z}{N_e^{\text{SP}}} \sum_{s=e,i} Q_s \sum_{j=1}^{N_s^{\text{SP}}} \tilde{S}(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t})), \quad (10.29)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{\tilde{L}_x \tilde{L}_y \tilde{L}_z}{N_e^{\text{SP}}} \sum_{s=e,i} Q_s \sum_{j=1}^{N_s^{\text{SP}}} \tilde{\mathbf{v}}_{s,j}(\tilde{t}) \tilde{S}(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t})), \quad (10.30)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\rho}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (10.31)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}}, \quad \tilde{c}^2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{t}}, \quad (10.32)$$

$$\tilde{c} = \frac{c}{\Delta \Pi_e}, \quad \tilde{S}(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_{sj}(\tilde{t})) = \Delta^3 S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sj}(t)). \quad (10.33)$$

ここで c は光速, $Q_s \equiv q_s/e$ ($Q_e = -1, Q_i = q_i/e$), $M_s \equiv m_s/m_e$ ($M_e = 1, M_i = m_i/m_e$) である.

逆磁場配位 (FRC) の傾き安定性 (tilt stability) がイオンおよび電子の完全軌道粒子モデルで調べられた [10.22]. グリッド数は $49 \times 49 \times 32$ で超粒子の数は 10^6 である. $\Pi_e \Delta t = 1.5$, $c \Delta t / \Delta < 1$. ただしイオンと電子の質量比は $m_i/m_e = 50$, そして $\Omega_e \sim \Pi_e/5$ とした. 図 10.6 はポロイダル断面における, 逆磁場配位 (FRC) の $t/t_A = 0.0, 1.0, 3.0, 5.0$ のときの等密度面を示す. ここで t_A^{-1} はアルフベン通過時間である. このシミュレーション例では $|\Omega_i| < t_A^{-1}$ である. セパレートリックスを横切るサイクリング-イオン (cycling ion) による傾き安定化効果が調べられている. FRC の傾き安定性は完全軌道粒子のイオンと流体電子の混合モデルで調べられ [10.23], 有限イオンラーマー半径の安定化効果を解析した.

完全軌道粒子モデルによるシミュレーションは $|\Omega_i| \gg t_A^{-1}$ の場合は, 計算量が大幅に増えて困難になる. トロイダル粒子コード (toroidal particle code, TPC) は静電的乱流の解析のために開発された [10.24] (電磁的乱流を除外する). TPC は マクスウェル電磁方程式の代わりにポアソン方程式を解く.

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\frac{e}{\epsilon_0} \sum_j ((q_i/e) S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^i) - S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^e)). \quad (10.34)$$

イオンの運動はローレンツの式で与えられる.

$$\frac{d\mathbf{r}^i}{dt} = \mathbf{v}^i, \quad \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} = \frac{q^i}{m^i} (\mathbf{E} + \mathbf{v}^i \times \mathbf{B}), \quad (10.35)$$

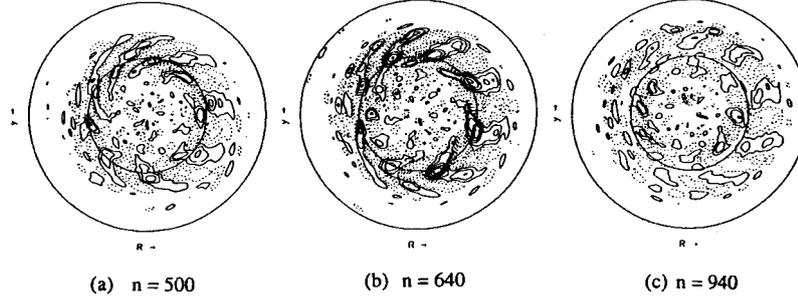


図 10.7 負磁気シア配位トカマクにおける異なる時間の静電ポテンシャルの構造 (ポロイダル断面上の)[10.25]. 準定常状態 (c) においては, ポテンシャル構造に q_{\min} 面を挟んで不連続性が現れる.

電子の運動はドリフト方程式を用いる.

$$\frac{dv_{\parallel}^e}{dt} = -\frac{e}{m_e}E_{\parallel} - \mu(\mathbf{b} \cdot \nabla)B. \quad (10.36)$$

トカマクにおけるイオン温度勾配 (ITG) 乱流が TPC を用いて解析された [10.25]. このシミュレーションでは電子は断熱流体 (adiabatic fluid $\delta n_e/n_e = e\Phi/T_e$) として取り扱われた. ITG 乱流に対する負磁気シアの効果が調べられた (11.5 節参照). 図 10.7 に示されるように, 準定常状態 (c) において静電ポテンシャル構造に q_{\min} 面を挟んで不連続性あるいはギャップが現れることがシミュレートされている.

10.5 帯状流

10.5.1 ドリフト乱流の長谷川-三間方程式

基となる方程式はイオンについての連続の式で, 磁場に平行方向のイオンの慣性は無視する. イオンは冷たいと仮定している.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}_{\perp}) = \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla)n + n\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} = 0. \quad (10.37)$$

イオンの運動は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトと偏極ドリフト (2.1.3 節参照) によるものである.

$$\mathbf{v}_{\perp} = -\frac{1}{B}\nabla\phi \times \hat{z} - \frac{1}{\Omega_i B} \frac{d}{dt}\nabla\phi, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{B}(\nabla\phi \times \hat{z}) \cdot \nabla. \quad (10.38)$$

ポテンシャル ϕ の変化が磁力線に平行な方向にゆるやかな場合には, 電子はボルツマン分布に従うとしてよい.

$$n = n_0 + \delta n, \quad \frac{\delta n}{n_0} = \frac{e\phi}{T_e} \equiv \tilde{\phi}. \quad (10.39)$$

下記のオーダリングを仮定する.

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{d}{dt} \sim \delta, \quad \tilde{\phi} \sim \delta, \quad L_n \nabla \sim \delta^{-1}.$$

$c_s^2 \equiv T_e/m_i$, $\rho_s \equiv c_s/\Omega_i$, $\Omega_i = eB/m_i$ の記号を使うと (10.37), (10.38) および (10.39) は次のように還元される.

$$\mathbf{v}_{\perp} = -\rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) - \rho_s^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla \right) \nabla \tilde{\phi}, \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \left(\nabla \tilde{\phi} + \frac{\nabla n_0}{n_0} \right) \\ & + (1 + \tilde{\phi}) \nabla \cdot \left(-\rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) - \rho_s^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla \right) \nabla \tilde{\phi} \right) = 0, \end{aligned}$$

10.5 帯状流

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \rho_s c_s \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{dn_0}{dx} \frac{1}{n_0} \right) - \rho_s^2 \frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial t} + \rho_s^3 c_s \nabla \cdot ((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla \tilde{\phi} &= 0, \\ (1 - \rho_s^2 \nabla^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \rho_s^3 c_s \left(\frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + v_d^* \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.41)$$

ここで v_d^* は電子のドリフト速度である.

$$v_d^* = \frac{\kappa_n T_e}{eB} = c_s (\kappa_n \rho_s).$$

(10.41) を 長谷川-三間-Charney 方程式 という [10.26]. ここで以下の関係を用いた.

$$((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla^2 \tilde{\phi} = \left(\frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right).$$

密度勾配が無視できる場合は, (10.41) は次のようになる.

$$(1 - \rho_s^2 \nabla^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \rho_s^4 \Omega_i \left(\frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) = 0. \quad (10.42)$$

(10.42) を 長谷川-三間方程式 という [10.27].

(10.41) の一つの解は

$$\tilde{\phi} = A \exp i(k_x x + k_y y) \exp(-i\omega_k^1 t), \quad \omega_k^1 = \frac{1}{1 + \rho_s^2 k^2} k_y v_d^* \quad (10.43)$$

である. 二つの運動の定数がある. すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\tilde{\phi}^2 + \rho_s^2 (\nabla \tilde{\phi})^2) dV = 0, \quad (10.44)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int ((\nabla \tilde{\phi})^2 + \rho_s^2 (\nabla^2 \tilde{\phi})^2) dV - \int v_d^* \nabla^2 \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} dV = 0. \quad (10.45)$$

(10.41) に ϕ を掛け, 全体積で積分すると, 非線形方程式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \int \tilde{\phi} ((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla^2 \tilde{\phi} dV &= \int \tilde{\phi} \nabla \cdot ((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \nabla^2 \tilde{\phi}) dV \\ &= \int \nabla \cdot (\tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z})) dV = \int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{J}_1 \equiv \tilde{\phi} \nabla^2 \tilde{\phi} (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\tilde{\phi}^2 + \rho_s^2 (\nabla \tilde{\phi})^2) dV &= -\rho_s^3 c_s \int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{2} \int v_d^* \frac{\partial \tilde{\phi}^2}{\partial y} dV \rightarrow 0. \end{aligned}$$

同様に (10.41) に $\nabla^2 \tilde{\phi}$ を掛け, 積分すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \int \left(\nabla^2 \tilde{\phi} ((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla^2 \tilde{\phi} + \nabla^2 \tilde{\phi} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \rho_s \nabla^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) + v_d^* \nabla^2 \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) dV &= 0, \\ -\nabla \cdot \mathbf{J}_2 &\equiv \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \nabla \tilde{\phi} + \frac{1}{2} (\nabla^2 \tilde{\phi})^2 (\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \tilde{\phi})^2 + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \nabla^2 \tilde{\phi} + \frac{1}{2} ((\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla) (\nabla^2 \tilde{\phi})^2, \\ -\nabla \cdot \mathbf{J}_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} ((\nabla \tilde{\phi})^2 + \rho_s^2 (\nabla^2 \tilde{\phi})^2) + v_d^* \nabla^2 \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left((\nabla \tilde{\phi})^2 + \rho_s^2 (\nabla^2 \tilde{\phi})^2 \right) dV - \int v_d^* \nabla^2 \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} dV = -\nabla \cdot \mathbf{J}_2 \rightarrow 0.$$

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを \mathbf{v}_E とすると, $v_E = c_s \rho_s |\nabla \tilde{\phi}|$ および $\nabla \times \mathbf{v}_E|_z = c_s \rho_s \nabla^2 \tilde{\phi}$ の関係が得られる。(10.44) および (10.45) は

$$\int \left(\left(\frac{\delta n}{n_0} \right)^2 + \frac{m_i v_E^2}{T_e} \right) dV = \text{const.}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{\rho_s^2} \frac{v_E^2}{c_s^2} + \frac{1}{c_s^2} (\nabla \times v_E)^2 \right) dV + \Omega_i \frac{1}{c_s^2} (\nabla \times v_E)_z \kappa_n v_{Ex} dV = 0$$

となる.

座標 (x, y) および時間 t を次のように無次元化する.

$$x = \rho_s \hat{x}, \quad y = \rho_s \hat{y}, \quad t = \Omega^{-1} \hat{t}, \quad \mathbf{k} = \rho_s^{-1} \hat{\mathbf{k}}, \quad \omega = \Omega_i \hat{\omega}.$$

(10.41) および (10.43) は

$$\partial_{\hat{t}} (\hat{\nabla}^2 \tilde{\phi} - \tilde{\phi}) - (\kappa_n \rho_s) \partial_{\hat{y}} \tilde{\phi} + (\partial_{\hat{y}} \hat{\nabla}^2 \tilde{\phi}) \partial_{\hat{x}} \tilde{\phi} - (\partial_{\hat{x}} \hat{\nabla}^2 \tilde{\phi}) \partial_{\hat{y}} \tilde{\phi} = 0, \quad (10.46)$$

$$\hat{\omega}_k^1 = \frac{(\kappa_n \rho_s) \hat{k}_y}{1 + \hat{k}^2}$$

に還元される. これより, 記号 $\hat{}$ を省略する. $\tilde{\phi}(x, t)$ を空間フーリエ級数に展開する.

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum \tilde{\phi}_k(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \tilde{\phi}_k^* = \tilde{\phi}_{-k}. \quad (10.47)$$

ここで $*$ は共役複素数を表す.

波数 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ で $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ の関係を満たす三つの波を考える. (10.47) の和の項の中で, これらの波が他の波より大きい振幅を持っていると仮定し, これらの三つの波の間のエネルギーの流れを調べてみよう. (10.41) および (10.47) は以下のように還元される.

$$\frac{d\tilde{\phi}_{k_1}}{dt} + i\omega_{k_1} \tilde{\phi}_{k_1} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0} A_{k_2, k_3}^{k_1} \tilde{\phi}_{k_2}^* \tilde{\phi}_{k_3}^*, \quad (10.48)$$

$$A_{k_2, k_3}^{k_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + k_1^2} ((\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) \cdot \hat{\mathbf{z}}) (k_3^2 - k_2^2). \quad (10.49)$$

$\tilde{\phi}_j = \tilde{\phi}_{k_j}$ として, (10.48) は以下のようになる.

$$\frac{d\tilde{\phi}_1}{dt} + i\omega_1 \tilde{\phi}_1 = A_{2,3}^1 \tilde{\phi}_2^* \tilde{\phi}_3^*, \quad (10.50)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}_2}{dt} + i\omega_2 \tilde{\phi}_2 = A_{3,1}^2 \tilde{\phi}_3^* \tilde{\phi}_1^*, \quad (10.51)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}_3}{dt} + i\omega_3 \tilde{\phi}_3 = A_{1,2}^3 \tilde{\phi}_1^* \tilde{\phi}_2^*. \quad (10.52)$$

一般性を失うことなく

$$k_1 < k_2 < k_3$$

を仮定することができる. 最初に k_2 モードが強く励起される場合を考える. したがって $|\tilde{\phi}_2| \gg |\tilde{\phi}_1|, |\tilde{\phi}_3|$ である. そうすると (10.50)~(10.52) は以下のようになる.

$$\tilde{\phi}_i = A_i \exp(-i\omega_i t),$$

$$A_2 = \text{const.} \quad \frac{dA_1}{dt} = A_{2,3}^1 A_2^* A_3^* \exp(i\theta t), \quad \frac{dA_3}{dt} = A_{1,2}^3 A_1^* A_2^* \exp(i\theta t). \quad (10.53)$$

10.5 帯状流

ここで $\theta \equiv (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ は周波数ミスマッチである。(10.53) より

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} - i\theta \frac{dA_1}{dt} - A_{2,3}^1 A_{1,2}^3 |A_2|^2 A_1 = 0 \quad (10.54)$$

である。したがって

$$\theta^2 - 4A_{2,3}^1 A_{1,2}^3 |A_2|^2 < 0$$

のとき不安定になり、その成長率は

$$\gamma = \left(A_{2,3}^1 A_{1,2}^3 |A_2|^2 - \frac{1}{4} \theta^2 \right)^{1/2} \quad (10.55)$$

である。 $k_1 < k_2 < k_3$ を仮定していたので、 $A_{2,3}^1 A_{1,2}^3 > 0$ であり、系は不安定になりうる。波数が $k_1 < k_2 < k_3$ となる k_2 の波から、波数 k_1 k_3 の波へ、 k 空間におけるカスケイドが起こる。もし周波数ミスマッチ $\theta = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ が 0 ならば、カスケイドは、最も高い周波数 $\omega_2 = -(\omega_1 + \omega_3)$ の波からより低い周波数 ω_1 および ω_3 の波へと起こる。

他方、もしモード 1 あるいはモード 3 が強く励起される場合は、 $A_{3,1}^2, A_{1,2}^3$ は常に負であるから、系は安定である。

$$N_p \equiv \frac{(1 + k_p^2) |\tilde{\phi}_p|^2}{|k_q^2 - k_r^2|} \quad (10.56)$$

なる数を導入すると、(10.50)~(10.52) より

$$N_3 - N_1 = \text{const.}, \quad N_2 + N_3 = \text{const.}, \quad N_1 + N_2 = \text{const.} \quad (10.57)$$

の関係が成り立つ。これらの式から、 N_2 における 1 の損失は N_1, N_3 における 1 の利得となることを意味する。 N_k モードは、(10.44) より判るように $W_k = (1 + k^2) |\tilde{\phi}_k|^2$ のエネルギーを持っている。したがって (10.56) および (10.57) より、モード N_1 および N_3 へのエネルギーの分配は

$$\frac{\Delta W_1}{\Delta W_2} = \frac{k_3^2 - k_2^2}{k_3^2 - k_1^2}, \quad \frac{\Delta W_3}{\Delta W_2} = \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}$$

となる。 k スペクトルにおけるカスケイドの計算機実験 [10.26] によると、 k_x 面におけるカス

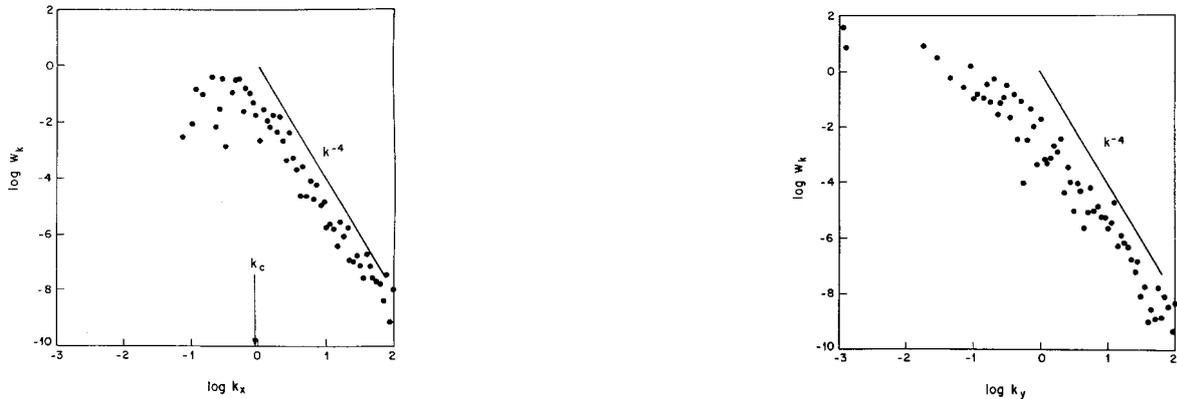


図 10.8 N_k モードのエネルギー密度 $W_k = (1 + k^2) |\tilde{\phi}_k|^2$ の k_x に対する依存性 (左図) および k_y に対する依存性 (右図)。ここで x は密度勾配方向の座標である。 k_x スペクトラムのカスケイドは $k_x = k_c$ 付近で止まり、 W_k は $k_x = k_c$ 付近で飽和する。 k_y スペクトラムのカスケイドは $k_y = 0$ まで進み、 $k_y = 0$ 付近で W_k は最大になる [10.26]。

ケイドは、ある臨界値 $k_x = k_c$ で止まる傾向が見られる。そしてその臨界値では、(10.41) にある線形項と非線形項が同じ程度になる、すなわち $(k_x \rho_s)^3 \tilde{\phi} = \kappa_n \rho_s$ 。そしてエネルギーは $k_x \approx k_c$ 付

近に溜まる. スペクトラムの k_y 依存に関して, エネルギースペクトラムは $k_y \approx 0$ に溜まる (図 10.8 参照). これらの結果はドリフト乱流において帯状流が現れることを示している.

$\tilde{\phi}$ の k スペクトラムパワー密度の時間変化

$\langle \tilde{\phi} \rangle_{p_i}$ および $\tilde{\phi}_{k_i}$ は, $\tilde{\phi}$ の大きな空間スケールで低周波の成分と小さな空間スケールで高周波の成分に対応する項であり, 下付きの p_i, k_i はそれぞれ2次元ベクトル $\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy})$ および $\mathbf{k}_i = (k_{ix}, k_{iy})$ を意味し, $|\mathbf{p}_i| \ll |\mathbf{k}_i|$ であり, 大きな空間スケール (低周波) と小さな空間スケール (高周波) の項に対応する. したがって $\tilde{\phi}$ を次のように二つの項で表す.

$$\tilde{\phi} = \langle \tilde{\phi}_p \rangle + \tilde{\phi}_k.$$

$\langle \rangle$ は速い時間スケールで平均することを意味する. $\tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2$ を速い時間スケールで平均すると以下のようになる.

$$\langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle = \langle \tilde{\phi}_{1p} \rangle \langle \tilde{\phi}_{2p} \rangle + \langle \tilde{\phi}_{1k} \tilde{\phi}_{2k} \rangle.$$

大きい空間スケールの項の時間変化の方程式を導くために, (10.41) をフーリエ変換し, 小さい空間スケールの項の速い時間で平均すると

$$\begin{aligned} \partial_t(p^2 + 1)\langle \tilde{\phi}_p \rangle - i(\kappa_n \rho_s) \partial_y \langle \tilde{\phi}_p \rangle - \int [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1] p_2^2 \langle \tilde{\phi}_{p_1} \rangle \langle \tilde{\phi}_{p_2} \rangle \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \\ - \int [\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1] k_2^2 \langle \tilde{\phi}_{k_1} \tilde{\phi}_{k_2} \rangle \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = 0 \end{aligned} \quad (10.58)$$

を得る [10.28]. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ はベクトル積 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a_x b_y - a_y b_x$ の z 成分であり, $\partial_t = \partial/\partial t$ である. \mathbf{k} および \mathbf{p} を

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{p}, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$$

によって導入する. すると

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1] k_2^2 &= ((k_x + p_x/2)(-k_y + p_y/2) - (k_y + p_y/2)(-k_x + p_x/2))(\mathbf{k} + \mathbf{p}/2)^2 \\ &= [\mathbf{k}, \mathbf{p}](\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + k^2 + p^2/4) \end{aligned}$$

となる. (10.58) の2番目の積分は

$$\begin{aligned} \int [\mathbf{k}, \mathbf{p}](\mathbf{k} + \mathbf{p}/2)^2 \langle \tilde{\phi}_{p/2-k} \tilde{\phi}_{p/2+k} \rangle d\mathbf{k} &= \int [\mathbf{k}, \mathbf{p}](\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \langle \tilde{\phi}_{p/2-k} \tilde{\phi}_{p/2+k} \rangle d\mathbf{k} \\ &= \int (-k_x k_y (p_x^2 - p_y^2) - (k_y^2 - k_x^2) p_x p_y) \langle \tilde{\phi}_{p/2-k} \tilde{\phi}_{p/2+k} \rangle d\mathbf{k} \end{aligned}$$

のようになる. ここで $[\mathbf{k}, \mathbf{p}](k^2 + p^2/4) = -[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](k_1^2 + k_2^2)/2$ を用いた. (10.58) の逆フーリエ変換をすると, 大きい空間スケールの項について, 次のような式を得る.

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla^2 \tilde{\phi}_L - \tilde{\phi}_L) - (\kappa_n \rho_s) \partial_y \tilde{\phi}_L + (\partial_y \nabla^2 \tilde{\phi}_L) \partial_x \tilde{\phi}_L - (\partial_x \nabla^2 \tilde{\phi}_L) \partial_y \tilde{\phi}_L \\ = -\partial_{xx} A - \partial_x \partial_y B + \partial_{yy} A, \end{aligned} \quad (10.59)$$

$$A(\mathbf{x}, t) = 2 \int \frac{k_x k_y}{k^2(1+k^2)} n_k d\mathbf{k},$$

$$B(\mathbf{x}, t) = 2 \int \frac{k_y^2 - k_x^2}{k^2(1+k^2)} n_k d\mathbf{k},$$

$$n_k(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} k^2 (1+k^2) \int \langle \tilde{\phi}_{p/2-k} \tilde{\phi}_{p/2+k} \rangle \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2}. \quad (10.60)$$

n_k は $\tilde{\phi}$ の高周波スペクトラムのパワー密度である.

10.5 帯状流

高周波のパワー密度 n_k の時間変化の方程式を導くために、フーリエ成分 $\tilde{\phi}_k$ の時間変化の方程式を求める。

$$-\partial_t(1+k^2)\tilde{\phi}_k - (\kappa_n \rho_s) i k_y \tilde{\phi}_k - \int (-k'_y k'^2 \tilde{\phi}_{k'} q_x \tilde{\phi}_q + k'_x k'^2 \tilde{\phi}_{k'} q_y \tilde{\phi}_q) \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}) d\mathbf{k}' d\mathbf{q} = 0.$$

\mathbf{k}' で積分し

$$k'^2(k'_x q_y - k'_y q_x) = [\mathbf{k}, \mathbf{q}](\mathbf{k} - \mathbf{q})^2, \quad (\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q})$$

を考慮すると

$$\partial_t \tilde{\phi}_k + \frac{i(\kappa_n \rho_s) k_y}{1+k^2} \tilde{\phi}_k + \int \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{q}](\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{1+k^2} \tilde{\phi}_{k-q} \tilde{\phi}_q d\mathbf{q} = 0$$

を得る。 $\tilde{\phi}_k$ の方程式に $\tilde{\phi}_{k'}$ を掛け、 $\tilde{\phi}_{k'}$ の同様な方程式に $\tilde{\phi}_k$ を掛けたものと足し算すると、

$$\partial_t(\tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'}) + i(\omega_k^1 + \omega_{k'}^1)(\tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'}) + R_{kk'} = 0 \quad (10.61)$$

を得る。ただし

$$R_{kk'} \equiv \int \left(\frac{[\mathbf{k}, \mathbf{q}](\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{1+k^2} \tilde{\phi}_{k-q} \tilde{\phi}_{k'} + \frac{[\mathbf{k}', \mathbf{q}](\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2}{1+k'^2} \tilde{\phi}_{k'-q} \tilde{\phi}_k \right) \tilde{\phi}_q d\mathbf{q}.$$

そして $\omega_k^1 = (\kappa_n \rho_s) k_y / (1+k^2)$.

大きい空間スケールの乱流スペクトラムが支配的で、小さい空間スケールの項との相互作用は、大きい空間スケールの項との相互作用に較べて無視できるとする。小さいスケールの場の間の時間相関 $\langle \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'} \rangle$ は $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ の小さい領域でのみ有意の値を持ち、大きいスケールの場の間の時間相関と同程度の値を持つとする。この議論を考慮し、 \mathbf{k} および \mathbf{k}' を $-\mathbf{k} + \mathbf{p}/2$ および $\mathbf{k} + \mathbf{p}/2$ に次のように置き換える。

$$\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} + \mathbf{p}/2, \quad \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{p}/2, \quad \tilde{\phi}_k \tilde{\phi}_{k'} \rightarrow \tilde{\phi}_{p/2-k} \tilde{\phi}_{p/2+k}.$$

そうすると $|\mathbf{p}| \ll |\mathbf{k}|$ であるため

$$(\kappa_n \rho_s)^{-1} i(\omega_k^1 + \omega_{k'}^1) = i \frac{-(k_y - p_y/2)}{1 + (\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2} + \frac{(k_y + p_y/2)}{1 + (\mathbf{k} + \mathbf{p}/2)^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{k_y}{1+k^2} \right) \cdot i\mathbf{p}$$

となる。そして (10.61) の最初の 2 項の和は下記のようにになる。

$$\partial_t n_k + (\kappa_n \rho_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{k_y}{1+k^2} \right) \cdot \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{x}}.$$

$R_{kk'}$ の最初の積分は

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{-[\mathbf{k} - \mathbf{p}/2, \mathbf{q}](\mathbf{k} - \mathbf{p}/2 + \mathbf{q})^2}{1 + (\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2} \tilde{\phi}_{-k+p/2-q} \tilde{\phi}_{k+p/2} \right) \tilde{\phi}_q d\mathbf{q} \\ &= \int \frac{-[\mathbf{k} - \mathbf{p}'/2, \mathbf{q}](\mathbf{k} - \mathbf{p}'/2 + \mathbf{q}/2)^2}{1 + (\mathbf{k} - \mathbf{p}'/2 - \mathbf{q}/2)^2} \frac{2}{(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2)^2 (1 + (\mathbf{k} + \mathbf{q}/2)^2)} \\ & \quad \times \left(\tilde{\phi}_{p'/2-(k+q/2)} \tilde{\phi}_{p'/2+(k+q/2)} \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2)^2 (1 + (\mathbf{k} + \mathbf{q}/2)^2)^2}{2} \right) \tilde{\phi}_q d\mathbf{q} \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{q}$ である。そして

$$\frac{1}{2} k^2 (1+k^2) \int R_{p/2-k, p/2+k} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}k^2(1+k^2) \int R_{p/2-k, p/2+k} \exp((i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}) + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \\
&= \frac{-k^2}{1+k^2} [\mathbf{k}, \mathbf{q}] (n_{k+q/2} - n_{k-q/2}) \tilde{\phi}_L + \frac{2[\mathbf{k}, \mathbf{q}]}{(1+k^2)^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}') n_k \tilde{\phi}_L + \frac{k^2}{(1+k^2)} [\mathbf{p}', \mathbf{q}] n_k \tilde{\phi}_L \\
&= \frac{-k^2}{1+k^2} [\mathbf{k}, \mathbf{q}] \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} \tilde{\phi}_L + \frac{2[\mathbf{k}, \mathbf{q}]}{(1+k^2)^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}') n_k \tilde{\phi}_L + \frac{k^2}{(1+k^2)} [\mathbf{p}', \mathbf{q}] n_k \tilde{\phi}_L
\end{aligned}$$

が導かれる。ここで $|\mathbf{q}|, |\mathbf{p}'| \ll |\mathbf{k}|$ を仮定し、 $R_{kk'}$ の被積分項を展開した。(10.61) は以下のように還元される。

$$\begin{aligned}
&\partial_t n_k + (\kappa_n \rho_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{k_y}{1+k^2} \right) \cdot \nabla_x n_k - \frac{k^2}{1+k^2} [\mathbf{k}, \mathbf{q}] \frac{\partial n_k}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} \tilde{\phi}_L \\
&+ \frac{2[\mathbf{k}, \mathbf{q}]}{(1+k^2)^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}') n_k \tilde{\phi}_L + \frac{k^2}{(1+k^2)} [\mathbf{p}', \mathbf{q}] n_k \tilde{\phi}_L = 0.
\end{aligned} \tag{10.62}$$

新しく ω_k を

$$\omega_k = \omega_k^1 + \omega_k^{\text{nl}} \equiv \frac{(\kappa_n \rho_s) k_y + (\hat{\mathbf{v}}_E \cdot \mathbf{k}) k^2}{1+k^2}, \quad \hat{\mathbf{v}}_E \equiv \frac{\mathbf{v}_E}{c_s} = \left(-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)$$

のように導入すると、(10.62) は次のようになる [10.28].

$$\left(\partial_t + \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{k}} \partial_x - \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{x}} \partial_k \right) n_k = 0. \tag{10.63}$$

正規化した無次元の座標から、通常の空間座標および時間に戻すと、(10.63) は下記のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) n_k = 0, \quad \omega_k = \frac{k_y v_d^* + (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{k}) \rho_s^2 k^2}{1 + \rho_s k^2}. \tag{10.64}$$

10.5.2 帯状流の生成

シアのある平均流の空間スケールは巨視的であり、シアのある平均流がドリフト乱流を安定化する効果のあることを 4.6 節で述べた。他方帯状流の空間スケールはメゾスコピックである。シアのある平均流と帯状流の違いを図 10.9 に示している。

ドリフト乱流の数値シミュレーションの研究は帯状流研究の発展に決定的な役割を果たしてきた。理論と数値シミュレーションの間の共同作業は帯状流の物理的関心を推進する鍵となった。ジャイロ運動論的粒子モデル (10.4.1 節参照) による数値シミュレーションの結果を図 10.10 に示す [10.29]。乱流渦の径方向の大きさが帯状流のシアリングにより非常に小さくなっていることを明示している。

帯状流のポテンシャル ϕ_z は磁気面上では一様 ($k_y = k_z = 0$) で径方向 (x 方向) に有限の k_x をもっている。そのため ϕ_z の磁力線に沿う位相速度は無限大である。したがってポテンシャルの断熱応答は次のように変形される。

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{e}{T_e} (\phi - \bar{\phi}), \quad \phi = \bar{\phi} + \delta \phi_d.$$

ここで $\bar{\phi}$ は ϕ の磁気面上の平均である。したがって断熱応答は

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{e \delta \phi_d}{T_e} \equiv \tilde{\phi}_d$$

となる。次のオーダリングを仮定する。

$$\frac{e \bar{\phi}}{T_e} \equiv \bar{\phi}_z, \quad \tilde{\phi}_d \sim \delta, \quad \bar{\phi}_z \sim \delta, \quad \nabla \tilde{\phi}_d \sim O(1), \quad \nabla \bar{\phi}_z \sim O(1).$$

10.5 帯状流

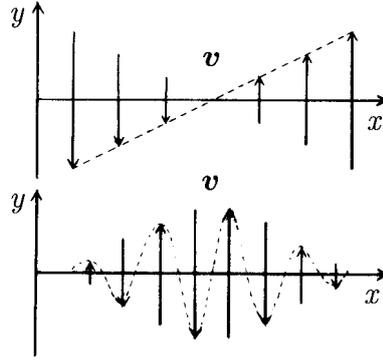


図 10.9 上図: シアのある平均流. 下図: 帯状流.

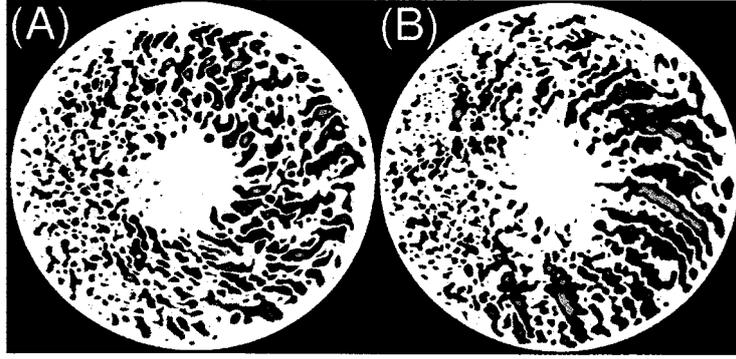


図 10.10 (A) ジャイロ運動論的粒子シミュレーションによるポロイダル断面におけるポテンシャル揺動 $e\phi/T_e$ の等高線が示す乱流渦の径方向の大きさが、自己調整された $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 帯状流によるランダムシアリングによって小さくなっている。(B) 帯状流を抑えたときのシミュレーションの結果. [10.29].

イオンの連続の式は、(10.41) を変形して次のようになる [10.30].

$$(1 - \rho_s^2 \nabla^2) \frac{\partial \tilde{\phi}_d}{\partial t} - \rho_s c_s (\nabla \tilde{\phi}_d \times \hat{z}) \cdot \frac{\nabla n_0}{n_0} - \rho_s c_s (\nabla \bar{\phi}_z \times \hat{z}) \cdot \nabla \tilde{\phi}_d + \rho_s^3 c_s \nabla \cdot \left(((\nabla \bar{\phi}_z \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla \tilde{\phi}_d + ((\nabla \tilde{\phi}_d \times \hat{z}) \cdot \nabla) \nabla \bar{\phi}_z \right) = 0, \quad (10.65)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho_s^2 \nabla^2 \bar{\phi}_z + \rho_s^3 c_s \nabla \cdot \left((\nabla \tilde{\phi}_d \times \hat{z}) \cdot \nabla \nabla \bar{\phi}_z \right) = 0. \quad (10.66)$$

帯状流の生成に関する '4 つの波モデル' を、次の仮定のもとに展開していく.

$$\tilde{\phi}_d = \tilde{\phi}_{d0}(t) \cos(k_y y - \omega_0 t) + \tilde{\phi}_{dc}(t) \sin(k_x x - \omega_z t) \cos(k_y y - \omega_0 t) + \tilde{\phi}_{ds}(t) \sin(k_x x - \omega_z t) \sin(k_y y - \omega_0 t), \quad (10.67)$$

$$\bar{\phi}_z = \bar{\phi}_z(t) \cos(k_x x - \omega_z t). \quad (10.68)$$

ただし

$$\omega_0 = \frac{k_y v_d^*}{1 + \rho_s^2 k^2}.$$

(10.67) および (10.68) を (10.65) および (10.66) に代入すると、 $\cos(k_y y - \omega_0 t)$, $\sin(k_x x - \omega_z t) \cos(k_y y - \omega_0 t)$, $\sin(k_x x - \omega_z t) \sin(k_y y - \omega_0 t)$, $\cos(k_x x - \omega_z t)$ の成分をそれぞれ 0 とすることにより

$$(1 + \rho_s^2 k^2) \frac{d\tilde{\phi}_{d0}}{dt} - \frac{\rho_s c_s}{2} k_x k_y \bar{\phi}_z \tilde{\phi}_{ds} = 0,$$

$$(1 + \rho_s^2 k^2) \frac{d\tilde{\phi}_{dc}}{dt} - \frac{k_y k_x^2 \rho_s^2 v_d^*}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \tilde{\phi}_{ds} = 0,$$

$$(1 + \rho_s^2 k^2) \frac{d\tilde{\phi}_{ds}}{dt} + \frac{k_y k_x^2 \rho_s^2 v_d^*}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \tilde{\phi}_{dc} + \rho_s c_s k_x k_y (1 + k_y^2 \rho_s^2 - k_x^2 \rho_s^2) \bar{\phi}_z \tilde{\phi}_{d0} = 0,$$

$$\frac{d\bar{\phi}_z}{dt} + \frac{\rho_s c_s}{2} k_x k_y \tilde{\phi}_{d0} \tilde{\phi}_{ds} = 0$$

となる。もしドリフト波 $\tilde{\phi}_{d0}$ が励起され、次の条件

$$|\tilde{\phi}_{dc}|, |\tilde{\phi}_{ds}|, |\bar{\phi}_z| \ll |\tilde{\phi}_{d0}|$$

が満たされ、揺動項の時間依存が $\exp(\gamma t)$ で与えられるとき、線形化されたこれらの式は、 $\tilde{\phi}_{d0} = \text{const.}$ の仮定のもとに次の分散関係を導く。

$$\gamma^2 = \frac{c_s^4 k_x^2 k_y^2}{\Omega_i^2 (1 + k^2 \rho_s^2)^2} \left(\frac{(1 + k_y^2 \rho_s^2 - k_x^2 \rho_s^2)(1 + k^2 \rho_s^2)}{2} \tilde{\phi}_{d0}^2 - \frac{k_x^2 \rho_s^2 v_d^{*2}}{c_s^2 (1 + k^2 \rho_s^2)^2} \right). \quad (10.69)$$

4つの波のモジュレイショナル不安定性 (modulational instability) の不安定条件は

$$k_{xc}^2 \rho_s^2 < \frac{(1 + k^2 \rho_s^2)^3 ((1 + k_y^2 \rho_s^2 - k_x^2 \rho_s^2))}{2} \left(\frac{c_s \tilde{\phi}_{d0}}{v_d^*} \right)^2 \approx \frac{(1 + k_y^2 \rho_s^2)^4}{2} \left(\frac{c_s \tilde{\phi}_{d0}}{v_d^*} \right)^2 \quad (10.70)$$

である。スラブモデルにおいて、この臨界波数 k_{xc} 以下において、ドリフト波が帯状流を生成することを示している。

帯状流の発生機構を解析する直感的方法について述べる [10.31]。プラズマの流速を $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}$ とし、 $\bar{\mathbf{v}}$ は大きい空間的スケールで低周波の項であり、 $\tilde{\mathbf{v}}$ は小さい空間スケールで高周波の項であるとする。帯状流の k スペクトラムは $k_\theta = k_z = 0$ で $k_r \neq 0$ であるので、レイノルド応力を磁気面上で平均することによって、抽出することが可能である。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \dots$$

の2次のオーダーは

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial t} = -\langle (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \rangle_\theta + \dots = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \langle (r^2 \tilde{v}_r \tilde{v}_\theta) \rangle + \dots \approx \frac{\partial}{\partial r} \langle (\tilde{v}_r \tilde{v}_\theta) \rangle + \dots \quad (10.71)$$

となる。ここで次の関係を用いた。

$$\langle (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \rangle_\theta = (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{v}_\theta + \frac{\tilde{v}_r \tilde{v}_\theta}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{v}_r \tilde{v}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{v}_\theta \tilde{v}_z).$$

記号 $\langle \rangle$ は磁気面上 (θ, z) の平均を表す。

$$\langle (\tilde{v}_r \tilde{v}_\theta) \rangle = \frac{k_r k_\theta}{B^2} \langle \phi^2 \rangle = c_s^2 (k_r k_\theta \rho_s^2) \tilde{\phi}^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^2 &= \iint (\tilde{\phi}_{k'} \tilde{\phi}_{p-k'}) d\mathbf{k}' \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{p} = \iint (\tilde{\phi}_{p/2+k} \tilde{\phi}_{p/2-k}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{p} d\mathbf{k} \\ &= \int \frac{2n_k}{\rho_s^2 k^2 (1 + \rho_s^2 k^2)} d\mathbf{k} \rho_s^2 \end{aligned}$$

であるので、(10.71) は以下のようなになる [10.31]。

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \int c_s^2 \frac{(k_r k_\theta \rho_s^2) 2n_k}{\rho_s^2 k^2 (1 + \rho_s^2 k^2)} dk_r dk_\theta \rho_s^2 - \gamma_{\text{damp}} \bar{v}_\theta^z. \quad (10.72)$$

10.5 帯状流

ここで n_k は $\tilde{\phi}$ の高周波スペクトルのパワー密度であり, (10.64) の式に従う. n_k を求めるにあたって, (10.64) を線形化し, 周波数 $\Omega - i\gamma$, 径方向の波数 K をもつその揺動項 $n_k^{(1)}$ を解く. すなわち

$$n_k^{(1)} \propto \exp(iKr - i\Omega t - \gamma t),$$

$$i \left(-\Omega + \frac{\partial \omega_k}{\partial k_r} K + i\gamma \right) n_k^{(1)} - \frac{\partial \omega_k}{\partial r} \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r} = 0.$$

そして

$$n_k^{(1)} = \frac{\frac{\partial \omega_k}{\partial r} \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r}}{-i \left(\Omega - \frac{\partial \omega_k}{\partial k_r} K - i\gamma \right)} = R(K, \Omega) \frac{\partial}{\partial r} (k_\theta \bar{v}_\theta^z) \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r},$$

$$R(K, \Omega) = \frac{i}{\Omega - \frac{\partial \omega_k}{\partial k_r} K - i\gamma} = \frac{-\gamma + i(\Omega - (\partial \omega_k / \partial k_r) K)}{(\Omega - (\partial \omega_k / \partial k_r) K)^2 + \gamma^2}.$$

これらの結果, 次の式が導かれる.

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \int c_s^2 \frac{(k_r k_\theta \rho_s^2)^2}{(1 + \rho_s^2 k^2)} R k_\theta \frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial r} \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r} dk_r dk_\theta \rho_s^2 - \gamma_{\text{damp}} \bar{v}_\theta^z. \quad (10.73)$$

(10.73) は \bar{v}_θ^z に関する拡散方程式である. すなわち

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} D_{rr} \frac{\partial \bar{v}_\theta^z}{\partial r} - \gamma_{\text{damp}} \bar{v}_\theta^z, \quad (10.74)$$

ただしここで, 次のような拡散係数を導入した.

$$D_{rr} = -c_s^2 \int \frac{2(k_\theta \rho_s)^2}{(1 + \rho_s^2 k^2)} R(K, \Omega) k_r \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r} \rho_s^2 dk_r dk_\theta. \quad (10.75)$$

帯状流の成長率 γ_z は (10.74) の第1項で与えられる.

$$\gamma_z = -K^2 \text{Re}(D_{rr}) = -K^2 c_s^2 \int \frac{2(k_\theta \rho_s)^2}{(1 + \rho_s^2 k^2)} \frac{\gamma k_r (\partial n_k^{(0)} / \partial k_r)}{(\Omega - (\partial \omega_k / \partial k_r) K)^2 + \gamma^2} \rho_s^2 dk_r dk_\theta. \quad (10.76)$$

$k_r (\partial n_k / \partial k_r)$ は, 典型的なドリフト乱流においては, 負である. したがって γ が正ならば ($n_k^{(1)}$ が減衰するとき), γ_z は正となり, 減衰率 γ_{damp} を上回れば, 帯状流が駆動される. すなわち

$$k_r \frac{\partial n_k^{(0)}}{\partial k_r} < 0, \quad \gamma_z - \gamma_{\text{damp}} > 0. \quad (10.77)$$

いいかえれば, 拡散係数が負になれば, 系は不安定になる.

10.5.3 GAM(ゲオデシックアコースティックモード)

時間スケール $|\partial/\partial t| \sim \omega_t = v_{Ti}/qR$ 付近の固有モードを捜すと, ゲオデシック(測地線)アコースティック(音波)モード(GAM)がある[10.32]. GAMは $m = n = 0$ の静電ポテンシャルが, トロイダル効果により, $m = 1/n = 0$ の側波帯密度揺動と線形的にカップルしたモードである. 連続の式および運動方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{v}_\perp) + \nabla_{\parallel} (n v_{\parallel}) = 0, \quad (10.78)$$

$$nm_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (10.79)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

である. $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times (\mathbf{B} / B^2) \approx 2\mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{B} \times \mathbf{b}) / B^2$

$= 2(E_r/B) \sin \theta / R$ であり, 磁気面上の磁力線のゲオデシック曲率により, 密度の蓄積が起こる. $\tilde{n}/n \rightarrow \tilde{n}$ と正規化された密度揺動に記号を変える. 連続の式より

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} - \frac{2}{R} \sin \theta \tilde{v}_{E \times B} + \nabla_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} = 0 \quad (10.80)$$

が得られる. 軸対称トロイダル磁場は

$$\mathbf{B} = B_t \mathbf{i}_{\varphi} + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{i}_{\varphi}$$

と表すことができる (4.2 節参照). 運動方程式のポロイダル成分は

$$\mathbf{B}_p \cdot \left(nm_i \frac{d}{dt} \mathbf{v} + (T_i + T_e) \nabla n \right) = B_t R^{-1} \mathbf{j} \cdot \nabla \psi$$

である. 密度の蓄積は磁気面を横切る径方向電流を生成し, $\tilde{\mathbf{E}}$ の向きをひっくり返す [10.32]. $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ および $RB_t = \text{const.}$ であるので

$$\int \frac{R^2}{|\nabla \psi|} \frac{B_t (\mathbf{j} \cdot \nabla \psi)}{R} dS = \int \frac{R^2}{|\nabla \psi|} \mathbf{B}_p \cdot \left(nm_i \frac{d}{dt} \mathbf{v} + (T_i + T_e) \nabla n \right) dS = 0$$

となり, 運動方程式のポロイダル成分は, $dS = 2\pi(R_0 + r \cos \theta) r d\theta$, $c_s^2 \equiv (T_i + T_e)/m_i$ として

$$\frac{\partial \tilde{v}_{E \times B}}{\partial t} + \frac{2c_s^2}{2\pi R} \oint \tilde{n} \sin \theta d\theta = 0 \quad (10.81)$$

に還元される [10.33]. 運動方程式の磁場に平行な成分は次のようになる.

$$\frac{\partial \tilde{v}_{\parallel}}{\partial t} + c_s^2 \nabla_{\parallel} \tilde{n} = 0. \quad (10.82)$$

密度揺動が $\tilde{n} = \tilde{n}_1 \sin \theta$ の形をしている場合は

$$\frac{\partial \tilde{v}_{E \times B}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{R} \tilde{n}_1, \quad (10.83)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} + \frac{2}{R^2} \sin \theta \frac{c_s^2}{R} \tilde{n}_1 - c_s^2 \nabla_{\parallel}^2 \tilde{n} = 0$$

となる. $\tilde{n} \propto \exp(ik_r r + ik_{\parallel} l - i\Omega t) \sin \theta$ とすると, 次の分散式が導かれる.

$$-\Omega^2 + \frac{2c_s^2}{R^2} + k_{\parallel}^2 c_s^2 = 0.$$

GAM の周波数は ($k_{\parallel} = 1/q_s R$)

$$\begin{aligned} \omega_{\text{GAM}}^2 &= 2c_s^2 R^{-2} \left(1 + \frac{k_{\parallel}^2 R^2}{2} \right) = c_s^2 \left(k_{\parallel}^2 + \frac{2}{R^2} \right) = 2c_s^2 R^{-2} (1 + q_s^{-2}/2) \\ &\approx 2c_s^2 R^{-2} \end{aligned} \quad (10.84)$$

で与えられ, 位相速度は以下のようになる.

$$v_{\text{ph}\parallel} = \omega_{\text{GAM}}/k_{\parallel} \approx 2^{1/2} q_s c_s.$$

$q_s \gg 1$ あるいは $T_e \gg T_i$ の場合, GAM はイオンランダウ減衰を受けない. GAM の \tilde{n} は, (10.83) および (10.84) ($E_r = -ik_r \phi$) から得られる正規化された静電ポテンシャルの $k_r \rho_s$ 倍小さくなる. すなわち

$$\tilde{n} = 2^{1/2} k_r \rho_s (1 + q_s^{-2}/2)^{1/2} \frac{e\phi}{T_e}.$$

10.5 帯状流

ここで $\rho_s = c_s m_i / eB$ である. 密度揺動が $\sin \theta$ 以外の依存性をもつ場合には

$$-\Omega i \tilde{n} - \frac{2}{R} \sin \theta \tilde{v}_{E \times B} + \nabla_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} = 0, \quad ik_{\parallel} c_s^2 \tilde{n} - i \Omega \tilde{v}_{\parallel} = 0, \quad -i \Omega \tilde{v}_{E \times B} = 0$$

となる. 一つの解は帯状流のブランチである ($\nabla_{\parallel} = (\partial \theta / \partial l) \partial \theta = (1/q_s R) \partial / \partial \theta$).

$$\Omega = 0, \quad \tilde{n} = 0, \quad \tilde{v}_{\parallel} = -2q_s \cos \theta \tilde{v}_{E \times B}.$$

\tilde{v}_{\parallel} は磁力線に沿う戻りの流れである. 他の解はイオン音波 ($\nabla_{\parallel} = ik_{\parallel}$) である.

$$\Omega^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2.$$

10.5.4 ETG(電子温度勾配) 乱流による帯状流

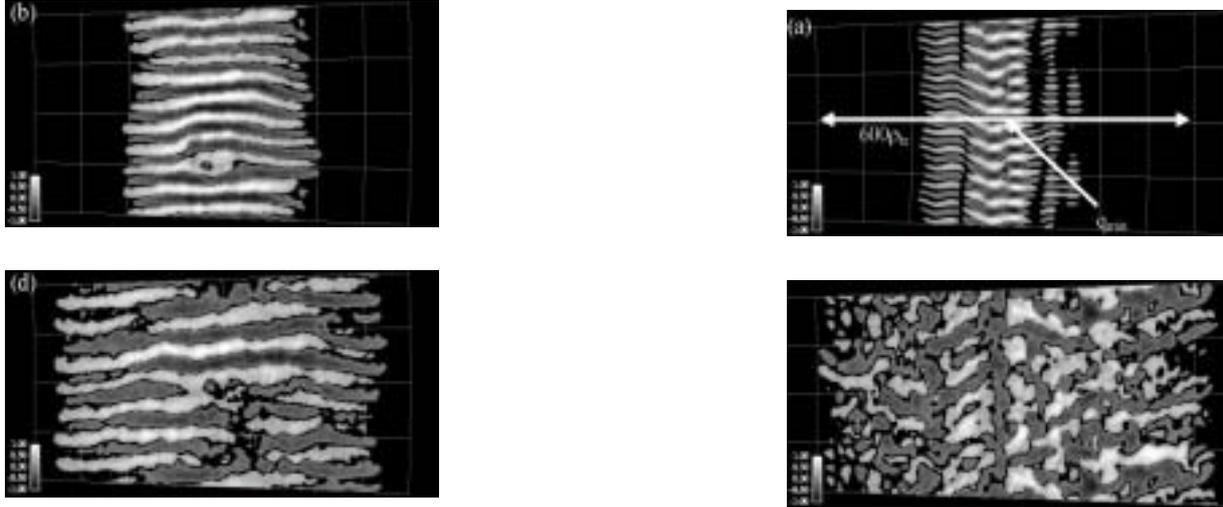


図 10.11 ETG 乱流の静電ポテンシャルの等高線. 左側の図はトカマクが正のシアを持つ場合の図である. 上図はシミュレーションの最初の飽和フェイズ $t = 172L_n/v_{Te}$ のときの静電ポテンシャルの等高線であり, 下図は準定常状態 $t = 250L_n/v_{Te}$ の等高線. 正のシアの配位の準定常状態で, 大きなストリーマが見える. 右側の図はトカマクが負のシアを持つ場合の図である. 上図はシミュレーションの線形フェイズ $t = 110L_n/v_{Te}$ のときの静電ポテンシャルの等高線であり, 下図は準定常状態 $t = 380L_n/v_{Te}$ の等高線. 負のシアの配位の準定常状態で, 準定常帯状流が維持されている. 矢の長さは $600\rho_{Te}$ である. [10.35].

電子温度勾配 (ETG) による乱流は電子の異常熱輸送の候補と考えられている. ETG は静電的近似な取扱いで, 電子とイオンの役割を逆にすれば ITG と同形である. もし異種同形を仮定することができるならば, 電子のラーマ半径のスケールの ETG 乱流は $\chi_e^{ETG} \sim \rho_e^2 v_{Te} / L_T$ 程度の熱拡散係数をもち ((10.26) 参照), $\chi_e^{ETG} \sim (m_e/m_i)^{1/2} \chi_i^{ITG}$ 程度になり, トカマクの実験結果に対応する値に較べて小さ過ぎる結果を与える. デバイ遮蔽長のスケールの帯状流を考えると, この同形の考え方は破綻する. 10.5.3 節で ITG 乱流について述べたように, $n_e/n = e(\phi - \bar{\phi})/T_e$ の電子の応答が, 帯状流を増強するのに本質的であった [10.30]. 他方乱流においては, イオンの応答は, $k_{\perp} \rho_i \gg 1$ のため磁化しておらず, $n_i/n = -e\phi/T_i$ になる. このため, ETG によって駆動された帯状流は, ITG によって駆動された帯状流よりも, 乱流を規制する効果が弱いことが考えられる.

最近いくつかのジャイロ運動論的粒子シミュレーションが行われ, ETG 乱流の理解の進展に大きく貢献している. しかしながら, 異なるシミュレーションモデルによる結果は, 異なる電子の熱伝導係数 χ_e やストリーマ (径方向に長く細く伸びた渦) の評価を出している. それにもかかわらず, その重要性のために静電的ジャイロ運動論的粒子モデルに基づくトロイダル粒子コード GT3D [10.34] による ETG 乱流の結果を, 図 10.11 に示す. プラズマ小半径 a を電子ラーマ半径 ρ_e の $200 \sim 10^5$ 倍の大ききにとり, トカマクの正の磁気シアおよび負の磁気シア配位について,

ETG 乱流を解析した [10.35]. 左側の図はトカマクが正のシアを持つ場合の図である. 準定常状態 (下図) で, 大きなストリーマが見える. $\chi_e \sim 10\chi_{GB}$, $\chi_{GB} = \rho_e^2 v_{Te}/L_T$ の熱拡散係数を与える. 右側の図はトカマクが負のシアを持つ場合の図である. 線形フェイズ (上図) で, $k_\theta \rho_{Te} \approx 1.3$ の ETG モードが q_{\min} の付近に励起されている. 準定常状態 (下図) において, 準定常帯状流が維持され, ETG 乱流が抑制されている.

ETG 乱流による帯状流を駆動する機構として, 自己組織化 (k スペクトラムの逆カスケード (10.5.1 節)) が吟味されている.

10.5.5 付記

帯状流は小さいスケールの乱流において普遍的な現象である. 帯状流は実験的にも CHS [10.36] や ASDEX-U [10.37] で観測されている. 帯状流に関して広範な解説がある [10.38]. 10.5 節のまとめは以下のとおりである.

ITG 乱流における帯状流はドリフト波のモジュレイショナル不安定性によって励起される.

$m=0$, $n=0$ で有限の k_r をもつ帯状流の場合はドリフト乱流により生成される. 帯状流は乱流の立ち上がる条件や乱流による輸送を変えることができる.

帯状流の変形である GAM も, 乱流を規制するのに重要な役割をする.

衝突の少ない領域では, 帯状流はスケールに依存しない捕捉イオンと周回イオン間の衝突により減衰する [10.38].

帯状流の駆動あるいは減衰機構を理解することにより, 外部より駆動される流れのシアを大きくし, あるいは帯状流の減衰の少ない配位を工夫することにより, 閉じ込めを改善する複数の道が開かれる可能性がある.

ETG により駆動される帯状流の更なる研究が必要である.

問題

1. エネルギー閉じ込め時間 トカマク炉の炉心プラズマの閉じ込め時間をいくつかのモデルによって計算せよ. そのパラメータは $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$, $T_i = T_e = 10 \text{keV}$, D-T 燃料ガスの原子量 = 2.5, 有効 $Z = 1.0$, $I_p = 15 \text{MA}$, $B_t = 5 \text{T}$, $a = 2 \text{m}$, $A = 3$, 安全係数 $q_s = 3$ である. ただし $\tau_E \approx a^2/(4\chi_T)$ とし, 異なる熱拡散係数 χ_T , すなわち $\chi_T = T/(16eB)$ (Bohm), $\chi_T = (T/eB)(\rho_i/a)$ (ジャイロボーム), $\chi_T = \epsilon^{-3/2} q_s^2 \rho_i^2 \nu_{ii}$ (新古典熱拡散) の場合を考えよ.
2. 静電的揺動損失 密度揺動 \tilde{n} およびポテンシャル揺動 $\tilde{\phi}$ は静電的と仮定する. これらの揺動信号を観測したとき, \tilde{n} および $\tilde{\phi}$ の位相差がないとき, これらの揺動は異常輸送に寄与するか?
3. 輸送の次元解析 エネルギー閉じ込め時間の比例則が

$$\tau_E^{\text{scaling}} = C I^{\alpha_I} B_t^{\alpha_B} P^{\alpha_P} R^{\alpha_R} n^{\alpha_n} M^{\alpha_M} \epsilon^{\alpha_\epsilon} \kappa^{\alpha_\kappa}$$

のように表されると仮定する. 比例則は無次元の形で表されるべきとする Kadomtsev 制限を選ぶ (10.3 節参照). すなわち

$$\frac{\tau_E^{\text{fit}}}{\tau_B} = C_f \rho_*^{\gamma_\rho} \nu_*^{\gamma_\nu} \beta^{\gamma_\beta} q_1^{\gamma_q} M^{\gamma_M} \epsilon^{\gamma_\epsilon} \kappa^{\gamma_\kappa}.$$

ここで ρ_* はイオンラーマ半径のプラズマ小半径に対する比, ν_* はイオン-イオン衝突周波数のバナナ一周期の逆数に対する比, M はイオンの原子量である. これらの量は

$$\tau_B \equiv \frac{a^2}{T/eB}, \quad \rho_* \equiv \frac{\rho_i}{a} \propto \frac{M^{1/2} T^{1/2}}{\epsilon RB}, \quad q_1 = \frac{Ka B_t}{R B_\theta} \propto \epsilon^2 K^2 \frac{RB}{I},$$

$$\beta \propto \frac{nT}{B^2}, \quad \nu_* \equiv \frac{\nu_{ii}}{\nu_{bi}} = \frac{\nu_{ii}}{\epsilon^{2/3} v_{Ti}/(q_1 R)} \propto \frac{q_1 nR}{\epsilon^{3/2} T^2}$$

のように表される ($K \equiv (1 + \kappa^2)/2$). τ_E^{scaling} に現れる 5 つの有次元パラメータ I , B_t , R , P , n に対して 4 つの無次元パラメータ ρ_* , ν_* , β , q_1 が τ_{fit} 中に現れる. したがって τ_{scaling} を無次元の形で表すために α^I , α^B , α^P , α^R , α^n の間には制約がある. この制約条件を導け. 4.6 節の (4.96) で与えられた τ_E^{IPB98y2} の比例則は, この条件を満たしているか? 加熱入力 P はパワーバランス $P = 3nT2\pi R\pi a^2 \kappa/\tau_E \propto \epsilon^2 \kappa n T R^3/\tau_E$ を用いて置き換えよ. $S \equiv \tau_R/\tau_A$ は上記 4 つの無次元パラメータと独立したパラメータか?

10.5 帯状流

解答 (ヒント)

3. 輸送の次元解析 τ_E^{scaling} に $P = 3nT2\pi R\pi a^2\kappa/\tau_E$ を代入する.

$$\begin{aligned} (\tau_E^{\text{scaling}})^{1+\alpha_P} &= C_1 I^{\alpha_I} B_t^{\alpha_B} T^{\alpha_P} R^{\alpha_R+3\alpha_P} n^{\alpha_n+\alpha_P} M^{\alpha_M} \epsilon^{\alpha_\epsilon+2\alpha_P} \kappa^{\alpha_\kappa+\alpha_P}, \\ \left(\frac{\tau_E^{\text{scaling}}}{\tau_B}\right)^{1+\alpha_P} &= C_1 I^{\alpha_I} B_t^{\alpha_B-\alpha_P-1} T^{2\alpha_P+1} R^{\alpha_R+\alpha_P-2} n^{\alpha_n+\alpha_P} M^{\alpha_M} \epsilon^{\alpha_\epsilon-2} \kappa^{\alpha_\kappa+\alpha_P}. \end{aligned}$$

ρ_* , β , q_I , ν_* の定義より

$$\begin{aligned} T^{1/2}R^{-1}B^{-1} &\propto \frac{\epsilon}{M^{1/2}}\rho_* \equiv \rho_\dagger, & nTB^{-2} &\propto \beta, \\ RBI^{-1} &\propto \frac{q_I}{\epsilon^2 K^2} \equiv q_\dagger, & nRT^{-2} &\propto \frac{\nu_*\epsilon^{3/2}}{q_I} \equiv \nu_\dagger. \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} B &= C_B \left(\frac{\beta^{1/4}}{\nu_\dagger^{1/4} \rho_\dagger^{3/2}} \right) R^{-5/4}, & n &= C_n \left(\frac{\beta}{\rho_\dagger^2} \right) R^{-2}, \\ I &= C_I \left(\frac{\beta^{1/4}}{q_\dagger \nu_\dagger^{1/4} \rho_\dagger^{3/2}} \right) R^{-1/4}, & T &= C_T \left(\frac{\beta^{1/2}}{\nu_\dagger^{1/2} \rho_\dagger} \right) R^{-1/2}. \end{aligned}$$

をえる. Kadomtsev 制限より

$$-\frac{1}{4}\alpha_I - \frac{5}{4}(\alpha_B - \alpha_P - 1) - \frac{1}{2}(2\alpha_P + 1) - 2(\alpha_n + \alpha_P) + (\alpha_R + \alpha_P - 2) = 0,$$

すなわち

$$2\alpha_n + \frac{3}{4}\alpha_P + \frac{5}{4}\alpha_B + \frac{1}{4}\alpha_I - \alpha_R + \frac{5}{4} = 0$$

が導かれた. τ_E^{IPB98y2} は Kadomtsev 制限を 1% の精度で満たしている. そして次のように表すことができる.

$$\frac{\tau_E^{\text{IPB98y2}}}{R/v_T} = C_E \beta^{-0.895} q_I^{-2.992} \nu_*^{-0.008} \rho_*^{-1.694} M^{0.96} \epsilon^{1.713} (\kappa^{0.290} K^{6.0}).$$

$\tau_R \propto a^2 T^{3/2}$, $\tau_A \propto an^{1/2}/(BM)$ であるから, $S \propto \epsilon MRT^{3/2} n^{-1/2} B$ である. したがって

$$S \propto \frac{RBT^{3/2}}{n^{1/2}} = \left(\frac{T^{1/2}}{RB}\right)^{-2} \left(\frac{nT}{B^2}\right)^{1/2} \left(\frac{nR}{T^2}\right)^{-1} \propto \rho_\dagger^{-2} \beta^{1/2} \nu_\dagger^{-1}$$

となり, S は独立した無次元量ではない.

第11章 トカマク

トカマク (tokamak) の名称は電流 (ток), 容器 (камер), 磁気 (магнит), コイル (катушка) の組合せといわれている。軸対称系でプラズマ電流によって、トロイダルプラズマに必要なポロイダル磁場をつくり、トロイダル磁場を充分強くしてクルスカル-シャフラーフ条件を満たし、MHD 安定性を保っている。この特性は、トロイダル磁場が弱い逆転磁場ピンチとは全く異なっている。トカマク実験や理論 [11.1][11.2][11.3], 計測 [11.4] についての解説, 教科書がある。

11.1 トカマク装置

トカマク装置の代表例として, Tokamak-T3, 大型トカマク JET, JT60U, TFTR および ITER を図 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, および 11.5 に示す。現在建設中の ITER (国際トカマク実験炉, International Tokamak Experimental Reactor) の断面図を図 11.6 に示す。

トロイダル磁場コイル, 垂直磁場, 整形磁場を発生する平衡磁場コイル (ポロイダル磁場コイルともいう), オーム加熱コイル (変流器の 1 次巻線), 真空容器が示されている。平衡磁場コイル, オーム加熱コイルを合わせてポロイダル磁場コイルということもある。1 次巻線の電流を立ち上げさせることにより, 2 次巻線となっているプラズマ中に電流が誘起される。JET では鉄心の変流器が用いられているが, JT60U と TFTR では空心の変流器が用いられている。真空容器は比較的薄いステンレス スティールあるいはインコネルでつくられ, トーラス方向に十分な電気抵抗を持っていて, 1 次巻線によって誘起された電圧がプラズマに加わるようにしている。この薄い真空容器はライナーと呼ばれる。実験を始めるまえに高真空を保ったままライナーを 150-400°C 程度の温度で長時間加熱 (ベイク) し, 脱ガスを行う。さらに弱いトロイダル磁場の中でプラズマ中に電流を流してプラズマをつくり放電洗浄を行う。このライナーの中にタングステン, モリブデンあるいはグラファイトのダイアフラムがあり, これでプラズマの大きさを決め, プラズマと真空容器との相互作用を小さくする。このダイアフラムをリミターと呼んでいる。またダイバーター配位ではセパトトリックスを含む磁気面によってプラズマの大きさが決まる (11.5 節)。また導体のシェルをライナーの周辺にかぶせて, プラズマを (その時定数に相当する時間の間) 平衡安定に保つために役立てる。これを導体シェルという。また垂直磁場の大きさ (11.2.2 節参照) を制御してプラズマを常に真空容器ライナーの中心に保つようにしている。トカマク研究進展の過程でいくつかの改良がなされ, 上記のような構造になってきた。またトーラス装置全体について適用できることであるが, 磁場の精度を向上することによって実験結果が改善されてきた。表 11.1 に代表的なトカマク装置のパラメーターを示す。

表 11.1 トカマクのパラメーター。

	R	$a(\times b)$	R/a	B_t	I_p	注
T-3	1.0	0.15	6.7	3.4	0.12	1968 年に $\tau_E > 30\tau_B$
T-10	1.5	0.39	3.8	5.0	0.65	
PLT	1.32	0.4	3.3	3.2	0.5	
TFTR	2.48	0.85	2.9	5.2	2.5	コンパクト
JET	2.96	1.25(\times 2.1)	2.4	3.45	7	非円形断面
JT60U	3.4	1.1(\times 1.4)	3.1	4.2	6	非円形断面, JT60 の改良
ITER	6.2	2.0(\times 3.4)	3.1	5.3	15	$Q \sim 10$ を目指す

R, a, b は m, B_t は T, I_p は

MA 単位である。

11.1 トカマク装置

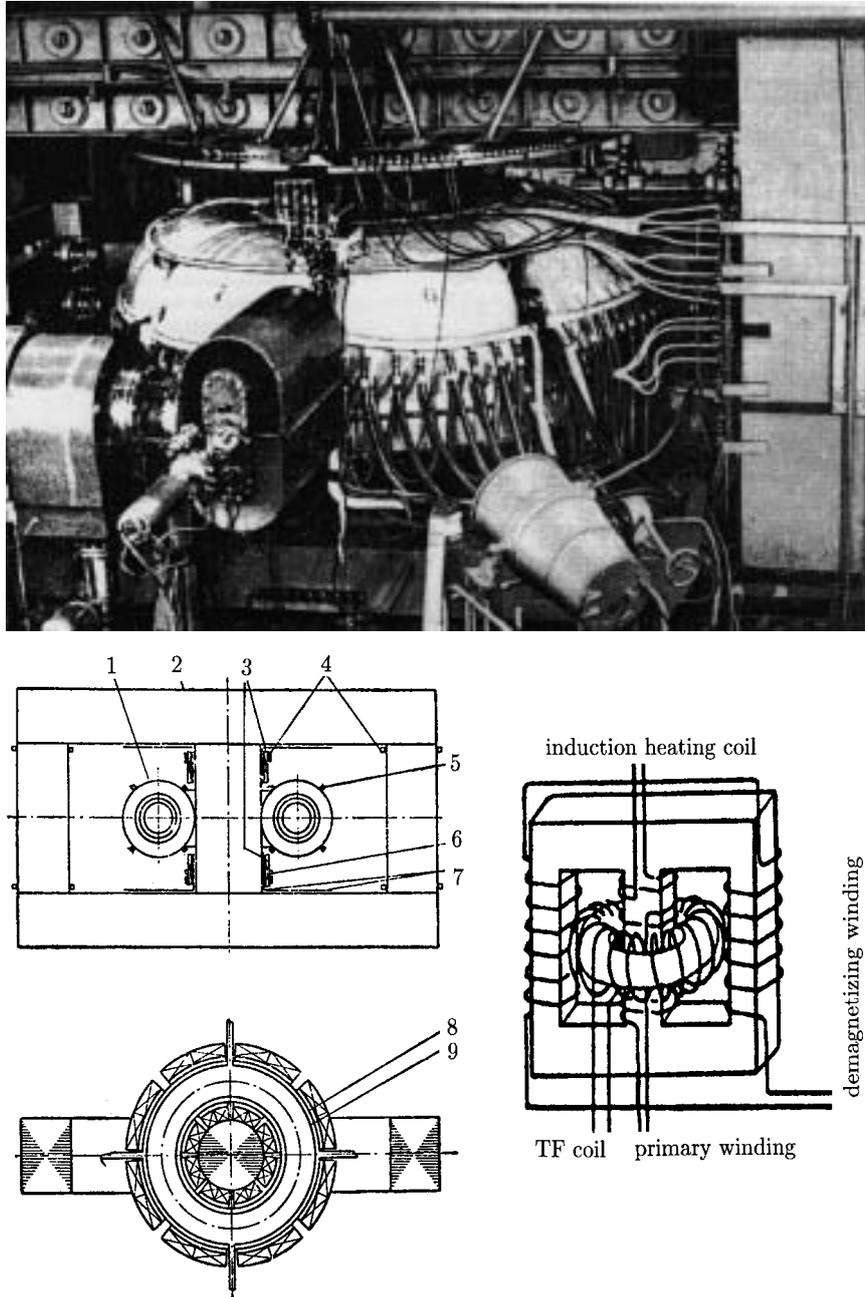


図 11.1 (上図) Tokamak-T3 装置の写真. (下図) Tokamak-T3 装置の概念図. (1) トロイダル磁場コイル (TF coil), (2) 変流器の鉄心, (3) 一次巻線 (primary winding), (4) 非磁気化巻線 (demagnetizing winding), (5) 補償コイル, (6) 誘導加熱コイル (induction heating coil), (7) 一次巻線用スクリーン板, (8) 外側の真空容器, (9) ライナー [11.5],[11.6].

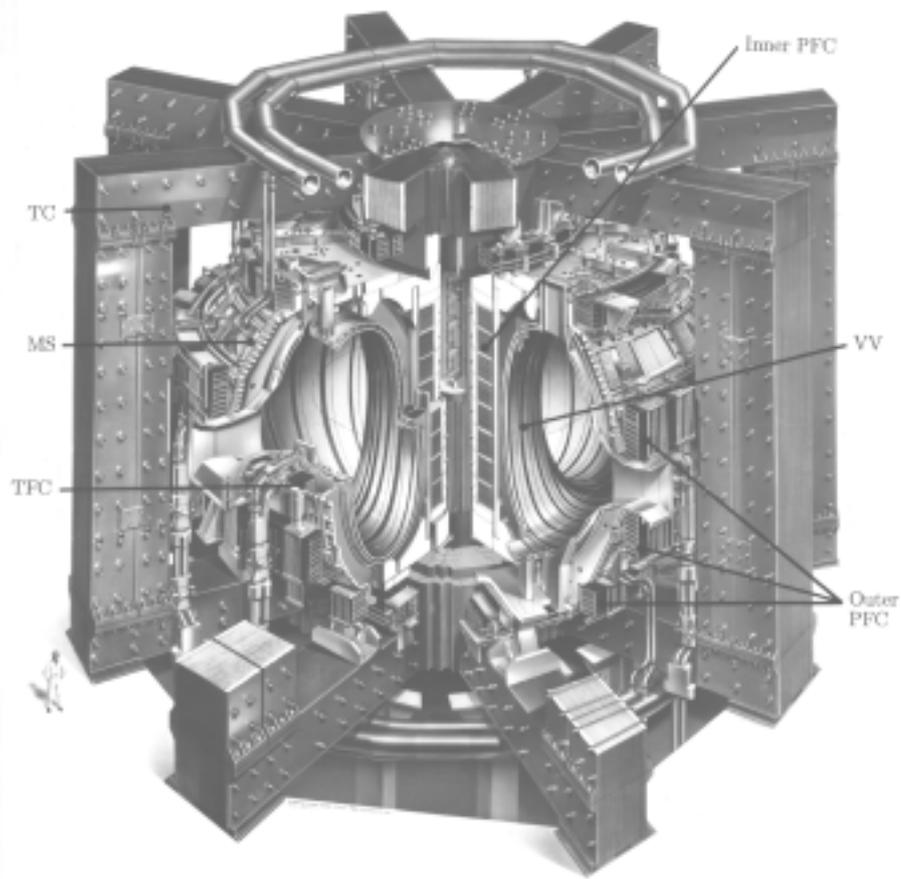


図 11.2 JET (Joint European torus) の説明図。真空容器 (VV) の周りにトロイダル磁場コイル (TFC) が配置され、その外側に外側ポロイダル磁場コイル (Outer PFC) (平衡磁場コイル)、内側ポロイダル磁場コイル (Inner PFC) (オーム加熱コイル) がトーラス方向に巻いてある。JET では鉄心の変流器 (TC) を用いている。MS は機械的支持部で、平衡磁場コイルがつくる垂直磁場によるトロイダル磁場コイルの転倒力を支える役割も果している。

11.1 トカマク装置

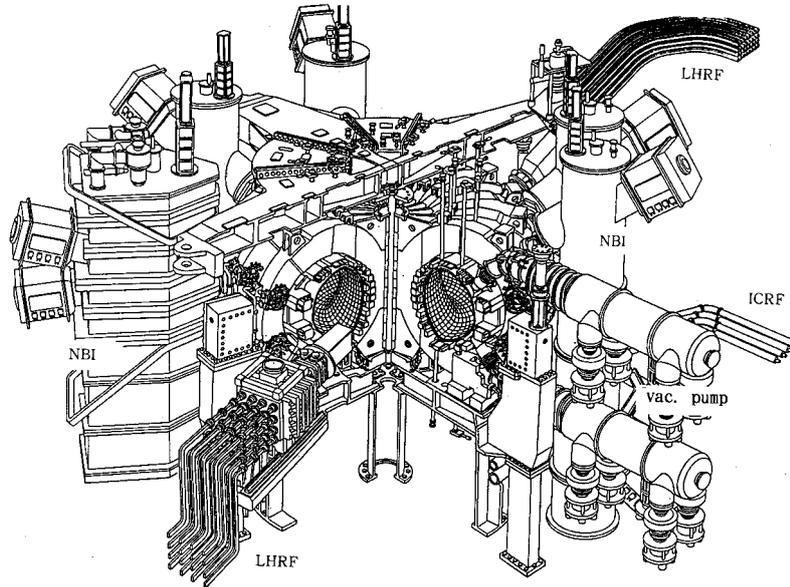


図 11.3 JT60U の鳥瞰図, 日本原子力研究開発機構.

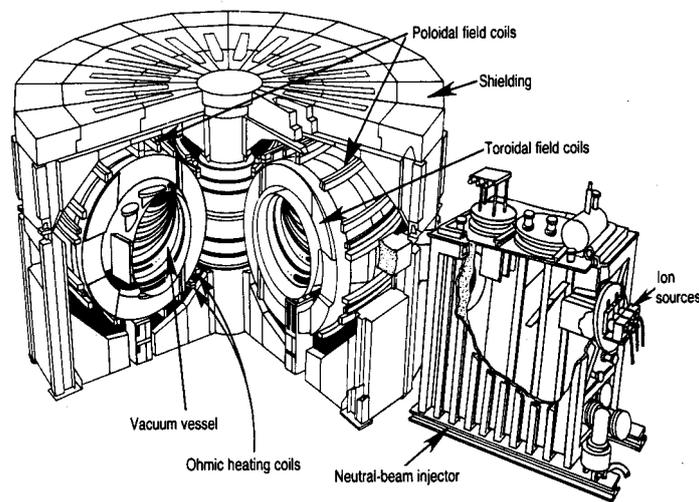


図 11.4 TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor) の鳥瞰図, プリンストン大学, プラズマ物理研究所, poloidal field coil(ポロイダル磁場コイル), shielding(放射線遮蔽), toroidal field coil(トロイダル磁場コイル), vacuum vessel(真空容器), ohmic heating coil(オーム加熱コイル), neutral-beam injector(中性粒子ビーム入射装置), ion sources(イオン源).

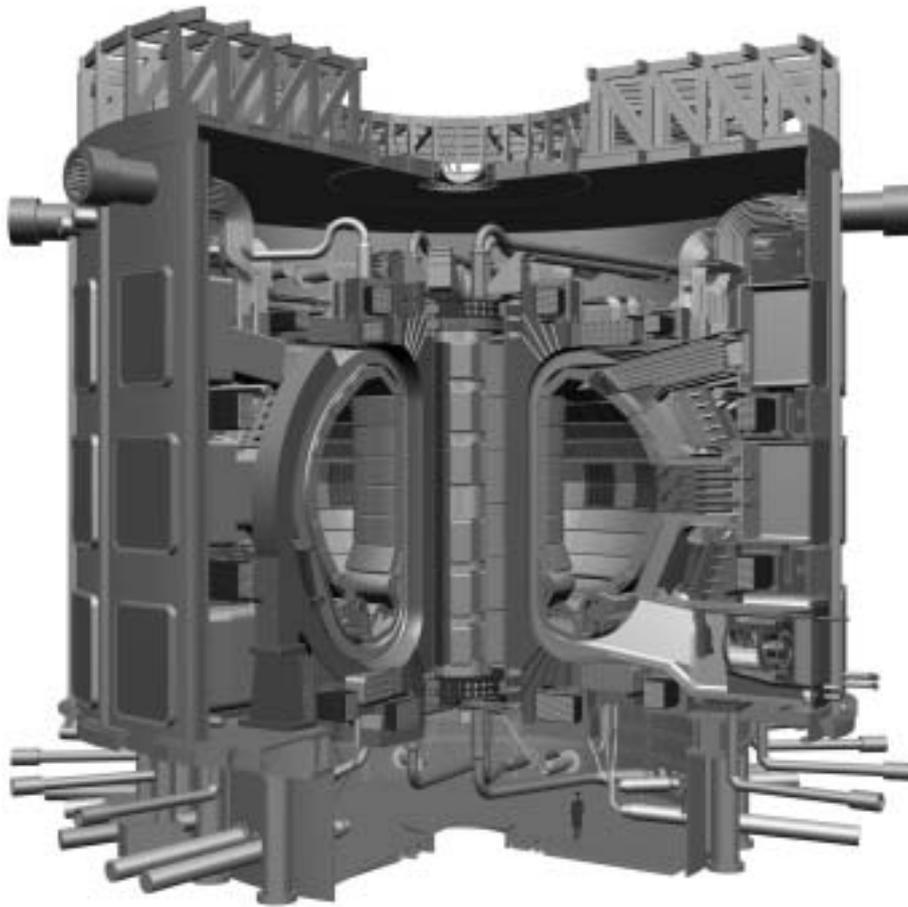


図 11.5 ITER (International Tokamak Experimental Reactor) の設計構造. [11.54] による. 図 11.6 の ITER のポロイダル断面設計図を参照のこと.

11.1 トカマク装置

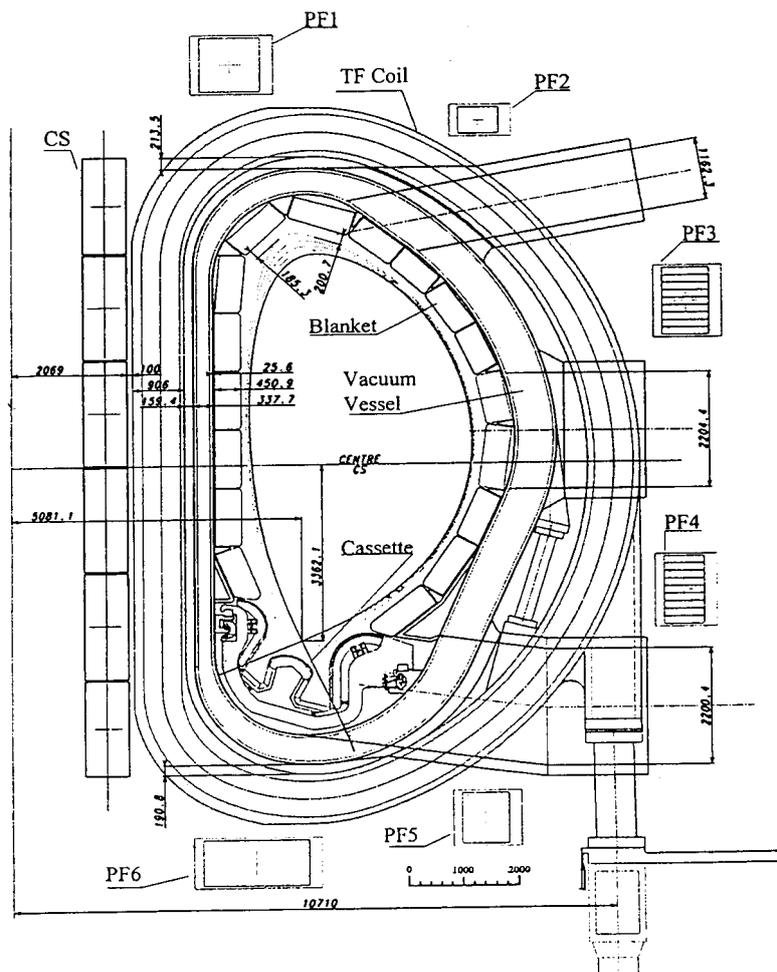


図 11.6 2000 年における ITER 概略設計のポロイダル断面図 [11.54].

11.2 平衡

高温プラズマを維持するためには、真空容器の壁から離してプラズマを閉じ込めなければならない。高温プラズマを適当な磁場配位で閉じ込めるためには、先ず平衡条件を満たす必要がある。

11.2.1 平衡方程式

プラズマが定常状態にあり、流速が0 ($\mathbf{V} = 0$) である場合、電磁流体力学方程式 (3.30) は次の平衡方程式に還元される。

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (11.1)$$

定常状態であるから

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (11.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (11.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (11.4)$$

である。(11.1)より

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (11.5)$$

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (11.6)$$

となる。(11.5)は \mathbf{B} と ∇p とが直交していることを示し、圧力が一定の等圧面は磁気面と一致することになる。また(11.6)は \mathbf{j} が等圧面に沿っていることを意味する。(11.2)を(11.1)に代入すると次のようになる。

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} \left(-\frac{1}{R} \mathbf{n} + \frac{\partial B / \partial l}{B} \mathbf{b} \right). \quad (11.7)$$

ここで $\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \equiv \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / 2)$,
 $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B^2 [(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b}((\mathbf{b} \cdot \nabla) B) / B] = B^2 [-\mathbf{n} / R + \mathbf{b}(\partial B / \partial l) / B]$ を用いた。 R は磁力線の曲率半径、 \mathbf{n} は曲率中心から磁力線上の点に向かう単位ベクトル、 l は磁力線に沿って計る長さである。曲率半径がプラズマの大きさ a に比べて大きく、 B の磁力線に沿う変化が、磁力線に直角な方向に対する変化より小さい場合は(11.7)の右辺は無視できる。そして

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} \sim \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

となる。 B_0 はプラズマ境界における磁場の大きさである。またプラズマ境界でプラズマ圧力を0とした。

系が軸対称で、かつ $\partial / \partial z = 0$ の場合、(11.7)は正確に次のように還元される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{r\mu_0}. \quad (11.8)$$

(11.8)に r^2 を掛け、部分積分すると

$$\left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right)_{r=a} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) 2\pi r dr$$

そして

$$\langle p \rangle + \frac{\langle B_z^2 \rangle}{2\mu_0} = p_a + \frac{B_z^2(a) + B_\theta^2(a)}{2\mu_0} \quad (11.9)$$

となる。 $\langle p \rangle$ は p の体積平均、 p_a はプラズマ境界における圧力の値である。(11.9)は圧力平衡の式である。プラズマ圧力の、外部磁場(B_0)圧力の比

$$\beta \equiv \frac{p}{B_0^2 / 2\mu_0} = \frac{n(T_e + T_i)}{B_0^2 / 2\mu_0} \quad (11.10)$$

11.2 平衡

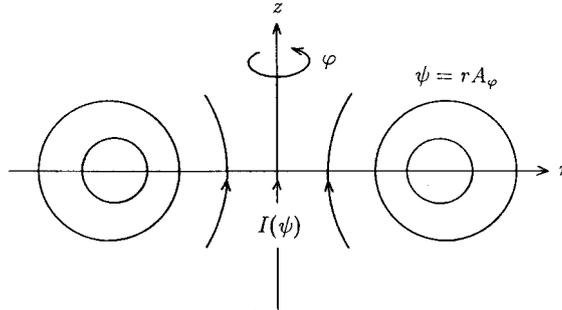


図 11.7 磁気面 $\psi = rA_\varphi$ および $I(\psi)$.

をベータ比という。磁場に閉じ込められたプラズマのベータ比 β は常に 1 より小さい。ポロイダル磁場の圧力に対するプラズマ圧力の比をポロイダルベータという。プラズマ境界の圧力が $p_a = 0$ で、 $|B_z(a) - B_z(r)| \ll |B_z(a)|$ の場合、ポロイダルベータ β_p は

$$\beta_p \equiv \frac{\langle p \rangle}{B_\theta^2(a)/2\mu_0} = 1 + \frac{B_z^2(a) - \langle B_z^2(r) \rangle}{B_\theta(a)^2} \approx 1 + \left(\frac{2B_z}{B_\theta^2} \right)_a \langle B_z(a) - B_z(r) \rangle \quad (11.11)$$

になる。 $B_z(a)$ はプラズマがない場合の z 方向の磁場である。 $\beta_p > 1$ の場合、プラズマ内部の磁場 $B_z(r)$ は真空の場合に比べて小さくなる ($B_z(r) < B_z(a)$)。このことはプラズマの反磁性を示している。 $\beta_p < 1$ の場合は、 $B_z(r)$ は $B_z(a)$ より小さくなる ($B_z(r) > B_z(a)$)。プラズマ電流が磁力線に沿って流れるとき、この電流はポロイダル磁場を作り、プラズマ電流にポロイダル成分が現れる。そして磁場の z 成分を増加させる。この効果がプラズマの常磁性の原因となる。

軸対称系における平衡の式
円筒座標系 (r, φ, z) を用いると、磁気面 ψ は

$$\psi = rA_\varphi(r, z)$$

で与えられる ((2.41) 参照)。そして、磁場の r および z 成分は

$$rB_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad rB_z = \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (11.12)$$

である。 ψ を磁束関数ともいう。 $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ より

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

であるから、 p は ψ のみの関数である。すなわち

$$p = p(\psi). \quad (11.13)$$

同様に $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ より

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} = 0$$

であるから、 rB_φ は ψ のみの関数になる。

$$rB_\varphi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi}. \quad (11.14)$$

(11.14) の式は、 $I(\psi)$ が $\psi = rA_\varphi$ で囲まれる円断面内をポロイダル方向に流れる電流値を示すことを意味している。(図 11.7 参照)。 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ の r 成分は ψ についての式を導く。すなわち

$$L(\psi) + \mu_0 r^2 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\psi)}{\partial \psi} = 0 \quad (11.15)$$

ただし

$$L(\psi) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi.$$

この式をグラド-シャフラノフの式という。電流密度 \mathbf{j} は磁気面を用いて、

$$j_r = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial I(\psi)}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I(\psi)}{\partial r},$$

$$\begin{aligned} j_\varphi &= \frac{-1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{L(\psi)}{\mu_0 r} \\ &= \frac{1}{\mu_0 r} \left(\mu_0 r^2 p' + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} (I^2)' \right) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで (\prime) は ψ による微分を表す。(11.12)(11.14)を用いると

$$\mathbf{j} = \frac{I'}{2\pi} \mathbf{B} + p' r \mathbf{e}_\varphi \quad (11.16)$$

$$L(\psi) + \mu_0 r j_\varphi = 0 \quad (11.17)$$

となる。 r, φ, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ とすると、 $\nabla\varphi = \mathbf{e}_\varphi/R$, $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r$ である。したがって磁場 \mathbf{B} は (11.12),(11.14) より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi} \nabla\varphi + \nabla\psi \times \nabla\varphi \quad (11.18)$$

と表すことができる。 $p(\psi)$, $I^2(\psi)$ は ψ の任意の関数である。 ψ の 1 次および 2 次式である場合、(11.15) は ψ についての線形微分方程式となる。プラズマ境界において $\psi = \psi_b$, $p_b = p(\psi_b)$, $I_b^2 = I^2(\psi_b)$ とし、簡単な 1 次式の場合を取り扱う。すなわち

$$p(\psi) = p_b - \frac{a}{\mu_0 R^2} (\psi - \psi_b), \quad (11.19)$$

$$I^2(\psi) = I_b^2 - \frac{8\pi^2}{\mu_0^2} b (\psi - \psi_b). \quad (11.20)$$

(11.15) および (11.17) は

$$L(\psi) = a \frac{r^2}{R^2} + b = -\mu_0 r j_\varphi \quad (11.21)$$

となる。磁気軸の位置を $(R, 0)$ とする。

$$\begin{aligned} \psi - \psi_0 &= \frac{b+a}{1+\epsilon} \left[\frac{1}{2} \left(1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{\epsilon}{8R^2} (r^2 - R^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1+\epsilon)b - (1-c)(b+a)}{24(b+a)R^4} (r^2 - R^2)^3 \right] \end{aligned} \quad (11.22)$$

は $(r-R), z$ の 3 次の項まで正確な解である [11.7],[11.8]。ここで ϵ, c は定数であり、 $\psi_0 = \psi(R, 0)$ である。(11.22) 右辺第 3 項の係数が 0 の場合、すなわち

$$(1+\epsilon)b - (1-c)(b+a) = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon = -(c-1)(a/b) - c \quad (11.23)$$

の場合は (11.22) はグラド-シャフラノフの式の厳密解になる [11.7],[11.8]。 $c \equiv R^2/(R^2 - R_x^2)$ とすると、(11.23) により ϵ は $\epsilon = -(a/b + R^2/R_x^2) R_x^2 / (R^2 - R_x^2)$ となり、(11.22) は次のように還元される。

$$\psi = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R_x^2} \right) z^2 + \frac{a + (R^2/R_x^2)b}{8R^2} \left((r^2 - R^2)^2 - (R^2 - R_x^2)^2 \right). \quad (11.24)$$

11.2 平衡

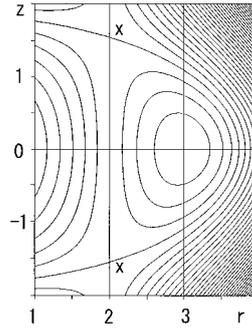


図 11.8 磁束関数 ψ (6.24) の等高線 (磁気面). $a/b = 4.4, R = 3, R_x = 2$ の場合を示す. X はセパトリックス点であり, X 点を通る磁気面はセパトリックス面である.

(11.24) はプラズマの境界 $\psi(r, z) = \psi_b$ を導体壁にしたときのプラズマ内部の平衡解である. $\psi(r, z) = 0$ はセパトリックス面になる (図 11.8 参照, 11.4 節参照). X 点の位置 $(R_x, \pm Z_x)$ の Z_x は $Z_x = [-(a/b + R^2/R_x^2)(1 - R_x^2/R^2)/2]^{1/2} R_x^2$ である. またセパトリックス面上 r の最大値 R_{\max} は $R_{\max} = (2 - R_x^2/R^2)^{1/2} R$ である. このセパトリックス面をプラズマ境界に選んだ場合 ($\psi_b = 0$) のアスペクト比 A , 非円形度 κ_s , 中心ポロイダルベータ β_{p0} はそれぞれ

$$\frac{1}{A} = \frac{R_{\max} - R_x}{2R} = \frac{(2 - R_x^2/R^2)^{1/2} - R_x/R}{2}$$

$$\kappa_s = \frac{2Z_x}{R_{\max} - R_x} = \frac{AZ_x}{R}$$

$$\beta_{p0} \equiv \frac{p(R, 0) - p_b}{B_z^2(R_x, 0)/2\mu_0} = \frac{a}{a + (R^2/R_x^2)b}$$

となる. A , と κ_s を与えると, β_{p0} が決まってしまう. この欠点を補うため Weening は Solovév の解 (6.24) に $r^2 \ln(r^2/R_x^2) - r^2$ の特解を加えた [11.9]. すなわち

$$\begin{aligned} \psi = \frac{b+d}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R_x^2}\right) z^2 + \frac{a + (R^2/R_x^2)(b+d)}{8R^2} \left((r^2 - R^2)^2 - (R^2 - R_x^2)^2\right) \\ - \frac{d}{4} \left(r^2 \ln \frac{r^2}{R_x^2} - (r^2 - R_x^2)\right). \end{aligned} \quad (11.25)$$

この場合セパトリックス $\psi(r, z) = 0$ をプラズマの境界としたとき, アスペクト比 A , 非円形度 κ_s , 中心ポロイダルベータ β_{p0} はそれぞれ

$$\frac{Z_x^2}{R_x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b+d} + \frac{R^2}{R_x^2}\right) \left(1 - \frac{R_x^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{R_{\max}^2}{R^2} = \left(2 - \frac{R_x^2}{R^2}\right) + \frac{2d[x \ln x / (x-1) - 1]}{a + (R^2/R_x^2)(b+d)}, \quad x \equiv \frac{R_{\max}^2}{R_x^2}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{R_{\max}/R - R_x/R}{2}, \quad \kappa_s = \frac{AZ_x}{R}$$

$$\beta_{p0} = \frac{a}{a + (R^2/R_x^2)(b+d)} \left[1 + \frac{2d(\ln(R^2/R_x^2) - (1 - R^2/R_x^2))}{(a + (R^2/R_x^2)(b+d))(1 - R_x^2/R^2)}\right]$$

となる.

移動対称系
($\partial/\partial z = 0$) における磁気面 ψ , 磁場 \mathbf{B} および圧力 p は次のように表される.

$$\psi = A_z(r, \theta),$$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad B_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} I(\psi),$$

$$p = p(\psi).$$

平衡の式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \mu_0 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\psi)}{\partial \psi} = 0, \quad (11.26)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi} I' \mathbf{B} + p' \mathbf{e}_z, \quad \Delta \psi + \mu_0 j_z = 0 \quad (11.27)$$

である.

ヘリカル対称系の場合についても同様な平衡を導くことができる (13.1 節参照).

11.2.2 トカマク平衡のための垂直磁場

プラズマ電流 I_p によって作られるポロイダル磁場はプラズマリングの内側は強く, 外側は弱い. したがって平衡を保つためには図 11.9 に示すような方向に垂直磁場を加えて, 内側のポロイダル磁場を弱め, 外側のポロイダル磁場を強める必要がある. 平衡のために必要な垂直磁場 B_\perp の値を求めてみよう.

プラズマ電流環が拡がろうとするフープ力 F_h は

$$F_h = - \left. \frac{\partial}{\partial R} \frac{L_p I_p^2}{2} \right|_{L_p I_p = \text{const.}} = \frac{1}{2} I_p^2 \frac{\partial L_p}{\partial R}$$

で与えられる. ただし L_p はプラズマ電流環の自己インダクタンスで

$$L_p = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 2 \right) \quad (11.28)$$

である. ここで $\mu_0 R (\ln 8R/a - 2)$ はプラズマ外部領域の磁場エネルギーによるインダクタンスであり, $\mu_0 R l_i/2$ はプラズマ内部領域の磁場エネルギーによるインダクタンスで

$$l_i \equiv \frac{2\pi \int_0^a B_p^2(\rho) \rho d\rho}{\pi a^2 B_p^2(a)} \quad (11.29)$$

である. したがってフープ力は

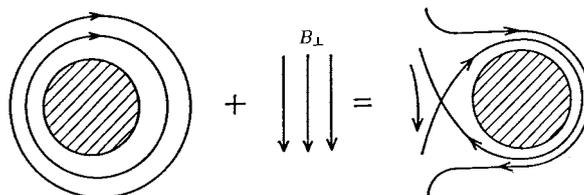


図 11.9 プラズマ電流によるポロイダル磁場と垂直磁場との組合せ.

11.2 平衡

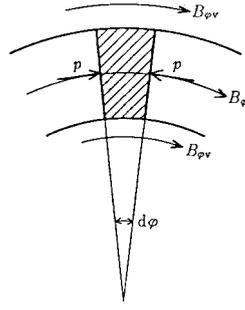


図 11.10 トーラス・プラズマに加わる力の平衡.

$$F_h = \frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right).$$

プラズマ圧力によって広がろうとする力 F_p は (図 11.10 参照)

$$F_p = \langle p \rangle \pi a^2 2\pi.$$

プラズマ中の磁場によるトーラス方向の張力によって縮まろうとする力 F_{B1} は

$$F_{B1} = -\frac{\langle B_{\varphi}^2 \rangle}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2$$

であり, またプラズマ外部の磁場による圧力により拡がる力 F_{B2} は

$$F_{B2} = \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2$$

である. また垂直磁場 B_{\perp} がプラズマ電流におよぼす力 F_1 は

$$F_1 = I_p B_{\perp} 2\pi R$$

である. したがってこれらの力が釣り合う平衡条件は

$$\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right) + 2\pi^2 a^2 \left(\langle p \rangle + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} - \frac{\langle B_{\varphi}^2 \rangle}{2\mu_0} \right) + 2\pi R I_p B_{\perp} = 0$$

であり, 必要な垂直磁場 B_{\perp} は

$$B_{\perp} = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 + \beta_p - \frac{1}{2} \right) = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right) \quad (11.30)$$

である. ただし

$$\beta_p = \frac{\langle p \rangle}{B_p^2(a)/2\mu_0}, \quad (11.31)$$

$$\Lambda = \beta_p + l_i/2 - 1 \quad (11.32)$$

である. この式を導くにあたって (11.9) を用いた. 円形断面トカマクプラズマの平衡に関しては文献 [11.3, 11.10] に詳しく議論されている.

プラズマ位置の制御

垂直磁場 B_{\perp} が一様ならば, 平衡状態は水平方向のプラズマ位置の変化に対して中立である. 垂直磁場が図 11.11 に示すように曲げるとプラズマの位置は垂直磁場の R の方向成分によって上

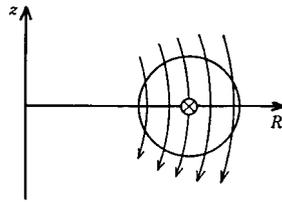


図 11.11 平衡を保つための垂直磁場.

下方向の移動に対して安定化されることを示そう. 質量 M のプラズマ環に加わる力の z 成分 F_z は

$$F_z = -2\pi R I_p B_R$$

である. また $(\partial B_R / \partial z) - (\partial B_z / \partial R) = 0$ より

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -2\pi R I_p \frac{\partial B_R}{\partial z} z = 2\pi I_p B_z \left(-\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) z \quad (11.33)$$

をえる. $I_p B_z < 0$ であるから, 垂直位置安定化条件は減衰係数 (decay index) n に対し

$$n \equiv -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} > 0$$

となる.

水平方向の移動に対して加わる力 F_R は

$$M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = F_R = 2\pi R I_p (B_z - B_\perp) \Delta R$$

で与えられる. ここで B_\perp の平衡に必要な値 ((11.30) 参照) は

$$B_\perp = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right), \quad \Lambda = \frac{l_i}{2} + \beta_p - 1$$

である. プラズマは完全導体であるとする. 磁束保存の関係から

$$\frac{\partial}{\partial R} (L_p I_p) + 2\pi R B_\perp = 0$$

を満たす. ここでプラズマのインダクタンスは $L_p = \mu_0 R (\ln(8R/a) + l_i/2 - 2)$ である. したがって半径方向の運動方程式は

$$M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = 2\pi I_p B_\perp \left(\frac{3}{2} - n \right) \Delta R \quad (11.34)$$

となる ($\ln(8R/a) \gg 1$ の近似をした). これよりプラズマ水平位置の安定化条件は

$$\frac{3}{2} > n$$

となる.

11.2.3 平衡によるポロイダルベータ値の上限

前節では平衡を保つために必要な B_\perp の磁場の大きさは

$$B_\perp = B_a \frac{a}{2R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right)$$

11.2 平衡

であることを導いた。この B_{\perp} はトーラスの内側ではプラズマ電流によるポロイダル磁場成分と反対方向になるので、全体のポロイダル磁場は内側で0となり、セパトリックスが生じる。ここでもしプラズマの圧力が増えて β_p が大きくなると、必要とする B_{\perp} は大きくなり、セパトリックスの点がプラズマに近づく。今簡単のためプラズマの圧力 p がプラズマの境界まで一定であり、かつプラズマ電流 I_p はプラズマの表面にしか流れないというモデルを考える。この簡単化されたモデルにおいてプラズマの表面における圧力平衡の関係を求めてみると

$$\frac{B_{\omega}^2}{2\mu_0} + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} \approx p + \frac{B_{\varphi i}^2}{2\mu_0} \quad (11.35)$$

となる。ここで B_{ω} はプラズマ境界の外側におけるポロイダル磁場であり、 $B_{\varphi v}$ 、 $B_{\varphi i}$ はそれぞれプラズマ境界の外側および内側の φ 方向の磁場である。そして (11.14) より $1/r$ に比例する。 $r = R$ における $B_{\varphi v}$ 、 $B_{\varphi i}$ の値をそれぞれ $B_{\varphi v}^0$ 、 $B_{\varphi i}^0$ とすると、(11.35) は

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 p - ((B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2) \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

である。許容されるプラズマ圧力の上限はトーラスの内側 $r = r_{\min}$ におけるポロイダル磁場が0となる条件で決まる。すなわち

$$2\mu_0 p_{\max} \frac{r_{\min}^2}{R^2} = (B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2. \quad (11.36)$$

$r = R + a \cos \omega$ で与えられるから、(11.35) は p_{\max} を用いて ($r_{\min} = R - a$)

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 p_{\max} \left(1 - \frac{r_{\min}^2}{r^2}\right) = 8\mu_0 p_{\max} \frac{a}{R} \cos^2 \frac{\omega}{2}$$

である。ここで $a/R \ll 1$ を仮定した。 $\oint B_{\omega} a d\omega = \mu_0 I_p$ の関係よりポロイダルベータの上限 β_p^c は

$$\beta_p^c = \frac{\pi^2 R}{16 a} \approx 0.5 \frac{R}{a} \quad (11.37)$$

となる。このように簡単化されたモデルによるポロイダル・ベータ比の上限はアスペクト比 R/a の半分程度である。回転角 ι および安全係数 $q_s = 2\pi/\iota$ を用いると

$$\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}} = \frac{a}{R} \left(\frac{\iota}{2\pi}\right) = \frac{a}{Rq_s}$$

の関係があるので、ベータ比 β は

$$\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} \approx \frac{p}{B_{\omega}^2/2\mu_0} \left(\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}}\right)^2 = \left(\frac{a}{Rq_s}\right)^2 \beta_p$$

である。したがってこの簡単なモデルのベータ比の上限は

$$\beta^c = \frac{0.5 a}{q_s^2 R} \quad (11.38)$$

である。

縦長のプラズマのベータ上限
円形断面トカマクのポロイダルベータの上限は $\beta_p = 0.5R/a$ で与えられるを導いた。水平方向の半径 a 、垂直半径 b の縦長プラズマ断面トカマクにおいても同様の考察により同じ結果が得られる。しかし非円形縦長断面トカマクのトロイダル磁場 B_t とポロイダル磁場 B_p の大きさの比は円形断面の場合と異なってくる。ポロイダル方向のプラズマ周長が、縦長の場合 $2\pi aK$ と大きくなるので、この効果を考慮すると平均ポロイダル磁場は

$$\bar{B}_p = \mu_0 I_p / (2\pi aK)$$

となる. ここで K は近似的に $K = [(1 + (b/a)^2)/2]^{1/2}$ で与えられる.

$$\frac{\bar{B}_p}{B_t} = \frac{Ka}{Rq_I}, \quad q_I = \frac{Ka}{R} \frac{B_t}{\bar{B}_p} \quad (11.39)$$

であるので, 縦長トカマクのベータ上限は

$$\beta \leq 0.5K^2 \frac{a}{Rq_I^2} \quad (11.40)$$

となる. この値は円形の場合に比べて K^2 倍である.

プラズマ断面を縦長にするために, 垂直磁場の減衰係数 n を負にしなければならない. そのためプラズマの上下位置移動に対して不安定になる. プラズマの周りに導体シェルがなければ成長率はポロイダルアルフベン通過時間の逆数になる. したがってプラズマの周りに抵抗シェルを備え, 成長率をシェルの表皮時間の逆数程度に抑える必要がある. そしてプラズマ垂直位置を保つため大半径 (水平) 方向の磁場の变化をフィードバック制御をする必要がある. (この章の終わりにある問題 4,5 を参照).

11.2.4 シャフラノフ・シフト

安全係数 q_s の磁気面上, 磁力線にそって

$$j_{\parallel} = \frac{2q_s}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta$$

のフィルシ-シュルーター電流が流れていることを述べた ((4.8) 参照). プラズマ中のフィルシ-シュルーター電流は垂直磁場を作り, プラズマ中心を外側にシフトさせる. これをシャフラノフシフトという. アスペクト比の大きい円形断面トカマクの場合, 半径 r の磁気面の中心が, プラズマ境界 ($r = a$) の中心からずれるシャフラノフシフト $\Delta(r)$ は次の式で与えられる [11.11].

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{1}{RrB_{\theta}^2} \left(\beta_p B_{\theta a}^2 \int_0^r r^2 \frac{d}{dr} \frac{p}{\langle p \rangle} dr - \int_0^r r B_{\theta}^2 dr \right). \quad (11.41)$$

ここで B_{θ} は r におけるポロイダル磁場であり, $B_{\theta a}$ は $r = a$ におけるポロイダル磁場である. β_p はポロイダルベータで $\langle p \rangle$ は圧力の体積平均 $\langle p \rangle = \int_0^a p 2r dr / a^2$ である. パラボリックな圧力分布の場合, (11.41) の左辺の圧力項は $-(a/R)\beta_p (B_{\theta a}/B_{\theta})^2 (r/a)^3$ になり, 平坦な電流分布の場合, (11.41) の左辺の第1項は $-(a/4R)(r/a)$ となる. パラボリックな圧力分布で平坦な電流分布の場合, シャフラノフシフトは $\Delta/a = (a/2R)(\beta_p + 1/4)(1 - (r/a)^2)$ となる.

11.3 MHD 安定性および密度上限

低ベータ・トカマクの不安定性では第5章で取り扱うキンク不安定性がある. この不安定性は安定係数 q_a や電流分布を適当に選ぶことにより避けることができる. トカマクプラズマを高ベータにしていくと, ベータ値はバルーニング不安定性によって制限される (5.6 節). これは磁力線の曲率の悪い領域に局在する, 圧力勾配によって引き起こされる交換型不安定性である. ベータ値上限は 5.6 節より $\beta_{\max} \sim 0.28(a/Rq_a)$ となる. キンクやバルーニングモードによるベータ上限は電流分布 (シア) やプラズマ断面の形に依存する.

例えばプラズマが MHD 安定であっても, プラズマに有限な抵抗があるときティアリング・モードが不安定になりえる (6.1 節). 安全係数 $q(r)$ が有理数になる有理面 (図 11.12 の場合は $q(r) = 1, 3/2, 2$) において, Δ' が正になるときティアリング・モードが成長し, 図 11.12 に示すような磁気アイランドが生ずる. プラズマ電流分布が中心に鋭く分布する (ピーキング) と中心部で $q(0) < 1$ となり, $q(r) = 1$ の磁気面付近で $m = 1, n = 1$ モードが成長する. 磁気面に再結合が起こると図 11.13 に示すようにプラズマ中心部の高温部分が外へはき出され, 電流分布が平坦化する. そして中心部の熱エネルギーが失われる [11.12]. 中心部の電子温度が周辺部より高く電気抵抗が小さいので再び電流分布がピーキングして同じ現象がくりかえされる. このような現象を内部破壊的不安定性という.

トカマクが安定に動作できるプラズマ電流 I_p と密度 n_e の領域は限られている. トカマクで実験的にえられる電子密度上限の尺度としてグリーンバルド密度

$$n_G (10^{20} \text{m}^{-3}) \equiv \frac{I_p (\text{MA})}{\pi a (\text{m})^2} \quad (11.42)$$

11.3 MHD 安定性および密度上限

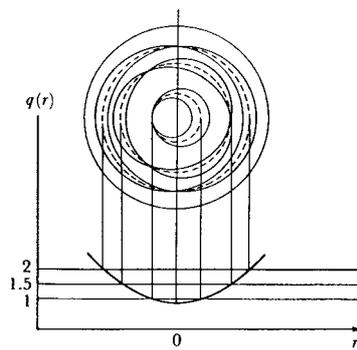


図 11.12 $q(r)=1, 3/2, 2$ の有理面に現れる $m=1, m=3/2, m=2$ の磁気アイランド.

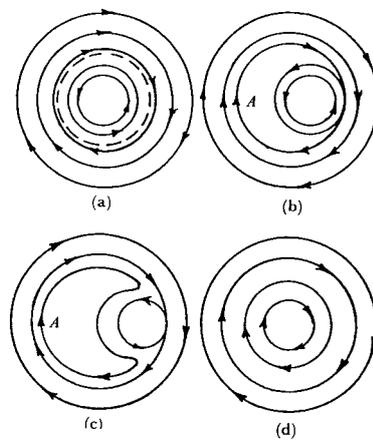


図 11.13 磁気面の再結合により中心部の高温部分が外へはき出される様子.

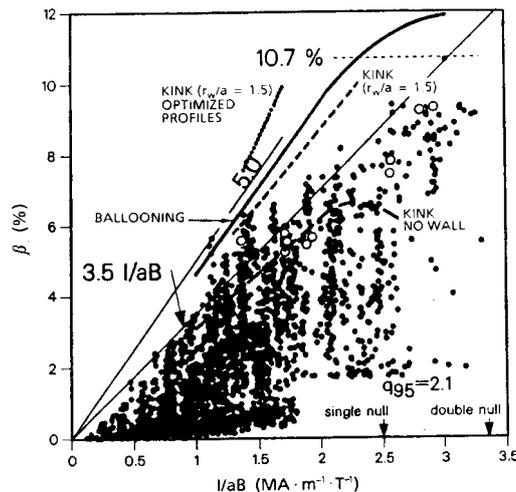


図 11.14 DIII-D における I/aB と観測されたベータ値をプロットした図. 導体壁の位置 (r_w/a) をいくつか仮定して計算したベータ値上限の線も描いている. 文献 [11.19] による.

が用いられる. 平均電子密度 $\langle n_e \rangle$ を n_G で正規化した数を Greenwald-Hugill-Murakami パラメーターあるいはグリーンバルドパラメーターと呼んでいる. そして殆ど多くのトカマク実験で

$$N_G \equiv \frac{\langle n_e \rangle}{n_G} < 1 \quad (11.43)$$

の経験則が成り立つ [11.13]. ここで n_{20} は 10^{20}m^{-3} 単位の密度である. N_G は別の式に変形できる ((11.39) 参照).

$$N_G = \frac{0.628}{K^2} \frac{\langle n_{20} \rangle}{B_t(\text{T})/R(\text{m})} q_i.$$

電子密度の上限はプラズマ-壁相互作用に敏感に依存する. 実験比例則 $N_G < 1$ は加熱入力に依存性を示していないが, 加熱入力を増やすとその上限も増える傾向がある. また ASDEX-U [11.15] で, 水素の氷のペレットをプラズマの内側すなわち高磁場側から打ち込むと N_G が ~ 1.5 に増えた. したがって N_G をさらに増やせる可能性も残っている.

プラズマ境界における安全係数 q_a は多くの場合 $q_a > 3$ である. 安定領域 ($N_{\text{GHM}} < 1$, $1/q_a < 1/2 \sim 1/3$) からはみ出すと, いわゆる破壊的不安定と呼ばれる激しい擾乱が生ずる. プラズマ電流を誘起するループ電圧に負のスパイク (negative spike) 状の波形が現われる. これはプラズマ電流分布が急に拡がり, 内部インダクタンスが小さくなるためである. そしてプラズマ熱エネルギーが急速に失われ, 不安定性が激しい場合はプラズマ電流が流れなくなり放電が停止する. 停止の直前には電子温度が下がり, プラズマ抵抗が増大し, ループ電圧に正のパルスが生ずる. プラズマ放電は急速に停止する. ディスラプションの時間スケールは抵抗性ティアリングモードで予知される時間スケール (6.1 節) よりも非常に速いことがある. 破壊的不安定性の候補となる機構として, $m = 2/n = 1$ ($q(r) = 2$) と $m = 3/n = 2$ ($q(r) = 1.5$) の磁気アイランドの重なりや, $m = 2/n = 1, m = 1/n = 1$ 磁気アイランドの再結合などが論ぜられている. トカマクプラズマの MHD 不安定性や輸送についての解説は文献 [11.15]~[11.18] を参照されたい.

縦長断面プラズマの MHD 安定なベータ値上限

核融合反応の出力密度は $n^2 \langle \sigma v \rangle$ に比例するが, イオン温度 T_i が数 $\sim 10 \text{keV}$ 付近では $\langle \sigma v \rangle \propto T_i^2$ であるから, 核融合炉出力はおおよそプラズマ圧力 $p = nT$ の 2 乗に比例する. したがって経済的な核融合炉を作るためにはベータ比 $\beta = p/(B^2/2\mu_0)$ の大きいプラズマを閉じ込める必要がある. ISX-B, JFT-II, PDX, PLT など高速中性粒子入射加熱によって平均ベータ値 $\langle \beta \rangle \sim 3\%$ の値を実現することができた. これらの装置は円形断面であるが, プラズマ断面が縦長非円形断面の DIII-D 装置 ($a=0.45 \text{m}, B_t=0.75 \text{T}, I_p=1.29 \text{MA}, I_p/aB_t=3.1 \text{MA/Tm}, \beta_N \sim 3.6, \kappa_s=2.35, R=1.43 \text{m}.$) において, 1990 年 $\langle \beta \rangle = 11\%$ を実現した [11.19] (図 11.14).

MHD 不安定性の線形成長率 ω^2 を計算するのに, エネルギー積分の変分法が用いられる. すなわち

$$\delta L = \delta \int \xi \cdot \widehat{K} \xi dr = 0. \quad (11.44)$$

11.3 MHD 安定性および密度上限

ただし $\int \rho_m \xi^2 d\mathbf{r}$ を一定とする拘束条件

$$\delta \int \rho_m \xi^2 d\mathbf{r} = 0$$

がつく。固有値 ω^2 は

$$\omega^2 = \frac{\int \xi \cdot \widehat{K} \xi d\mathbf{r}}{\int \rho_m \xi^2 d\mathbf{r}}$$

で与えられる。エネルギー積分は5.4節で述べられた。 $\omega^2 < 0$ のとき、線形成長率は $\gamma = (-\omega^2)^{1/2}$ である [$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$]。固有値問題を解く際、数値的手法による偽りのモードの導入を防ぐために、正規有限要素法 (regular finite elements method) を用い ERATO コードが開発された。Troyon ら [11.20] は縦長断面トカマクの種々のケースについて MHD 不安定性の成長率を計算し、最適な条件のもとで安定なベータ値上限の比例則を導いた [11.20, 11.21]。

$$\beta_c(\%) = \beta_N \frac{I_p(\text{MA})}{a(\text{m})B_t(\text{T})}. \quad (11.45)$$

β_N はトロロン係数 (Troyon factor) または正規化ベータ ($\beta_N = 2 \sim 3.5$) という。図 11.15 は β が上限を超えたときに成長する不安定モードによるプラズマの流れをポロイダル断面に投影したものである。

次のような定義

$$\bar{B}_p \equiv \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a K}, \quad q_1 \equiv K \frac{a}{R} \frac{B_t}{B_p} \quad (11.46)$$

を用いると、ベーター上限は

$$\beta_c(\%) = 5\beta_N K^2 \frac{a}{R q_1} \quad (11.47)$$

のようになる。ここで $2\pi K a$ はプラズマ境界の周長を表し、 K は近似的に

$$K^2 \simeq (1 + \kappa_s^2)/2$$

で与えられる。 κ_s は垂直方向の半径 b と水平方向の半径 a との比である。 q_1 は円筒安全係数という。 q_1 はアスペクト比を大きくしたときの安定係数に相当する。 $\beta_c(\%)$ と β_p との間には

$$\beta_c(\%) \beta_p = 0.25 \beta_N^2 K^2$$

の関係がある。

磁気面 ψ における安全係数 q_ψ は

$$\begin{aligned} q_\psi &= \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\varphi}{dl_p} dl_p = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_t}{R B_p} dl_p \\ &= \frac{1}{2\pi d\psi} \oint B_t \frac{d\psi}{R B_p} dl_p = \frac{1}{2\pi d\psi} \oint B_t ds dl_p = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\psi} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで $d\psi = R B_p ds$, ds は $d\psi$ (ψ はポロイダル磁束関数 (磁気面関数)) の厚さ、 $d\Phi$ は $d\psi$ に対応する厚さ ds を通過するトロイダル磁束である。 q_ψ は有限なアスペクト比の場合 q_1 からずれることに注意されたい。全トロイダル磁束の 95% を含む磁気面における安全係数の近似式として次のような式が用いられている ([11.22] の 2160 ページ参照)。

$$q_{95} = q_1 f_\delta f_A = \frac{a^2 B}{(\mu_0/2\pi) R I} \frac{1 + \kappa_s^2}{2} f_\delta f_A, \quad (11.48)$$

$$f_\delta = \frac{1 + \kappa_s^2(1 + 2\delta^2 - 1.2\delta^3)}{1 + \kappa_s^2}, \quad f_A = \frac{1.17 - 0.65/A}{(1 - 1/A^2)^2}.$$

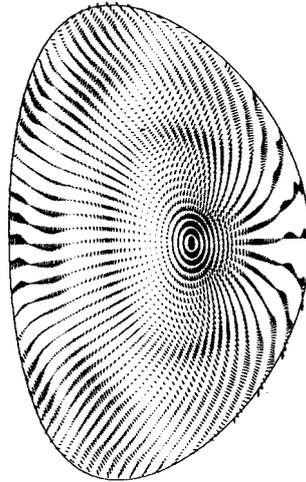


図 11.15 不安定な大域的 $n = 1$ モード [11.20]. 特異面 $q = 2, 3$ および 4 において揺動変位が大きくなるため、その位置がよく見える. $q_0 = 1.35$, $\beta = 3\%$.

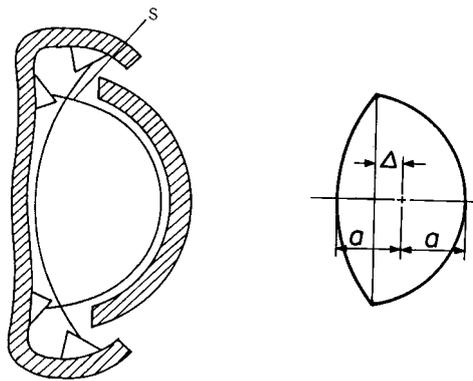


図 11.16 左図 セパトトリックス S をもつ磁気面によりプラズマ境界を定めるダイバーター構成. 右図 三角度 $\delta = \Delta/a$ の説明図 ((11.76) 参照).

(11.48) はダイバーター配置の場合 (11.4 節参照) にも近似的に用いられている. ここで δ は (11.76) で定義されるプラズマ断面の三角度, $\delta \approx \Delta/a$ (Δ は図 11.16 に示される) である. また f_δ は断面の三角度による因子であり, f_A は有限なアスペクト比による因子である.

11.4 不純物制御, スクレイブ オフ層, ダイバーター

プラズマ中の電子がイオンと衝突して起こる制動放射の放射損失 P_{brems} は単位体積, 単位時間あたり

$$P_{\text{brems}} = 1.5 \times 10^{-38} Z_{\text{eff}} n_e^2 (T_e/e)^{1/2} \quad (\text{W/m}^3)$$

である. 制動放射によるエネルギー損失時間を $\tau_{\text{brems}} = (3/2)n_e T_e / P_{\text{brems}}$ によって評価すると

$$\tau_{\text{brems}} = 0.16 \frac{1}{Z_{\text{eff}} n_{20}} \left(\frac{T_e}{e} \right)^{1/2} \quad (\text{sec})$$

となる (n_{20} は 10^{20} m^{-3} 単位, T_e/e は eV 単位). $Z_{\text{eff}} \sim 2$, $n_e \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $T_e \sim 10 \text{ keV}$ のとき $\tau_{\text{brems}} \sim 16/Z_{\text{eff}} \text{ sec}$ である. したがって不純物イオンによって制動放射, 再結合放射, 線スペクトル放射などが増大すると放射損失のみによっても炉心プラズマ条件を満たさなくなる. プラズマの温度が高くなってくるとプラズマから飛び出すイオンが真空容器の壁やリミターにぶつかり,

11.4 不純物制御, スクレイプ オフ層, ダイバーター

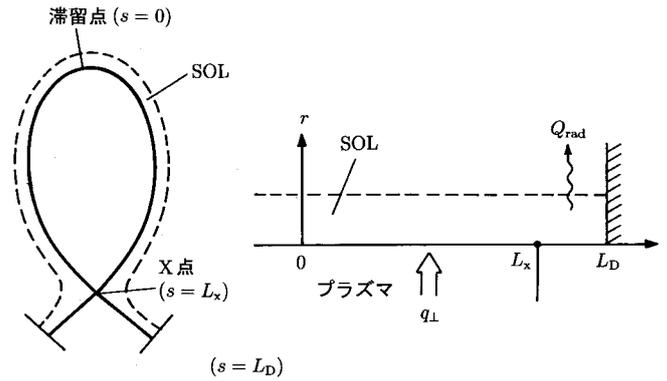


図 11.17 左図: スクレイプオフ層 (SOL) およびダイバーター領域の配位. 右図にスラブモデルの座標を示す.

そこから不純物イオンをたたきだす. スパッターされた不純物がプラズマ中に入ってくると, 高電離化したイオンが大量の放射を出し, プラズマを放射冷却する. したがって不純物制御は核融合の重要課題である.

実験装置においては, 真空容器の脱ガス, 放電洗浄を行うことにより壁に付着している軽イオン不純物 (C, O など) を取り除くことができる. しかし壁材料自身の原子 (Fe など) の重イオンスパッタリングは放射損失を非常に増大させる. そのためカーボンタイルで壁を蔽う工夫をしている (C の不純物イオンによる放射は増える). 図 11.16 に示すようにセパトトリクスをもつ磁気面によってプラズマの境界をつくる配位は, プラズマと容器との相互作用をダイバーター部の標的板 (target plate) に限定できるため良い効果を上げています. プラズマ境界の外側周辺のスクレイプオフ層 (SOL, Scrape Off Layer) では, プラズマはセパトトリクス付近 (外側) の磁力線に沿って周辺プラズマの音速程度で中性化プレートに流れこみ, そこで中性化される. 中性化プレートの材料がスパッターしても, ダイバーター領域でイオン化され, しかも重イオンの熱速度はプラズマの流れの速さ (\sim 水素イオンの熱速度) より小さいため, プラズマ本体に向かって逆流することが少ない. ダイバーター領域においては不純物放射によって, その領域のプラズマ電子温度は冷える. また磁力線に沿う圧力平衡により中性化プレート付近の密度が上昇する. したがって中性化プレートへ衝突するイオンが減速され, スパッタリングが減る効果が観測されている.

しかしながらダイバーター付近でも, スクレイプ オフ層の幅はあまり広くない. そして全エネルギー損失の大部分はダイバーターの標的板の狭い領域に集中する. 標的板の過酷な熱負荷は炉設計の重要課題である. スクレイプ オフ層およびダイバーター領域の物理的過程は実験的, 理論的に活発に研究されている [11.23].

スクレイプ オフ層におけるエネルギー輸送について解析してみよう. 磁力線方向の熱輸送は古典的な電子の熱伝導によって支配されると仮定する. 図 11.17 に示すスラブモデルを用いる. 熱エネルギーの輸送方程式は

$$\nabla q_{\parallel} + \nabla q_{\perp} + Q_{\text{rad}} = 0 \quad (11.49)$$

$$q_{\parallel} = -\kappa_c \frac{\partial T_e}{\partial s} = -\kappa_0 T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial s} = -\frac{2}{7} \kappa_0 \frac{\partial T_e^{7/2}}{\partial s} \quad (11.50)$$

$$q_{\perp} = -n_e \left(\chi_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) - \frac{3}{2} D (T_e + T_i) \frac{\partial n}{\partial r}, \quad (11.51)$$

$$\kappa_c \approx n_e \lambda_{ei}^2 \nu_{ei} = \frac{3^{1/2} 36 \pi \epsilon^2 T_e^{5/2}}{m_e^{1/2} Z e^4 \ln \Lambda} \approx 1.25 \times 10^{22} \left(\frac{T_e}{e} \right)^{5/2} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

ここで T_e/e の単位は eV である ($Z=1, \ln \Lambda=20$). になる. q_{\parallel} と q_{\perp} は磁力線に平行および垂直方向の熱流束であり, Q_{rad} は放射損失である. κ_c は熱伝導度, $\chi_{\perp}^e, \chi_{\perp}^i$ は電子およびイオンの熱拡散係数である. D は粒子の拡散係数である. 熱流の滞留点を $s=0$ にとる. セパトトリクスの X 点およびダイバーター板の位置を $s=L_x$ と $s=L_D$ とする. $s=0$ および $s=L_D$ における境界条件は

$$q_{\parallel 0} = 0, \quad (11.52)$$

$$\begin{aligned} q_{\parallel D} &= \gamma T_D n_D u_D + \frac{1}{2} m_i u_D^2 n_D u_D + \xi n_D u_D \\ &= n_D M_D c_s ((\gamma + M_D^2) T_D + \xi) \end{aligned} \quad (11.53)$$

である。ここで u_D はダイバーター板におけるプラズマの流速であり、 M_D はマッハ数 $M_D = u_D/c_s$ である。 $\gamma \approx 7$ はシースエネルギー変換係数 (sheath energy transfer coefficient), $\xi \approx 20 \sim 27 \text{eV}$ はイオン化エネルギーである。音速は $c_s = \tilde{c}_s T_D^{1/2}$, $\tilde{c}_s = 0.98(2/A_i)^{1/2} 10^4 \text{ms}^{-1} (\text{eV})^{-1/2}$ で、 A_i はイオンの原子量である。(11.53) 式の第1項、第2項はシースに流れ込むエネルギー流束で、第3項はリサイクリングの過程で消費される項である。磁力線に沿う粒子と運動量の式は

$$\frac{\partial(nu)}{\partial s} = S_i - S_{\text{cx,r}} - \nabla_{\perp}(nu_{\perp}) \approx S_i - S_{\text{cx,r}}, \quad (11.54)$$

$$mnu \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - mu S_m \quad (11.55)$$

である。 $S_i = nn_0 \langle \sigma v \rangle_i$ は電離によるイオン生成項、 $S_{\text{cx,r}} = nn_0 \langle \sigma v \rangle_{\text{cx,r}}$ は荷電交換および再結合によるイオンの損失項である。 $S_m = nn_0 \langle \sigma v \rangle_m$ はプラズマのイオンが中性粒子との衝突により失う運動量の項である。(11.54) および (11.55) は

$$\frac{\partial(nmu^2 + p)}{\partial s} = -mu(S_m + S_{\text{cx,r}}) + mu S_i \quad (11.56)$$

に還元される。 $s = 0$ および $s = L_D$ における流速は、それぞれ $u_0 = 0$ および $u_D = M_D c_s$, $M_D \approx 1$ である。(11.49),(11.50) および境界条件 (11.52),(11.53) から

$$\frac{2\kappa_0}{7} \frac{\partial^2}{\partial s^2} T_e^{7/2} = \nabla_{\perp} q_{\perp} + Q_{\text{rad}}, \quad (11.57)$$

$$\frac{2\kappa_0}{7} (T_e^{7/2}(s) - T_{eD}^{7/2}) = \int_{L_D}^s ds' \int_0^{s'} (\nabla_{\perp} q_{\perp} + Q_{\text{rad}}) ds'' \quad (11.58)$$

が導かれる。 $0 < s < L_x$ において $\nabla_{\perp} q_{\perp} = \text{const.}$, $Q_{\text{rad}} = 0$, $L_x < s < L_D$ において $\nabla_{\perp} q_{\perp} = 0$, $Q_{\text{rad}} = \text{const.}$ である場合は、 $0 < s < L_x$ において

$$\frac{2\kappa_0}{7} (T_e^{7/2}(s) - T_{eD}^{7/2}) = 0.5(-\nabla_{\perp} q_{\perp})(2L_x L_D - L_x^2 - s^2) + 0.5Q_{\text{rad}}(L_D - L_x)^2$$

である。放射損失が無視できる場合、 $T_{e0} \equiv T_e(0)$ は

$$T_{e0}^{7/2} = T_{eD}^{7/2} + \frac{7}{4\kappa_0} \left(\frac{2L_D}{L_x} - 1 \right) (-\nabla_{\perp} q_{\perp}) L_x^2$$

になる。もし $T_{eD} < 0.5T_{e0}$, $L_D - L_x \ll L_x$ であるときは

$$T_{e0} \approx 1.17 \left(\frac{(-\nabla_{\perp} q_{\perp}) L_x^2}{\kappa_0} \right)^{2/7} = 1.17 \left(\frac{q_{\perp} L_x^2}{\kappa_0 \lambda_q} \right)^{2/7} \quad (11.59)$$

となる。ここで $1/\lambda_q \equiv -\nabla_{\perp} q_{\perp}/q_{\perp}$ とした。温度および密度の勾配のスケール長をそれぞれ λ_T および λ_n とする。すなわち ($T(r) = T \exp(-r/\lambda_T)$, $n(r) = n \exp(-r/\lambda_n)$)。また $\chi_{\perp}^i \ll \chi_{\perp}^e$ と $D \sim \chi_{\perp}^e$ を仮定すると、(11.51) は

$$q_{\perp} = n \chi_{\perp}^e \frac{T_e}{\lambda_T} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\lambda_T}{\lambda_n} \right) \quad (11.60)$$

11.4 不純物制御, スクレイプ オフ層, ダイバーター

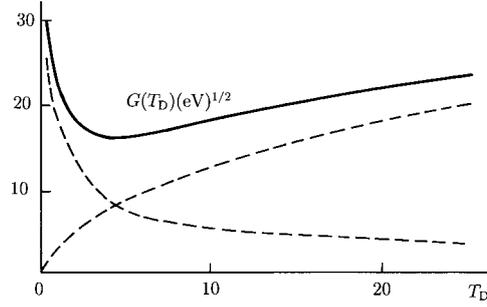


図 11.18 関数 $G(T_D)(\text{eV})^{1/2}$ の $T_D(\text{eV})$ に対する依存性.

になる. したがって χ^e が T_e, n, B の関数 $\chi^e(T_e, n, B)$ で与えられる場合は, 求めたい λ_T は T_e, n, B, q_\perp の関数 $\lambda_T(T_e, n, B, q_\perp)$ として得られることになる.

次に滞留点 $s = 0$ における n_s, T_{es}, T_{is} とダイバーター板 $s = L_D$ における n_D, T_D の関係を考察しよう. ダイバーター領域における運動量束は中性粒子との衝突, 荷電交換, 電離によって減少し, 滞留点 $s = L_D$ における運動量束より小さくなる.

$$f_p \equiv \frac{2(1 + M_D^2)n_D T_D}{n_s(T_{es} + T_{is})} < 1. \quad (11.61)$$

ダイバーター板へのエネルギー流束は, 放射損失のため, 周長 L_x のスクレイプオフ層に流れ込むエネルギー流束 $q_\perp L_x$ より少なくなる.

$$\int_0^\infty q_\parallel dr = (1 - f_{\text{rad}})q_\perp L_x, \quad (11.62)$$

ここで f_{rad} は放射損失の割合である. (11.62) と (11.53) より

$$M_D n_D \tilde{c}_s T_D^{1/2} \left(\frac{(\gamma + M_D^2)T_D}{3/2\lambda_T + 1/\lambda_n} + \frac{\xi}{1/(2\lambda_T) + 1/\lambda_n} \right) = (1 - f_{\text{rad}})q_\perp L_x,$$

すなわち

$$(1 - f_{\text{rad}})q_\perp L_x = \frac{\tilde{c}_s f_p \lambda_T}{1.5 + \lambda_T/\lambda_n} n_s \frac{T_{es} + T_{is}}{2} G(T_D), \quad (11.63)$$

$$G(T_D) \equiv \frac{M_D}{1 + M_D^2} (\gamma + M_D) T_D^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma + M_D} \frac{\bar{\xi}}{T_D} \right) \quad (11.64)$$

が導かれる. T_D の関数 $G(T_D)$ の曲線を図 11.18 に示す. $G(T_D)$ は $T_D = \bar{\xi}/(\gamma + M_D^2)$ において最小になる. $M_D \approx 1, \gamma \approx 7, \xi = 24\text{eV}$ の場合, $G(T_D)$ は

$$G_D = 4T_D^{1/2} \left(1 + \frac{4.5}{T_D} \right)$$

となる. $T_D > 15\text{eV}$ のとき, $G(T_D)$ は凡そ $T_D^{1/2}$ に比例する. T_{es} は, (11.59) よりわかるように $\lambda_q^{-2/7}$ を通して n_s に依存するので, T_{es} の n_s に対する依存性は弱い. (11.63) と (11.61) より, およそ次の関係が成り立つ.

$$T_D \propto n_s^{-2}, \quad n_D \propto n_s^3. \quad (11.65)$$

ダイバーターにおける密度 n_D はスクレイプオフ層の上流における密度 n_s が増えるに伴って非線形的に増大する.

(11.63) の左辺を一定にしたまま, 上流の密度 n_s を増やしていくと, ある閾値を超えると (11.63) の解となるべき T_D が存在しなくなる. 図 11.18 から明らかなように $G(T_D)$ に最小値があるからである. これは上流の密度がある閾値を超えると, プラズマがダイバーター板から離れるデタッチド プラズマの現象と関わっている [11.23].

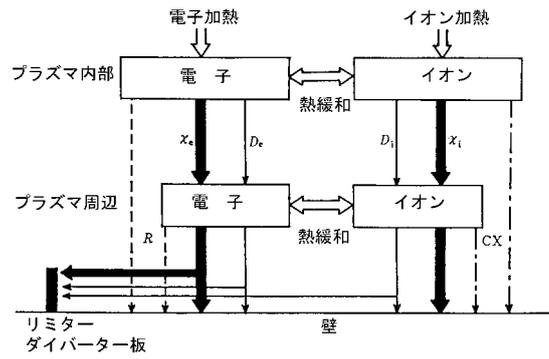


図 11.19 イオンと電子からなるプラズマ中のエネルギーの流れ。太い矢印は熱伝導 (χ), 細い矢印は対流損失 (D), 点線の矢印は放射損失 (R), 1点鎖線の矢印は荷電交換による損失 (CX) を表す。

磁気面に直交するダイバーター板に対する熱負荷 ϕ_D は

$$\phi_D \approx \frac{(1 - f_{\text{rad}})P_{\text{sep}}}{2\pi R 2\lambda_{\phi D}} = (1 - f_{\text{rad}})\pi K \frac{a}{\lambda_T} q_{\perp} \left(1.5 + \frac{\lambda_T}{\lambda_n}\right) \frac{B_{\theta D}}{B_{\theta}} \quad (11.66)$$

で与えられる。ここで P_{sep} はセパトリックス面を横切る全エネルギー流束であり, $\lambda_{\phi D}$ はダイバーター板における熱流束の径方向の幅である。すなわち

$$P_{\text{sep}} = 2\pi a K 2\pi R q_{\perp} \quad \lambda_{\phi D} = \lambda_T \frac{1}{1.5 + \lambda_T/\lambda_n} \frac{B_{\theta}}{B_{\theta D}}$$

$B_{\theta}/B_{\theta D} = 2 \sim 3$ は, 上流の滞留点とダイバーター板におけるスクレイプオフ層の幅の比になる。ダイバーター板を磁気面に対して角度 α だけ傾けた場合は, 傾けたダイバーター板の単位面積あたりの熱負荷は, 磁気面に対して直角なダイバーター板に比べて, $\sin \alpha$ 倍に小さくなる。

11.5 LモードとHモードの閉じ込め比例則

イオンと電子からなるプラズマのエネルギーの流れは図 11.19 に示すように考えることができる。単位体積当りの電子への加熱入力を P_{he} とし, 放射損失を R , イオンとのエネルギー緩和を P_{ei} , 熱伝導(熱伝導率 χ_e) および粒子対流(拡散係数 D_e) によるエネルギー損失を考えると, 電子のエネルギー輸送方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_e T_e \right) = P_{\text{he}} - R - P_{\text{ei}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + D_e \frac{3}{2} T_e \frac{\partial n_e}{\partial r} \right)$$

である。ここで χ_e は電子の熱伝導率であり, D_e は電子の拡散係数である。イオンについても同様であるが放射損失はなく, その代わりに荷電交換損失 L_{cx} の項が付け加わる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_i T_i \right) = P_{\text{hi}} - L_{\text{cx}} + P_{\text{ei}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + D_i \frac{3}{2} T_i \frac{\partial n_i}{\partial r} \right).$$

トカマク実験におけるオーム加熱, NBI 加熱入力は古典的過程であることが確かめられている。波動加熱機構も次第に明らかになってきた。放射損失, 荷電交換損失も古典的過程である。エネルギー・バランスを実験的に決めるためには $n_e(r, t), T_i(r, t), T_e(r, t)$ を始め, 多くの計測を必要とする。多数の実験結果によると電子・イオン間のエネルギー緩和は古典的であり, イオンの熱伝導係数は, 新古典熱伝導係数

$$\chi_{i,nc} = n_i f(q_s, \varepsilon) q_s^2 (\rho \Omega_i)^2 \nu_{ii}$$

(フィルシ-シュルータ領域では $f = 1$, バナナ領域では $f = \epsilon_t^{-3/2}$) の 2~3 倍程度であったり, 異常熱伝導係数であったりする。電子の熱伝導損失は多くの場合異常損失(古典損失の1桁以上大きい)である。多くの場合, プラズマのエネルギー閉じ込め時間は電子の熱伝導によってほとんど決まってしまう。全エネルギー閉じ込め時間 τ_E は定常のとき

11.5 LモードとHモードの閉じ込め比例則

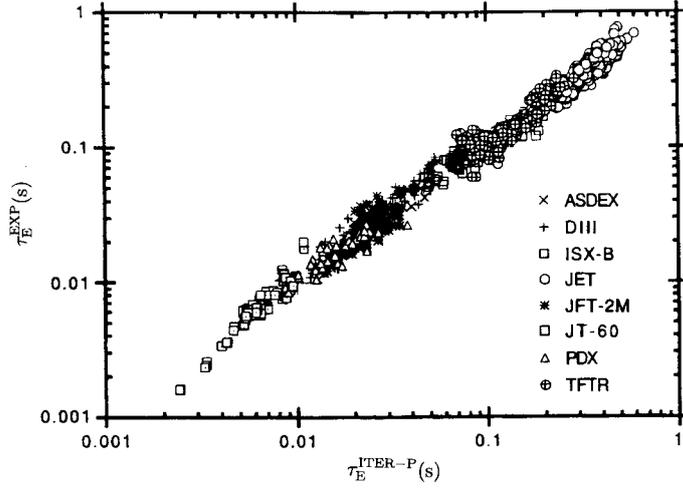


図 11.20 閉じ込め比例則 τ_E^{ITER-P} と L モード実験の閉じ込め時間の測定値 τ_E^{EXP} との比較 [11.25].

$$\tau_E \equiv \frac{\int (3/2)(n_e T_e + n_i T_i) dV}{P_{in}}$$

で求められる。オーム加熱プラズマでは、閉じ込め時間 τ_{OH} は次のようなアルカトール (Alcator) 比例則 (密度の単位は 10^{20}m^{-3} , m)

$$\tau_{OH}(s) = 0.103 q_s^{0.5} \bar{n}_{e20} a^{1.04} R^{2.04} \quad (11.67)$$

が実験値とよく合う。

しかし平均密度 \bar{n}_e が $2.5 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ 以上になると密度に対する比例関係からずれ、飽和傾向が現われる。また大出力の NBI, イオン・サイクロトロン周波数領域の波動加熱を行う場合は、加熱入力の増加にともなって劣化する。Kaye と Goldston は代表的ないくつかのトカマクにおいて、NBI 加熱入力がオーム加熱入力の 2 倍以上である実験データを集め、NBI 加熱プラズマのエネルギー閉じ込め時間 τ_E に関するケイ-ゴールドストン比例則を示した [11.24]. すなわち

$$\tau_E = (1/\tau_{OH}^2 + 1/\tau_{AUX}^2)^{-1/2},$$

$$\tau_{AUX}(s) = 0.037 \kappa_s^{0.5} I_p P_{tot}^{-0.5} a^{-0.37} R^{1.75}. \quad (11.68)$$

ここで単位は MA, MW, m で κ_s は非円形断面の縦横比, P_{tot} は MW 単位の全加熱入力である。ITER チームは最近の大型実験のデータを集めた。L モード実験 (次節参照) のデータベースの解析から、エネルギー閉じ込め時間についてつぎの **ITER-P** 比例則を提案している [11.25].

$$\tau_E^{ITER-P}(s) = 0.048 I_p^{0.85} R^{1.2} a^{0.3} \bar{n}_{20}^{0.1} B^{0.2} (A_i \kappa_s / P)^{1/2}. \quad (11.69)$$

単位は MA, m, T, MW で、密度 \bar{n}_{20} の単位は 10^{20}m^{-3} である。 P は放射損失 P_R を補正した加熱入力である ($P = P_{tot} - P_R$). ITER-P の閉じ込め比例則 τ_E^{ITER-P} と L モードの観測された閉じ込め時間との比較を図 11.20 に示す。核燃焼プラズマにおいては、加熱入力は α 粒子の核融合出力 P_α にほぼ等しく、 $T \sim 10 \text{keV}$ の場合、 $P_\alpha \approx 0.04 n_{DT20}^2 T^2 A a^3 \kappa_s$ (MW, 10^{20}m^{-3} , keV, m) となる (11.7 節参照)。核燃焼プラズマの閉じ込め時間がケイ-ゴールドストンあるいは L モード比例則に従う場合、三重積 $n_{DT} T \tau_E$ は主として $A I_p$ の積のみに依存することは興味深い (A はアスペクト比, (11.82) 参照)。

改善された閉じ込め状態 **H** モードがダイバーター配位の ASDEX [11.26, 11.27] の実験において発見された。ダイバーター配位で NBI 加熱入力がある閾値を超えると、重水素プラズマの周辺付近の重水素原子の D_α 線の信号 (中性原子束に比例) が放電中に突然 ($100 \mu\text{s}$ の時間スケールで) 減少し、境界付近の重水素原子のリサイクリングが減る。と同時にプラズマ端の径電場 E_r が (内向きの負の値にむかって) 顕著な変化を示す。さらに電子密度および熱エネルギー密度が増加し、NBI 加熱プラズマの閉じ込め時間が 2 倍ほど改善される。H モードは PDX, JFT-2, DIII-D,

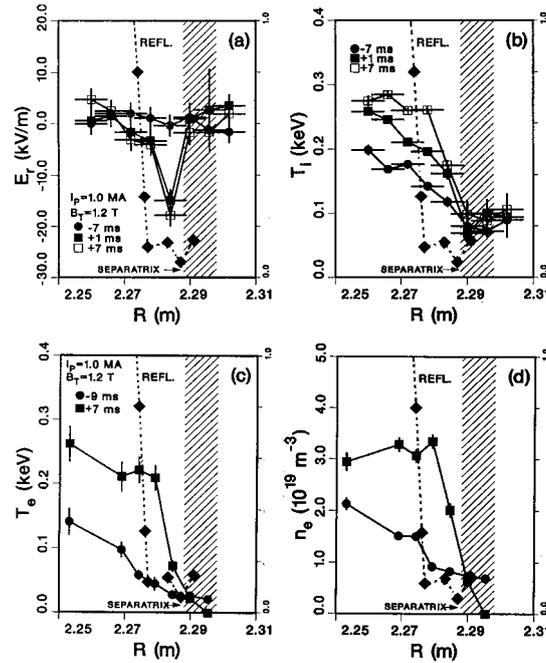


図 11.21 DIII-D の L-H 遷移をまたがる時間帯における諸量の分布図. (a) E_r の分布, (b) CVII 荷電交換再結合分光 (charge exchange recombination spectroscopy) によるイオン温度分布, (c)(d) トムソン散乱による電子温度, 電子密度の分布 [11.29].

JET, JT60U 等などでも観測された。ケイ-ゴールドストーン比例則に従う閉じ込め状態を“L モード”という。H モードにおいては、セパトトリックスで決まるプラズマの境界のすぐ内側で電子温度や電子密度の勾配が急峻になる (図 11.21 参照)[11.28, 11.29]。L モードと H モード間の L-H 遷移の現象について理論的および実験的研究が精力的に進められている [11.30, 11.31]。径電場はいくつかの要因、高速中性粒子ビーム入射による運動量入射、プラズマ境界付近のイオン軌道損失、あるいは非両極性拡散など、によって引き起こされると考えられている。

径電場はポロイダル方向に $v_\theta = -E_r/B$ 、トロイダル方向に $v_\phi = -(E_r/B)(B_\theta/B)$ の速度をもった回転を引き起こす。もし E_r に勾配があるとき、ポロイダル、トロイダル方向にシアのある回転を引き起こす。シアのある流れ (sheared flow) がプラズマ端付近の乱流を抑制し、閉じ込めの改善に重要な役割を果たしていることが指摘された [11.32]。

図 11.22 は飽和した抵抗性圧力勾配駆動乱流における等電子密度面に対するシアのある流れの影響を示した図である。 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの方向は電場に垂直で、電場は等ポテンシャル面に直角であるため、プラズマは等ポテンシャル面に沿って $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトをする。すなわち等ポテンシャル面は対流セルの大きさを示している。静電的揺動の場合、等電子密度面は等ポテンシャル面と一致するので対流セルがシアのある流れによってすり潰される様子が、図 11.22 に示されている。熱拡散は減少し、熱障壁が形成される。半定量的議論は 4.4 節において述べたので参照されたい。

閉じ込め改善の試みは活発に行はれている。ASDEX などで観測された標準的な H モードの他に、他のタイプの閉じ込め改善モードが観測された。TFTR 実験 [11.33] では、壁および真空容器の内側 (高磁場側) にとりつけたカーボン リミッターを、実験前に重水素放電により徹底的に脱ガスをする。そしてプラズマ電流と同じ方向に中性粒子ビームを入射する平行入射 (co-injection) とその反対方向に入射する反平行入射 (counter-injection) とをバランスさせた中性粒子入射を重水素プラズマに加えた。そして“supershot”と呼ばれる閉じ込め改善モードをえた。この supershot においては密度分布が急峻になるのを観測している ($n_e(0)/\langle n_e \rangle = 2.5 \sim 3$)。

DIII-D 実験では VH モード [11.34] を観測した。このモードでは強い径電場がプラズマ端からプラズマ内部 ($r/a \sim 0.6$) まで広がり、 $\tau_E/\tau_E^{\text{ITER-P}}$ の値が 3.6 までに改善された。

JT60U 実験においては、高ベータポロイダル H モード [11.35] が観測された。 β_p は大きく (1.2~1.6)、密度分布が急峻になっている ($n_e(0)/\langle n_e \rangle = 2.1 \sim 2.4$)。さらにプラズマ端において H モードの熱障壁も形成されている。

Hinton と Staebner [11.36] は急峻な圧力、密度分布は径電場の勾配を引き起こすことを指摘した。イオン流体の運動方程式 (3.7) あるいは (3.28) から

11.5 LモードとHモードの閉じ込め比例則

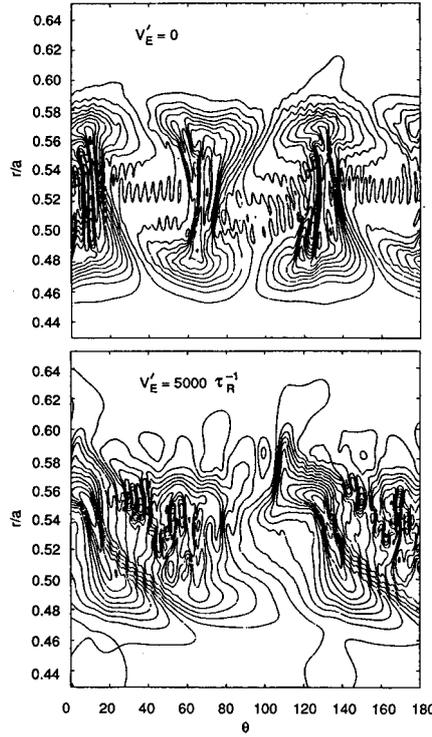


図 11.22 上の図は 抵抗性圧力駆動乱流の シアのない流れの場合における ある時刻の等電子密度面, 下の図は強いシアのある流れの場合の等電子密度面 [11.32]. 垂直軸は半径方向の座標 r/a , 水平軸はポロイダル角 θ (度).

$$E_r \simeq B_p u_t - B_t u_p + \frac{1}{en_i} \frac{dp_i}{dr}$$

がえられる. E_r を r で微分すると

$$\frac{dE_r}{dr} \sim -\frac{1}{en_i^2} \frac{dn_i}{dr} \frac{dp_i}{dr}$$

となる. 省略した項は通常の H モードの実験条件においては小さい.

最近, 負磁気シア配位による高性能モードが DIII-D, TFTR, JT60U, JET, Tore Supra において観測されている [11.37]. JT60U のイオン温度, 電子温度, 電子密度の径分布, q 分布を 1 例として図 11.23 に示す. 5.6 節で述べたようにバルーニングモードは負シア領域

$$S = \frac{r}{q_s} \frac{dq_s}{dr} < 0 \quad (11.70)$$

で安定である. また 10.1 節ではシアの弱い領域では拡散係数が減少することが述べられる. この内部輸送障壁は負の磁気シアの効果と圧力勾配による径電場が誘起する $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ のシアのある流れによる効果によると考えられている.

閉じ込め改善度を表す尺度として, 観測された閉じ込め時間 τ_E^{EXP} の ITER-P 比例則 $\tau_E^{\text{ITER-P}}$ に対する比 H_L が広く使われている.

$$H_L \equiv \frac{\tau_E^{\text{EXP}}}{\tau_E^{\text{ITER-P}}} \quad (11.71)$$

観測された H_L の値は 2~3 の範囲である.

ITER H モードのデータベース作業グループは ASDEX, ASDEX-U, DIII-D, JET, JFT-2M, PDX, PBX, Alcator C-Mod などの H モードの標準実験データを集めた. H モードの実験データを解析した結果, 以下のような熱エネルギー閉じ込め時間の比例則をまとめた ([11.22] の 2 章).

$$\tau_{E,\text{th}}^{\text{IPB98y2}} = 0.0562 I_p^{0.93} B_t^{0.15} P^{-0.69} M_i^{0.19} R^{1.97} \bar{n}_{e19}^{0.41} \epsilon^{0.58} \kappa^{0.78} \quad (11.72)$$

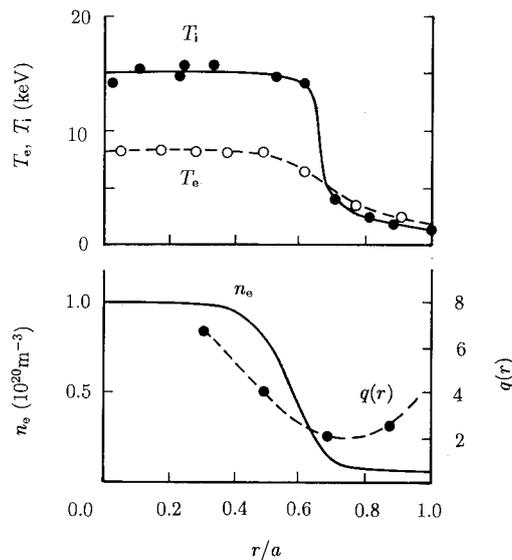


図 11.23 JT60U の負磁気シア配位における、イオンおよび電子の温度、電子密度、安全係数 q の半径分布 [11.37].

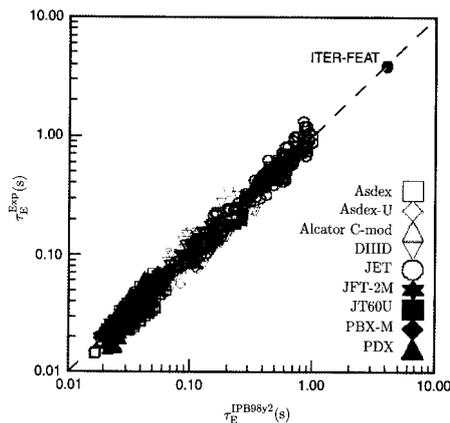


図 11.24 IPB98y2 閉じ込め比例則 $\tau_{E, th, scaling}$ と H モードの実験におけるエネルギー閉じ込め時間の測定値 $\tau_{E, th}$ の比較 [11.22].

単位は sec, MA, T, MW, amu, m, 10^{19}m^{-3} で、 P は NBI 加熱の突き抜け、軌道損失、荷電交換、蓄積プラズマエネルギーを補正した量である。この比例則は ELM (edge-localized-modes, 11.6 節参照) の存在しているモードに適用できる [11.38]。熱エネルギー閉じ込め比例則と ELMy H モードの実験データとの比較を図 11.24 に示す。

殆ど的高温プラズマ実験において、中性粒子入射加熱 (NBI) が用いられている。大型トカマクにおいて H モード、スーパーショット、高ポロイダルベータモードなどの改良閉じ込めモードにおいて、炉心級のプラズマが中性粒子ビーム入射によって生成された。JET [11.39], JT60U [11.40], [11.41] の典型的な実験のプラズマを表 11.2 に示す。

重水素-三重水素の実験が TFTR で行われた [11.41]。9.3 MW ($Q \sim 0.27$) の核融合出力がスーパーショットによって得られた。(表 11.2 参照)。JET は 16.1 MW ($Q \sim 0.62$) の DT 核融合出力の記録を 25.7 MW の加熱入力によって達成した [11.42]。

多くの中性粒子ビーム源は正の水素イオンを加速している。そして中性水素ガスで満たされたセルを通して、イオンを荷電交換 (電子を付着) によって高速中性粒子ビームに変える。しかしながら、正の水素イオンから中性粒子への変換効率は、イオンエネルギーが 100 keV 以上になると非常に小さくなる (200 keV の H^+ の場合 2.5%)。他方負の水素イオン (H^-) から中性粒子への変換効率は高エネルギーになっても小さくならない ($\sim 60\%$)。高効率大出力の負のイオン源が開発されつつある。

11.5 LモードとHモードの閉じ込め比例則

表 11.2 大型トカマク JET [11.39], JT60U [11.40], TFTR [11.41] のプラズマパラメーター.

	JET	JT60U	TFTR
	ELM free No.26087	ELMy No.E21140	supershot
I_p (MA)	3.1	2.2	2.5
B_t (T)	2.8	4.4	5.1
R/a (m/m)	3.15/1.05	3.05/0.72	~2.48/0.82
κ_s	1.6	1.7	1
q^* s	$q_{95}=3.8$	$q_{\text{eff}}=4.6$	$q^*=3.2$
q_I	2.8	3.0	2.8
$n_e(0)(10^{19}\text{m}^{-3})$	5.1	7.5	8.5
$n_e(0)/\langle n_e \rangle$	1.45	2.4	-
$n_i(0)(10^{19}\text{m}^{-3})$	4.1	5.5	6.3
$T_e(0)$ (keV)	10.5	10	11.5
$T_e(0)/\langle T_e \rangle$	1.87	-	-
T_i (keV)	18.6	30	44
W_{dia} (MJ)	11.6	7.5	6.5
dW_{dia}/dt (MJ/s)	6.0	-	7.5
Z_{eff}	1.8	2.2	2.2
β_p	0.83	1.2	~1.1
β_i (%)	2.2	~1.3	~1.2
β_N (Troyon factor)	2.1	~1.9	2
P_{NB} (MW)	14.9	24.8	33.7
E_{NB} (keV)	135, 78	95	110
$\tau_E^{\text{tot}} = W/P_{\text{tot}}$ (s)	0.78	0.3	0.2
$H = \tau_E^{\text{tot}}/\tau_E^{\text{ITER-P}}$	~ 3.0	~ 2.1	~ 2.0
$n_i(0)\tau_E^{\text{tot}}T_i(0)(10^{20}\text{keVm}^{-3}\text{s})$	5.9	5	5.5
$n_T(0)/(n_T(0) + n_D(0))$	0	0	0.5
P_{fusion} (MW)	-	-	9.3

$n_i(0)\tau_E^{\text{tot}}T_i(0)$ は核融合三重積, κ_s はプラズマ断面の垂直, 水平方向の半径比, q はプラズマ境界の効果的安全係数 ([11.39]~[11.41] 参照), q_I は (11.46) で定義された安全係数. E_{NB} は中性粒子入射の入射エネルギー.

波動加熱は他の有力な加熱方法で、詳細は第 12 章で記述する。NBI と同様な加熱効率をもつ ICRF (イオンサイクロトロン周波数領域) 加熱が PLT で行われた。JET の ICRF 実験で、 $T_i(0) = 5.4 \text{ keV}$, $T_e(0) = 5.6 \text{ keV}$, $n_e(0) = 3.7 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_E \sim 0.3 \text{ s}$ のパラメーターが $P_{\text{ICRF}} = 7 \text{ MW}$ の加熱入力で得られた。

11.6 定常運転

非誘導電流駆動およびブートストラップ電流

トカマク装置において変流器による電磁誘導によってプラズマ電流を駆動するかぎり、放電時間は限られる。その場合プラズマに面した第一壁は大きな熱負荷サイクルにさらされ、深刻な技術的困難を伴う。更にパルス炉は商用発電プラントとして不利である。もしプラズマ電流を非誘導手段で駆動できれば、トカマクの定常炉の運転が可能になる。中性粒子ビーム入射による電流駆動 (NBCD) は大河によって予測された [9.13]。低域混成波による電流駆動 (LHCD) および電子サイクロトロン波 (ECCD) は N. J. Fisch によって予測された [9.15, 9.16]。これらの電流駆動は多くの実験により実証された。非誘導電流駆動の物理は第 9 章で述べられる。

しかしながら、プラズマ電流をすべて非誘導電流駆動で行おうとすると、現在の実験結果や理論的予測によれば、核融合出力のかなりの部分を必要としなければならない。他方新古典理論によれば (4.3 節参照)、プラズマそれ自身でブートストラップ電流を駆動することが導かれていた。そして高ポロイダルベータ運転により、全プラズマ電流におけるブートストラップ電流の比率を 70~80% にまでに達成させることが実験によって実証された。JT60U [11.43] および DIII-D [11.44] において行われた、ブートストラップ電流の比率が大きい全非誘導電流駆動の実験結果を図 11.25 に示す。測定された全電流密度および計算されたブートストラップとビーム駆動の電流密度の和の半径分布を比較すると、実験誤差内でよい一致を示している。実験条件および測定データを表 11.3 に示す。

これらの実験では高ポロイダルベータ $\beta_p \sim 3$ をうるためにプラズマ電流は比較的小さくしているが、ブートストラップ電流の比率が大きい完全非誘導電流駆動された定常プラズマが $HH_{98y2} \sim 2$ のよい閉じ込め特性で実現できたことは勇気付けられる結果である。

新古典ティアリングモード

高トロイダルベータのプラズマを抵抗拡散時間 $\tau_R = \mu_0 a_s^2 / \eta$ (η は有理面 a_s における比抵抗率) より長く保持しようとしたとき、ポロイダルベータがある閾値を超えると ((6.46) 参照)、新古典ティアリングモード (NTM) が磁気アイランドに成長する。新古典ティアリングモードの物理は 6.2 節で述べる。新古典ティアリングモードは有理面の磁気アイランドに局所的に電流駆動することにより抑えることができる [6.7]。

抵抗性壁モード

放電時間が壁の抵抗表皮時間 $\tau_w = \mu_0 d \delta w / \eta_w$ (η_w は小半径 d 、厚さ δw をもつ壁の比抵抗率) より長くなると、抵抗性壁モード (RWM) が現れる (9.4 章参照)。この場合、完全導体壁がある場合の高ベータプラズマはもはや安定ではなく、閉じ込められたプラズマのベータは壁がない場合のベータに減少していく。

長波長の外部キルクモードを伴う RWM は、非対称磁場を作るプラズマ外部の近接したコイル電流をフィードバックして安定化されることが DIII-D などによって実証された [11.46] ($Ex/3-1Ra$)。壁がない場合のベータ上限を超えたプラズマを抵抗壁の表皮時間を越えて維持することができた。

更にプラズマをトロイダル方向に回転させると高ベータプラズマの安定性に寄与する [11.46], [6.14]。プラズマの回転速度がアルフベン速度の 2.5 ~ 0.3 パーセントにすると、RWM は安定化される。

ELM (Edge Localized Mode)

H モードの状態は、MHD のバースト的動きや D_α 放射を含んだ準周期的緩和振動の発症によって乱される。これをプラズマ周辺に局在するモード ELM という。これらのエネルギーや粒子のバースト的な SOL への流れはダイバーター板に大きいピーク状の熱負荷と侵食をもたらす。他方 ELM は密度や不純物イオンの蓄積を効果的に取り除く。ELM のある H モードは ITER の標準的運転モードに選ばれている (11.7 節参照)。ELM に関する解説は [11.38] を参照されたい。

ELM は 3 つのタイプがある。

タイプ I ELM: ELM の繰り返し周波数 ν_{ELM} は加熱入力とともに増加する。この場合、プラズマ境界は正規化された圧力勾配の値が常に安定限界に近い $\alpha \sim \alpha_{\text{cr}}$ 。孤立した鋭い D_α のバーストを伴っている。

タイプ III ELM: ELM の繰り返し周波数はタイプ I とは異なり加熱入力とともに減少する。プラズマ境界の圧力勾配は理想バルーニング安定限界より小さい $0.3 < \alpha / \alpha_{\text{cr}} < 0.5$ 。

タイプ II ELM: ELM のバーストはより頻繁で、 D_α バーストの大きさは減少する (grassy(草

11.6 定常運転

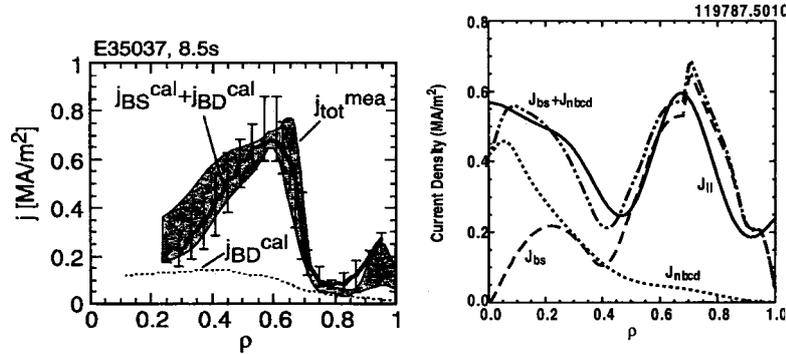


図 11.25 左図: JT60U の放電ショット E35037 における全電流密度の測定された径分布 j_{tot}^{mea} , 計算されたビーム駆動電流密度 j_{BD}^{cal} および計算されたブートストラップ電流密度 j_{BS}^{cal} と j_{BD}^{cal} の和 [11.43]. 右図: DIII-D の放電ショット 119787 における全電流密度 total ($J_{||}$), ブートストラップ電流密度 (J_{bs}), ビーム駆動電流密度 (J_{NBCD}) およびブートストラップ電流密度とビーム駆動電流密度の和 [11.44].

表 11.3 JT60U および DIII-D ブートストラップ電流の比率が大きい非誘導全電流駆動実験の実験データ.

	JT60U (E35037) Reversed shear config.	DIII-D (119787) ELMy H, standard q profile
R (m)	3.34	(1.66)
a (m)	0.8	(0.67)
I_p (MA)	0.8	0.6
B_t (T)	3.4	(< 2.1)
κ	1.5	1.85
δ	0.42	0.7
q_{95}	~9	~10
q_{min}	3.6	2.94
P_{NB} (MW)	5	-
E_b (keV)	85	-
β_N	1.9~2.2	3.08
β_p	2.7~3.0	3.18
β_t (%)	0.65	1.5
τ_E (s)	0.4~0.5	0.098
HH_{98y2}	2.1~2.3	2.03
$n_{e19}(0)/\langle n_{e19} \rangle$	3.5/-	6.7/4.37
$T_i(0)/\langle T_i \rangle$ (keV)	7.5/-	3.8/2.08
$T_e(0)/\langle T_e \rangle$ (keV)	5.0/-	2.5/1.49
f_{BS} (%)	(78 ~ 84) \pm 11	80.8
f_{BD} (%)	~25	19.2
$\tau_{duration}$ (s)	2.7	0.7

HH_{98y2} は実験閉じ込め時間が IPB98y2 比例則 (11.72) を超える改善係数, $\tau_{duration}$ は定常的に高ブートストラップ比率と全非誘導電流駆動が保持できた継続時間, f_{BS} および f_{BD} はブートストラップ電流およびビーム駆動電流の比率. δ はプラズマ形状の三角度である. DIII-D の欄にある R, a, B_t のパラメータは [11.44] に記述がないので, [11.45] から引用した.

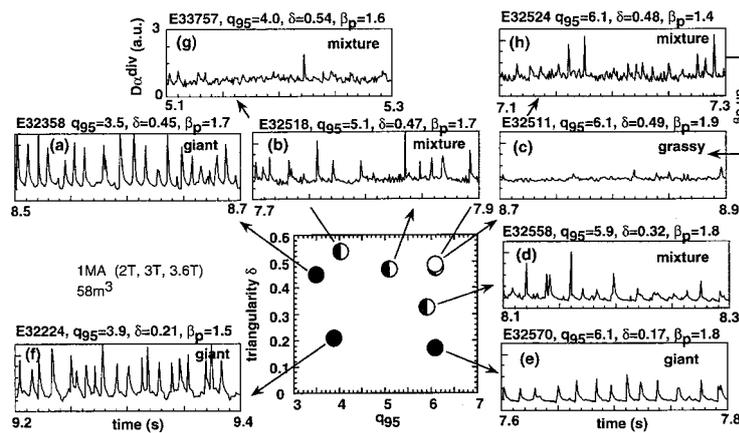


図 11.26 ELM の活動(ダイバーターにおける D_α の信号)が δ , q_{95} , β_p の変化によって変わる様子 ($I_p = 1\text{MA}$). q_{95} を増加していくにしたがって (δ と β_p を固定したまま)((a) \rightarrow (b) \rightarrow (c)), 巨大 ELM は grassy(草状) ELM に変わる. δ を増加していくに従って (q_{95} と β_p を固定したまま)((e) \rightarrow (d) \rightarrow (c)), また β_p を増加していくに従って (δ と q_{95} を固定したまま)((h) \rightarrow (c)), 巨大 ELM は grassy(草状) ELM に変わる [11.47].

状)ELM, 小 ELM).

小 ELM あるいは grassy ELM は良い閉じ込め, ダイバーターへの大きなピーク状の熱負荷がなく, 不純物の少ないことなどの条件を満たす候補になりえる. ELM を制御しようという試みがされている. 1例はプラズマ断面の形を三角度を増やして変える. 三角度を $\delta = 0.54$ にすると, 比較的小さな $q_{95} = 4.5$ の場合でも, ほとんど grassy(草状)のフェーズだけが現れることが JT60U で観測された [11.47]. これらの結果を図 11.26 に示す. ASDEX-U 実験では, 重水素の氷ペレットをプラズマ中に周期的に打ち込み, タイプ I ELM を和らげることが確かめられた [11.48].

ディスラプションの制御

ITER クラスのトカマク核融合炉の燃焼過程においてプラズマの平衡制御が失われると, 壁に向かう大きな熱流束や高エネルギー遁走電子の発生によって, 第一壁材料やダイバーター板に深刻な損傷を起こすことが予測される. 更にプラズマ電流の急速な消滅のあいだのプラズマ垂直方向移動により発生した, トロイダル非対称なハロー電流による局所的かつ強力な電磁力が真空容器を破壊することが起こりうる. 壁と交差するプラズマの磁気面に沿ってヘリカルに流れるハロー電流は, その一端は壁につながる SOL の磁力線から導体の第一壁を通って, もう一方の SOL の磁力線の端に抜けて回路を閉じる.

大量のガス入射 (massive-gas-injection) が, ディスラプションの緩和に有効であることが示された [11.49].

また不純物アイスペレット (通称キラーペレット (killer pellet)) をトカマクプラズマに打ち込むことにより, 破壊的にならないプラズマエネルギーの消滅や電流停止が可能であることを示した [11.50], [11.51]. ただしペレットの大きさや打ち込み速度が, プラズマの奥深く中心部まで届くようにならないといけない.

11.7 ITER(国際トカマク実験炉)

トカマク装置を規定するパラメーターを多いが, しかしそれらの中には多くの関係や制限がある [11.52]. そのためプラズマ半径 a , トロイダル磁場 B_t および核融合出力と加熱入力之比 Q かアスペクト比 A のどちらかを指定すると, 他のトカマクのパラメーターは電子密度, ベータおよび閉じ込め時間の比例則, 核燃焼条件によって決まってしまう [11.52]. この際円筒安全係数 q_1 (あるいは 95%トロイダル磁束の磁気面における安全係数 q_{95}), プラズマ断面の縦横比 κ_s , 三角度 δ は与えておく. q_1 の定義により

$$q_1 \equiv \frac{Ka B_t}{R B_p} = \frac{5K^2 a B_t}{A I_p}, \quad B_p = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi K a} = \frac{I_p}{5K a},$$

であるから, プラズマ電流は

$$I_p = \frac{5K^2 a B_t}{A q_1}$$

11.7 ITER(国際トカマク実験炉)

である. ただし $K^2 = (1 + \kappa_s^2)/2$ (I_p は MA, B_t は T, a は m 単位). 安全係数 q_{95} は近似的に次のようになる ((11.48) 参照, [11.22]).

$$q_{95} \approx q_1 f_\delta f_A$$

$$f_\delta = \frac{1 + \kappa^2(1 + 2\delta^2 - 1.2\delta^3)}{1 + \kappa^2} \quad f_A = \frac{1.17 - 0.65/A}{(1 - 1/A^2)^2}.$$

体積平均した 10^{20}m^{-3} 単位の電子密度 n_{20} は

$$n_{20} = N_G \frac{I_p}{\pi a^2} \quad (11.73)$$

で与えられる. N_G はグリーンバルド係数である. プラズマの熱化成分のベータは

$$\beta_{\text{th}} \equiv \frac{\langle p \rangle}{B_t^2/2\mu_0} = 0.0403(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_{\text{I}}) \frac{\langle n_{20} T_{\text{keV}} \rangle}{B_t^2} \quad (11.74)$$

であるが, ベータの比例則は

$$\beta_{\text{th}} = f_{\text{th}} \beta_{\text{total}}, \quad \beta_{\text{total}} = 0.01 \beta_N \frac{I_p}{a B_t}$$

である. β_N は正規化ベータである. β_{total} は β_{th} (熱化プラズマ成分) と β_{fast} (α 粒子成分) の和であり, $f_{\text{th}} = \beta_{\text{th}}/\beta_{\text{total}}$ である. 記号 f_{DT} , f_{He} , f_{I} は, 燃料 DT, He, 不純物 (I) の電子密度に対する比で, T_{keV} は keV 単位の温度 (イオン温度と電子温度は等しいとする), $\langle X \rangle$ は X の体積平均を表す. プラズマの熱エネルギー W_{th} は

$$W_{\text{th}} = \frac{3}{2} \beta_{\text{th}} \frac{B_t^2}{2\mu_0} V = 0.5968 \beta_{\text{th}} B_t^2 V \quad (11.75)$$

となる. W の単位は MJ, プラズマの体積 V の単位は m^{-3} である. 縦横比 κ_s , 三角度 δ のプラズマの断面形状は

$$R = R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin \theta), \quad (11.76)$$

$$z = a \kappa_s \sin \theta$$

で与えられる. プラズマ体積 V は

$$V \approx 2\pi^2 a^2 R \kappa_s f_{\text{shape}}$$

である. ただし f_{shape} は三角度による補正項

$$f_{\text{shape}} \approx 1 - \frac{\delta^2}{8} - \frac{3a}{4R} \delta$$

である. ダイバーター配位の際の f_{shape} は異なってくる. 熱エネルギーの閉じ込め比例則として IPB98y2 比例則

$$\tau_E = 0.0562 \times 10^{0.41} H_{y2} I^{0.93} B_t^{0.15} M^{0.19} n_{20}^{0.41} a^{1.97} A^{1.39} \kappa_s^{0.78} P^{-0.69} \quad (11.77)$$

を採用する. ここで $M (= 2.5)$ はイオンの平均質量単位であり, P は輸送によって失う MW 単位の出力であり, 定常状態を保つために必要な吸収される加熱入力から放射損失出力 P_{rad} を差し引いた値である. アルファ粒子の核融合出力 P_α

$$P_\alpha = \frac{Q_\alpha}{4} \langle n_{\text{DT}}^2 \langle \sigma v \rangle_v \rangle V$$

である. $Q_\alpha = 3.515\text{MeV}$. $\langle \sigma v \rangle_v$ は T の関数で, $\langle \sigma v \rangle_v$ に良く合う関数は (1.5) で紹介した. $T = 10\text{keV}$ 付近の核融合反応率は

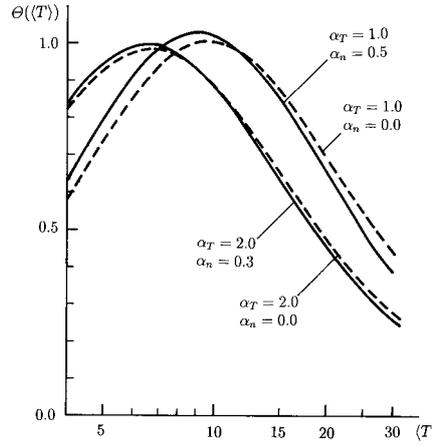


図 11.27 分布のパラメータが s ($\alpha_T = 1.0, \alpha_n = 0.0$), ($\alpha_T = 2.0, \alpha_n = 0.0$), ($\alpha_T = 1.0, \alpha_n = 0.5$) および ($\alpha_T = 2.0, \alpha_n = 0.3$) の場合における Θ の平均温度 $\langle T \rangle$ に対する依存性.

$$\langle \sigma v \rangle_v \approx 1.1 \times 10^{-24} T_{\text{keV}}^2 (\text{m}^3/\text{s})$$

で近似されるので, 次の Θ を導入する.

$$\Theta(\langle T \rangle) \equiv \frac{\langle n_{\text{DT}}^2 \langle \sigma v \rangle_v \rangle}{1.1 \times 10^{-24} \langle n_{\text{DT}}^2 T^2 \rangle}.$$

Θ は keV の平均温度 $\langle T \rangle$ や密度および温度の空間プロファイルに依存する. そして

$$\langle T \rangle \approx 8 \sim 10 \text{ keV 付近で最大になる. } n(\rho) = (1 + \alpha_n) \langle n \rangle (1 - \rho^2)^{\alpha_n},$$

$T(\rho) = (1 + \alpha_T) \langle T \rangle (1 - \rho^2)^{\alpha_T}$ の場合について, Θ の $\langle T \rangle$ 依存性を図 11.27 に示す. α 粒子による出力 P_α は

$$P_\alpha = 0.9551 \frac{f_{\text{prof}} f_{\text{DT}}^2}{(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_{\text{I}})^2} \beta_{\text{th}}^2 B_t^4 \Theta V \quad (11.78)$$

になる. ここで $f_{\text{prof}} \equiv \langle n^2 T^2 \rangle / \langle n T \rangle^2 \approx (\alpha_n + \alpha_T + 1)^2 / (2\alpha_n + 2\alpha_T + 1)$ は温度や密度の分布効果を表す. 吸収された補助加熱入力を P_{aux} とし, アルファ加熱の効率を f_α とすると, 全加熱入力は $f_\alpha P_\alpha + P_{\text{aux}}$ となる. 放射損失の全加熱入力に対する割合を f_{R} とすると, 核燃焼を維持するための加熱入力 P は

$$P = (1 - f_{\text{rad}})(f_\alpha P_\alpha + P_{\text{aux}})$$

である. Q は全核融合出力 $P_{\text{n}} + P_\alpha = 5P_\alpha$ (P_{n} は中性子出力) の補助加熱入力 P_{aux} に対する比である. すなわち

$$Q = \frac{5P_\alpha}{P_{\text{aux}}}$$

$$P = (1 - f_{\text{rad}}) \left(f_\alpha + \frac{5}{Q} \right) P_\alpha.$$

したがって燃焼条件は

$$\frac{W_{\text{th}}}{\tau_{\text{E}}} = (1 - f_{\text{rad}}) \left(f_\alpha + \frac{5}{Q} \right) P_\alpha \quad (11.79)$$

に還元される. (11.75) および (11.79) より

$$\beta_{\text{th}} B_t^2 \tau_{\text{E}} = 0.625 \frac{(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_{\text{I}})^2 / f_{\text{DT}}^2}{(1 - f_{\text{rad}})(f_\alpha + 5/Q) f_{\text{prof}} \Theta(\langle T \rangle)}. \quad (11.80)$$

11.7 ITER(国際トカマク実験炉)

(11.80) の左辺は核融合三重積 $\langle n_{20} T_{\text{keV}} \rangle \tau_E$ に比例する ((11.74) 参照). (11.77) と (11.79) より次の核燃焼条件が導かれる [11.53].

$$\frac{B_t^{0.73} a^{0.42}}{A^{0.26}} \left(f_\alpha + \frac{5}{Q} \right)^{0.31} = 1.95 \left[\frac{(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_I)^2}{(1 - f_{\text{rad}}) f_{\text{prof}} f_{\text{DT}}^2 \Theta} \right]^{0.31} \times \frac{q_I^{0.96} (f_{\text{th}} \beta_N)^{0.38} f_{\text{shape}}^{0.69}}{H_{Y2} M^{0.19} N_G^{0.41} K^{1.92} \kappa_s^{0.09}}. \quad (11.81)$$

パラメーター a , B_t , A を指定すると, Q 値およびほかのパラメーターは計算することができる. その結果を表 11.4 に示す. これらの簡単な解析結果は表 11.5 に示している ITER の設計パラメーター [11.54] に比較的よく対応している.

IPB98y2 閉じ込め比例則の代わりにケイ-ゴールドストーン比例則 (11.68) を用いると, 核燃焼条件は

$$\frac{I_p A^{1.25}}{a^{0.12}} \left(f_\alpha + \frac{5}{Q} \right)^{0.5} = \frac{75.1 f_{\text{shape}} (1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_I)}{H_{\text{KG}} [(1 - f_{\text{rad}}) f_{\text{prof}} \Theta]^{0.5} f_{\text{DT}}} \quad (11.82)$$

となる. H_{KG} は閉じ込め時間とケイ-ゴールドストーン比例則の時間との比である. ITER の場合必要な H_{KG} の値は 2.57 である. (11.82) から判るように, 核燃焼条件は主に AI_p によることは興味深い.

プラズマのセパトロックス面とトロイダル磁場コイルの距離を Δ とし, トロイダル磁場の最大値を B_{max} (図 11.28 参照) とすると, 次のような拘束条件が付く.

$$\frac{B_t}{B_{\text{max}}} = \frac{R - a - \Delta}{R} = 1 - \left(1 + \frac{\Delta}{a} \right) \frac{1}{A},$$

$$1 - \frac{2}{A} < \frac{B_t}{B_{\text{max}}} < 1 - \frac{1}{A}.$$

ただし $a > \Delta > 0$ とした. Δ および B_{max} が与えられると, B_t は a, A の関数となる.

変流器の磁束変化量 $\Delta\Phi$ のプラズマリングの磁束に対する比 ξ は

$$\xi \equiv \frac{\Delta\Phi}{L_p I_p} = \frac{5 B_{\text{max}}(\text{T}) ((R_{\text{OH}} + d_{\text{OH}})^2 + 0.5 d_{\text{OH}}^2)}{(\ln(8A/\kappa_s^{1/2}) + l_i - 2) R I_p (\text{MA})}$$

で与えられる. ここで $R_{\text{OH}} = R - (a + \Delta + d_{\text{TF}} + d_s + d_{\text{OH}})$ である. d_{TF} と d_{OH} はそれぞれ TF と OH コイル導体の厚さであり, d_s は TF と OH コイル導体間の距離である (図 11.32 参照). $j_{\text{TF}}, j_{\text{OH}}$ を TF および OH コイル導体の電流密度 ($\text{MA}/\text{m}^2 = \text{A}/(\text{mm})^2$ の単位) とすると

$$j_{\text{TF}} (\text{MA}/\text{m}^2) = \frac{2.5 B_{\text{max}}(\text{T})}{\pi} \frac{1}{d_{\text{TF}} \left(1 - 0.5 d_{\text{TF}} / (R - a - \Delta) \right)},$$

$$j_{\text{OH}} (\text{MA}/\text{m}^2) = \frac{2.5 B_{\text{max}}(\text{T})}{\pi} \frac{1}{d_{\text{OH}}}$$

である. トカマク炉の概念設計は, トカマクの実験研究の発展とともに

なって, 活発に行われてきた. INTOR (International Tokamak Reactor) [11.55] および ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) [11.54] は, この分野の国際的活動の代表的なものである. ITER は誘導電流駆動の場合 $Q \sim 10$ の核燃焼プラズマを長時間 (数 100 秒) 達成することを実証し, 非誘導電流駆動により $Q \sim 5$ の定常運転を実現することを目指している.

2000 年における ITER の主なパラメーターを表 11.5 に示す. τ_E^{tr} は放射損失の補正をしたエネルギー閉じ込め時間である. $Q=10$, κ_s は縦方向半径と横方向半径の比, q_{95} は 95% 磁束面における安全係数, トロイダル磁場コイルの最大磁場 $B_{\text{max}}=11.8\text{T}$, トロイダル磁場コイル個数は 18, 単一 X 点ダイバーター (single null divertor) 配位, 1 ターンのループ電圧は $V_{\text{loop}} = 89\text{mV}$, $Q=10$ 条件の誘導パルスのフラットトップは数 100 秒, P_{fus} は全核融合出力, β_N は正規化ベータ, N_G は (11.77) で定義された正規化密度, f_R は放射損失の割合, $f_{\text{DT}}, f_{\text{Be}}, f_{\text{He}}, f_{\text{Ar}}$ は DT, Be, He, Ar の密度の電子温度に対する割合である.

表 11.4a 指定した設計パラメーター.

a	B_t	A	q_{95}	κ_s	δ	f_{rad}	f_α	β_N/f_{th}	N_G	f_{DT}	f_{shape}	H_{y2}
2.0	5.3	3.1	3.0	1.7	0.35	0.27	0.95	1.77/0.928	0.85	0.82	0.995	1.05

指定した β_N は高エネルギー成分の寄与を含む. ($\alpha_T = 1.0, \alpha_n = 0.1, f_{\text{He}} = 0.04, f_I = 0.02$ を仮定した.)

表 11.4b 計算されたパラメーター.

Q	R	I_p	τ_E	n_{20}	$\langle T \rangle$	W_{th}	P_n	P_α	P_{aux}	P_{rad}	β_{total}	q_I	Θ
11	6.2	15.0	3.7	1.01	8.7	325	425	85	41	32.6	0.025	2.22	0.95

$P_n, P_\alpha, P_{\text{aux}}, P_{\text{rad}}$ の単位は MW. W_{th} の単位は MJ.

表 11.5 ITER のパラメーター.

	電磁誘導運転	非誘導運転
I_p (MA)	15	9
B_t (T)	5.3	5.17
R/a (m)	6.2/2.0	6.35/1.84
A	3.1	3.45
κ_{s95}/δ_{95}	1.7/0.33	1.84/0.41
$\langle n_e \rangle (10^{20} \text{m}^{-3})$	1.01	0.67
N_G	0.85	0.83
$\langle 0.5 \times (T_e + T_i) \rangle$ (keV)	8.5	~11
$W_{\text{thermal}}/W_{\text{fast}}$ (MJ)	325/25	273/60~255/50
τ_E^{tr} (s)	3.7	2.54~2.32
$H_{y2} = \tau_E^{\text{tr}}/\tau_E^{\text{IPB98y2}}$	1.0	1.41~1.3
P_{fus} (MW)	410	361~338
P_{aux} (MW)	41	$P_{\text{NB}}=34/P_{\text{LH}}=29\sim33.7$
P_{rad} (MW)	48	
Z_{eff}	1.65	2.2~2.17
β_t (%)	2.5	2.64~2.42
β_p	0.67	3.55~3.26
β_N	1.77	2.8~2.56
q_{95}	3.0	5.16~5.13
q_I	2.22	3.44
l_i	0.86	2.2~2.17
Q	10	5
f_R	0.39	
$f_{\text{DT}}/f_{\text{He}}$ (%)	82/4.1	/
$f_{\text{Be}}/f_{\text{Ar}}$ (%)	2/0.12	/

誘導運転シナリオのパラメーターは2000年における概念設計の値. 非誘導運転シナリオのパラメーターは2002年における値 [11.54]. 非誘導運転のシナリオではブートストラップ電流が5MA, 非誘導駆動電流が4MAである.

11.8 先進的トカマクへの試み

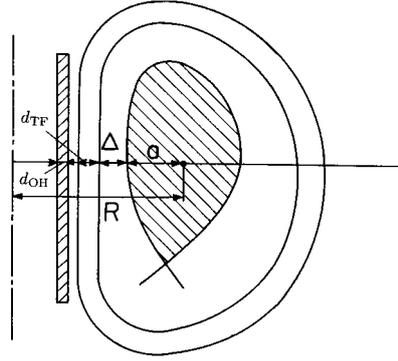


図 11.28 トカマクにおけるプラズマ，トロイダル磁場コイル，変流器の中心ソレノイドコイルの幾何学的配置.

2000 年における ITER-FEAT の概要設計の断面図を図 11.6 に示す.

11.8 先進的トカマクへの試み

11.8.1 球状トカマク

標準的トカマクのアスペクト比 A/a を極端に 1 に近づけた球状トカマク ST の期待される理論的な優位は Peng と Strickler によって論じられている [11.56]. 期待される利点は，自然に縦長の高非円形度がえられること ($\kappa_s > 2$)，高トロイダルベータ，そしてトカマクなみの閉じ込め特性などである. これらの予測は，特に Culham にある START (Small Tight Aspect Ratio Tokamak) [11.57] ($R/a = 0.3/0.28 = 1.31$, $I_p \approx 0.25\text{MA}$, $B_t \approx 0.15\text{T}$) によって実験的に確かめられた. トロイダルベータは 40%, $\beta_N = 3.5 \sim 5.9$ に達した (図 11.29) [11.58]. 観測されたエネルギー閉じ込め時間は標準トカマクと同じような比例則に従っている. Princeton にある NSTX (National Spherical Torus Experiment) [11.59] ($R/a = 0.85/0.65 = 1.3$, $L_p = 1.5\text{MA}$, $B_t = 0.3 \sim 0.6\text{T}$) と Culham にある MAST (Mega Ampere ST) [11.60] ($R/a = 0.85/0.65 = 1.3$, $I_p = 1.35\text{MA}$, $B_t = 0.52\text{T}$) で行われた実験で，エネルギー閉じ込め時間が $\tau_E \sim 0.1\text{s}$ の領域まで ITER98y2 比例則に従っていることを実証した (図 11.30 参照). 密度比例則は $N_G \sim 1$ である. したがって重要な比例則は標準的トカマク (ITER) と殆ど同じである. すなわち

$$q_1 \equiv \frac{aB_t}{RB_p} = \frac{5K^2aB_t}{AI_p} = \frac{5}{AI_N} \frac{1 + \kappa_s^2}{2}, \quad I_N \equiv \frac{I_p}{aB_t},$$

$$q_{95} = \left(\frac{5}{AI_N} \frac{1 + \kappa_s^2}{2} \right) \frac{1.22 - 0.68/A}{(1 - 1/A^2)^2} \quad (A < 3), \quad (11.83)$$

$$\beta_c(\%) = \beta_N I_N, \quad \beta_c(\%)\beta_p = 0.25\beta_N^2 K^2,$$

$$n_{e20} = N_G \frac{I_p}{\pi a^2},$$

$$\tau_E = 0.0562 \times 10^{0.41} H_{y2} I^{0.93} B_t^{0.15} M^{0.19} n_{20}^{0.41} a^{1.97} A^{1.39} \kappa_s^{0.78} P^{-0.69}$$

である. ただし q_{95} のアスペクト比に対する依存は $A \sim 1$ 付近で変わる. ここで R, a, B_t, I_p の単位は m, T, and MA である. I_N 正規化された電流である.

更に ST には有利な特性がある. 図 11.31 を見ると，プラズマの中心部の磁気面は標準的トカマクとあまり変わらないが，プラズマの周辺部では (非常に低アスペクト比の場合)，磁力線はトーラスの主軸寄り内側に長く滞在し周辺部の q の値を大きくする. A が 1 に近づくと円筒安全係数が $q_1 \approx 2$ の場合でも， q_{95} は (11.83) より判るとおり大きくなる. したがって MHD 安定性の制限 (例えば $q_{95} > 3$) にもかかわらず I_N を大きくとることができる (図 11.29 の水平軸を参照). その結果トロロン上限 β_c を大きくとれ，高ベータプラズマの反磁性が高正規化電流の常磁性の効果 を弱めることが期待できる. このことから MHD 安定性に寄与することが期待される [11.58].

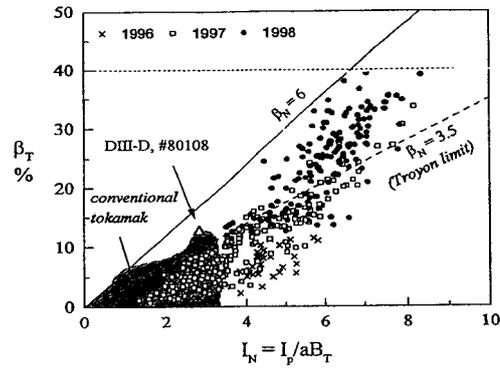


図 11.29 START で測定された平均 β_t と正規化されたプラズマ電流 $I_N = I_p/aB_t$ の関係 [11.58].

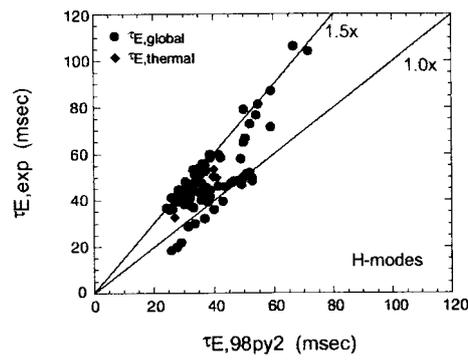


図 11.30 NSTX H-モード観測エネルギー閉じ込め時間と ITER98y2 H-モード比例則との比較 [11.59].

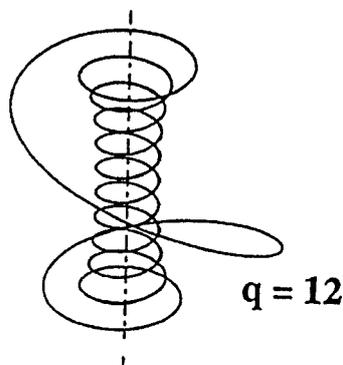


図 11.31 ST のプラズマ周辺における磁力線 [11.58].

11.8 先進的トカマクへの試み

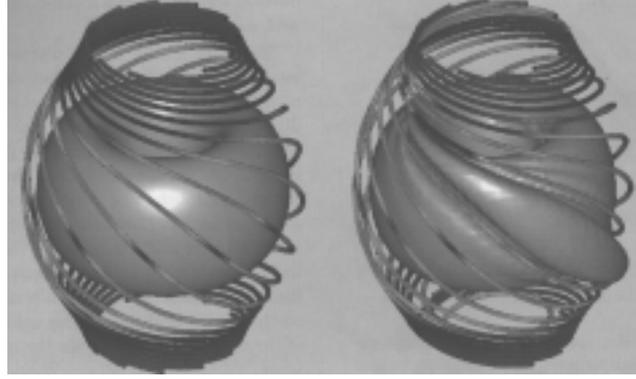


図 11.32 ST の内部再結合事象 (IRE) のシミュレーションによる、プラズマ圧力および磁力線の 3 次元プロファイルの時間的发展。右図は初期状態 $t = 0$ で、左図は $t = 197\tau_A$ における状態 [11.61].

ST において特徴的な MHD 現象として、内部再結合事象 (internal reconnection event, IRE) がある。IRE は低 m モードである。逆転磁場ピンチ (RFP) の平衡配位を説明するのに役立つ MHD 緩和理論 (ヘリシティ保存, 12.2 節参照) を用いて、IRE をモデル化できる。START における IRE は電流分布 (高内部インダクタンス I_i , すなわち、ピークした電流分布) によって駆動される。IRE を次のような MHD 方程式を解いて、興味ある非線形 MHD シミュレーションが行われた [11.61].

$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - (\gamma - 1) p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\gamma - 1) (\eta j^2 + \Phi),$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{b} + \eta \mathbf{j}, \quad \Phi \equiv \sum_{ij} \mu e_{ij} e_{ji} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

μ の項は粘性効果を表している。他の記号は第 3 章と同じである。数値シミュレーションの結果を図 11.32 に示す。この結果は実験結果をよく再現している。シミュレーションにより、内部と外部の磁場の再結合が起こっており、そのダイナミクスが圧力、流れ、磁力線の 3 次元構造によって解析された。

11.8.2 先進的トカマク炉への試み

TF (トロイダル磁場) コイルのための銅導体中心ロッド (solid copper center rod) を用いた ST 炉あるいは超伝導 TF コイルを用いた低アスペクト比のトカマク炉の設計の試みがいくつか行われている。STPP (ST Power Plant) [11.62], ARIES-ST [11.63], Vector (Very Compact Tokamak Reactor) [11.64], SlimCS [11.65] のパラメータを表 11.6 に示す。

STPP の断面図を図 11.33 に示す。STPP と ARIES-ST の TF コイルは銅導体中心ロッド (solid copper center rod) であるため、 B_t は小さくそのため $\beta_N \sim 8$ や $H_{98y2} \sim 1.6$ or 1.8 の設計値は大きくなっている。

Vector は超伝導 TF コイル (Bi2212/Ag/AgMgSb (20 K)) で、標準トカマク ($A \sim 3$) から変流器用の中央ソレノイドコイル系 (CS) を除いて低アスペクト比 $A \sim 2$ にしている。低アスペクト比により比較的高ベータになっている。また循環出力の割合が小さい。しかし非常に高磁場の超伝導 TF コイルの開発が必要である。また初期のプラズマ生成、電流立ち上げの問題があり、実験的に調べられている [11.66]。Vector の断面図を図 11.34 に示す。

Vector の考え方に動機付けられて、より現実的な炉 SlimCS が提案されている。パラメータは $A = 2.6$, $B_{\max} = 16.4\text{T}$ (Nb₃Al), $\beta_N = 11.3$, $H_{98y2} = 1.3$ (表 11.6) である。Slim CS は

表 11.6 STPP, ARIES-ST, Vector, SlimCS のパラメーター.

	STPP	ARIES-ST	Vector('02)	SlimCS
$R/a(m)$	3.42 / 2.44	3.20 / 2.00	3.75 / 1.9	5.5 / 2.1
A	1.4	1.6	2	2.6
κ_s/δ	3.2 / 0.55	3.42 / 0.64	3.75 / ~ 0.1	2.0 / ~0.4
$I_p(MA)$	31	30.8	18.3	16.7
$B_t/B_{max}(T)$	1.77 / -	2.14 / 7.6	4.7 / 19.6	6.0 / 16.4
q_0/q_{edge}	3 / 15	- / -	- / 5.2	- / 5.4
$\beta_t(\%)/\beta_N$	59 / 8.2	54 / 8	7.7 / 3.75	5.7 / 4.3
$\langle n_{e20} \rangle / \bar{n}_{e20}$	1.08 /	- / 2.74	1.6 /	1.18 /
n_G	1.66	2.45	1.6	1.2
N_G	0.65	1.12	1	0.98
$\langle T_e \rangle (keV)$	22	-	-	17.0
$H_{98y2}/H_{ITER93H}$	1.6 /	- / 1.83	1.8 /	1.3 /
$P_{fusion}(GW)$	3.1	2.86	1.8	3
CD 入力 (MW)	50	31	~40	59
BS 電流比率 (%)	92.6	95	~0.8	0.77
中性子壁負荷 (MW/m ²)	3.5	4.1	3.5	3.2
TF コイル オーム損失 (MW)	-	288	~0	~0
還流出力比率		0.32	$Q \sim 45$	$Q \sim 52$

記号は表 11.5 と同じである. STPP, ARIES-ST の TF コイルは通常の導体で, Vector, SlimCS の TF コイルは超伝導である.

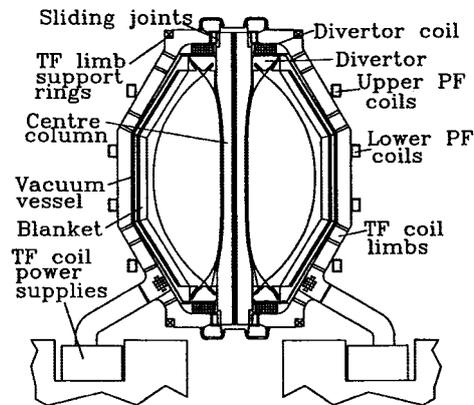


図 11.33 STPP を基にした設計断面図 [11.62]. divertor(ダイバーター), centre column(中央カラム), vacuum vessel(真空容器), blanket(ブランケット).

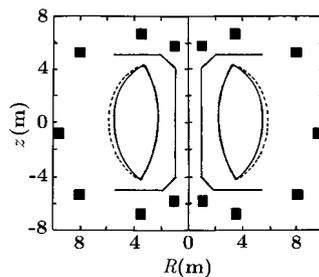


図 11.34 CS (中央ソレノイド) のないトカマク Vector ('04) の断面図 [11.64].

11.8 先進的トカマクへの試み

3.8MA までプラズマ電流を立ち上げることができる。ただし定常時のプラズマ電流は 16.7MA である。

ブートストラップ電流が大きな割合になっている効果を考慮した ST 平衡, 安定性の解析が行われている [11.67].

(材料試験のための) 中性子源として, CTF (compact Component Test Facility) の別名を持つ ST 炉 NSST (Next Step ST) の設計が行われている [11.68].

問題

1. 磁気圧とプラズマ圧力 $B=5\text{T}$ の磁気圧を計算せよ. $n_e = 10^{20}\text{m}^{-3}$, $T_i = T_e = 10\text{keV}$ のプラズマ圧力 $p = 2n_e T$ を計算せよ.
2. 内部インダクタンス プラズマ内部のポロイダル磁場 B_p の磁気エネルギーは $\mu_0(Rl_i/2)I_p^2/2$ で表されることを示せ. ただし l_i は $l_i \equiv \int_0^a B_p(r)^2 2\pi r dr / (B_p(a)^2 \pi a^2)$ で定義される. 平坦な電流分布とパラボリックな電流分布 $j(r) \propto (1 - r^2/a^2)$ の場合について, 正規化された内部インダクタンス l_i を計算せよ. ((11.29) 参照).

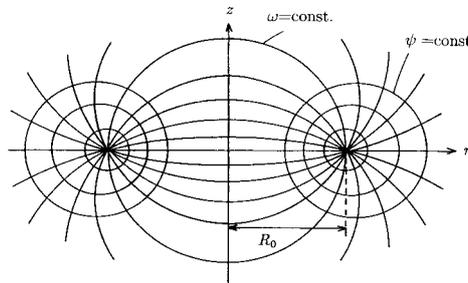


図 11.35 トロイダル座標.

3. トロイダル座標 トロイダル座標 (ψ, ω, φ) は次式で定義される.

$$r = \frac{R_0(1 - \psi^2)^{1/2}}{1 - \psi \cos \omega}, \quad z = -\frac{R_0 \psi \sin \omega}{1 - \psi \cos \omega}, \quad \varphi = \varphi,$$

ここで (r, φ, z) は円筒座標である. $\psi = \text{const.}$ の r, z 断面は円で, その中心は $(r, z) = (R_0(1 - \psi^2)^{-1/2}, 0)$ であり, また $\omega = \text{const.}$ の面についても円で, その中心は $(r, z) = (0, R_0 \cos \omega / \sin \omega)$ であることを示せ (図 11.35 参照). 円 $\psi = \text{const.}$ および $\omega = \text{const.}$ の半径を求めよ.

$$ds^2 \equiv dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = \frac{R_0^2}{(1 - \psi \cos \omega)^2} \left(\frac{d\psi^2}{1 - \psi^2} + \psi^2 d\omega^2 + (1 - \psi^2) d\varphi^2 \right)$$

を証明せよ.

4. 位置不安定性 縦長の断面をもつトカマクの垂直磁場の減衰係数 n は負であり, プラズマは垂直方向に位置不安定である. (11.33) からこの不安定性の成長率を求めよ. (11.33) に現れる質量 M は $M \sim 2\pi R \pi^2 a^2 \rho_m$ であることに留意せよ. ここで R と a はプラズマの大半径および小半径であり, 成長率はポロイダルアルフベン通過時間 a/v_{Ap} , $v_{Ap}^2 = B_p^2 / \mu_0 \rho_m = \mu_0 I_p^2 / 4\pi^2 a^2 \rho_m$ に比例する. 縦横比 κ_s は 1 よりあまり大きくないとする.

5. 位置不安定性のシエルによる安定化 小半径 a_s の有限抵抗率をもつ導体シエルがプラズマの周囲に設置してあり, シエルに誘導された電流の減衰時間を τ_s とする. シエルがないときの垂直方向の位置不安定性の成長率を $\alpha v_{Ap}/a$ とする. シエルを導入したときのプラズマの垂直方向の位置 z の時間変化は $d^2 z / dt^2 = (\alpha v_{Ap}/a)^2 z - 2\pi R I_p B_s / M$, $B_s = \mu_0 I_s / (4a_s)$,

$\alpha^2 = (a/R)^2 (-n) [\ln(8R/a) + \Lambda - 1/2]$ で与えられる. B_s はプラズマ電流リングが z 方向に移動したとき, シエルに誘導される電流 I_s によって作られる半径方向の磁場である. B_s はプラズマ電流リングの速い動きを安定化する効果をもたらす. すなわち

$d^2 z / dt^2 = (\alpha v_{Ap}/a)^2 z - (v_{Ap}/a)^2 \pi (a/a_s) a I_s / I_p$. シエルに誘導される電流 I_s の変化は $dI_s / dt + I_s / \tau_s = 2(I_p / \pi a_s) (dz / dt)$ で与えられる. シエルを導入したときの垂直方向の移動の成長率 γ_s を求めよ ($\propto \exp \gamma_s t$). その際 $v_{Ap}/a \gg \gamma_s$ および $1 \gg a/R$ を仮定してよい. 文献 [11.69] 参照.

6. **ITER** の非誘導運転 ITER の非誘導運転シナリオのパラメーターは表 11.5 に与えられている。非誘導運転のパラメーター a, B_t, A などが与えられたとしたとき、それから計算できるパラメーター Q, R, I_p, τ_E の値を、誘導運転の場合と同じように求めよ。11.7 節参照。

解答 (ヒント)

4. 位置不安定性 垂直方向の変位の成長率 γ は (11.33) によりつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \frac{2\pi|I_p B_z|(-n)}{M} = \frac{2\pi|I_p B_z|(-n)}{2\pi R\pi a^2 \rho_m} = \frac{B_p^2}{\mu_0 \rho_m} \frac{1}{R^2} (-n) [\ln(8R/a) + \Lambda - 1/2] \\ &= \left(\frac{a}{R}\right)^2 (-n) [\ln(8R/a) + \Lambda - 1/2] \left(\frac{v_{Ap}}{a}\right)^2 \equiv \alpha^2 \left(\frac{v_{Ap}}{a}\right)^2.\end{aligned}$$

5. 位置不安定性のシェルによる安定化 垂直方向の運動方程式より

$$(\gamma_s^2 - (\alpha v_{Ap}/a)^2)(z/a_s) + (v_{Ap}/a)^2 \pi (a/a_s)^2 (I_s/I_p) = 0$$

をえる。シェルに流れる誘導電流の式より

$$(2/\pi)\gamma_s(z/a_s) - \left(\gamma_s + \frac{1}{\tau_s}\right) (I_s/I_p) = 0$$

となる。 $\gamma_s^2 \ll (v_{Ap}/a)^2$ であり、また $\alpha^2 \ll 1$ であるので、成長率は

$$(\alpha v_{Ap}/a)^2 \left(\gamma_s + \frac{1}{\tau_s}\right) - 2(v_{Ap}/a)^2 (a/a_s)^2 \gamma_s = 0,$$

$$\gamma_s = (-n) [\ln(8R/a) + \Lambda - 1/2] \left(\frac{a_s}{R}\right)^2 \frac{1}{2\tau_s}$$

となる。

第12章 逆転磁場ピンチ (RFP)

12.1 RFP 配位

逆転磁場ピンチ (逆磁場ピンチ)(RFP ; Reversed Field Pinch) はトカマクと同様、軸対称トーラス系に属し、プラズマ中に流すトロイダル電流によって生じるポロイダル磁場 B_θ と、外部トロイダル磁場コイルとプラズマ電流のポロイダル成分によって作られるトロイダル磁場 B_z との組合せでプラズマを閉じ込める。したがってトカマクと同様、軸対称性を持っているため粒子軌道損失が小さいという長所をもっている。しかしトカマクとは磁場構成に大きな違いがある。ポロイダル磁場 B_θ とトロイダル磁場 B_z とが同じ程度の大きさであるので、安定係数

$$q_s(r) = \frac{r B_z(r)}{R B_\theta(r)}$$

が1よりかなり小さい ($q_s(0) \sim a/(R\Theta)$, $\Theta \sim 1.6$)。またトロイダル磁場の小半径分布は図 12.1 に示すようにプラズマ周辺で逆転する配位になっていて磁力線のシアが大きい。したがって比較的高ベータ ($\langle\beta\rangle \approx 10 \sim 20\%$) のプラズマを MHD 安定に閉じ込めることができる。このことは装置の小型化につながる。またクルスカル-シャフラノフ制限 ($q < 1$) を越えてプラズマ電流を大きく流すことができるので、閉じ込め比例則にもよるが、オーム加熱のみで着火条件に必要な温度まで加熱できる可能性をもっている。

RFP の研究は核融合研究の最も早い時期から始められた。Harwell 研究所の Zeta では放電の初期に不安定であっても静かな状態に緩和されることが 1968 年に観測された [12.1]。そのとき磁場構成は逆転磁場配位である (図 12.1)。そして電子温度 $T_e \approx 100 \sim 150 \text{ eV}$ 、閉じ込め時間 $\tau_E \approx 2 \text{ ms}$ 、 $\langle\beta\rangle \approx 10\%$ 程度の結果を得ていた。しかし同じ会議 (ノボシビルスク) で発表されたトカマク T-3 の画期的結果 ($T_e \approx 1 \text{ keV}$, $\tau_E \approx 5 \sim 6 \text{ ms}$, $\beta \approx 0.2\%$) に注目が集まり、Zeta は閉鎖の運命をたどった。それはトカマクの閉じ込め特性が優れていたからである。しかし RFP では比較的高いベータ値をもつプラズマがすでに実現していたので、その後も引き続き研究が進められ、閉じ込め特性も次第に改善されてきた (ZT-40M, OHTE, HBTX-IB, TPE-1RM15, MST, RFX, TPE-RX など) の計画が進められている [12.2]~[12.5]。不純物抑制、高温領域における閉じ込め比例則などが重要な課題である。

12.2 MHD 緩和

12.2.1 テイラー理論

電流を立ち上がらせるプラズマ生成初期においてプラズマは MHD 的に不安定な状態にあっても、やがてその初期条件にあまり依存することのない安定な RFP 配位が現われてくるという実験事実からヒントをえて、J. B. Taylor は 1974 年、RFP 配位がプラズマの緩和現象によって落ちつくエネルギー最小の状態であることを理論的に導いた [12.6]。

この課題を取り扱うために、電磁流体における磁気ヘリシティの概念を導入する。電場 \mathbf{E} および磁場 \mathbf{B} のスカラー・ポテンシャル ϕ とベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} を考え、ある磁気面に囲まれた領域の積分

$$K = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dr \quad (12.1)$$

を磁気ヘリシティと定義する ($dr \equiv dx \, dy \, dz$)。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

であるので、マクスウェルの式から

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = (-\mathbf{E} - \nabla\phi) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

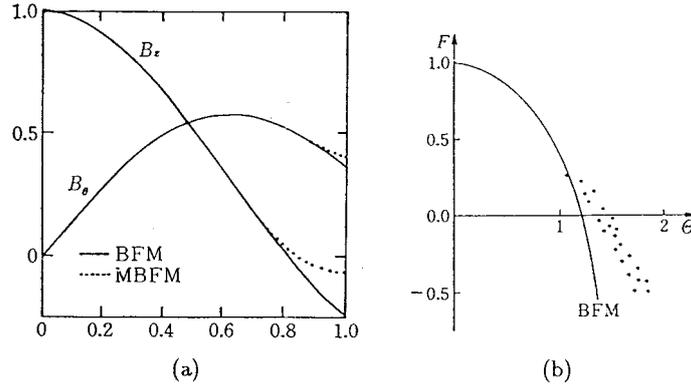


図 12.1 (a) 逆転磁場ピンチ (RFP) におけるトロイダル磁場 $B_z(r)$ とポロイダル磁場 $B_\theta(r)$ の半径分布 (ベッセル関数モデル BFM と変形されたベッセル関数モデル MBFM) (b) F - θ 曲線. 実線はベッセル関数モデル (BFM) の場合であり, 点は実験データを示す

$$\begin{aligned} &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\phi \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -\nabla \cdot (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) - 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

となる [12.7]. もしプラズマが完全な導体壁に囲まれている場合は $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = 0$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ (\mathbf{n} は境界の外に向かう法線方向の単位ベクトル) であるから

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = -2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{r} \quad (12.2)$$

となる. (12.2) の右辺は磁気ヘリシティの損失項である.

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

が適用できる場合, 損失項は

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int_V \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{r} \quad (12.3)$$

となる. $\eta = 0$ の場合, 磁気ヘリシティは保存される. 抵抗 0 のプラズマにおいては任意の磁気面に囲まれた領域の K 積分は保存される. J. B. Taylor は, プラズマにわずかな抵抗がある場合について次のように考えた. すなわち有限抵抗のため局所的に磁力線の再結合が生じ, より安定な状態へと緩和していき, 部分領域の K 積分値は変化するが, 導体壁で囲まれたプラズマ全領域で積分された K_T の値は非常にゆっくりと変化し, いま考えている緩和現象の時間尺度では一定であるとする. したがって K_T の変分

$$\delta K_T = \int \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} \, d\mathbf{r} + \int \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = 2 \int \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = 0$$

の条件で, 磁場のエネルギー最小の条件

$$(2\mu_0)^{-1} \delta \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \, d\mathbf{r} = \mu_0^{-1} \int \mathbf{B} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \mu_0^{-1} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \delta \mathbf{A} \, d\mathbf{r}$$

を未定乗数法で求めると

$$\nabla \times \mathbf{B} - \lambda \mathbf{B} = 0 \quad (12.4)$$

が導かれる. この解はプラズマ圧力 0 の場合 ($\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p = 0$, $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$) の最小エネルギー状態に対応する. 円柱座標系における軸対称な解は

$$B_r = 0, \quad B_\theta = B_0 J_1(\lambda r), \quad B_z = B_0 J_0(\lambda r) \quad (12.5)$$

12.2 MHD 緩和

である。この解をベッセル関数モデル (BFM) と呼ぶ。これを図示したのが図 12.1(a) である。 $\lambda r > 2.405$ の領域でトロイダル磁場 B_z が逆転していることを示す。逆転磁場ピンチ実験においてはプラズマ電流 I_p を表すパラメーターとして Θ 、トロイダル磁場の逆転の程度を表すパラメーターとして F を用いる。すなわち

$$\Theta = \frac{B_\theta(a)}{\langle B_z \rangle} = \frac{(\mu_0/2)I_p a}{\int B_z 2\pi r dr}, \quad F = \frac{B_z(a)}{\langle B_z \rangle}. \quad (12.6)$$

ただし $\langle B_z \rangle$ はトロイダル磁場のプラズマ断面における平均値である。平均化されたトロイダル磁場 $\langle B_z \rangle$ およびプラズマ境界におけるトロイダル磁場 (TF コイルによって作られる磁場) $B_z(a)$ は

$$\langle B_z \rangle = \frac{1}{\Theta} B_\theta(a), \quad B_z(a) = \frac{F}{\Theta} B_\theta(a)$$

である。 Θ および F の値の範囲はそれぞれ 1.3~3.5 および $-0.2 \sim -2$ である。プラズマ境界における安全係数は $q_s(a) = (a/R)(F/\Theta)$ となる。

F と Θ の値を上記のベッセル関数モデルの場合について計算すると

$$\Theta = \frac{\lambda a}{2}, \quad F = \frac{\Theta J_0(2\Theta)}{J_1(2\Theta)} \quad (12.7)$$

となり、 F - Θ の曲線は図 12.1(b) のようになる。テイラーモデルにおいては

$$\lambda = \frac{\mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \text{const.}$$

は空間的に一定であり $\nabla p = 0$ である。安全係数は

$$q_s^{\text{BFM}}(r) = \frac{r B_z}{R B_\theta} = \frac{a}{R \Theta} \frac{J_0(x)}{2 J_1(x)/x}, \quad q_s^{\text{BFM}}(0) = \frac{a}{R \Theta}$$

により与えられる。ただし $x = 2\Theta r/a$ 。

実験データでは有限ベータ効果や緩和現象が不完全であるためにベッセル関数モデルからはずれる。そして上記 λ はプラズマ中央部では平坦な空間分布をしているが周辺では 0 となる。 $\lambda(r)$ として

$$\nabla \times \mathbf{B} - \lambda(r) \mathbf{B} = 0$$

を解いた解を 変形されたベッセル関数モデル (MBFM) という。

トーラスにおける局所モードの安定条件は

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'_s}{q_s} \right)^2 + \frac{2\mu_0 p'}{r B_z^2} (1 - q_s^2) > 0 \quad (12.8)$$

であることから [12.8], $p'(r) < 0$ のところでは強いシア q'_s/q_s で安定化し、シアの弱い中心部では $p'(r) \sim 0$ とするような圧力分布が望ましい。 $q_s^2 < 1$ のとき $q'_s = 0$ (最小ピッチ) ならばそこで局所モードは不安定となる。

プラズマの有限抵抗を考慮すると古典磁場拡散 (7.7) により、その特徴的時間 $\tau_{\text{cl}} = \sigma \mu_0 a^2$ 程度しか RFP 配位は保持されないはずである。しかし ZT-40M の実験 [12.9] によれば τ_{cl} の 3 倍程度の 20 ms 以上の放電時間を実現している。この実験結果は、古典磁場拡散で失われるトロイダル磁束を補う再生機構 (regeneration) があることを示す明確な証左である。したがってプラズマ電流が維持されている限り RFP 配位は維持されることになる。

12.2.2 MHD 緩和過程

RFP プラズマの中心部の電子温度は外部領域の値より高く、トロイダル電場の磁力線に平行な成分は中心部で大きいので (RFP 配位により周辺部では逆向き)、電流分布はピーク状になりやすい。 $m = 1$ モードは不安定になり、トカマクの内部破壊 (4.3 節参照) のような緩和現象が起こる。しかしその物理過程はカドモチェフモデルとは異なっている。

電流分布がピーク状になり、 $q(0)$ が $1/n$ より小さくなると、プラズマ中心部の移動による磁束面の大域的非線形な変形のため、その移動の後方ににできたセパトリックス付近で、反平行な磁場の半径成分が形成され大きくなる。それから非線形駆動再結合が発展し始める。磁束のトモ

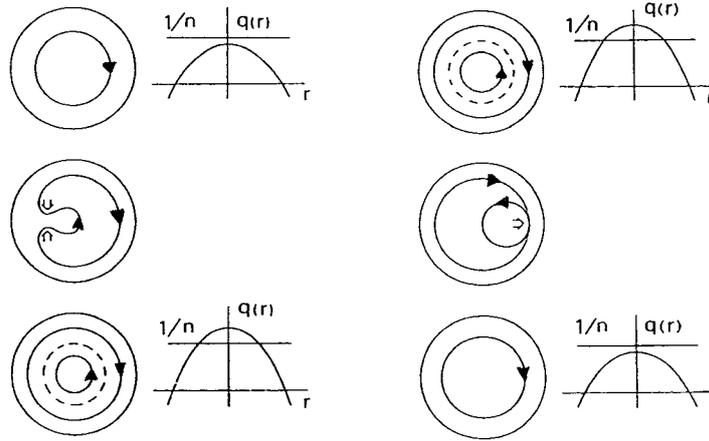


図 12.2 左図: $m = 1$ の大域的モードによる駆動再結合. 右図: 有理面のティアリングモードによるカドモチェフ型再結合.

ロジーを考慮すると, 再結合の後有理面が現れ, $q(0)$ の値は $1/n$ より大きくなる (図 12.2 参照). 電流分布はより平坦になり, RFP プラズマはより安定な状態に緩和する. REPUTE RFP プラズマで観測された $q(0)$ の時間変化は, このシナリオによく対応している [12.10]. もしカダムチェフ型再結合が RFP の $q(r)$ (逆シア) 分布で起こるとすれば, 磁束のトモロジーを考慮すれば再結合の後 $q(0)$ は減少し, 電流分布はよりピークになり $m = 1$ 大域的モードが不安定になる.

本格的 MHD 非線形シミュレーションが精力的に行われた [12.11, 12.12]. 複数ヘリカル成分をもつ場合のシミュレーションから $m = 1, n = 5$ モードのヘリカル磁束を抽出し, その等高線の時間変化を図 12.3 に示す [12.11]. この図から明らかなようにヘリカルな駆動再結合が $12 \sim 20\tau_A$ (τ_A はアルフベン通過時間) の期間に観測される. 複数ヘリカル成分の緩和においては, 異なる n をもつ不安定な $m = 1$ モードが非線形カップリングによってそのエネルギーの殆どを $(0,1)$ モードに供給する. 軸対称な $m = 0$ アイランドの非線形再結合が緩和過程においてヘリカルな再結合よりも重要な役割を果たしている. ヘリカル非線形再結合と軸対称非線形再結合と幾何学的違いを図 12.4 に示す. ヘリカル非線形駆動再結合 (a) においては, 再結合 (X)-線はヘリカルな線であり, 互いに近づき合う流れ (矢印) が再結合に導く. 再結合の後, その前とは異なる磁場 (右図の細い矢印) が生成される. これらの磁場はトロイダルおよびポロイダル成分をもっている. 軸対称非線形駆動再結合においては, 再結合線はポロイダル方向のリングでトロイダル成分の磁場のみ生成される. 後者の過程の方が, 軸対称な逆転磁場 (有理面の内部領域でプラスの磁場, 外側領域で逆方向の磁場) を生成するのにより有効である.

プラズマに揺動があるとき, プラズマ中の磁場 \mathbf{B} はその時間平均 $\langle \mathbf{B} \rangle_t$ と揺動項 $\tilde{\mathbf{B}}$ の和 $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle_t + \tilde{\mathbf{B}}$ で表される. オーム則 (3.21)

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e = \eta \mathbf{j}$$

の時間平均をとると

$$\langle \mathbf{E} \rangle_t + \langle \mathbf{v} \rangle_t \times \langle \mathbf{B} \rangle_t + \langle \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}} \rangle_t - \frac{1}{en_e} \langle \tilde{\mathbf{j}} \times \tilde{\mathbf{B}} \rangle_t = \langle \eta \mathbf{j} \rangle_t \quad (12.9)$$

になる. ここで $\langle \rangle_t$ は時間平均を表す. 新しい項が揺動によって現れる. (12.9) の左辺第 3 項は MHD ダイナモと呼ばれ, 第 4 項は Hall ダイナモと呼ばれる [12.17]. プラズマ断面内のトロイダル磁束 $\Phi_z = \int B_z dS$ の時間平均は, 準定常状態では一定であるから θ 方向の電場の時間平均は 0, すなわち $\oint E_\theta dl = -d\Phi_z/dt = 0$ であり, かつ $\langle \mathbf{v}_r \rangle_t = 0$ である. 定常状態の RFP プラズマにおいては, 次の条件を満たしている必要がある.

$$\langle \eta j_\theta \rangle_t = \langle (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}})_\theta \rangle_t - \frac{1}{en_e} \langle (\tilde{\mathbf{j}} \times \tilde{\mathbf{B}})_\theta \rangle_t. \quad (12.10)$$

言い換えれば抵抗による減衰が揺動による効果的電場によって補償される場合はプラズマは定常的に維持される. この過程をダイナモ機構と呼ばれている.

12.2 MHD 緩和

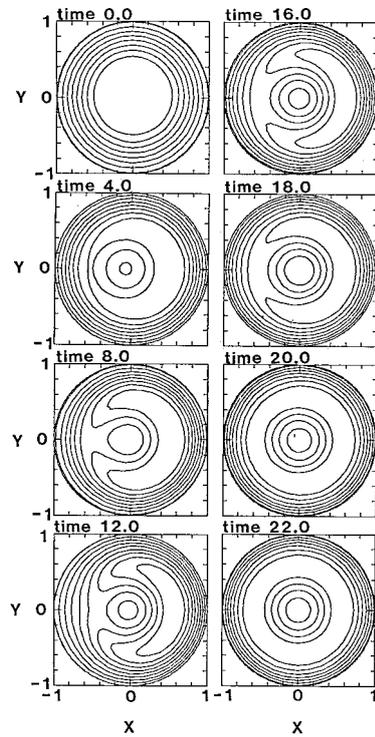


図 12.3 複数ヘリカル成分をもつ場合のシミュレーションから $m = 1, n = 5$ モードのヘリカル磁束を抽出し、その等高線の時間変化を示す。 τ_A はアルフベン通過時間 [12.11].

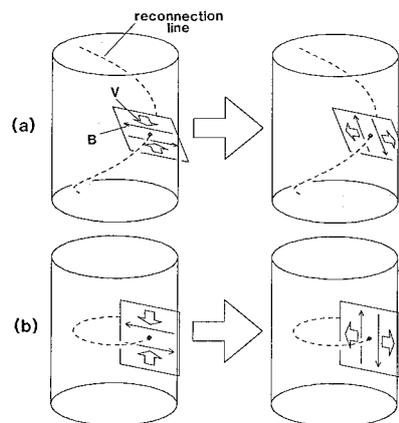


図 12.4 (a) ヘリカル非線形再結合 および (b) 軸対称非線形再結合 の説明図. 左側は再結合前の状態で、右側は再結合後の状態を示す [12.11]. reconnection line (再結合線)

電子の平均自由行路が非常に長い場合はオーム則のような局所的関係は適用できなくなる。MHD ダイナモ理論の代わりに、運動論的ダイナモ理論が提案されている [12.13]。この理論では電子の運動量の磁場を横切る異常輸送が RFP 配位を維持するのに本質的な役割を果たしている。ポロイダル方向のプラズマ電流を維持するダイナモの磁気揺動は、一方では、電子の拡散係数が $D_e \sim v_{Te} a \langle (\delta B_r / B)^2 \rangle$ によって与えられるから (13.2 節参照)、電子の拡散を強める。そして RFP のエネルギー閉じ込めを損なう。

12.3 RFP の閉じ込め

オーム加熱の場合における RFP のエネルギー閉じ込め時間 τ_E はエネルギーバランスの関係より

$$\frac{(3/2) \langle n(T_e + T_i) \rangle_v 2\pi R \pi a^2}{\tau_E} = V_z I_p$$

で与えられる。ただし V_z はループ電圧、 I_p はプラズマ電流、 $\langle \rangle_v$ は体積平均を表す。平均ポロイダルベータ β_θ の定義

$$\beta_\theta \equiv \frac{\langle n(T_e + T_i) \rangle_v}{B_\theta^2 / 2\mu_0} = \frac{8\pi^2 a^2 \langle n(T_e + T_i) \rangle_v}{\mu_0 I_p^2}$$

の関係をを用いると、エネルギー閉じ込め時間は

$$\tau_E = \frac{3\mu_0}{8} R \beta_\theta \frac{I_p}{V_z} \quad (12.11)$$

となる。したがってオーム加熱プラズマの τ_E の比例則を求めるためには、 β_θ と V_z の比例則が必要となる。RFP プラズマにループ電圧 V_z を加えるためにはプラズマの周りの導体シェルにトロイダル方向のカットを設ける必要がある。そうすると磁気ヘリシティの時間変化は、(12.1) 式を導くときに 0 と考えた表面積分の寄与を加えなければならない。

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dr - \int (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

RFP にループ電圧 V_z を加えると、シェル・カットの両端に電圧 V_z がかかり、電場 \mathbf{E} もシェル・カットの間に集中する。表面積分の項はシェル・カットからの寄与 $2V_z \Phi_z$ とそれ以外の表面 S_- からの寄与の和になる。すなわち

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, dr + 2V_z \Phi_z - \int_{S_-} (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (12.12)$$

ただし Φ_z はトロイダル磁束の空間平均で $\Phi_z = \pi a^2 \langle B_z \rangle_v$ である。準定常状態においては $\langle \partial K / \partial t \rangle_t = 0$ である。(12.12) の時間平均をとると

$$\begin{aligned} V_z &= \frac{\int \langle \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle_t \, dr + (1/2) \int_{S_-} \langle \phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \rangle_t \cdot \mathbf{n} \, dS}{\langle \Phi_z \rangle_t} \\ &= \frac{2\pi R}{\pi a^2} \eta_0 I_p \zeta + V_B, \\ V_B &= \frac{2\pi R}{a} \frac{\langle \langle \phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \rangle_t \rangle_{S_-}}{\langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v} \end{aligned}$$

が導かれる。ただし $\langle \rangle_{S_-}$ は表面領域 S_- における平均である。そして ζ は比抵抗および磁場の空間分布によってきまる無次元数で次式で与えられる。

$$\zeta \equiv \frac{\langle \langle \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle_t \rangle_v}{\eta_0 \langle \langle j_z \rangle_t \rangle_v \langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v} = \frac{\langle \langle \eta \mathbf{j} \rangle_t \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_t \rangle_v + \langle \langle \widetilde{(\eta \mathbf{j})} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} \rangle_t \rangle_v}{\eta_0 \langle \langle j_z \rangle_t \rangle_v \langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v}.$$

ここで η_0 は中心における比抵抗値であり、 ζ の値は揺動項が無視できる場合は標準的ベッセル関数モデルで計算するとおおよそ $\zeta \sim 10$ である。しかし一般的には揺動項のため $\zeta > 10$ である。

12.3 RFP の閉じ込め

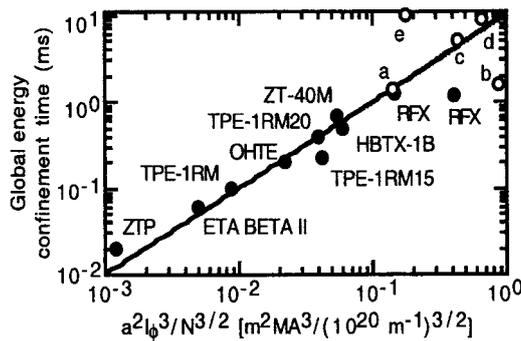


図 12.5 標準運転の RFP におけるエネルギー閉じ込め時間比例則. 図の I_ϕ は文中の I_p に等しい. [12.19]

V_B の値はプラズマ境界が完全な導体シェルの場合には 0 である. しかし現実の装置におけるプラズマ境界はライナー (もしくはライナー保護板) であって導体シェルはプラズマ境界から若干はなれている. この場合擾乱またはプラズマ位置のずれによって磁力線が壁を横切ることが起こる (表面で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{E} \neq 0$). そのため V_B は有限の値を持つ. 閉じ込め時間 τ_E の式に V_z の式を代入すると

$$\tau_E = \frac{3}{8} \beta_\theta \left(\frac{\mu_0 a^2}{\eta_0} \frac{1}{2\zeta} \right) \left(1 + \frac{V_B/2\pi R}{aB_\theta(a)} \frac{\mu_0 a^2}{\eta_0} \frac{1}{2\zeta} \right)^{-1}$$

となる. 高温になると抵抗成分が小さくなるので V_B の項が無視できなくなる.

オーム加熱実験における RFP エネルギー閉じ込め時間比例則が ZT-40M, RFX, TPE-1RM などのデータから ZT-40M グループによって提案された [12.14]. すなわち

$$\tau_{E\text{stand.}} = 10.2 a^2 I_p^{1.5} \left(\frac{I_p}{N} \right)^{1.5}. \quad (12.13)$$

単位は τ_E (ms), I_p (MA), 線密度 $N = \pi a^2 n_e (10^{20} \text{m}^{-1})$ である. (12.13) における I_p/N は, RFP の実験初期から RFP プラズマの重要なパラメーターであるが, グリンバルド密度 (4.46) の逆数である. I_p/N は通常 2 より大きく, 最小値はトカマクと同じく 1 である [12.15]. 多くの RFP 装置からえられた実験的エネルギー閉じ込め時間を比例則 (12.13) と比較した結果を図 12.5 に示す [12.14, 12.19]. 図の中の丸印は MST のデータで, 閉じ込め改良モード (次小節参照) のプラズマのデータを含んでいる.

パルスの平行電流駆動 (PPCD)

最近電流分布の制御により RFP の閉じ込め特性が非常に改良されてきた. RFP の標準的運転では, RFP 配位の磁場構成より磁場に平行な電場はプラズマの中心部で大きくなる. その結果中心部で電流密度が大きくなり, 大域的キックモードやティアリング不安定性が起こる. 不安定性が成長し, 執拗な再結合により電流分布はより平坦になる. 飽和状態における磁気揺動は大きな異常輸送をもたらす. 閉じ込めを改良するために, 加える電場をその電場によって生ずる電流分布がより平坦になるように調整する. そしてより安定な揺動の小さいプラズマを作る. そのため放電中にプラズマの外部領域に, 強い磁場に平行な電場成分 (殆どポロイダル成分) が加わるように, 追加的に電場を加える. この方法はパルスの平行電流駆動 (pulsed parallel current drive, PPCD) と呼ばれる. PPCD により 1994 年 MST 実験でエネルギー閉じ込め時間が倍増された (2.2ms) [12.16]. PPCD 運転におけるエネルギー閉じ込め時間は 2001 年には 10ms まで向上した [12.19]. そしてダイナモ効果が非常に弱くなった.

ダイナモの存在は平均化されたオーム法則の平行成分の測定によってはっきりと確認できる [12.17]. 図 12.6 は測定された平行方向の, 電場の径分布およびオーム則の電流密度項を示している. 標準的プラズマ (図 12.6, 左図) では, 電流密度の分布は電場の分布から非常にずれている. 中心部での電流密度は電場から期待される値より小さい. 一方プラズマ周辺部での電流密度は電場とは反対方向に向いている. 強いダイナモがプラズマ断面の殆どで電場に対して反対方向に電流を駆動している. PPCD プラズマ (図 12.6, 右図) では, 電場の分布は本質的に変わってくる. そして実験誤差の範囲内で, プラズマ断面の殆どで電流密度と加えられた電場はオーム則で理解できる.

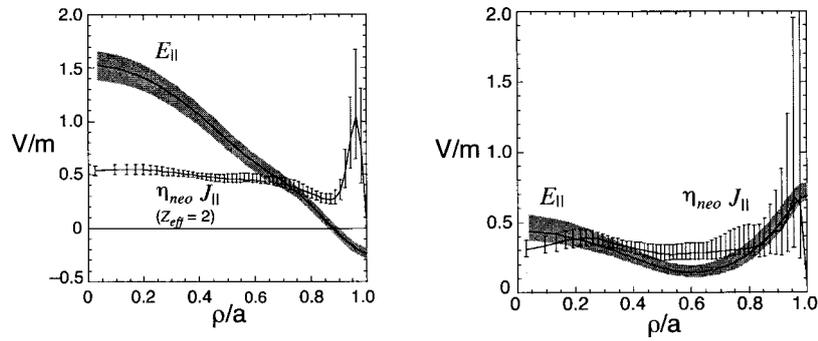


図 12.6 測定された磁場に平行な、平均的電場と電流密度 (に比抵抗率をかけた) の径分布. 右図: 標準運転の場合. 左図: PPCD 運転の場合. 二つの曲線の差がダイナモ効果を表している. [12.17].

表 12.1 MST, RFX, TPE-RX の PPCD 実験運転条件およびプラズマ閉じ込め特性.

	R/a	I_p	I_p/N	\bar{n}_{e20}	T_{e0}/T_{i0}	F/Θ	β	τ_E	Ref.
MST	1.5/0.5	0.34	4.0	0.1	0.39/0.2	-0.65/2.2	9	5	[12.18]
MST	1.5/0.5	0.21	3.5	0.07	0.6/0.18	-2.1/3.5	18	10	[12.19]
MST	1.5/0.5	0.4	5.1	0.1	0.8/0.3			5	[12.20]
MST ^s	1.5/0.5	0.4	5.1	0.1	0.32/0.3			1	[12.20]
RFX	2/0.46	0.79	2.5	0.47	0.33/0.33	-0.20/1.5	6	1.9	[12.21]
TPE-RX	1.72/0.45	0.34	8.0	0.067	0.84/0.37	-0.69/2.0	9	3.5	[12.22]

PPCD 運転においてエネルギー閉じ込め時間が最大のときの値. 線密度 N は $N \equiv \bar{n}_e \pi a^2$ (\bar{n}_e は, n_e の径分布のデータがない場合は干渉計による測定値) で計算. 3 行目にある MST^s は MST の標準運転のデータ. 単位は $R, a(\text{m}), I_p(\text{MA}), I_p/N(10^{-20}\text{MA m}), \bar{n}_{e20}(10^{20}\text{m}^{-3}), T_{e0}, T_{i0}(\text{keV}), \beta(\%), \tau_E(\text{ms})$. [12.24],[12.20].

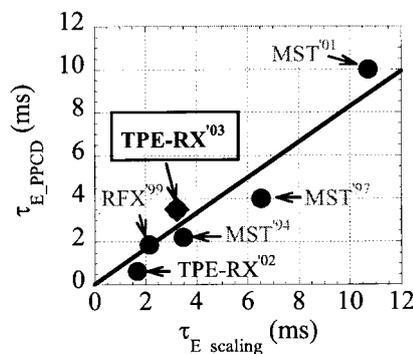


図 12.7 PPCD の場合のエネルギー閉じ込め時間実験値 τ_{E_PPCD} と比例則の値 $\tau_{E_scaling}$ の比較 [12.23].

12.3 RFP の閉じ込め

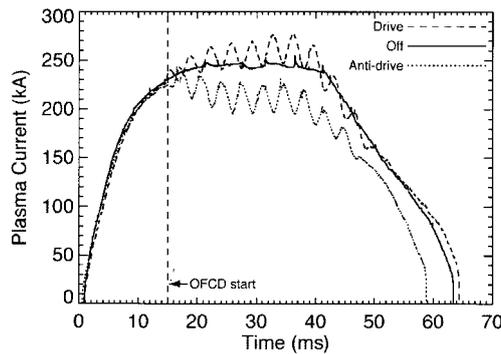


図 12.8 振動場電流駆動法 (OFCD) の 3 つの場合におけるプラズマ電流の時間変化. トロイダル方向とポロイダル方向のループ電圧の相対的位相を変え, 最大ヘリシティ入射の位相の場合 (鎖線), 最大ヘリシティ除去の位相の場合 (点線), OFCD をオフした場合 (実線). [12.17].

MST, RFX, TPE-RX の PPCD 実験運転条件およびプラズマ閉じ込め特性を表 12.1 に示す. 表 12.1 の 2 行目に載せられた MST プラズマ ($\beta = 18\%$, $\tau_E = 10$ ms) のプラズマ境界におけるトロイダル磁場 (TF コイルの作る磁場) は 0.024T である.

PPCD 運転の RFP のエネルギー閉じ込め比例則の一案が TPE グループ から提案された [12.23, 12.24]. すなわち

$$\tau_{E_PPCD} = 0.84\tau_{E_scaling}, \quad \tau_{E_scaling} = 8.07 \times 10^{-3} a^{1.63} I_p^{0.78} \left(\frac{I_p}{N}\right)^{0.33} \Theta^{2.97}.$$

単位は τ_E (ms), a (m), I_p (kA), I_p/N (10^{-20} MA/m) である. 図 12.7 にエネルギー閉じ込め時間の実験値と比例則 $\tau_{E_scaling}$ の比較を示す.

パルスの平行電流駆動の代わりに定常電流駆動, オーム加熱のほかに追加加熱が RFP 研究の次の課題であろう.

振動場による電流駆動

RFP プラズマは非線形現象である MHD 緩和によって変形されたベッセル関数モデルの磁場配位になりやすい. この性質を利用した振動場電流駆動法 OFCD (Oscillating Field Current Drive) が提案されている [12.25]. そして予備実験も行われた [12.26]. 最近 OFCD の予備実験が MST において行われた [12.17]. この結果を図 12.8 に示す. この方法は磁気ヘリシティバランスの式 (12.12) の右辺第 2 項の V_z および Φ_z を

$$V_z(t) = \tilde{V}_z \cos \omega t, \quad \Phi_z(t) = \Phi_{z0} + \tilde{\Phi}_z \cos \omega t$$

と変化させて両者の積の直流成分により抵抗損失の右辺第 1 項を補う方法である. この場合振動場の周期は MHD 緩和の時定数より長く, 磁場の抵抗拡散時間より短くなくてはならない. その電流駆動効率, 振動場付加による擾乱効果の評価などの問題が控えている.

問題

1. 磁気ヘリシティ もしある \mathbf{A} と ϕ がベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの 1 組であるとすると, 他の任意のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの 1 組は $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi$ と $\phi' = \phi + (\partial\psi/\partial t)$ で与えられ, 同じ \mathbf{E} と \mathbf{B} を導く. (12.1) で定義された磁気ヘリシティ $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{r}$ は, もしプラズマが理想導体によって囲まれていれば, ポテンシャルの変換によって代わらないことを証明せよ.
2. RFP 配位 初期に, 理想導体に囲まれた半径 a の円筒内, 一様な縦 (z 方向) 磁場中に一様なプラズマが作られたとする. 縦方向の電流を駆動し増大していくと, プラズマは z ピンチを始め, プラズマの中心部の $B_z(r)$ が大きくなるが, 円筒断面内の全磁束は理想導体のため保存される. プラズマはテイラーモデルに従って変化し, 磁場成分はベッセル関数モデル (12.5), (12.6) で表されるとする. RFP 配位 (プラズマ境界の $B_z(a)$ の向きがプラズマ中心の $B_z(0)$ の向きの逆方向) が実現されるプラズマ電流値の閾値を求めよ.

3. 振動場電流駆動 RFP 配位を維持するべく抵抗拡散を補償するために必要な, 振動ループ電圧 \tilde{V}_z とトロイダル磁束の振動成分 $\tilde{\phi}_z$ に対する条件を求めよ. (12.12) を参照せよ.

解答 (ヒント)

1. 磁気ヘリシティ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla\psi) \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{A} + \nabla\psi) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \left(-\nabla\phi - \mathbf{E} + \nabla \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{A} + \nabla\psi) \cdot \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \left(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \mathbf{B} + \nabla \cdot \left((\mathbf{A} + \nabla\psi) \times \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) \\ &= -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \left(\left(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \mathbf{B} + \mathbf{E} \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) \right). \end{aligned}$$

磁気ヘリシティの積分範囲は完全導体によって囲まれているので, 境界面における \mathbf{B} と境界面法線 \mathbf{n} は直交しており, また \mathbf{E} は \mathbf{n} に平行である.

2. RFP 配位 ベッセル関数モデルの $B_\theta(r)$ および $B_z(r)$ は

$$B_\theta(r) = B_0 J_1(2\Theta r/a), \quad B_z(r) = B_0 J_0(2\Theta r/a)$$

で与えられる. $2\Theta > 2.405$ のとき境界におけるトロイダル磁場は逆転する. $\Theta = B_\theta(a)/\langle B_z \rangle$ であるから ($\langle B_z \rangle = B_{z0}$)

$$\begin{aligned} B_\theta(a) &= \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a} = \Theta \langle B_z \rangle > 1.20 \langle B_z \rangle = 1.20 B_{z0} \\ I_p (\text{MA}) &> 6.0 B_{z0} (\text{T}) a (\text{m}). \end{aligned}$$

3. 振動場電流駆動 $\partial \overline{K} / \partial t = -2 \int \overline{\eta \mathbf{j}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \, d\mathbf{r} + \tilde{V}_z \tilde{\phi}_z = 0$.

第13章 ステラレーター

ステラレーター配位においては、プラズマの外部にあるコイル系によって作られる外部磁場のみによって磁気流体平衡配位を定常的に作る事ができる。荷電粒子をトラスに閉じ込めるためには回転変換角の存在が必要であるが、これが外部導体系によって作られるためである。ステラレーター計画発祥の地プリンストンプラズマ物理研究所の Stellarator-C[13.1] は1969年 ST トカマクに改造されたが、プラズマを定常的に閉じ込めうる事、プラズマの振舞にあまり影響されずに（低ベータ値の場合）磁場配位を選択できる事、プラズマ電流に起因する不安定性のないことなどの特徴をもっており、Wendelstein VIIA, VIIAS, Heliotron-E, ATF などで研究が進められている。大型ヘリカル装置 LHD は1998年に実験を始めた。また先進ステラレーター WVII-X が現在(2008年)製作中である。

13.1 ヘリカル磁場

ヘリカルな対称性をもつ磁場を考えてみよう。座標系として円柱座標 (r, θ, z) を用いる。 $(r, \varphi = \theta - \delta\alpha z)$ のみに依存する磁場を考える。ここで $\alpha > 0$, $\delta = \pm 1$ とする。いま電流密度 j が $z=0$ の領域においては、磁場はスカラー・ポテンシャル ϕ_B で表すことができる。 ϕ_B は $\Delta\phi_B = 0$ を満たすからヘリカル対称性をもつスカラー・ポテンシャルは一般に

$$\phi_B = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \sin(l\varphi), \quad (13.1)$$

$$\varphi \equiv \theta - \delta\alpha z$$

となる。磁場 (B_r, B_θ, B_z) は $\mathbf{B} = \nabla\phi_B$ より次式で与えられる。

$$B_r = \sum_{l=1}^{\infty} l b_l I_l'(l\alpha r) \sin(l\varphi), \quad (13.2)$$

$$B_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r}\right) l b_l I_l(l\alpha r) \cos(l\varphi), \quad (13.3)$$

$$B_z = B_0 - \delta \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \cos(l\varphi). \quad (13.4)$$

これに対応するベクトル・ポテンシャルは

$$A_r = -\frac{\delta}{\alpha^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \sin(l\varphi),$$

$$A_\theta = \frac{B_0}{2} r - \frac{\delta}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l'(l\alpha r) \cos(l\varphi),$$

$$A_z = 0$$

であり、

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

となる。磁気面 $\psi = A_z + \delta\alpha r A_\theta = \delta\alpha r A_\theta = \text{const.}$ は次の式で与えられる。

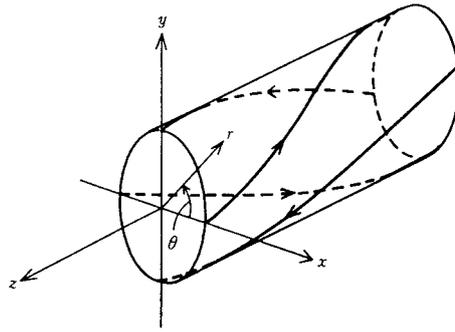


図 13.1 ヘリカルコイルの電流.

$$\psi(r, \varphi) = B_0 \frac{\delta \alpha r^2}{2} - r \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l'(\alpha r) \cos(l\varphi) = \text{const.} \quad (13.5)$$

この様な磁場は図 13.1 で示されるヘリカルな電流分布によって作ることができる。磁気面内における z 方向および θ 方向の磁束を Φ , X とすると

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)} B_z(r, \varphi) r \, dr \, d\theta,$$

$$X = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{r(\varphi)} B_\theta(r, \varphi) \, dr \, dz = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)} B_\theta(r, \varphi) \, dr \, d\theta$$

となる。 $\alpha r B_z - \delta B_\theta = \alpha \partial(r A_\theta) / \partial r = \delta \partial \psi / \partial r$ であるから

$$\Phi - \delta X = 2\pi \psi / \delta \alpha.$$

が成り立つ。次に一つのハーモニック成分のみについて考えよう。このときのスカラー・ポテンシャルおよび磁気面は

$$\phi_B = B_0 z + \frac{b}{\alpha} I_l(\alpha r) \sin(l\theta - \delta l \alpha z),$$

$$\psi = \frac{B_0}{2\delta \alpha} \left((\alpha r)^2 - \frac{2\delta(\alpha r)b}{B_0} I_l'(\alpha r) \cos(l\theta - \delta l \alpha z) \right) = \frac{B_0}{2\delta \alpha} (\alpha r_0)^2$$

で与えられる。 $z = 0$ における ψ の特異点 (r_s, θ_s) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

で与えられる。変形ベッセル関数 $I_l(x)$ は $I_l''(x) + I_l'(x)/x - (1 + l^2/x^2)I_l = 0$ を満たすから特異点は

$$\sin(l\theta_s) = 0,$$

$$\alpha r \left(1 - \frac{\delta b l}{B_0} \left(1 + \frac{1}{(\alpha r_s)^2} \right) I_l(\alpha r_s) \cos(l\theta_s) \right) = 0$$

すなわち

$$\theta_s = 2\pi(j-1)/l, \quad \delta b/B_0 > 0,$$

$$= 2\pi \left(j - \frac{1}{2} \right) / l, \quad \delta b/B_0 < 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

13.1 ヘリカル磁場

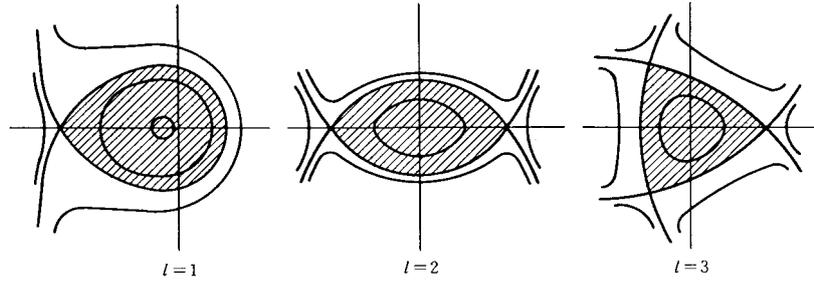


図 13.2 ヘリカル磁場の磁気面, 特異点 X, セパラトリックス.

$$\left| \frac{\delta b l}{B_0} \right| = \frac{1}{(1 + (\alpha r_s)^{-2}) I_l(l \alpha r_s)}$$

となる. $l=1, l=2, l=3$ の場合の磁気面を図 13.2 に示す. 双曲型の特異点を X 点という. X 点を通る磁気面をセパラトリックスという. $x \ll 1$ のとき, 変形ベッセル関数は

$$I_l(x) \approx \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2} \right)^l$$

であるから, 磁気面は $\alpha r \ll 1$ のとき

$$(\alpha r)^2 - \frac{\delta b (l/2)^{l-1}}{B_0 (l-1)!} (\alpha r)^l \sin l(\theta - \delta \alpha z) = \text{const.}$$

となる. 磁場の大きさ B は

$$\left(\frac{B}{B_0} \right)^2 = 1 - 2 \frac{\delta b l}{B_0} I_l \cos(l\varphi) + \left(\frac{lb}{B_0} \right)^2 \left(I_l^2 \left(1 + \frac{1}{(\alpha r)^2} \right) \cos^2(l\varphi) + (I_l')^2 \sin^2(l\varphi) \right)$$

である. X 点 (r_s, θ_s) における磁場の大きさ B は

$$\left(\frac{B}{B_0} \right)^2 = 1 - \frac{(\alpha r)^2}{1 + (\alpha r)^2},$$

また $(r_s, \theta_s + \pi/l)$ の点における B は

$$\left(\frac{B}{B_0} \right)^2 = 1 + \frac{(\alpha r)^2}{1 + (\alpha r)^2}$$

である. したがって B の大きさは X 点で小さくなる. つぎに回転変換角 ι を求めてみよう. 磁力線は

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$$

で表されるから, 回転変換角は

$$\frac{r\iota}{2\pi R} = \left\langle \frac{rd\theta}{dz} \right\rangle = \left\langle \frac{B_\theta}{B_z} \right\rangle = \left\langle \frac{(1/\alpha r) l b I_l(l \alpha r) \cos l(\theta - \delta z)}{B_0 - l b I_l(l \alpha r) \cos l(\theta - \delta z)} \right\rangle$$

で与えられる. ここで r, θ は磁力線上の値で z の関数である. ただし $\langle \quad \rangle$ は z に関する平均値である. 真空磁場の場合, $\oint B_\theta dl = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ であるから, 1 次のオーダーでは 0 であるが, B_θ と B_z の変動分の共鳴により 2 次のオーダーで有限の回転変換角を生ずる. 平均法によって求めると

$$\frac{\iota}{2\pi} = \delta \left(\frac{b}{B} \right)^2 \frac{l^3}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{I_l I_l'}{x} \right) \right)_{x=l\alpha r} \frac{R}{r} \quad (13.6)$$

となる [13.2], [2.2] の 2 章.

$$I_l(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^l \left(\frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!}x^2 + \frac{1}{2!(l+2)!}x^4 + \dots\right)$$

の展開式を用いると, 次の式が導かれる.

$$\frac{l}{2\pi} = \delta\left(\frac{b}{B}\right)^2 \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 l^5(l-1)\alpha R \left((l\alpha r)^{2(l-2)} + \dots\right). \quad (l \geq 2)$$

トロイダルのヘリカル磁場の解析例は [13.3] を参照されたい.

ヘリカル対称系の平衡方程式

ヘリカル対称系の場合, 軸対称系のグラド-シャフラノフ方程式に似た平衡方程式がある. 物理量は r と $\phi = \theta - hz$ のみに依存するので, 磁気面 ψ ($\nabla\psi \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) は

$$B_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}B_\theta - hB_z\right) \frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0,$$

$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(B_\theta - hrB_z) = 0$$

を満たす. したがって

$$rB_r = \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad B_\theta - hrB_z = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

となる. $\nabla p \cdot \mathbf{B} = 0$ の関係から, $p = p(\psi)$ が導かれる.

$$B^*(r, \phi) \equiv B_z + hrB_\theta$$

なる量を定義し, $\nabla p \cdot \mathbf{j} = 0$ の関係から

$$B^*(r, \phi) = B^*(\psi)$$

が導かれる. そして

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad B_\theta = \frac{-\frac{\partial\psi}{\partial r} + hrB^*}{1 + (hr)^2}, \quad B_z = \frac{hr\frac{\partial\psi}{\partial r} + B^*}{1 + (hr)^2}$$

が得られる. 電流密度は \mathbf{B} より次のようになる.

$$\mu_0 \mathbf{j}_r = \frac{B^{*'} \partial\psi}{r \partial\phi},$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_\theta = -hrL_h(\psi) - \frac{B^{*'} \frac{\partial\psi}{\partial r}}{1 + (hr)^2} + \frac{2h^2 r B^*}{(1 + (hr)^2)^2},$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_z = -hrL_h(\psi) + \frac{hrB^{*'} \frac{\partial\psi}{\partial r}}{1 + (hr)^2} + \frac{2hB^*}{(1 + (hr)^2)^2}.$$

ヘリカル対称系の平衡方程式は次のように与えられる [13.4].

$$L_h(\psi) + \frac{B^* B^{*'}}{1 + (hr)^2} - \frac{2hB^*}{(1 + (hr)^2)^2} = -\mu_0 p', \quad (13.7)$$

$$L_h(\psi) \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{1 + (hr)^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \psi.$$

$B^*(\psi)$ や $p(\psi)$ が ψ の線形関数の場合は解析解がある [13.5].

13.2 ステラレーター装置

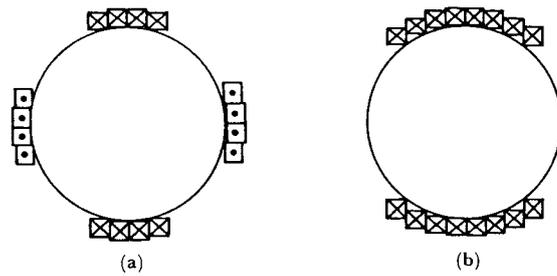


図 13.3 $l=2$ のヘリカルコイルのプラズマ断面における配置. (a) 標準ステラレーター型. (b) ヘリオトロン/トルサトロン型.

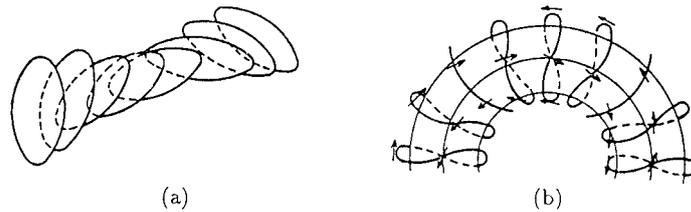


図 13.4 (a) 楕円コイルによる $l=2$ ステラレーター磁場系および (b) 捩れたトロイダル・コイルによって作られるトロイダルステラレーター磁場系.

13.2 ステラレーター装置

ステラレーター磁場は極数 $l=1, 2, 3, \dots$ の種類があるが、よく用いられるのは $l=2, l=3$ である。ヘリアック (heliac) のような立体磁気軸を持つ系では $l=1$ の成分を持つ。ヘリカルコイルの小半径 a_h とヘリカル・ピッチ長 R/m (R は大半径, m は周期数) の比 ma_h/R が $ma_h/R \ll 1$ の場合、回転変換角 ι は $l=2$ の場合 $\iota_2(r) = \text{const.}$, $l=3$ の場合は $\iota_3(r) = \iota(r/a)^2$ となる。この場合には $l=2$ 配位はシアがなく、また $l=3$ 配位では中心部で $\iota(r)$ が小さくなる欠点がある。 $ma_h/R \sim 1$ となると $l=2$ の場合でも $\iota_2(r) = \alpha_0 + \alpha_2(r/a)^2$ となり、シアができる。

ヘリカルコイルのプラズマ断面における配位を $l=2$ の場合について図 13.3 に示す。図 13.3(a) に示す配位は標準ステラレーター型である [13.6, 13.7]。また図 13.3(b) に示すのはヘリオトロン/トルサトロン型である [13.8, 13.9]。ステラレーター磁場は一般にはトロイダル磁場コイル系とヘリカルコイル系によって構成されるが、1 種類のコイル系によっても構成できる。ヘリオトロン/トルサトロン型の場合には、ヘリカルコイルがその流れる電流の向きが同じであるため、トロイダル磁場とヘリカル磁場を発生する [13.10, 13.11]。したがってヘリカルコイルのピッチを適当に選べば、トロイダル磁場コイルなしでステラレーター磁場を構成することができる [13.12, 13.13]。その代表的装置は Heliotron-E, ATF, LHD であり、LHD のコイル系を図 13.5 の上図に示す [13.16]。図 13.4(a) に示すように楕円コイルを配置すると $l=2$ のステラレーター磁場をつくることができる [13.14]。また、ヘリカルコイル系の電流成分とトロイダル磁場コイル系の電流成分とを図 13.4(b) に示すような捩れたコイル系によって作ることもできる [13.15]。その典型例は Wendelstein VIIAS, 7X である。Wendelstein 7X のモジュラーコイル系を図 13.5 の下図に示す [13.17]。直線ステラレーターの場合は、そのヘリカル対称性のため磁気面 $\psi = rA_\theta$ が存在するが、トロイダルステラレーターの場合における磁気面の存在の厳密な証明はない。計算結果によれば磁気軸付近の中心部では磁気面が存在する。しかし周辺に近づくと磁気面が壊れ、磁気線の振舞いがエルゴディックになる。ヘリカルコイル系は複雑な形をしているが、計算機の発展により、磁力線を正確に追跡することができ、ステラレーター磁場の設計が容易になった。そしてその幾何学的誤差の磁気面への影響を予測することができ、工作精度を決めることができる。また数値制御工作機械の発展によって精度良く ($\Delta l/R \leq 0.05\%$) 装置が製作できるようになった。

13.3 ステラレーター磁場における新古典拡散

クーロン衝突による古典的拡散を調べるには荷電粒子の軌道に関してよくわかっていることが必要である。ヘリカル磁場や有限の数のコイルで作られたトカマクのトロイダル磁場では、磁場の大きさ B に $-\epsilon_t \cos \theta$ 以外の非対称な不均一項が現れる。

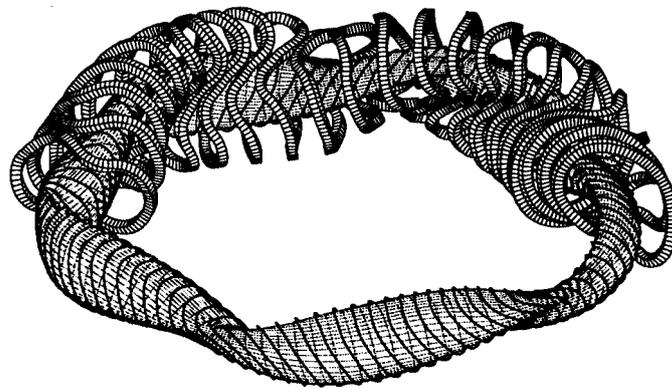
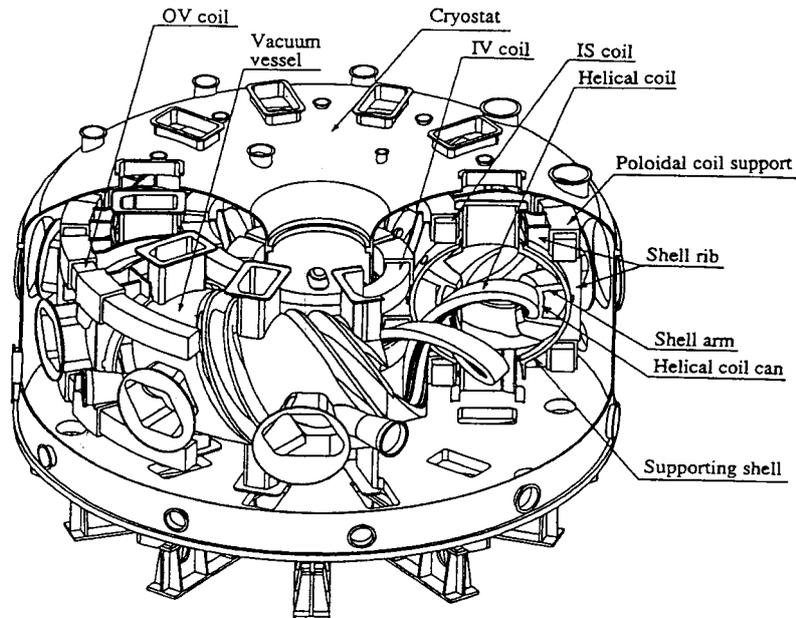


図 13.5 上図は核融合科学研究所(土岐)にある LHD 装置の説明図 [13.16] ($R = 3.9\text{m}$, $a \sim 0.6\text{m}$, $B = 3\text{T}$). vacuum vessel (真空容器), cryostat (クライオスタット), helical coil (ヘリカルコイル), helical coil can (ヘリカルコイル容器), poloidal coil support (ポロイダルコイル支持部). 下図はモジュラーコイル系で磁場構成を最適化した Wendelstein 7-X の概念図 [13.17] ($R=5.5\text{m}$, $a=0.55\text{m}$, $B=3\text{T}$, Greifswald において建設中).

13.3 ステラレーター磁場における新古典拡散

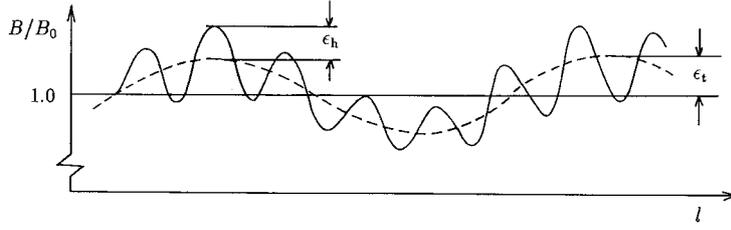


図 13.6 磁力線に沿う長さの座標 l によって変わる磁場の大きさ B .

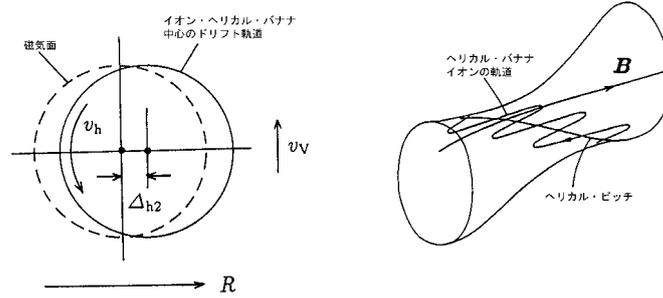


図 13.7 ヘリカル・リップルに捕捉されたバナナ粒子の軌道.

$$\frac{B}{B_0} \approx 1 - \epsilon_h \cos(l\theta - m\varphi) - \epsilon_t \cos\theta. \quad (13.8)$$

磁力線に沿う長さの座標 l による磁場の大きさ B の変化を図 13.6 に示す。ヘリカルリップルに捕捉された粒子は磁気面を横切るドリフトにより粒子拡散に寄与する。ヘリカルリップルの捕捉領域付近の磁力線のプラズマの外側に対して凸で、その曲率半径を R_h とすると、ヘリカルリップルに捕捉された粒子は ∇B ドリフトによりポロイダル方向 (θ 方向) に $v_h \approx mv_{\perp}^2 / (qBR_h)$ の速度でドリフトする (図 13.7 参照)。ポロイダル回転の角速度は

$$w_h = v_h / r \approx (r/R_h)(T/qBr^2) \approx \epsilon_h(T/qBr^2) \quad (13.9)$$

である。直線ステラレーターの場合は、磁気面に沿って回転するが、トーラス状になるとトロイダル・ドリフトの運動が重畳される。トロイダル・ドリフトの速度はトーラス面に対して垂直方向に $v_v = kT/(qBR)$ である (2.5.4 節参照)。有効衝突時間 $(\nu_{\text{eff}})^{-1} = (\nu/\epsilon_h)^{-1}$ が、ポロイダル方向の回転周期 $(\omega_h)^{-1}$ より短い場合は、ヘリカル・リップルに捕捉されたバナナ粒子の軌道は磁気面から

$$\Delta_{h1} = v_v \frac{\epsilon_h}{\nu} = \epsilon_h \frac{T}{qBR\nu}$$

である。そうすると粒子拡散係数は

$$D_{h1} \sim \epsilon_h^{1/2} \Delta_{h1}^2 \nu_{\text{eff}} = \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{T}{qBR} \right)^2 \frac{1}{\nu} = \epsilon_t^2 \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{T}{qBr^2\nu} \right) \left(\frac{T}{qB} \right)$$

となる [13.18]。 $\epsilon_h \sim r/R_h$ であるので、 R_h を ϵ_h で置き換えると

$$D_{h1} \sim \gamma_h \epsilon_h^{1/2} \epsilon_t^2 \left(\frac{\omega_h}{\nu} \right) \left(\frac{T}{qB} \right) \quad (\nu/\epsilon > \omega_h) \quad (13.10)$$

が導かれる。ここで γ_h は $O(1)$ のオーダーの係数である (図 13.8 参照)。

有効衝突時間 $(\nu_{\text{eff}})^{-1}$ が $(\omega_h)^{-1}$ より長い場合は、軌道の磁気面からのずれ Δ_{h2} は

$$\Delta_{h2} \approx v_v / \omega_h \approx \frac{R_h}{R} r \sim \frac{\epsilon_t}{\epsilon_h} r$$

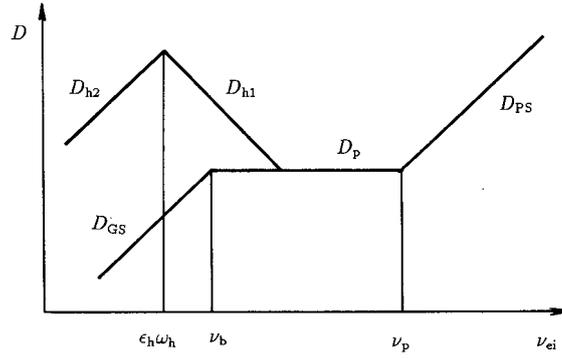


図 13.8 ステラレーターの新古典拡散係数の衝突周波数に対する依存性.

$$\nu_p = (\nu/2\pi)v_{Te}/R, \quad \nu_b = \epsilon_t^{3/2}\nu_p, \quad \omega_h = \epsilon_h\kappa T_e/(qBr^2).$$

となる。したがって、この領域における粒子拡散係数 D_{h2} は

$$D_{h2} \approx \epsilon_h^{1/2} \Delta_{h2}^2 \nu_{\text{eff}} = \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_h} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_h^{1/2}} r^2 \nu \quad (\nu/\epsilon_h < \omega_h)$$

である(図 13.8 参照)。捕捉粒子がヘリカル・リップルの局所ミラー磁場に捕捉されるかされないかの境界付近にある場合は、ミラー磁場の強い磁場の極大値付近の反射点近くではゆっくり動くので、磁場の強い場所付近の滞在時間が長い。したがって捕捉粒子が時間平均として感じる磁力線の曲率は小さくなり(曲率半径は大きくなり)、やがてその符号を変える(外に対しては凹, ω_h の符号を変える)。このような場合は、スーパーバナナが理論的に予測されている [13.18]。しかしヘリカル局所ミラーに捕捉される粒子軌道の縦の断熱不変性 $J_{\parallel} = \text{const.}$ が成り立つことを前提にしている議論である。そのためにはヘリカル局所ミラーを往復する周期がポロイダル方向の回転周期 ω_h^{-1} に比べて短いことが必要条件である。スーパー・バナナはヘリカル・局所ミラーにかろうじて捕捉される領域にいたので、往復する周期が長くなり、 J_{\parallel} の断熱不変性による解析が適用できる条件を満足しなくなる。現実の装置($\epsilon_h \sim \epsilon_t$)で、実際に粒子軌道を計算し追跡するとスーパーバナナが存在しないことが導かれている [13.19]。もし粒子軌道が壁を横切の場合は、粒子は失われる。これを軌道損失という。或る場合は軌道損失のため、速度空間に損失領域が現れることもある [13.20]。また粒子の軌道が壁にぶつかって失われる軌道損失によって速度空間に欠落領域が現れることも計算されている [13.19]。また半径方向の電場があるとポロイダル方向の回転周波数は $\omega_h + \omega_E$ ($\omega_E = E_r/B_0$) となり軌道が影響を受ける。

$\nu/\epsilon_h > \omega_h$ の領域におけるヘリカルリップルの熱拡散係数 χ_{h1} は

$$\chi_{h1} \sim \gamma_T \epsilon_t^2 \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{T}{qBr} \right)^2 \frac{1}{\nu} \quad (\gamma_T \sim 50) \quad (13.11)$$

で与えられる。 $\nu \propto T^{-1.5}$ であるので $\chi_{h1} \propto T^{3.5}$ となり、プラズマが高温になると非常に大きな値となる [13.21]~[13.23]。これを抑える対策が重要な課題である。

トロイダルヘリカル系は回転対称性およびヘリカル対称性を失うため、循環座標に対する一般化運動量の保存(軸対称系 $f(r, z)$ の場合は角運動量 $mr^2\dot{\theta} + qrA_{\theta} = \text{const.}$, ヘリカル対称性

$f(r, \theta - \alpha z)$ の場合は $m(\dot{z} + \alpha r^2\dot{\theta}) + q(A_z + \alpha rA_{\theta}) = \text{const.}$) が失われる。そのため加熱によって生成される高エネルギーイオン、あるいは DT 反応による 3.5MeV のアルファ粒子の軌道損失が大きくなり、加熱効率が悪くなる可能性がある。

もし準対称なステラレーターが設計できれば、一般化運動量の準保存により粒子軌道も閉じる傾向になる。したがって標準的ステラレーターの新古典拡散が改良されることが期待できる。準軸対称、準ヘリカル対称、準アイソダナミック(オムニジェナス)ステラレーターの設計研究が活発に行われていて、13.5 節で紹介する。

13.4 ステラレーターの閉じ込め

ステラレーターの実験研究は Stellarator-C [13.24] の後、製作精度の良い小型ステラレーター(Clasp, Proto Cleo, Wendelstein IIB, JIPP I, Heliotron D, L1, Uragan-1)を用いて基礎的に進められた。これらの装置によりアルカリプラズマや RF 加熱、ガン入射後のプラズマを用いて静か

13.4 ステラレーターの閉じ込め

なプラズマを閉じ込めることができた。そして実験条件を変えて不安定性を発生させ、その性質が調べられた。

長いヘリカル・ピッチをもつ $l=2$ ステラレーター Wendelstein IIa や JIPP I-b では、回転変換角がプラズマ半径に依らずシアが小さい。 $l/2\pi = n/m$ を満たす有理面では磁力線は m 回トラスを回って、もとへもどり閉じてしまうため、なんらかの原因である場所に電荷が集まっても、磁気面全体に電荷を平均化させることができず、抵抗性ドリフト波、抵抗不安定性などが励起されやすくなる。また対流セルができ、対流損失が起きやすくなる [13.25]。有理面におけるプラズマ損失の増大が観測される。これらを共鳴損失と呼んでいる。共鳴損失はシアの導入で安定化されることが確認された。

これらの成果を基盤として中型ステラレーター (Wendelstein VIIA, Cleo, JIPP T-II, Heliotron E, L2, Uragan-2,3) の研究へと進んだ。ステラレーター磁場による回転変換角 ($l_h/2\pi$) がある程度 (~ 0.14) 以上になるとトカマクで観察される破壊的不安定性が抑制されることが観察された (Wendelstein VIIA, JIPP T-II)。さらにトカマクにおける NBI 加熱や波動加熱の研究の進展にともない、これらの方法をステラレーター・プラズマの生成に適用できるようになった。

Wendelstein VIIA ではオーム加熱によって、まずターゲットプラズマを生成し、イオン温度 \sim 数 100 eV、電子密度 \sim 数 $\times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ の高温プラズマを閉じ込めた (1982 年)。また Heliotron E では、オーム加熱を用いずに、電子サイクロトロン加熱によって $T_e \sim 800 \text{ eV}$ 、 $\bar{n}_e \sim 0.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ のプラズマを生成し、これをターゲット・プラズマとして 1.8 MW の NBI 加熱を加え、 $T_i \sim 1 \text{ keV}$ 、 $\bar{n}_e = 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ のプラズマを閉じ込めた (1984 年)。また $B = 0.94 \text{ T}$ の条件で NBI 入力 $P_{PB} \sim 1 \text{ MW}$ で平均ベータ値 $\langle \beta \rangle \sim 2\%$ 程度が得られた。これらの実験はステラレータ配位により定常閉じ込め特性を実証している [13.26]。

またエネルギー閉じ込め時間の実験比例則がヘリオトロングループから提案されている [13.27]。すなわち

$$\tau_E^{\text{LHD}} = 0.17a^{2.0} R^{0.75} n_{20}^{0.69} B^{0.84} P^{-0.58}. \quad (13.12)$$

ただし n_{20} は 10^{20} m^{-3} 単位の電子密度である。W7AS グループは W7AS 閉じ込め比例則を提案した [13.28]。

$$\tau_E^{\text{W7AS}} = 0.115a^{2.21} R^{0.74} n_{19}^{0.5} B^{0.73} P^{-0.54} (l/2\pi)^{0.43}. \quad (13.13)$$

そして国際的なデータベースによる閉じ込め比例則も提案されている [13.28]。

$$\tau_E^{\text{ISS95}} = 0.079a^{2.21} R^{0.65} n_{19}^{0.51} B^{0.83} P^{-0.59} (l/2\pi)^{0.4}. \quad (13.14)$$

ただし n_{19} は 10^{19} m^{-3} 単位の電子密度、 $l/2\pi$ は $r = (2/3)a$ における値である。単位は s, m, T, MW である。密度比例則 [13.27] は

$$n_{20}^s = 0.25 N_s \left(\frac{PB_t}{a^2 R} \right)^{0.5} \quad (13.15)$$

である。

電子熱輸送障壁はコンパクトヘリカル系装置 (CHS) ($R=1\text{m}$, $a=0.2\text{m}$, $B_t=1\text{T}$) の ECH 加熱プラズマで 1999 年観測された [13.29]。ECH 入力を 150 kW から 200 kW 程度まで増加すると、L 状態から H 状態に遷移が起こった。HIBP (重イオンビーム計測) によって計った静電ポテンシャルの径分布を見ると、L 状態では観測されなかった顕著なピークが H 状態で現れた。電子温度は 1.4 keV から 2.0 keV に上昇した。プラス (外向き) の径電場を伴う電子ルートが成長し、中心部の低い輸送が実現した。電子熱輸送障壁は W7AS [13.30] や LHD [13.31, 13.32] でも観測された。さらに CHS では二組の HIBP により、13.5 節で説明する帯状流を確定した [13.35]。

W7-AS はモジュラーコイル ($l = 2, 3/n = 5$) のステラレータで、低いレベルの新古典輸送とフィルシ-シュルータ電流を小さくするように最適化している ($R = 2 \text{ m}$, $a = 0.17 \text{ m}$, $B_t = 2.5 \text{ T}$)。W7-AS L モード放電のプラズマは W7AS 比例則 (13.13) に従っていて ISS95 比例則 (13.14) よりおよそ 25% よい値を得ている。

高閉じ込め NBI 放電 (H-NBI) [13.33] W7-AS において高閉じ込め NBI 放電 (H-NBI) が 1999 年に発見された。 $E \times B$ シアのある流れ、輸送障壁が $r/a \sim 0.7$ あたりで形成され、閉じ込め時間が W7AS 比例則の 2.5 倍までに改善した。

高密度 H モード (HDH) [13.34] は 2000 年に観測された。密度は $2 \sim 4 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ に達し、観測された閉じ込め時間はおおよそ $2\tau_E^{\text{W7AS}}$ で最大密度は (13.15) の密度比例則のおおよそ 1.6 倍に達した。

表 13.1 W7-AS 実験で達成された極大のプラズマパラメーター [13.35].

	B_t	\hat{l}	P_{NB}/P_{EC}	n_e	T_{e0}	T_{i0}	β	τ_E	Remarks
T_{e0}	2.5	0.34	/2	0.2	6.8				e-ルート
T_{i0}	2.5	0.52	1.3/0.5	0.5		1.7			H-NBI
n_e	2.5	0.55	2.4/0	4	0.35			10*	HDH
β	0.9	0.5	2.8/0	2	$\sim 0.37^*$		3.4		HDH
τ_E	2.5	0.345	0.33/0	1.1				60	H-NBI
*	2.5	0.345	0.85/0.35	0.6					HDH

単位は T, MW, 10^{20}m^{-3} , keV, %, ms. $\hat{l} \equiv l/2\pi$. 最下行にある *印は三重積 $n_e T_{i0} \tau_E$ (単位は $10^{20}\text{m}^{-3}\text{eV}\cdot\text{s}$). 3,4行目にある *印は [13.36] から引用したデータである.

表 13.2 LHD実験において達成された極大のプラズマパラメーター.

	B_t/R	P_{NB}/P_{EC}	n_e	T_{e0}	T_{i0}	β	τ_E	Ref.
T_{e0}	$\sim 3/\sim 3.75$	1.3/0.88	0.02	9.5				[13.32]
T_{i0}	2.75/3.6	1.8/	0.13	3.3	3.5		90	[13.36]
T_{i0}			0.07		5			[13.31]
n_e	$\sim 2.8/3.6$	11/0	1.6					[13.37]
β	0.45/3.6	1.2/0	0.3			4.1		[13.37]
τ_E	2.75/3.6	1.8/0	0.65	1.1			300	[13.36]
*		$1.5(P_{\text{abs}})$	0.48		1.3	$\star = 220$	360	[13.31]

単位は T, m, MW, 10^{20}m^{-3} , keV, %, ms. 最下行にある *印は三重積 $n_e T_{i0} \tau_E$ (単位は $10^{20}\text{m}^{-3}\text{eV}\cdot\text{s}$).

W7-AS 実験で達成された極大のプラズマパラメーターを表 13.1 に示す [13.35].

LHD (Large Helical Device) は超伝導コイルの装置で $R = 3.5 \sim 3.9\text{m}$, $a \sim 0.6\text{m}$, $B_t = 0.45 \sim 3\text{T}$, $l = 2$, $m = 10$, $P_{NBI} = 13\text{MW}$ (ビームエネルギー 180 keV), $P_{ECH} = 2\text{MW}$ (周波数 168 GHz, 84 GHz), $P_{CRF} = 2.7\text{MW}$ (周波数 38.5 MHz) である (図 13.5 参照). LHD の内側シフト放電 ($R_{\text{axis}} = 3.6\text{m}$) のエネルギー閉じ込め時間は ISS95 比例則の 1.5 倍の改善度に対応している. LHD 実験において達成された極大のプラズマパラメーターを表 13.2 に示す.

13.5 準対称ステラレーター

13.5.1 磁気座標系 (Boozer 座標系) と自然座標系 (浜田座標系)

粒子の軌道や MHD 不安定性を解析するとき, 適切な座標系を選ぶことが特に非対称系において重要である. 自然 (浜田) 座標系 [13.38] および 磁気 (Boozer) 座標系 [13.39] は, 粒子の軌道や MHD 不安定性を解析するとき, しばしば利用される. この小節では, 両者の関係を文献 [13.40] に従って説明する. 4.2.1 節で述べた平衡方程式は次のとおりである.

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (13.16)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (13.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (13.19)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (13.20)$$

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0. \quad (13.21)$$

(13.16)~(13.21) で与えられるトロイダル MHD 平衡配位は単一磁気軸をもつ重なった磁束面 (磁気面) からなり, 各磁束面 (磁気面) は p で指定されるものと仮定する. また $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, $\mathbf{B} \cdot \nabla \rho = 0$ より

$$p = p(\rho) \quad (13.22)$$

である. (13.18), (13.20) および (13.22) より次のようになる.

$$\mathbf{B} = \nabla \rho \times \nabla v. \quad (13.23)$$

13.5 準対称ステラレーター

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = \rho \nabla v$$

で与えられる。(13.19), (13.21) および (13.22) より

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla w \times \nabla \rho \quad (13.24)$$

となる。(13.17), (13.24) により

$$\nabla \times (\mathbf{B} - w \nabla \rho) = 0$$

の関係があるから、次式が導かれる。

$$\mathbf{B} = \nabla u + w \nabla \rho. \quad (13.25)$$

(13.16), (13.22), (13.23), (13.24) より

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho &= \mu_0 \nabla p = (\nabla w \times \nabla \rho) \times (\nabla \rho \times \nabla v) \\ &= [(\nabla w \times \nabla \rho) \cdot \nabla v] \nabla \rho = (\mathbf{B} \cdot \nabla w) \nabla \rho = \mu_0 (\mathbf{j} \cdot \nabla v) \nabla \rho \end{aligned}$$

が導かれ、次式がえられる。

$$\mu_0 \frac{dp}{d\rho} = \mathbf{B} \cdot \nabla w = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \nabla v. \quad (13.26)$$

(13.23), (13.25) および (13.24), (13.25) より

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla u, \quad (13.27)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{j} \cdot \nabla u \quad (13.28)$$

が導かれる。 θ および ζ をポロイダル および トロイダル角変数とし、 2π の周期をもつとする。関数 u, v, w は座標系 ρ, θ, ζ の関数で、角変数 θ と ζ の一価関数の \mathbf{B} および \mathbf{j} を与えなければならぬ。したがって関数 u, v, w は次のように表される。

$$v = \frac{d\psi_t}{d\rho} \theta - \frac{d\psi_p}{d\rho} \zeta + \tilde{v}(\rho, \theta, \zeta), \quad (13.29)$$

$$w = -\mu_0 \frac{dI_t}{d\rho} \theta - \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho} \zeta + \tilde{w}(\rho, \theta, \zeta), \quad (13.30)$$

$$u = \mu_0 I_t \theta + \mu_0 I_p \zeta + \tilde{u}(\rho, \theta, \zeta). \quad (13.31)$$

$2\pi\psi_t$ および $2\pi\psi_p$ は磁束面 ρ 内のトロイダルおよびポロイダル磁束であり、 $2\pi I_t$ 磁束面内 ρ のトロイダル電流、 $2\pi I_p$ は磁束面 ρ の内側に流れるポロイダル電流である。

(13.26) および (13.30) より

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{w} = \mu_0 \frac{dp}{d\rho} + \mu_0 \frac{dI_t}{d\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \theta + \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta \quad (13.32)$$

が導かれ、(13.27) および (13.31) より

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{u} = |\mathbf{B}|^2 - \mu_0 I_t \mathbf{B} \cdot \nabla \theta - \mu_0 I_p \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta \quad (13.33)$$

が導かれる。これらの式は磁気微分方程式である。その可解条件

$$\mathbf{B} \cdot \nabla F = S, \quad \mathbf{b} \cdot \nabla F = \frac{S}{B} \quad (13.34)$$

は閉じた磁力線に対しては

$$\oint S \frac{dl}{B} = 0 \quad (13.35)$$

であり, 磁気面 $\rho = \text{const.}$ 内の積分領域に対しては

$$\int S dV = 0 \quad (13.36)$$

である. (13.32) および (13.36) より

$$\frac{dp}{dV} = -(2\pi)^2 \left(\frac{dI_p}{dV} \frac{d\psi_t}{dV} + \frac{dI_t}{dV} \frac{d\psi_p}{dV} \right) \quad (13.37)$$

が得られた. (13.37) を導くにあたって, 次の関係を用いた,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \theta = (\nabla \theta \times \nabla \rho) \cdot \nabla v = (\nabla \theta \times \nabla \rho) \cdot \nabla \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = g^{-1/2} \left(\frac{d\psi_p}{d\rho} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} \right).$$

第5章に記述される (5.18) および (5.19) より

$$\frac{1}{N} \oint \frac{dl}{B} = \frac{1}{2\pi} \frac{dV}{d\psi_t} \quad (13.38)$$

である. (13.33) および (13.36) より

$$\langle |\mathbf{B}|^2 \rangle = (2\pi)^2 \frac{d\psi_t}{dV} (I_p + q^{-1} I_t) \quad (13.39)$$

が得られる. ここで $q(\psi_t)$ は安全係数 $q \equiv d\psi_t/d\psi_p$ であり, $\langle A \rangle$ は A の体積平均である. (13.33) より

$$\frac{1}{N} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \mu_0 (I_p + q^{-1} I_t) \quad (13.40)$$

が導かれる. (13.23) は磁力線が磁束面 $\rho = \text{const.}$ と面 $v = \text{const.}$ の交差線であることを表す. (13.29) より明らかなように, $\tilde{v} = 0$ であるような座標系では, 磁力線は直線で表される. 周期座標 θ, ζ に関する適切な変換を行うことにより, $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ のうち2つを0にすることができる.

自然 (浜田) 座標系は $\tilde{u} = 0, \tilde{w} = 0$ の座標系である. 磁力線および電流線は浜田座標系では直線になる. すなわち

$$v = \frac{d\psi_t}{d\rho} \theta_H - \frac{d\psi_p}{d\rho} \zeta_H, \quad (13.41)$$

$$w = -\mu_0 \frac{dI_t}{d\rho} \theta_H - \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho} \zeta_H, \quad (13.42)$$

$$u = \mu_0 I_t \theta_H + \mu_0 I_p \zeta_H + \tilde{u}_H. \quad (13.43)$$

磁場は次のように表される.

$$\mathbf{B} = \frac{d\psi_t}{d\rho} \nabla \rho \times \nabla \theta_H - \frac{d\psi_p}{d\rho} \nabla \rho \times \nabla \zeta_H, \quad (13.44)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 I_t \nabla \theta_H + \mu_0 I_p \nabla \zeta + \nabla \tilde{u}_H. \quad (13.45)$$

電流密度は次のとおりである.

$$\mathbf{j} = \mu_0 \frac{dI_t}{d\rho} \nabla \rho \times \nabla \theta_H + \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho} \nabla \rho \times \nabla \zeta_H. \quad (13.46)$$

ヤコビアン $g^{1/2} (dx dy dz = g^{1/2} d\rho d\theta d\zeta)$ は (13.41) および (13.46) を (13.26) に代入し, (13.37) を用いれば (表 13.3 参照) 次のようになる.

$$g_H^{1/2} = [\nabla \rho \cdot (\nabla \theta \times \nabla \zeta)]^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{dV}{d\rho}. \quad (13.47)$$

表 13.3 一般座標系におけるベクトル公式.

$$\mathbf{a}_j \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}, \quad \mathbf{a}^i \equiv \nabla u^i, \quad V \equiv \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad (1)$$

$$d\mathbf{r} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} du^j, \quad \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i, \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^1 = V^{-1}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = V^{-1}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = V^{-1}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_1 = V(\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3), \quad \mathbf{a}_2 = V(\mathbf{a}^3 \times \mathbf{a}^1), \quad \mathbf{a}_3 = V(\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2), \quad (4)$$

$$\mathbf{a}^1 \cdot (\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3) = V^{-1}, \quad (5)$$

$$g_{ij} \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = g_{ji}, \quad g^{ij} \equiv \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j = g^{ji}, \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = \sum_i f^i \mathbf{a}_i, \quad f^i \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^i \quad (\text{コントラバリアント}), \quad (7)$$

$$\mathbf{F} = \sum_i f_i \mathbf{a}^i, \quad f_i \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i \quad (\text{コバリアント}), \quad (8)$$

$$f_j = \sum_i g_{ji} f^i, \quad f^i = \sum_j g^{ij} f_j, \quad (9)$$

$$g \equiv |g_{ij}| = V^2, \quad dx dy dz = g^{1/2} du^1 du^2 du^3, \quad g^{1/2} = [\nabla u^1 \cdot (\nabla u^2 \times \nabla u^3)]^{-1}, \quad (10)$$

$$(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2 = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j = \sum_{ij} g^{ij} du_i du_j, \quad (11)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 = g^{-1/2}(a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = g^{1/2}(a^2 b^3 - a^3 b^2), \quad (12)$$

$$\nabla \phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \mathbf{a}^i, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{g^{1/2}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (g^{1/2} f^i), \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{g^{1/2}} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} \right) \mathbf{a}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1} \right) \mathbf{a}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} \right) \mathbf{a}_3 \right), \quad (14)$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{1}{g^{1/2}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right). \quad (15)$$

磁気 (Boozer) 座標系は $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} = 0$ の座標系である。磁力線は Boozer 座標系では直線である。

$$v = \frac{d\psi_t}{d\rho}\theta_B - \frac{d\psi_p}{d\rho}\zeta_B, \quad (13.48)$$

$$w = -\mu_0 \frac{dI_t}{d\rho}\theta_B - \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho}\zeta_B + \tilde{w}_B, \quad (13.49)$$

$$u = \mu_0 I_t \theta_B + \mu_0 I_p \zeta_B. \quad (13.50)$$

磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{d\psi_t}{d\rho} \nabla\rho \times \nabla\theta_B - \frac{d\psi_p}{d\rho} \nabla\rho \times \nabla\zeta_B, \quad (13.51)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 I_t \nabla\theta_B + \mu_0 I_p \nabla\zeta + \tilde{w}_B \nabla\rho \quad (13.52)$$

で表される。電流密度は

$$\mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \frac{dI_t}{d\rho} \nabla\rho \times \nabla\theta_B + \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho} \nabla\rho \times \nabla\zeta_B + \nabla\tilde{w}_B \times \nabla\rho \quad (13.53)$$

である。ヤコビアンは (13.50) および (13.51) を (13.27) に代入し, (13.39) を用いれば次のようになる。

$$g_B = \mu_0 \frac{I_p + q^{-1} I_t}{|B|^2} \frac{d\psi_t}{d\rho}. \quad (13.54)$$

13.5.2 ドリフト運動の Boozer 方程式

案内中心のドリフト運動の速度は第2章 (2.64) で説明したが, 次式で与えられる。

$$\mathbf{v} = \frac{v_{\parallel}}{B} \frac{1}{1 + \rho_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}} (\mathbf{B} + \nabla \times (\rho_{\parallel} \mathbf{B})), \quad (13.55)$$

ただし

$$\rho_{\parallel} = \frac{mv_{\parallel}}{eB}. \quad (13.56)$$

Boozer 座標 (ρ, θ, ζ) における磁場は (13.51) と (13.52) により次のようになる。
($v \rightarrow \theta_0$, $u \rightarrow \chi$):

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta_0, \quad \theta_0 = \theta - q^{-1}\zeta, \quad q^{-1} = \frac{d\psi_p}{d\psi}, \quad (13.57)$$

$$\mathbf{B} = \nabla\chi + \beta\nabla\psi, \quad \psi \equiv \psi_t, \quad \chi = \mu_0 I_t \theta + \mu_0 I_p \zeta, \quad \beta \equiv \mu_0 I_t' \theta + \mu_0 I_p' \zeta + \tilde{w}. \quad (13.58)$$

(13.55) における $\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ の項は

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{B^2} \nabla\chi \cdot (\nabla\beta \times \nabla\psi) = \frac{1}{B^2} (\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\beta$$

で表される。(13.57), (13.58) から $(\nabla\psi \times \nabla\theta_0) \cdot \nabla\chi = B^2$ が得られる。表 13.3 にある式 (1), (4), (5) に $u^1 = \psi$, $u^2 = \theta_0$, $u^3 = \chi$ を代入すると $(\nabla\psi \times \nabla\chi) = -B^2 (d\mathbf{r}/d\theta_0)$ を導くことができる。したがって

$$\begin{aligned} \nabla \times (\rho_{\parallel} \mathbf{B}) \cdot \nabla\chi &= \rho_{\parallel} (\nabla\beta \times \nabla\psi) \cdot \nabla\chi + (\nabla\rho_{\parallel} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla\chi \\ &= \rho_{\parallel} (\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\beta + \beta (\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\rho_{\parallel} = -B^2 \rho_{\parallel} \frac{\partial\beta}{\partial\theta_0} - B^2 \beta \frac{\partial\rho_{\parallel}}{\partial\theta_0}. \end{aligned}$$

$$\dot{\chi} = \mathbf{v} \cdot \nabla\chi = \frac{v_{\parallel}}{B} \left(\frac{1}{1 - \rho_{\parallel} (\partial\beta/\partial\theta_0)} \right) (\mathbf{B} + \nabla \times (\rho_{\parallel} \mathbf{B})) \cdot \nabla\chi$$

13.5 準対称ステラレーター

$$= v_{\parallel} B \left(1 - \frac{\beta(\partial\rho_{\parallel}/\partial\theta_0)}{1 - \beta(\partial\rho_{\parallel}/\partial\theta_0)} \right) \quad (13.59)$$

である. $(\partial\rho_{\parallel}/\partial\theta_0)$ は, ψ, χ , ハミルトニアン H_0 を一定に保ったまま, θ_0 で微分することを意味する. ハミルトニアンは

$$H_0(\rho_{\parallel}, \psi, \theta_0, \chi) \equiv \frac{e}{2m} B^2 \rho_{\parallel}^2 + \frac{\mu}{e} B + \Phi \quad (13.60)$$

である. ただし $B = B(\psi, \theta_0, \chi)$, $\Phi = \Phi(\psi, \theta_0, \chi)$, $\rho_{\parallel} = (m/e)(v_{\parallel}/B)$. ここで

$$\theta_{0c} \equiv \theta_0 - \beta(\psi, \theta_0, \chi) \rho_{\parallel} \quad (13.61)$$

を定義すると, 次の関係がある.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}} &= \beta + \rho_{\parallel} \left. \frac{\partial\beta}{\partial\theta_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}}, & \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}} &= \frac{\beta}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)}, \\ -\frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel} \left. \frac{\partial\rho_{\parallel}}{\partial\theta_0} \right|_{H_0} &= \frac{e}{m} \rho_{\parallel}^2 \frac{\partial B^2}{\partial\theta_0} + \frac{\mu}{e} \frac{\partial B}{\partial\theta_0} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_0}, \\ \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\chi} \right|_{\theta_{0c}} &= \frac{\rho_{\parallel} \partial\beta/\partial\chi}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)}, & \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_{0c}} \right|_{\theta_{0c}} &= \frac{1}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)}, \\ \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\psi} \right|_{\theta_{0c}} &= \frac{\rho_{\parallel} \partial\beta/\partial\psi}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)}. \end{aligned}$$

独立変数 θ_0 を $\theta_{0c} = \theta_0 - \beta\rho_{\parallel}$ に変え, $H(\rho_{\parallel}, \psi, \theta_{0c}, \chi) \equiv H_0(\rho_{\parallel}, \psi, \theta_{0c} + \beta\rho_{\parallel}, \chi)$ とする. すなわち

$$H(\rho_{\parallel}, \psi, \theta_{0c}, \chi) = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel}^2 + \frac{\mu}{e} B + \Phi, \quad (13.62)$$

$$B = B(\psi, \theta_{0c} + \beta\rho_{\parallel}, \chi), \quad \Phi = \Phi(\psi, \theta_{0c} + \beta\rho_{\parallel}, \chi) \quad (13.62')$$

そうすると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}, \psi, \chi} &= \frac{\partial H_0}{\partial\rho_{\parallel}} + \frac{\partial H_0}{\partial\theta_0} \left. \frac{\partial\theta_0}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}} = \frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel} + \left. \frac{\partial H_0}{\partial\theta_0} \frac{\partial\theta_0}{\partial\rho_{\parallel}} \right|_{\theta_{0c}} \\ &= \frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel} + \left(\frac{e}{2m} \rho_{\parallel}^2 \frac{\partial B^2}{\partial\theta_0} + \frac{\mu}{e} \frac{\partial B}{\partial\theta_0} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_0} \right) \times \left(\frac{\beta}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)} \right) \\ &= v_{\parallel} B - \left(\frac{\partial\rho_{\parallel}}{\partial\theta_0} v_{\parallel} B \right) \frac{\beta}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)} = v_{\parallel} B \left(1 - \frac{\beta(\partial\rho_{\parallel}/\partial\theta_0)}{1 - \rho_{\parallel}(\partial\beta/\partial\theta_0)} \right). \end{aligned}$$

この式と (13.59) より, 望む結果 $\dot{\chi} = \partial H / \partial\rho_{\parallel} |_{\theta_{0c}}$ を得ることができた. $\dot{\chi}$ の式と同様にドリフト運動の方程式は次のようなハミルトンの正準方程式に還元される [13.41].

$$\dot{\chi} = \frac{\partial H}{\partial\rho_{\parallel}}, \quad \dot{\rho}_{\parallel} = -\frac{\partial H}{\partial\chi}, \quad (13.63)$$

$$\dot{\theta}_{0c} = \frac{\partial H}{\partial\psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial\theta_{0c}}. \quad (13.64)$$

新しい座標への正準変換

$$(\theta_{0c}, \chi, \psi, \rho_{\parallel}) \rightarrow (\theta_c, \zeta, P_{\theta}, P_{\zeta})$$

を次の母関数によって導入する.

$$F(\psi, \rho_{\parallel}, \theta_c, \zeta) = \mu_0 \rho_{\parallel} (g(\psi) \zeta + I(\psi) \theta_c) + \psi \theta_c - \zeta \psi / q, \quad (13.65)$$

すなわち

$$\theta_{0c} = \frac{\partial F}{\partial \psi} = \left(\theta_c - \frac{\zeta}{q} \right) + \mu_0 \rho_{\parallel} (\zeta g' + \theta_c I'), \quad (13.66)$$

$$\chi = \frac{\partial F}{\partial \rho_{\parallel}} = \mu_0 (g \zeta + I \theta_c), \quad (13.67)$$

$$P_{\theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta_c} = \mu_0 \rho_{\parallel} I + \psi, \quad (13.68)$$

$$P_{\zeta} = \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \mu_0 \rho_{\parallel} g + \psi / q. \quad (13.69)$$

新しいハミルトン関数は次のようになる [13.42].

$$H(\theta_c, \zeta, P_{\theta}, P_{\zeta}) = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel}^2 (P_{\theta}, P_{\zeta}, \psi) + \frac{\mu}{e} B + \Phi. \quad (13.70)$$

ただし

$$\rho_{\parallel} = \frac{P_{\theta}/q - P_{\zeta}}{\mu_0 (I/q - g)}, \quad \psi = \frac{P_{\theta} g - P_{\zeta} I}{I/q - g}, \quad (13.71)$$

$$\theta_0 = \theta_c - \zeta/q + \rho_{\parallel} \delta, \quad \delta = \mu_0 (\zeta g' + \theta_c I') + \beta. \quad (13.72)$$

$$(B, \Phi) = (B, \Phi)(\psi, \theta_0, \chi) = (B, \Phi)(\psi, \theta_c - \zeta/q + \delta \rho_{\parallel}, \chi). \quad (13.73)$$

新しい座標系におけるハミルトンの正準方程式は以下のとおりである.

$$\dot{\theta}_c = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta}}, \quad \dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_c}, \quad (13.74)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\zeta}}, \quad \dot{P}_{\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (13.75)$$

θ_c を形式的に θ で置き換えると

$$H(\theta, \zeta, P_{\theta}, P_{\zeta}) = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B^2 \rho_{\parallel}^2 (P_{\theta}, P_{\zeta}, \psi) + \frac{\mu}{e} B + \Phi, \quad (13.76)$$

$$(B, \Phi) = (B, \Phi)(\phi, \theta, \chi),$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta}}, \quad \dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (13.77)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\zeta}}, \quad \dot{P}_{\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (13.78)$$

である. (13.74), (13.75) の解と (13.77), (13.78) の解との違いはラーマ半径のオーダーである ($\theta = \theta_c + \rho_{\parallel} \delta$). したがって非共鳴的なずれは無視できる [13.43]. 無電流の場合 ($\beta = \delta = 0$), 両者は等しくなる.

13.5.3 準対称ステラレーター

Boozer 座標系におけるドリフト軌道は, (13.70) から明らかのように磁場の大きさ $|B|$ のみに依存し, \mathbf{B} の各成分には依存しない. もし $|B|$ を対称にできれば, ドリフト軌道は運動量保存により閉じる. 対称性として3種類ある. (1) 軸対称 $B(\rho, \zeta)$, (2) ヘリカル対称 $B(\rho, \theta - \alpha \zeta)$, and (3) ポロイダル対称 $B(\rho, \theta)$ である.

準-軸対称ステラレータ (QAS)

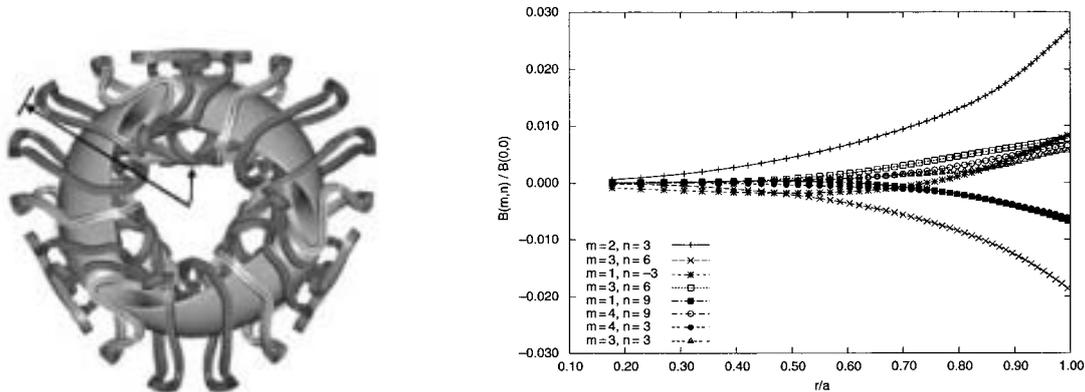


図 13.9 左図: NCSX プラズマとモジュラーコイル (3つのタイプのコイルがそれぞれ6個). 右図: 磁場の強さの非対称成分の半径分布. [13.44].

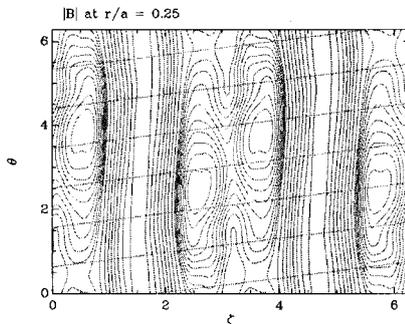


図 13.10 QPS の磁束面 $(\psi/\psi_{\text{edge}})^{1/2} = 0.25$ における磁場強度の等高線および磁束面 (Boozer 座標系での直線)[13.47]. 細い線で描かれた等高線を含む領域内で $B > 1\text{T}$ であり, 切れた線で描かれた領域内では $B < 1\text{T}$ である. θ はポロイダル角, ζ はトロイダル角の変数である.

NCSX (National Compact Stellarator Experiment) はプリンストンで建設中の代表的な QAS である. 最適化した NCSX のモジュラーコイルおよび磁場強度の非軸対称成分の半径方向分布を図 13.9 に示す. NCSX は $R = 1.4\text{m}$, $B_t = 1.2 \sim 2.0\text{T}$, $A = 4 \sim 4.4$ のパラメータを持っている. 理論的には, ブートストラップ電流がある場合を含めて, バルーンギング, キンク, メルシエおよび新古典ティアリングモードに対して $\beta > 4\%$ で安定であると予測されている [13.44].

CHS-qa の設計活動が NIFS で行われた ($R = 1.5\text{m}$, $A = 3.2$, $B_t = 1.5\text{T}$) [13.45].

準ヘリカル対称ステラレータ (QHS)

HSX は QHS で, $B/B_0 \approx (1 + \varepsilon_H \cos(\theta - 4\zeta))$ ($R = 1.2\text{m}$, $a = 0.15\text{m}$, $B_t = 1\text{T}$). 実験がウィスコンシン大学で行われている [13.46].

準ポロイダル Quasi-Poloidally Symmetric Stellarator (QPS)

QPS 装置 ($R = 0.9\text{m}$, $A = 2.7$, $B_t = 1\text{T}$) が ORNL で建設中である. QPS コイルの磁場は2周期で外側が真空タンクになっている中に装置が設置され運転される [13.47]. $\psi/\psi_{\text{edge}} = 0.25$ における磁場強度の等高線を図 13.10 に示す.

準-アイソダイナミック または 準-オムニジェナス ステラレータ

準-アイソダイナミック (Quasi-Isodynamic) ステラレータは, 捕捉粒子の案内中心がポロイダル方向に歳差運動をし, 縦の断熱不変量 J_{\parallel} ((2.37) 参照) の等高線がポロイダル方向に閉じることにより, 熱的あるいは高エネルギー粒子の閉じ込めが確保されることを目指している.

Wendelstein-7X はこの考え方に最適化されている. W7-X は, 良い重なった磁束面, $\langle j_{\parallel}^2/j_{\perp}^2 \rangle \sim 0.5$ による小さいシャフラノフのずれ, $\langle \beta \rangle \sim 5\%$ における平衡, 安定性, 新古典輸送が小さく, 乱流輸送に較べて無視できることに対しても最適化している [13.48]. 装置のパラメータは $R = 5.5\text{m}$, $a = 0.55\text{m}$, $B_t = 2.5\text{T}$ (超伝導コイル), プラズマ体積 $V = 30\text{m}^3$, 放電時間 30 min., $P_{\text{ECH}} = 60\text{MW}$, $P_{\text{NBI}} = 5\text{MW}(20^*)$, $P_{\text{ICRF}} = 3\text{MW}(9^*)$ (*: 第II期加熱). W7-X 装置の構成要素を図 13.11 に示す. モジュラーコイルおよび磁束面は図 13.5 で示した.

準-オムニジェナス (Quasi-Omnigenous) ステラレータは捕捉粒子の縦の断熱不変量 J_{\parallel} の等高線と磁束面とをよく合わせることを目指している [13.49]. J_{\parallel} 等高線の一例を図 13.12 に示す. 同

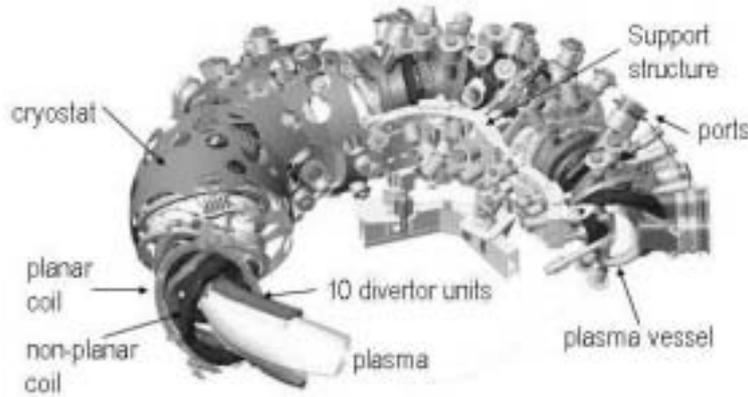


図 13.11 W7-X 装置の構成要素 [13.48]. planar coil (平面コイル), non-planar coil (非平面コイル), divertor unit (ダイバーター部), plasma vessel (プラズマ容器), port (ポート), support structure (支持構造), cryostat (クライオスタット).

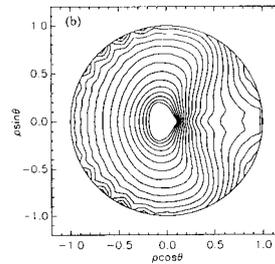


図 13.12 準-オムニジェナス ステラレータ捕捉粒子の J_{\parallel} の等高線. 同心円は磁気面である. [13.49].

心円は磁束面である.

これらの新しいステラレータ配位の解説が [13.50] にされている.

13.6 ステラレーター炉の概念設計

ステラレーター炉の燃焼条件は 11.7 節のトカマク炉と同様な方法で行う. 用いる式は (11.75), (11.78), (11.79) および ISS95 エネルギー閉じ込め比例則 (13.14), 密度比例則 (13.15) である. ISS95 閉じ込め比例則を用いた核燃焼条件は以下の式に還元される.

$$a^{1.09} B^{1.745} = \frac{13.26(1 + f_{DT} + f_{He} + f_I)^{1.33}}{H^{ISS95} N_s^{0.51} \beta_{th} [(1 - f_{radc})(f_{\alpha} + 5/Q) f_{prof} f_{DT}^2 \Theta]^{0.665} (\ell/2\pi)^{0.4} A^{0.06}}. \quad (13.79)$$

ただし H^{ISS95} は ISS95 比例則を超える改善因子である.

Helias ステラレーター炉は核融合炉の設計基準を考慮した Wendelstein 7-X 装置である [13.51]. FFHR2 は LHD-型 D-T デモ-炉である [13.52]. 二つの炉のパラメーターを表 13.4 に示す.

付記

開放端磁場系 [13.53], [13.54], [13.55]

ミラー磁場は磁場構成がトラス系に比べて比較的簡単で, プラズマへの近接性も良い. また絶対最小磁場を作ることができ, MHD 安定性の良い配位を設計することができる (5.1 節参照) (トラス系は磁気面で平均した磁場の大きさを最小にすることができるが, $\min. B$ の構成はできない). しかしミラー磁場においては端損失が大きく, ミラーの粒子閉じ込め時間はイオンの速度空間におけるロスコーンへの拡散時間, すなわちイオン・イオンのクーロン衝突時間 τ_{ii} できまってしまう, つぎのように与えられる [13.56].

$$\tau_p = \tau_{ii} \ln R_M.$$

表 13.4 HSR5/22 および FFHR2m2 の核融合炉のパラメーター.

	HSR5/22 modular coils	FFHR2m2 LHD type coils
$R / a(\text{m})$	22 / 1.8	16 / 2.8
$V(\text{m}^3)$	1400	-
No. of field period	5	$l = 2 \quad m = 10$
$B_t(\text{T})$	4.75	4.43
$B_{\text{max}}(\text{T})$	10	13
coil radius (m)	5.4	4.33
$W_{\text{mag}}(\text{GJ})$	100	142
fusion power (GW)	3	3
$\bar{n}_e (10^{20} \text{m}^{-3})$	2.12	-
$n_e(0) (10^{20} \text{m}^{-3})$	3.0	1.9
$\langle T_e \rangle (\text{keV})$	4.96	-
$T_{e0}/T_{i0} (\text{keV})$	15 / -	/ 16.1
$\beta(\%)$	4.24	4.1
$\tau_E(\text{s})$ (required)	1.62	-
$\tau_E^{\text{ISS95}}(\text{s})$	0.96	-
H_{ISS95}	1.69	1.76

V : プラズマ体積, W_{mag} : 磁場の蓄積エネルギー.
HSR5/22 のモジュラーコイルの数は 50.

ただし R_M はミラー比である. したがって磁場を強くしたり, プラズマの大きさを増やしたりしても, 閉じ込め時間を長くすることはできない. したがって端損失自身を抑制することは開放端磁場系の最重要課題である. またロスコーンにより速度空間不安定性が起こりえるので, これらの不安定性を抑え安定化する対策が必要となる. 端損失抑制のために静電ポテンシャルによる封じ込めを行うタンデム・ミラーの研究が進められている [13.57],[13.58],[13.59],[13.60].

問題

- ヘリカル対称系の平衡方程式 ヘリカル対称系の平衡方程式 (13.7) を確かめよ.
- 粒子軌道の Boozer 方程式 粒子軌道の Boozer 方程式が (13.74) および (13.75) で与えられることを証明せよ. 次の諸関係を参考にせよ.

$$\nabla \rho_{\parallel} = (\partial \rho_{\parallel} / \partial \psi) \nabla \psi + (\partial \rho_{\parallel} / \partial \theta_0) \nabla \theta_0 + (\partial \rho_{\parallel} / \partial \chi) \nabla \chi,$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\rho_{\parallel} \mathbf{B}) \cdot \nabla \rho_{\parallel} &= \rho_{\parallel} (\nabla \times \nabla \mathbf{B}) \cdot \nabla \rho_{\parallel} = \rho_{\parallel} (\nabla \beta \times \nabla \psi) \cdot \nabla \rho_{\parallel} = \rho_{\parallel} (\nabla \rho_{\parallel} \times \nabla \beta) \cdot \nabla \psi \\ &= \rho_{\parallel} B^2 \left(\frac{\partial \rho_{\parallel}}{\partial \theta_0} \frac{\partial \beta}{\partial \chi} - \frac{\partial \rho_{\parallel}}{\partial \chi} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_0} \right). \end{aligned}$$

- 燃焼条件 ISS95 エネルギー閉じ込め比例則 (13.14) および 密度比例則 (13.15) を用いてステラレータの燃焼条件 (13.79) を導け.
- ステラレーターにおけるヘリカルバナナの歳差運動 アスペクト比の大きいステラレータの磁場強度は $B = B_0(1 - \epsilon_t \cos \theta - \epsilon_h(r) \cos(l\theta - m\varphi))$ で与えられる. κ^2 を $\kappa^2 = (2\mu_m B_0 \epsilon_h)^{-1} (W - \mu_m B(1 - \epsilon_t \cos \theta - \epsilon_h) - q\phi(r))$ とすると, ヘリカルバナナの縦の断熱不変量 J_{\parallel} は, トカマクのバナナの J_{\parallel} (2.5.7 節の (2.75)) と同等になる. 一般座標系は $u^1 \approx r$, $u^2 \approx \theta - (l/2\pi)\varphi$, $u^3 \approx R\varphi$ としてよい. 更にステラレータのヘリカルリップルに捕捉されたヘリカルバナナの中心は $(l\theta - m\varphi) = 0$ (磁場極小の位置) の拘束条件がある. 2.5.7 節で解析するように, 縦の断熱不変量 J_{\parallel} を用いて, ヘリカルバナナの歳差運動を解析せよ.

解答 (ヒント)

- ヘリカル対称系の平衡方程式 圧力平衡の式の径方向成分は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = p' \frac{\partial \psi}{\partial r} = \mu_0 j_{\theta} B_z - \mu_0 j_z B_{\theta}$$

である. $j_{\theta}, j_z, B_{\theta}, B_z$ の表式を上述の式に代入すると (13.7) が導かれる.

- ステラレーターにおけるヘリカルバナナの歳差運動 縦の断熱不変量 J_{\parallel}

はつぎのように与えられる.

$$\begin{aligned} J_{\parallel}(u^1, u^2, W, \mu_m) &= (2m)^{1/2} \oint \left(W - q\phi - \mu_m B(1 - \epsilon_t \cos \theta - \epsilon_h \cos(l\theta - n\varphi)) \right)^{1/2} dl \\ &= (2m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} \oint (2\kappa^2 + \cos \zeta - 1)^{1/2} d\zeta = 16(m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} Rn^{-1} (E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)), \end{aligned}$$

ここで

$$\kappa^2(r, \theta, W, \mu_m) = \frac{W - \mu_m B(1 - \epsilon_t \cos \theta - \epsilon_h) - q\phi(r)}{2\mu_m B\epsilon_h},$$

であり, $\zeta = l\theta - n\varphi$, $\epsilon_h \propto r^l$, $\epsilon_t \propto r$, $dl \approx dR\varphi \approx Rn^{-1}d\zeta$ である.

$$\frac{\partial \kappa^2}{\partial r} = -\frac{l}{r}(\kappa^2 - 1/2) + \frac{\epsilon_t \cos \theta}{2\epsilon_h r} - \frac{q\partial\phi/\partial r}{2\epsilon_h \mu_m B}, \quad \frac{\partial \kappa^2}{\partial \theta} = -\frac{\epsilon_t \sin \theta}{2\epsilon_h}$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r} &= 16(m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} Rn^{-1} \left((E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)) \frac{l}{2r} + \frac{K}{2} \kappa K(\kappa) \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \\ &= 16(m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} Rn^{-1} \left((E - K/2) \frac{l}{2r} + \frac{K}{2} \left(\frac{\epsilon_t \cos \theta}{2\epsilon_h r} - \frac{q\partial\phi/\partial r}{2\epsilon_h \mu_m B} \right) \right), \\ \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \theta} &= 16(m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} Rn^{-1} \frac{K}{2} \left(-\frac{\epsilon_t \sin \theta}{2\epsilon_h} \right), \quad \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial W} = 16(m\mu_m B\epsilon_h)^{1/2} Rn^{-1} \frac{1}{2} \frac{1}{2\mu_m B\epsilon_h}. \end{aligned}$$

である. ヘリカルバナナ中心は $l\theta - n\varphi = 0$ (磁場極小の位置) の拘束があるので, つぎのようになる.

$$u^2 = \theta - (\iota/2\pi)\varphi = (1 - (\iota/2\pi)(l/n))\theta, \quad \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial u^2} = \frac{1}{(1 - (\iota/2\pi)(l/n))} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \theta}.$$

ヘリカルバナナの軌道はつぎのように与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1 - (\iota/2\pi)(l/n)} r \frac{du^2}{dt} = \frac{1}{1 - (\iota/2\pi)(l/n)} \frac{-1}{qBr} \frac{\partial J_{\parallel}/\partial r}{\partial J_{\parallel}/\partial W} \\ &= \left(\frac{1}{1 - (\iota/2\pi)(l/n)} \right) \left(-V_{t \text{ drift}} \cos \theta - \frac{E_r}{B} - \frac{2l}{r} \left(\frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) \frac{\epsilon_h \mu_m B}{qBr} \right), \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{qBr} \frac{\partial J_{\parallel}/\partial u^2}{\partial J_{\parallel}/\partial W} = \frac{1}{(1 - (\iota/2\pi)(l/n))} \frac{1}{qBr} \frac{\partial J_{\parallel}/\partial \theta}{\partial J_{\parallel}/\partial W} \\ &= -\frac{1}{(1 - (\iota/2\pi)(l/n))} \frac{\epsilon_t \mu_m B}{qBr} \sin \theta = -\frac{1}{(1 - (\iota/2\pi)(l/n))} V_{t \text{ drift}} \sin \theta. \end{aligned}$$

参考文献

[1 章] プラズマとは

- [1.1] R. F. Post: Chapter 22, "Plasma Physics in the 20th Century", in *Twentieth Century Physics*, vol. III, edited by L. M. Brown, A. Pais and B. Pippard: IOP Publishing, Bristol and American Institute of Physics Press, New York (1995).
- [1.2] W. R. Arnold, J. A. Phillips, G. A. Sawyer, E. J. Stovall, Jr. and J. C. Tuck: *Phys. Rev.* **93**, 483 (1954).
- [1.3] C. F. Wandel, T. Hesselberg Jensen and O. Kofoed-Hansen: *Nucl. Instr. and Methods* **4**, 249 (1959).
- [1.4] J. L. Tuck: *Nucl. Fusion* **1**, 201 (1961).
- [1.5] T. Takizuka and M. Yamagiwa: *JAERI-M* 87-006 (1987) Japan Atomic Energy Research Institute.
- [2 章] 荷電粒子の軌道および磁場配位
- [2.1] M. Tabak, J. Hammer, M. E. Glinsky, W. L. Kruer, S. C. Wilks et al.: *Phys. Plasmas* **1**, 1626 (1994).
- [2.2] D. V. Sivukhin: *Reviews of Plasma Physics* **4**, p.93, (edited by M. A. Leontovich), Consultant Bureau, New York (1966).
- [2.3] 宮本健郎: 核融合のためのプラズマ物理 (改定版), 岩波書店, (1987).
K. Miyamoto: *Plasma Physics for Nuclear Fusion* (Revised Edition), The MIT Press, Cambridge, Mass. (1989).
- [2.4] L. Spitzer, Jr.: *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York (1962).
- [2.5] T. H. Stix: *Plasma Phys.* **14**, 367 (1972).
- [2.6] A. A. Ware: *Phys. Rev. Lett.* **25**, 15 (1970).
- [2.7] A. I. Morozov and L. S. Solovov: *Rev. of Plasma Physics* **2**, 201, (edited by M. A. Leontovich), Consultant Bureau, New York (1966).
- [2.8] R. G. Littlejohn: *Phys. Fluids* **24**, 1730 (1981).
R. G. Littlejohn: *J. Plasma Phys.* **29**, 111 (1983).

[4 章] プラズマの閉じ込め

- [4.1] D. Pfirsch and A. Schlüter: *MPI/PA/7/62*, Max-Planck Institut für Physik und Astrophysik, München (1962).
- [4.2] A. A. Galeev and R. Z. Sagdeev: *Sov. Phys. JETP* **26**, 233 (1968).
- [4.3] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine: *Rev. Modern Phys.* **48**, 239 (1976).
- [4.4] R. J. Bickerton, J. W. Connor and J. B. Taylor: *Nature Phys. Sci.* **229**, 110 (1971).
- [4.5] A. A. Galeev: *Sov. Phys. JETP* **32**, 752 (1971).
- [4.6] M. N. Rosenbluth, R. D. Hazeltine and F. L. Hinton: *Phys. Fluids* **15**, 116 (1972).
- [4.7] D. J. Sigmar: *Nucl. Fusion* **13**, 17 (1973).
- [4.8] T. Ozeki, M. Azumi, S. Tokuda, and S. Ishida: *Nucl. Fusion* **33**, 1025 (1993).
- [4.9] H. Biglari, D. H. Diamond, Y.-B. Kim, B. A. Carreras, V. E. Lynch, F. L. Hinton et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D.C. 1990) vol. **2**, 191 (1991) IAEA, Vienna.
- [4.10] T. H. Dupree: *Phys. Fluids*: **15**, 334 (1972).
T. Boutros-Ghali and T. H. Dupree: *Phys. Fluids*: **24**, 1839 (1981).

[5 章] 電磁流体力学的不安定性

- [5.1] G. Bateman: *MHD Instabilities*, The MIT Press, Cambridge, Mass. (1978).
- [5.2] M. Kruskal and M. Schwarzschild: *Proc. Roy. Soc.* **A223**, 348 (1954).
- [5.3] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, and N. Rostoker: *Nucl. Fusion Suppl.* pt. **1** 143 (1962).
- [5.4] M. N. Rosenbluth and C. L. Longmire: *Ann. Phys.* **1**, 120 (1957).
- [5.5] M. D. Kruskal, J. L. Johnson, M. B. Gottlieb, and L. M. Goldman: *Phys. Fluids* **1**, 421 (1958).
- [5.6] V. D. Shafranov: *Sov. Phys. JETP* **6**, 545 (1958).
- [5.7] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, and R. M. Kulsrud: *Proc. Roy. Soc.* **A244**, 17 (1958).
- [5.8] B. B. Kadomtsev: *Rev. of Plasma Phys.* **2**, 153 (edited by M. A. Leontovich) Consultant Bureau, New York (1966).
- [5.9] J. M. Greene and J. L. Johnson: *Plasma Phys.* **10**, 729 (1968).
- [5.10] 宮本健郎: プラズマ物理・核融合. 東大出版会 (2004)
K. Miyamoto: *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Springer, Berlin (2005).
- [5.11] J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Talor: *Proc. Roy. Soc.* **A365** 1, (1979).
J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Talor: *Phys. Rev. Lett.* **40**, 396 (1978).
- [5.12] B. R. Suydam: *Proc. 2nd U. N. International Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy*, Geneva, vol. **31**, 157 (1958).
- [5.13] W. A. Newcomb: *Annal. Phys.* **10**, 232 (1960).
- [5.14] D. C. Robinson: *Plasma Phys.* **13**, 439 (1971).
- [5.15] K. Hain and R. Lüst: *Z. Naturforsch.* **13a**, 936 (1958).
- [5.16] K. Matsuoka and K. Miyamoto: *Jpn. J. Appl. Phys.* **18**, 817 (1979).
- [5.17] R. M. Kulsrud: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.*, (Conf. Proceedings, Culham 1965) vol. **1**, 127 (1966) IAEA, Vienna.
H. P. Furth, J. Killeen, and M. N. Rosenbluth: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.*, (Conf. Proceedings, Culham 1965) vol. **1**, 103 (1966) IAEA, Vienna.
- [5.18] J. A. Wesson and A. Sykes: *Nucl. Fusion* **25** 85 (1985). P. Anderson and J. Weiland: *Phys. Fluids* **29**, 1744 (1986).
- [5.19] J. M. Greene and M. S. Chance: *Nucl. Fusion* **21**, 453 (1981).
- [5.20] T. Ozeki, M. Azumi, S. Tokuda, and S. Ishida: *Nucl. Fusion* **33**, 1025 (1993).
- [5.21] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse: *Rev. of Plasma Physics* **5**, 304 (ed. by M. A. Leontovich) Consultant Bureau, New York (1970).

- [5.22] A. Hasegawa and Liu Chen: *Phys. Fluids* **19**, 1924 (1976).
- [5.23] H. L. Berk, J. W. Van Dam, Z. Guo, and D.M. Lindberg: *Phys. Fluids* **B4** 1806 (1992).
- [5.24] R. Betti and J. P. Freidberg: *Phys. Fluids* **B4**, 1465 (1992).
- [5.25] Y. Todo, T. -H. Watanabe, H.-B. Park, and T. Sato: *Nucl. Fusion* **41**, 1153 (2001).
Y. Todo, T. Sato, K. Watanabe, T. H. Watanabe, and R. Horiuchi: *Phys. Plasma* **2**, 2711 (1995).
- [5.26] M. N. Rosenbluth, H. L. Berek, J. W. Van Dam, and D. M. Lindberg: *Phys. Fluids* **B4**, 2189 (1992).
- [5.27] J. Candy and N. M. Rosenbluth: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **35**, 957 (1993).
J. Candy and N. M. Rosenbluth: *Phys. Plasmas* **1**, 356 (1994).
R. R. Mett and S. M. Mahajan: *Phys. Fluids* **B4**, 2885 (1992).
- [5.28] G. Y. Fu and C. Z. Cheng: *Phys. Fluids* **B2**, 985 (1990).
H. L. Berk, J. W. Van Dam, D. Borba, J. Candy, G. T. A. Huysmans, and S. Sharapov: *Phys. Plasmas* **2**, 3401 (1995).
- [5.29] F. Zonca and L.Chen: *Phys. Fluids* **B5**, 3668 (1993).
F. Zonca and L. Chen: *Phys. Plasmas* **3**, 323 (1996).
- [5.30] ITER Physics Basis: *Nucl. Fusion* **39**, No. 12, 2471 (1999).
- [5.31] E. J. Strait, W. W. Heidbrik, A. D. Turnbull, M. S. Chu, and H. H. Duong: *Nucl. Fusion* **33**, 1849 (1993).
K.-L. Wong: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41**, R1 (1999).
福山淳, 小関隆久: プラズマ・核融合学会誌 (*J. Plasma Fusion Res.*) **75**, 537 (1999).
- [5.32] L. Chen, R. B. White, and M. N. Rosenbluth: *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1122 (1984).
- [5.33] V. D. Shafranov: *Sov. Phys. Tech. Phys.* **15**, 175 (1970).
- [6章] 抵抗不安定性
- [6.1] H. P. Furth, J. Killeen, and M. Rosenbluth: *Phys. Fluids* **6**, 459 (1963).
- [6.2] H. P. Furth, P. H. Rutherford, and H. Selberg: *Phys. Fluids* **16**, 1054 (1973).
- [6.3] R. J. Goldston and R. H. Rutherford: *Introduction to Plasma Physics* Institute of Physics Publishing, London (1995).
- [6.4] P. H. Rutherford: *Phys. Fluids* **16**, 1903 (1973).
- [6.5] R. Fitzpatrick: *Phys. Plasmas* **2**, 825 (1995).
- [6.6] H. R. Wilson, J. W. Connor, R. H. Hastie, and C. C. Hegna: *Phys. Plasma* **3**, 248 (1996).
A. I. Smolyakov, A. Hirose, E. Lazzaro, G. B. Re, and J. D. Callen: *Phys. Plasma* **2**, 1581 (1995).
F. L. Hinton and J. R. Robertson: *Phys. Fluids* **27**, 1243 (1984).
- [6.7] D. A. Gates, B. Lloyd, A. W. Morris, G. McArdle, M. R. O'Brien et al.: *Nucl. Fusion* **37**, 1593, (1997).
- [6.8] F. F. Chen: *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* 2nd ed. Plenum Press, New York, London (1984).
- [6.9] S. S. Moiseev and R. Z. Sagdeev: *Sov. Phys. JETP* **17**, 515 (1963).
- [6.10] F. F. Chen: *Phys. Fluids* **8**, 912 (1965).
F. F. Chen: *Phys. Fluids* **8**, (1965)
- [6.11] F. Troyon, R. Gruber, H. Saurenmann, S. Semenzato and S. Succi: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **26**, 209 (1984).
- [6.12] J. M. Finn: *Phys. Plasmas* **2**, 198, (1995).
- [6.13] D. J. Ward and A. Bondeson: *Phys. Plasmas* **2**, 1570, (1995).
- [6.14] E. J. Strait, A. M. Garofalo, G. L. Jackson, M. Okabayashi, H. Reimerdes et al.: *Phys. Plasmas* **14**, 056101, (2007).
- [6.15] M. Okabayashi, N. Pomphrey, and R. E. Hatcher: *Nucl. Fusion* **38**, 1607 (1998).
- [6.16] 武智学, 松永剛, 白石淳也, 徳永伸二, 飛田健次: プラズマ・核融合学会誌 (*J. Plasma Fusion Res.*) **85**, 147 (2009).
- [7章] ボルツマン方程式およびランダウ減衰
- [7.1] D. V. Sivukhin: *Reviews of Plasma Physics* **4**, 93 (edited by M. A. Leontovich) Consultants Bureau, New York (1966).
- [7.2] T. H. Stix: *The Theory of Plasma Waves*, McGraw Hill, New York (1962).
T. H. Stix: *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York, (1992).
- [7.3] L. D. Landau: *J. Phys. (USSR)* **10**, 45 (1946).
- [7.4] J. H. Malmberg, C. B. Wharton, and W. E. Drummond: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res. (Conf. Proceedings, Culham 1965)* vol. **1**, 485 (1966) IAEA, Vienna.
- [8章] 電磁波伝播媒質としてのプラズマ
- [8.1] T. H. Stix: *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York (1962).
T. H. Stix: *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York, (1992).
- [8.2] W. P. Allis, S. J. Buchsbaum, and A. Bers: *Waves in Anisotropic Plasmas*, The MIT Press, Cambridge, Mass. (1963).
- [8.3] B. D. Fried and S. D. Conte: *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, New York (1961).
- [8.4] N. A. Krall and M. N. Rosenbluth: *Phys. Fluids* **8**, 1488 (1965).
- [8.5] M. N. Rosenbluth and R. F. Post: *Phys. Fluids* **8**, 547 (1965).
- [8.6] E. G. Harris: *Phys. Rev. Lett.* **2**, 34 (1959).
- [8.7] E. G. Harris: *Physics of Hot Plasma*, 145 (edited by B. J. Rye and J. B. Taylor) Oliver & Boyd, Edinburgh (1970).
- [8.8] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse: *Nucl. Fusion* **11**, 67 (1971).
- [8.9] W. M. Tang, G. Rewolt, and Liu Chen: *Phys. Fluids* **29**, 3715 (1986).
- [9章] 波動加熱および非誘導電流駆動
- [9.1] M. Porkolab: *Fusion* (edited by E. Taylor) vol. **1** Part B, 151, Academic Press, New York (1981).
- [9.2] J. E. Scharer, B. D. McVey, and T. K. Mau: *Nucl. Fusion* **17**, 297 (1977).
- [9.3] T. H. Stix: *Nucl. Fusion* **15**, 737 (1975).
- [9.4] A. Fukuyama, S. Nishiyama, K. Itoh, and S.I. Itoh: *Nucl. Fusion* **23** 1005 (1983).
- [9.5] M. Ono, T. Watari, R. Ando, J. Fujita et al.: *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2339 (1985).
- [9.6] T. H. Stix: *Phys. Rev. Lett.* **15**, 878 (1965).
- [9.7] V. M. Glagolev: *Plasma Phys.* **14**, 301 and 315 (1972).
- [9.8] M. Brambilla: *Plasma Phys.* **18**, 669 (1976).
- [9.9] S. Bernabei, M. A. Heald, W. M. Hooke, R. W. Motley, F. J. Paoloni, M. Brambilla, and W.D. Getty: *Nucl. Fusion* **17**, 929 (1977).
- [9.10] 高村秀一: プラズマ加熱基礎論, 名古屋大学出版会, 名古屋 (1986).
- [9.11] I. Fidone, G. Granata, and G. Ramponi: *Phys. Fluids* **21**, 645 (1978).
- [9.12] R. Prator: *Phys. Plasmas* **11**, 2349 (2004).

- [9.13] T. Ohkawa: *Nucl. Fusion* **10**, 185 (1970).
- [9.14] D. J. H. Wort: *Plasma Phys.* **13**, 258 (1971).
- [9.15] N. J. Fisch: *Phys. Rev. Lett.* **41**, 873 (1978).
- C. F. F. Karney and N. J. Fisch: *Phys. Fluids* **22**, 1817 (1979).
- [9.16] N. J. Fisch and A. H. Boozer: *Phys. Rev. Lett.* **45**, 720 (1980).
- [9.17] N. J. Fisch: *Rev. Modern Phys.* **59**, 175 (1987).
- [9.18] D. F. H. Start, J. G. Cordey, and E. M. Jones: *Plasma Phys.* **22**, 303 (1980).
- [9.19] K. Okano: *Nucl. Fusion* **30**, 423 (1990).
- [10章] 乱流によるプラズマ輸送
- [10.1] W. Horton: *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1269 (1976).
- W. Horton: *Drift Waves and Transport. Rev. Modern Phys.* **71**, 735 (1999)
- [10.2] S. Hamaguchi and W. Horton: *Phys. Fluids* **B4**, 319 (1992).
- [10.3] W. Horton, Jr., R. Esres, H. Kwak, and D.-I. Choi: *Phys. Fluids* **21**, 1366 (1978).
- [10.4] F. Romanelli and F. Zonca: *Phys. Fluids* **B5**, 4081 (1993). J. Y. Kim and M. Wakatani: *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2200 (1994).
- [10.5] Y. Kishimoto, J. Y. Kim, T. Fukuda, S. Ishida, T. Fujita, T. Tajima, W. Horton, G. Furnish, and M. J. LeBrun: *6th IAEA Fusion Energy Conf.* (Conf. Proceedings, Motreal 1996) vol. 2, 581 (1997) IAEA, Vienna.
- 岸本泰明: プラズマ・核融合学会誌 (*Jour. Plasma Fusion Res.*) **76**, 1280 (2000).
- [10.6] A. B. Rechester and M. N. Rosenbluth: *Phys. Rev. Lett.* **40**, 38 (1978).
- [10.7] J. W. Connor, and J. B. Taylor: *Nuclear Fusion* **17**, 1047 (1977).
- [10.8] B. B. Kadomtsev: *Sov. J. Plasma Phys.* **1**, 295 (1975).
- [10.9] J. W. Connor: *Plasma Phys. Control. Fusion* **30**, 619 (1988)
- J. Cordy, K. Thompsen, A. Chudnovskiy, O. J. W. F. Kardaun, T. Takizuka et al.: *Nucl. Fusion* **45**, 1078 (2005).
- [10.10] R. W. Hockney and J. W. Eastwood: *Computer Simulation Using Particles*, McGraw-Hill, New York (1981).
- [10.11] T. Tajima: *Computational Plasma Physics: With Application to Fusion and Astrophysics*, Addison-Wesley, Redwood City, Calif. (1989).
- [10.12] C. K. Birdsall and A. B. Langdon: *Plasma Physics via Computer Simulation*, IOP Publishing Ltd., Bristol (1991).
- [10.13] W. W. Lee: *Phys. Fluids* **26**, 556 (1983).
- W. W. Lee: *J. Comput. Physics* **72**, 243 (1987).
- [10.14] R. D. Sydora: *Phys. Fluids* **B2**, 1455 (1990).
- [10.15] S. E. Parker, W. W. Lee, and R. A. Santoro: *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2042 (1993).
- [10.16] S. E. Parker, and W. W. Lee: *Phys. Fluids* **B5**, 77 (1993).
- [10.17] A. M. Dimits, B. I. Cohen, N. Mattor, W. M. Nevins, and D. E. Shumaker: *Nucl. Fusion* **40**, 661 (2000).
- [10.18] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer, B. I. Cohen, W. Dorland et al.: *Phys. Plasmas* **7**, 969 (2000).
- [10.19] R. G. Littlejohn: *Phys. Fluids* **24**, 1730 (1981).
- R. G. Littlejohn: *J. Plasma Phys.* **29**, 111 (1983).
- A. Brizard: *J. Plasma Phys.* **41**, 541 (1989).
- H. Sugama: *Phys. Plasmas* **7**, 466 (2000).
- [10.20] A. B. Langdon and C. K. Birdsall: *Phys. Fluids* **13**, 2115 (1970).
- H. Okuda and C. K. Birdsall: *Phys. Fluids* **13**, 2123 (1970).
- H. Okuda: Verification of Theory for Plasma of Finite-Size Particles. *Phys. Fluids* **15**, 1268 (1972).
- [10.21] 内藤裕志: プラズマ・核融合学会誌 (*J. Plasma Fusion Res.*) **74**, 470 (1998).
- [10.22] K. Nishimura, R. Horiuchi, and T. Sato: *Phys. Plasmas* **4**, 4035 (1997).
- R. Horiuchi, and T. Sato: *Phys. Fluids* **B 2**, 2652 (1990).
- [10.23] E. V. Belova, S. C. Jardin, H. Ji, M. Yamada, and R. Kulsrud: *Phys. Plasma* **7**, 4996 (2000).
- [10.24] M. J. LeBrun, T. Tajima, M. G. Gray, G. Furnish, and W. Horton: *Phys. Fluids* **B5**, 752 (1993).
- [10.25] Y. Kishimoto, J-Y Kim, W. Horton, T. Tajima, M. J. LeBrun, and H. Shirai: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, A663 (1998).
- [10.26] A. Hasegawa, C. G. MacLennan, and Y. Kodama: *Phys. Fluids* **22**, 2122 (1979).
- [10.27] A. Hasegawa, and K. Mima: *Phys. Fluids* **21**, 87 (1978).
- [10.28] A. I. Dyachenko, S. V. Nazarenko, and V. E. Zakharov: *Phys. Lett.* **A165**, 330 (1992).
- [10.29] Z. Lin, T. S. Hahm, W. W. Lee, W. M. Tang, and R. B. White: *Science* **281**, 1835 (1998).
- [10.30] P. N. Guzdar, R. G. Kleva, and Liu Chen: *Phys. Plasmas* **87**, 459 (2001).
- [10.31] A. I. Smolyakov, P. H. Diamond, and M. Malkov: *Phys. Rev. Lett.* **84**, 491 (2000).
- [10.32] N. Winsor, J. L. Johnson, and J. M. Dawson: *Phys. Fluids* **11**, 2448 (1968).
- [10.33] K. Itoh, K. Hallatschek, and S.-I. Itoh: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **47**, 451 (2005).
- [10.34] Y. Idomura, S. Tokuda, and Y. Kishimoto: *Nucl. Fusion* **43**, 234 (2003).
- [10.35] Y. Idomura, S. Totsuka, and Y. Kishimoto: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura in 2004) TH/8-1.
- Y. Idomura, M. Wakatani, and S. Tokuda: *Phys. Plasmas* **7**, 3551 (2000).
- [10.36] A. Fujisawa, K. Itoh, H. Iguchi, K. Matsuoka, S. Okamomura et al.: *Phys. Rev. Lett.* **93**, 165002 (2004).
- [10.37] G. D. Conway, B. Scott, J. Schirmer, M. Reich, A. Kendl and ASDEX-U Team: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **47**, 1165 (2005).
- [10.38] P. H. Diamond, S.-L. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **47**, R35 (2005).
- P. H. Diamond, K. Itoh, S.-L. Itoh, and T. S. Hahm: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) OV/2-1.
- [11章] トカマク
- [11.1] L. A. Artsimovich: *Nucl. Fusion* **12**, 215 (1972).
- H. P. Furth: Tokamak Research. *Nucl. Fusion* **15**, 487 (1975).
- [11.2] J. Wesson: *Tokamaks*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford (1997).
- [11.3] V. S. Mukhovatov and V. D. Shafranov: *Nucl. Fusion* **11**, 605 (1971).
- [11.4] Equip TFR: *Nucl. Fusion* **18**, 647 (1978).
- [11.5] L. A. Artsimovich, G. A. Bobrovsky, E. P. Gorbunov, D. P. Ivanov, V. D. Kirillov et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Novosibirsk 1969) vol.1, 157 (1969) IAEA, Vienna. English Translation in *Nucl. Fusion Special Suppl.* p.17 (1969).
- [11.6] M. A. Gashev, G. K. Gustov, K. K. D'yachenko, E. G. Komar, I. F. Malyshev et al.: *Sov. Atomic Energy* **17**, 1017 (1964).
- [11.7] L. S. Solovov: *Sov. Physics JETP* **26**, 400 (1968).
- [11.8] N. M. Zueva and L. S. Solovov: *Atomnaya Energia* **24** 453 (1968).
- [11.9] R. H. Weening: *Phys. Plasmas* **7**, 3654 (2000).

- [11.10] V. D. Shafranov: *Sov. Phys. JETP* **37**, 775 (1960).
- [11.11] J. Wesson: *Tokamaks*, 2nd ed., sec. 3.7, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [11.12] B. B. Kadomtsev: *Sov. J. Plasma Phys.* **1**, 389 (1975).
- [11.13] M. Greenwald: *Plasma Phys. Control. Fusion* **44**, R27 (2002).
- [11.14] ASDEX-U Team: *16th IAEA Fusion Energy Conf.* (Conf. Proceedings, Montreal 1996) vol. **1**, 79 (1996) IAEA, Vienna.
- [11.15] J. A. Wesson: *Nucl. Fusion* **18**, 87 (1978).
- [11.16] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse: *Nucl. Fusion* **11**, 67 (1971).
- [11.17] J. W. Connor and H. R. Wilson: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **36**, 719 (1994).
- [11.18] F. Wagner and U. Stroth: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **35**, 1321 (1993).
- [11.19] DIII-D team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D. C. 1990) vol. **1**, 69 (1991) IAEA, Vienna.
- [11.20] F. Troyon, R. Gruber, H. Saurenmann, S. Semenzato and S. Succi: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **26**, 209 (1984).
- [11.21] A. Sykes, M. F. Turner and S. Patel: *Proc. 11th European Conf. on Contr. Fusion Plasma Phys.*, Part II, 363 (1983) Aachen.
- T. Tuda, M. Azumi, K. Itoh, G. Kurita, T. Takeda et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, London 1984) vol. **2**, 173 (1985) IAEA Vienna.
- [11.22] ITER Physics Basis: *Nucl. Fusion* **39**, No. 12 (1999).
- [11.23] K. Borrass: *Nucl. Fusion* **31**, 1035 (1991)
- K. Borrass, R. Farengo, G. C. Vlases: *Nucl. Fusion* **36**, 1389, (1996).
- B. LaBombard, J. A. Goetz, I. Hutchinson, D. Jablonski, J. Kesner et al.: *Nucl. Materials* **241-243**, 149 (1997).
- [11.24] R. J. Goldston: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **26**, 87 (1984).
- S. M. Kaye: *Phys. Fluids* **28**, 2327 (1985).
- [11.25] P. N. Yushmanov, T. Takizuka, K. S. Riedel, D. J. W. F. Kardaun, J. G. Cordey, S. M. Kaye, and D. E. Post: *Nucl. Fusion* **30**, 1999, (1990).
- N. A. Uckan, P. N. Yushmanov, T. Takizuka, K. Borrass, J. D. Callen, et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D. C. 1990) vol. **3**, 307 (1991) IAEA, Vienna.
- [11.26] F. Wagner, G. Becker, K. Behringer et. al.: *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1408 (1982).
- F. Wagner, G. Becker, K. Behringer, D. Campbell, M. Keilhacker et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Research* (Conf. Proceedings, Baltimore 1982) vol. **1**, 43 (1983) IAEA, Vienna.
- [11.27] ASDEX Team: *Nucl. Fusion* **29**, 1959 (1989).
- [11.28] R. J. Groebner: *Phys. Fluids* **B5**, 2343 (1993).
- [11.29] E. J. Doyle, C. L. Rettig, K. H. Burrell, P. Gohil, R. J. Groebner et. al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Würzburg 1992) vol. **1**, 235 (1992) IAEA, Vienna.
- [11.30] S. I. Itoh and K. Itoh: *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2276 (1988).
- K. C. Shaing and E. C. Crume: *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2369 (1989).
- [11.31] K. Ida: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 1429 (1998).
- [11.32] H. Biglari, D. H. Diamond, Y.-B. Kim, B. A. Carreras, V. E. Lynch, F. L. Hinton et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D.C. 1990) vol. **2**, 191 (1991) IAEA, Vienna.
- [11.33] TFTR Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D.C. 1990) vol. **1**, 9, (1991) IAEA, Vienna.
- [11.34] T. S. Taylor, T. H. Osborne, K. H. Burrell et al.: *Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Würzburg 1992) vol. **1**, 167 (1992) IAEA, Vienna.
- [11.35] JT60U Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Research* (Conf. Proceedings, Seville 1994) vol. **1**, 199 (1995) IAEA Vienna.
- [11.36] F. L. Hinton and G. M. Staebner: *Phys. Fluids* **B5**, 1281 (1993).
- [11.37] O1-6 (DIII-D), O1-2 (TFTR), O1-3 (JT-60U), A5-5 (JET), O2-2 (Tore Supra) in *16th IAEA Fusion Energy Conf.* (Conf. Proceedings, Montreal 1996) IAEA, Vienna.
- [11.38] H. Zohn: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **38**, 105 (1996).
- J. W. Connor: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 191 (1998).
- M. Becoulet, G. Huysmans, Y. Sarazin, X. Garbet, Ph Ghendrih et al.: *Plasma Phys. Control. Fusion* **45**, A93 (2003).
- [11.39] JET Team: *Nucl. Fusion* **32**, 187 (1992).
- [11.40] JT60U Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Research* (Conf. Proceedings, Seville 1994) vol. **1**, 31 (1995) IAEA, Vienna.
- [11.41] TFTR Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Research* (Conf. Proceedings, Seville 1994) vol. **1**, 11 (1995) IAEA, Vienna.
- [11.42] The JET Team: *17th Fusion Energy Conf.* (Conf. Proceedings, Yokohama 1998) vol. **1**, 29 (1998) IAEA, Vienna.
- [11.43] T. Fujita, S. Ide, Y. Kamada, T. Suzuki, T. Oikawa et al.: *Phys. Rev. Lett.* **87**, 085001 (2001).
- [11.44] P. A. Politzer, A. W. Hyatt, T. C. Luce, F. W. Perkins, R. Prater et al.: *Nucl. Fusion* **45**, 417 (2005).
- [11.45] J. L. Luxon: *Nucl. Fusion* **42**, 614 (2002).
- [11.46] M. Okabayashi, J. Bialek, A. Bodeson, M. S. Chance, M. S. Chu et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) EX/3-1Ra.
- H. Reimerdes, J. Bialek, M. S. Chance, M. S. Chu, A. M. Garofalo et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) EX/3-1Rb.
- [11.47] Y. Kamada, T. Oikawa, L. Lao, T. Takizuka, T. Hatae et al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **42**, A247 (2000).
- [11.48] P. T. Lang, A. Kallenbach, J. Bucalossi, G. D. Conway, A. Degeling et al. (ASDEX-U Team): *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) EX/2-6.
- [11.49] D. G. Whyte T. C. Jernigan, D. A. Humphreys, A. W. Hyatt, C. J. Lasnier et al: *Phys. Rev. Lett.* **89**, 055001 (2002).
- [11.50] R. Yoshino, Y. Neyatani, N. Isei, A. Tanga, D. J. Campbell et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Seville 1994) vol. **1**, 685, (1995) IAEA, Vienna.
- R. Yoshino, T. Kondoh, Y. Neyatani, K. Itami, Y. Kawano, and N. Isei: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **39**, 313 (1997).
- [11.51] G. Pautasso, K. Büchl, J. C. Fuchs, O. Gruber, A. Herrmann et al.: *Nucl. Fusion* **36**, 1291 (1996).

- [11.52] ITER Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D.C. 1990) vol. **3**, 413, (1991) IAEA, Vienna.
- [11.53] K. Miyamoto: *プラズマ・核融合学会誌 (J. Plasma Fusion Res.)* **76**, 166 (2000).
- [11.54] R. Aymar, V. Chuyanov, M. Huguet, and Y. Shimonura: *18th IAEA Fusion Energy Conf.* (Sorrento 2000) OV/1.
Technical Bases for the ITER-FEAT Outline Design Dec. 1999 (Draft for TAC Review).
M. Shimada, V. Mukhavatov, G. Federici, Y. Gribov, A. Kukushkin et al: *The 19th IAEA Fusion Energy Conf.* (Lyon in 2002) CT-2.
- [11.55] INTOR Team: International Tokamak Reactor - Phase Two A Part I. *Nucl Fusion* **23**, 1513 (1983).
- [11.56] Y. K.M. Peng, and D. J. Strickler: *Nucl. Fusion* **26**, 769 (1986).
- [11.57] D. A. Gates, R. Akers, L. Appel, P. G. Carolan, N. Conway et al.: *Phys. Plasmas* **5**, 1775 (1988).
- [11.58] D. C. Robinson: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41**, A143 (1999).
- [11.59] B. P. LeBlanc, R. E. Bell, S. M. Kaye, D. Stutman, M. G. Bell et al.: *Nucl. Fusion* **44**, 513 (2004).
M. Ono, M. G. Bell, R. E. Bell, T. Bigelow, M. Bitter et al.: *Plasma Phys. Control. Fusion* **45**, A335 (2003).
- [11.60] R. J. Akers, J. W. Ahn, G Y Antar, L. C. Appel, D. Applegate et. al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **45**, A175 (2003).
- [11.61] T. Hayashi, N. Mizuguchi, T. H. Watanabe, Y. Todo and T. Sato: *Nucl. Fusion* **40**, 721 (2000).
- [11.62] H. R. Wilson, G. Voss, J-W Ahn, R. J. Akers, L. Appel et al.: *19th IAEA Fusion Energy Conf.* (Lyon 2002) FT/1-5.
R. J. Akers, A. Bond, R. J. Buttery, P. C. Carolan, G. F. Counsell et al.: *Nucl. Fusion* **40**, 1223 (2000).
- [11.63] F. Najmabadi, S. Jardin, M. Tillack, R. Miller, T. K. Mau et. al.: *17th IAEA Fusion Energy Conf.* (Yokohama 1998) FTP-08.
- [11.64] S. Nishio, K. Tobita, S. Konishi, T. Ando, S. Hiroki et al.: *19th IAEA Fusion Energy Conf.* (Lyon 2002) FT/P1-21.
S. Nishio, K. Tobita, K. Tokimatsu, K. Shinya, I. Senda et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) FT/P7-35.
- [11.65] K. Tobita, S. Nishio, M. Enoda, M. Sato, T. Isono et al.: *Fusion Eng. Des.* **81**, 1151 (2006).
- [11.66] S. Shiraiwa, S. Ide et al.: *Phys. Rev. Lett.* **92**, 035001 (2004).
Y. Takase, T. Fukuda, G. Xiang, M. Gyaznevich, S. Ide et al. *プラズマ・核融合学会誌 (J. Plasma Fusion Res.)* **78**, 719 (2002).
- [11.67] R. L. Miller, Y. R. Lin-Liu, A. D. Turnbull and V. S. Chan et. al.: *Phys. Plasmas* **4**, 1062 (1997).
C. P. C. Wong, and R. D. Stambaugh: *Fusion Eng. Des.* **51-52**, 387 (2000).
Y. R. Lin-Liu and R. D. Stambaugh: *Nucl. Fusion* **44**, 548 (2004).
- [11.68] M. Ono, M. Peng, C. Kessel, C. Neumeyer, J. Schmidt et al.: *Nucl. Fusion* **44**, 452 (2004).
- [11.69] M. Fujiwara, S. Itoh, K. Matsuoka, K. Matsuura, K. Miyamoto, and A. Ogata: *Jpn. J. Appl. Phys.* **14**, 675 (1975).
- [12章] 逆転磁場配位 (RFP)
- [12.1] D. C. Robinson and R. E. King: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Novosibirsk 1968) vol. **1**, 263 (1969) IAEA, Vienna.
- [12.2] H. A. B. Bodin and A. A. Newton: *Nucl. Fusion* **20**, 1255 (1980).
- [12.3] H. A. B. Bodin: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **29**, 1297 (1987).
- [12.4] MST Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Washington D. C. 1990) vol. **2**, 519 (1991) IAEA, Vienna.
TPE-1RM20 Team: *19th IAEA Fusion Energy Conference* (Conf. Proceedings, Montreal 1996) vol. **2**, 95 (1997) IAEA, Vienna.
- [12.5] EX4/3(RFX), EX4/4(TPE-RX): *17th IAEA Fusion Energy Conf.* (Conf. Proceedings, Yokohama 1998) vol. **1** 367, 375 (1998) IAEA, Vienna.
- [12.6] J. B. Taylor: *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1139 (1974).
- [12.7] T. H. Jensen and M. S. Chu: *Phys. Fluids* **27**, 2881 (1984).
- [12.8] V. D. Shafranov and E. I. Yurchenko: *Sov. Phys. JETP* **26**, 682 (1968).
- [12.9] D. A. Backer, M. D. Bausman, C. J. Buchenauer, L. C. Burkhardt, G. Chandler, J. N. Dimarco et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceeding, Baltimore 1982) vol. **1**, 587 (1983) IAEA, Vienna.
- [12.10] K. Miyamoto: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **30**, 1493 (1988).
Y. Ueda, N. Asakura, S. Matsuzuka, K. Yamagishi, S. Shinohara, K. Miyamoto et al.: *Nucl. Fusion* **27**, 1453 (1987).
- [12.11] K. Kusano and T. Sato: *Nucl. Fusion* **27**, 821 (1987).
- [12.12] D. D. Schnack, E. J. Caramana, and R. A. Nebel: *Phys. Fluids* **28**, 321 (1985).
- [12.13] A. R. Jacobson, and R. W. Moses: *Phys. Rev.* **A29**, 3335 (1984).
R. W. Moses, K. F. Schoenberg, and D. A. Baker: *Phys. Fluids* **31**, 3152 (1988).
- [12.14] K. A. Werley, J. N. Dimarco, R. A. Krakowski, and C. G. Bathke: *Nucl. Fusion* **36**, 629 (1996).
- [12.15] M. Valisa, F. Auriemma, A. Canton, L. Carraro, R. Lorenzini et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) EX/P4-13.
- [12.16] J. S. Sarff, S. A. Hokin, H. Ji, S. C. Prager, and C. R. Sovinec: *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3670 (1994).
- [12.17] S. C. Prager, J. Adney, A. Almagri, J. Anderson, A. Blair et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) OV/4-2.
- [12.18] J. S. Sarff, N. E. Lanier, S. C. Prager, and M. R. Stoneking: *Phys. Rev. Lett.* **78**, 62 (1997).
- [12.19] B. E. Chapman, J. K. Anderson, T. M. Biewer, D. L. Brower, S. Castillo et al.: *Phys. Rev. Lett.* **87**, 205001 (2001).
B. E. Chapman, A. F. Almagri, J. K. Anderson, T. M. Biewer, P. K. Chattopadhyay et al.: *Phys. Plasmas* **9**, 2061 (2002).
- [12.20] J. S. Sarff, A. F. Almagri, J. K. Anderson, T. M. Biewer, D. L. Brower et al.: *19th IAEA Fusion Energy Conf.* (Lyon 2002) OV/4-3.
- [12.21] R. Bartiromo, P. Martin, S. Martini, T. Bolzonella, A. Canton, and P. Innocente: *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1462 (1999).
- [12.22] Y. Yagi, H. Koguchi, Y. Hirano, T. Shimada, H. Sakakita, and S. Sekine: *Phys. Plasmas* **10**, 2925 (2003).
- [12.23] H. Sakakita, Y. Yagi, T. Asai, G. Fiksel, L. Frassinetti, K. Hayase et al.: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004) EX/P2-17.
- [12.24] Y. Yagi, H. Koguchi, Y. Hirano, H. Sakakita, and L. Frassinetti: *Nucl. Fusion* **45**, 138 (2005).

- [12.25] M. K. Bevir and J. W. Gray: *Proc. of Reversed Field Pinch Theory Workshop* (LANL Los Alamos, 1980).
M. K. Bevir, C. G. Gimblett, and G. Miller: *Phys. Fluids* **28**, 1826 (1985).
- [12.26] K. F. Schoenberg, J. C. Ingraham, C. P. Munson, P.G. Weber et al.: *Phys. Fluids* **31**, 2285 (1988).
- [13章] ステラレーター
- [13.1] L. Spitzer, Jr.: The Stellarator Concept. *Phys. Fluids* **1**, 253 (1958).
- [13.2] A. I. Morozov and L. S. Solovév: *Rev. of Plasma Physics* **2**, 1 (edited by M. A. Leontovich) Consultants Bureau, New York (1966).
- [13.3] K. Nagasaki, K. Itoh, M. Wakatani and A. Iiyoshi: *J. Phys. Soc. Japan* **57**, 2000 (1988).
- [13.4] J. L. Johnson, C. R. Oberman, R. M. Kulsrud, and E. A. Frieman: *Phys. Fluids* **1**, 281 (1958).
- [13.5] S. Chandrasekhar and P. C. Kendal: *Astrophys. J.* **126**, 457 (1957).
P. Barberio-Corsetti: *Plasma Phys.* **15**, 1131 (1973).
D. Corresa and D. Lortz: *Nucl. Fusion* **13**, 127 (1973).
- [13.6] W VIIA Team: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Baltimore 1982) **2**, 241 (1983) IAEA, Vienna.
- [13.7] E. D. Andryukhina, G. M. Batanov, M. S. Brezhetsij, M. A. Blokh, G. S. Vorosov et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, London 1984) vol. **2**, 409 (1985) IAEA, Vienna.
- [13.8] K. Uo, A. Iiyoshi, T. Obiki, O. Motojima, S. Morimoto, M. Wakatani et al.: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, London 1984) vol. **2**, 383 (1985) IAEA, Vienna.
- [13.9] L. Garcia, B. A. Carreras, J. H. Harris, H. R. Hicks, and V. E. Lynch: *Nucl. Fusion* **24**, 115 (1984).
- [13.10] C. Gourdon, D. Marty, E. K. Maschke and J. P. Dumont: *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res.* (Conf. Proceedings, Novosibirsk 1968) vol. **1**, 847 (1969) IAEA, Vienna.
- [13.11] K. Uo: *Plasma Phys.* **13**, 243 (1971).
- [13.12] A. Mohri: *J. Phys. Soc. Japan* **28**, 1549 (1970).
- [13.13] C. Gourdon, D. Marty, E. K. Maschke, and J. Touche: *Nucl. Fusion* **11**, 161 (1971).
- [13.14] Yu. N. Petrenco and A. P. Popryadukhin: *3rd International Symp. on Toroidal Plasma Confinements*, D 8, (1973, Garching).
- [13.15] H. Wobig and S. Rehker: *Proc. 7th Symp. on Fusion Technol.* 345 (1971, Grenoble).
- [13.16] A. Iiyoshi, A. Komori, A. Ejiri, M. Emoto, H. Funaba et al.: *Nucl Fusion* **39**, 1245 (1999).
M. Fujiwara, O. Motojima, Y. Yamada, T. Watari, M. Okamoto et al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **39**, A261 (1997).
- [13.17] F. Wagner and the W7-X Team: *20th IAEA Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), FT/3-5.
H. Wobig: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **41**, A159 (1999).
- [13.18] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse: *Nucl. Fusion* **11**, 67 (1971).
- [13.19] J. A. Derr and J. L. Shohet: *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1730 (1979).
- [13.20] M. Wakatani, S. Kodama, M. Nakasuga, and K. Hanatani: *Nucl. Fusion* **21**, 175 (1981).
- [13.21] J. W. Connor and R. J. Hastie: *Phys. Fluids* **17**, 114 (1974).
- [13.22] L. M. Kovrizhnykh: *Nucl. Fusion* **24**, 851 (1984).
- [13.23] D. E. Hastings, W. A. Houlberg, and K. C. Shaing: *Nucl. Fusion* **25**, 445 (1985).
- [13.24] K. M. Young: *Plasma Phys.* **16**, 119 (1974).
- [13.25] K. Miyamoto: *Nucl. Fusion* **18**, 243 (1978).
- [13.26] B. A. Carreras, G. Grieger, J. H. Harris, J. L. Johnson, J. F. Lyon, O. Motojima, F. Rau, H. Renner, J. A. Rome, K. Uo, M. Wakatani, and H. Wobig: *Nucl. Fusion* **28**, 1613 (1988).
- [13.27] S. Sudo, Y. Takeiri, Z. Zushi, F. Sano, K. Itoh, K. Kondo, and A. Iiyoshi: *Nucl. Fusion* **30**, 11 (1990).
- [13.28] U. Stroth, M. Murakami, R. A. Dory, H. Yamada, S. Okamura, F. Sano, and T. Obiki: *Nucl. Fusion* **36**, 1063 (1996).
- [13.29] A. Fujisawa, H. Iguchi, T. Minami, Y. Yoshimura, H. Sanuki, K. Itoh et al.: *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2669 (1999).
- [13.30] H. Massberg, C. D. Beidler, U. Gasparino, M. Rome, K. S. Dyailin et al.: *Phys. Plasmas* **7**, 295 (2000).
- [13.31] O. Motojima, N. Ohyabu, A. Komori, O. Kaneko, H. Yamada et al.: *19th Fusion Energy Conf.* (Lyon 2002), OV/1-13.
- [13.32] K. Ida, S. Inagaki, T. Shimozuka, T. Tamura, H. Funaba et al.: *Phys. Plasmas* **11**, 2551 (2004).
- [13.33] U. Stroth, J. Balduhn, J. Geiger, T. Geist, L. Giannone et al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **40**, 1551 (1998).
- [13.34] K. McCormick, P. Grigull, R. Burhenn, R. Brakel, H. Ehmler et al.: *Phys. Rev. Lett.* **89**, 015001 (2001).
- [13.35] F. Wagner, S. Bäuml, J. Balduhn, N. Basse, R. Brakel et al.: *Phys. Plasmas* **12**, 072509 (2005).
- [13.36] K. Kawahata, N. Ohyabu, O. Kaneko, A. Komori, H. Yamada et al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **42**, B51 (2000).
- [13.37] O. Motojima, K. Ida, K. Y. Watababe, Y. Nagayama, A. Komori et al.: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), OV/1-4.
- [13.38] S. Hamada: *Nucl. Fusion* **2**, 23 (1962).
- [13.39] A. H. Boozer: *Phys. Fluids* **23**, 904 (1980).
- [13.40] N. Nakajima, J. Todoroki, and M. Okamoto: *プラズマ・核融合学会誌 (J. Plasma Fusion Res.)* **68**, 395 (1992).
- [13.41] R. B. White, A. H. Boozer, and R. Hay: *Phys. Fluids* **25**, 575 (1982).
- [13.42] R. B. White and M. S. Chance: *Phys. Fluids* **27**, 2455 (1984).
- [13.43] A. H. Boozer: *Phys. Fluids* **27**, 2441 (1984).
- [13.44] P. J. Heitzenroeder, T. G. Brown, J. H. Chrzanowski, M. J. Cole, P. L. Goranson et al.: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), FT/P7-22.
M. C. Zarnstorff, L. A. Berry, A. Brooks, F. Fredrickson, G-Y. Fu et al.: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **43**, A237 (2001).
- [13.45] S. Okamura, K. Matsuoka, S. Nishimura, M. Isobe, C. Suzuki et al.: *Nucl. Fusion* **44**, 575 (2004).
- [13.46] F. S. B. Anderson, A. F. Almagri, D. T. Anderson, P. G. Mathews, J. N. Talmadge, and J. L. Shohet: *Fusion Technol.* **27**, 273 (1995).
S. P. Gerhardt, A. F. Almagri, D. T. Anderson, F. S. B. Anderson, D. Brower et al.: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), EX/8-3.

- [13.47] D. A. Spong, S. P. Hirshman, J. F. Lyon, L. A. Berry, D. J. Strickler et al.: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), IC/P6-51.
B. E. Nelson, A. Brooks, R. D. Benson, L. A. Berry, T. G. Brown et al.: *19th Fusion Energy Conf.* (Lyon 2002), FT/2-4.
- [13.48] F. Wagner, T. Andreeva, J. Baldzuhn, A. Benndorf, H. Bolt et al.: *20th Fusion Energy Conf.* (Vilamoura 2004), FT/3-5.
J. Nührenberg et al.: Overview on Wendelstein 7-X Theory. *Fusion Technology* **27**, 71 (1995)
W. Lotz, P. Merkl, J. Nührenberg, and E. Strumberger: *Plasma Phys. Contr. Fusion* **34**, 1037 (1992).
- [13.49] D. A. Spong, S. P. Hirshman, J. C. Whitson, D. B. Batchelor, R. Sanchez, B. A. Carreras et al.: *Nucl. Fusion* **40**, 563 (2000).
J. R. Cary and S. G. Shasharina: *Plasma Phys. Reports* **23**, 509 (1997).
- [13.50] 岡本正雄, 横山雅之, 中島徳嘉: プラズマ・核融合学会誌 (*J. Plasma Fusion Res.*) **74**, 1107 (1998)
- [13.51] C. D. Beidler, E. Harmeyer, F. Herrngger, Yu. Igitkhanov, A. Kendl et al.: The Helias Reactor HSR4/18. *Nucl. Fusion* **41**, 1759 (2001).
H. Wobig, C. D. Beider, J. Kisslinger, E. Harmeyer, F. Herrnegger et al.: Power Balance in Stellarator Reactors. *17th Fusion Energy Conf.* (Yokohama 1998), FTP/01.
- [13.52] A. Sagara, S. Imagawa, O. Mitarai, T. Dolan, T. Tanaka et al.: *Nucl. Fusion* **45**, 258 (2005).
- [13.53] T. K. Fowler, Ed.: *Nucl. Fusion* **9**, 3 (1969).
- [13.54] M. S. Ioffe and B. B. Kadomtsev: *Sov. Phys. Uspekhi* **13**, 225 (1970).
- [13.55] R. F. Post: *Nucl. Fusion* **27**, 1579 (1987).
- [13.56] D. V. Sivkhim: *Rev. of Plasma Physics* **4**, 93 (edited by M. A. Leontovich) Consultants Bureau, New York, 1966
- [13.57] G. I. Dimov, V. V. Zakaidakov, and M. E. Kishinevskii: *Sov. J. Plasma Phys.* **2**, 326 (1976).
- [13.58] T. K. Fowler and B. G. Logan: *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion Res.* **2**, 167 (1977).
- [13.59] V. P. Pastukhov: *Nucl. Fusion* **14**, 3 (1974).
- [13.60] K. Miyamoto: *Controlled Fusion and Plasma Physics*, Chapter 7. Taylor & Francis, New York (2007).

索引

ア行

アスペクト比 (aspect ratio) 25, 195
 熱いプラズマ (hot Plasma) 107
 アルフベン固有モード (Alfvén eigenmode) 75
 アルフベン周波数ギャップ (Alfvén freq. gap) 76
 アルフベン速度 (Alfvén velocity) 58, 115
 アルフベン波 (Alfvén wave) 115
 圧縮-(compressional-) 57, 116
 捩れ-(torsional(shear)-) 57, 116
 安全係数 (safety factor) 25, 62, 203
 案内中心 (guiding center) 9
 -のドリフト速度 (drift velocity of-) 9, 28
 アンテナ-プラズマ カップリング (antenna-plasma coupling) 134
 イオンイオン混成加熱 (ion-ion hybrid heating) 143
 イオンイオン混成共鳴 (ion-ion hybrid resonance) 142
 イオン温度勾配モード (ion temperature gradient mode), 75, 132, 160
 イオンサイクロトロン周波数領域加熱 (ion cyclotron range of freq. heating) 141
 -共鳴 (- resonance) 111, 116
 -波 (- wave) 117
 イオンドリフト周波数 (ion drift freq.) 74, 91
 イオン反磁性速度 (ion diamagnetic velocity) 91
 イオンビームの減速時間 (slowing down time of ion beam) 17
 異常波 (extraordinary wave) 110
 移動対称 (translational symmetry) 21
 ウェアーピンチ (Ware's pinch) 28
 エッジ局所モード (edge localized mode) 214
 エネルギー緩和時間 (relaxation time of energy) 16
 エネルギー原理 (energy principle) 63
 エネルギー積分 (energy integral) 63
 エネルギー閉じ込め時間 (energy confinement time) 41
 Hモードトカマクの— 211
 Lモードトカマクの— 209
 RFPの— 233, 235
 ステラレータの— 245
 円偏光 (circular polarization) 110
 オイラー方程式 (Euler's eq.) 66
 オーム加熱 (Ohmic heating) 18
 オームの法則 (Ohm's law) 36

カ行

回転変換角 (rotational transform angle) 25, 240
 ステラレータの— 239
 トカマクの— 25, 203
 開放端磁場系 (open end magnetic field) → ミラー磁場
 拡散係数 (diffusion coefficient) 40
 揺動による-(due to fluctuation) 158
 拡散テンソル (diffusion tensor) 101, 150

核融合燃焼条件 (burning condition) 5, 218
 核融合反応 (reaction of nuclear fusion) 3
 -断面積 (cross section of nuclear fusion) 4
 核融合炉 (fusion reactor) 3, 216
 カットオフ (cut off) 111
 荷電交換 (charge exchange) 16, 212
 荷電分離 (charge separation) 24
 加熱 (heating)
 イオンサイクロトロン周波数領域-(ion cyclotron range of freq., ICRF) 141
 高周波-(RF heating) 134
 断熱圧縮-(adiabatic compression) 11
 中性粒子ビーム入射-(neutral beam injection, NBI) 16
 低域混成-(lower hybrid heating, LHH) 146
 電子サイクロトロン-(electron cyclotron heating, ECH) 146
 波動 (wave heating)- 134
 カーボンタイル (carbon tile) 205
 ガリエフ・サグディエフ拡散係数 (Galeev-Sagdeev diffusion coefficient) 45
 慣性閉じ込め (inertial confinement) 13
 完全軌道粒子モデル (full orbit particle model) 169
 緩和現象 (relaxation phenomena) 229
 逆磁気シア (reversed shear) → 負磁気シア
 逆磁場配位 (field reversed configuration, FRC) 171
 逆磁場ピンチ (resersed field pinch) → 逆転磁場ピンチ
 逆転磁場ピンチ (reversed field pinch, RFP) 227
 軌道面 (orbit surface) 29
 球状トカマク (spherical tokamak) 221
 強結合プラズマ (strongly coupled plasma) 2
 共鳴 (resonance) 111
 -損失 (resonant loss) 245
 -励起 (resonant excitation) 134
 曲率ドリフト (curvature drift) 9
 巨視的不安定性 (macro-insta. 49
 キンク不安定性 (kink insta. 61
 グラド-シャフラノフの方程式 (Grad-Shafranov equation) 194
 グリンバルド密度 (Greenwald density) 200
 クルスカル-シャフラノフ条件 (Kruskal-Shafranov limit) 61
 クーロン衝突 (Coulomb collision) 13
 クーロン対数 (Coulomb logarithm) 14
 群速度 (group velocity) 140
 ケイ-ゴールドストン比例則 (Kay-Goldston scaling) 209
 減衰指数 (decay index) 198
 高域混成共鳴周波数 (upper hybrid resonant freq.) 118
 高エネルギー粒子モード (energetic particle mode, EPM) 77
 交換不安定性 (interchange insta. 50

- の安定化条件 (stability condition) 49
- 高周波加熱 → 加熱
- 光線追跡 (ray tracing) 140
- 高速中性粒子ビーム入射 → 加熱
- 高速点火 (fast ignition) 13
- 古典拡散係数 (classical diffusion coefficient) 41
- 混成共鳴 (hybrid resonance) 111
- コンティニュームアルフベン波 (continuum Alfvén wave) 76
- サ 行
- サイクロトロン減衰 (cyclotron damping) 104
- サイクロトロン周波数 (cyclotron frequency) 8
- 歳差運動 (precession) 30
- 最小磁場 (minimum B field) 51
- 散逸性ドリフト不安定性 (dissipative drift insta.) → 抵抗性ドリフト不安定性
- シア (shear) 67, 72, 211, 229
- シアアルフベン波 (shear Alfvén wave) → 振れアルフベン波
- シアのある流れ (sheared flow) 47
- 磁気井戸の深さ (magnetic well depth) 54
- 磁気音波 (magnetoacoustic wave) 57
- 磁気座標 (magnetic coordinates) 250
- 磁気軸 (magnetic axis) 25
- 磁気粘性 (magnetic viscosity) 38
- 磁気ヘリシティ (magnetic helicity) 227
- 磁気ミラー (magnetic mirror) → ミラー (mirror)
- 磁気面 (magnetic surface) 21
- 磁気モーメント (magnetic moment) 11
- 磁気レイノルズ数 (magnetic Reynolds number) 38
- 軸対称 (axially symmetry) 21
- 自然座標系 (natural coordinates) 248
- 質量欠損 (mass defect) 3
- 磁場拡散 (magnetic diffusion) 38
- 磁場勾配ドリフト (gradient B drift) 9
- ジャイロボーム拡散 (gyro Bohm diffusion) 161
- ジャイロ運動論的粒子モデル (gyrokinetic particle model) 165, 167
- 弱結合プラズマ (weakly coupled plasma) 2
- シャフランノフシフト (Shafranov shift) 200
- 周回粒子 (circulating particle) 25
- 小半径 (minor radius) 25
- 縮退電子プラズマ (degenerated electron plasma) 2
- 主軸 (major axis) 24
- 小軸 (minor axis) 25
- 常磁性 (paramagnetism) 193
- 衝突時間 (collision time) 14
- 衝突周波数 (collisional frequency) 14
- 衝突ドリフト不安定性 (collisional drift insta.) → 抵抗性ドリフト不安定性
- 衝突領域 (collisional region) 45
- 小半径 (minor radius) 25
- 磁力線 (lines of magnetic force) 20
- 新古典拡散 (neoclassical diffusion)
 - ステラレーターの- 243
 - トカマクの- 45
 - 新古典ティアリングモード (neoclassical tearing mode) 89, 214
 - 振動場による電流駆動 (oscillating field current drive) 235
 - 準対称ステラレータ (quasi-symmetric stellarator) 253
 - スイダム条件 (Suydam criterion) 67
 - 垂直位置安定性 (vertical positional stability) 198
 - 水平位置安定性 (horizontal positional stability) 198
 - スカラーポテンシャル (scalar potential) 21
 - スクレイプオフ層 (scrape off layer) 205
 - ステラレータ (stellarator) 237
 - の回転変換角 (rotational transform angle) 239
 - の新古典拡散 (neoclassical diffusion) 241
 - の閉じ込め時間 244
 - の振れたトロイダル・コイル (twisted toroidal coil) 241
 - スーパーバナナ (superbanana) 244
 - 正規化ベータ → トロロン係数 (Troyon factor)
 - 正常波 (ordinary wave) 110
 - 静電波 (electrostatic wave) 129
 - の分散式 (dispersion relation) 129
 - 制動放射 (bremsstrahlung) 204
 - セパトリックス (separatrix) 195, 205, 239
 - 線形化された運動方程式 (linearized equation of motion) 55
 - 速度拡散時間 (velocity diffusion time) 16
 - 速度空間不安定性 (velocity space insta.) 131
 - 速度空間分布関数 (velocity space distribution function) → 分布関数
 - 速波 (fast wave) 111
 - ソーセイジ不安定性 (sausage insta.) 61
 - 損失時間 (loss time) → 閉じ込め時間
 - 損失錐 (loss cone) → ロスコーン
 - タ 行
 - 帯状流 (zonal flow) 178
 - ダイナモ (dynamo) 230
 - ダイバーター (diverter) 205
 - 大半径 (major radius) 25
 - 対流損失 (convective loss) 161, 245
 - 対流セル (convective cell) 161, 244
 - 楕円コイル (elliptic coil) 241
 - 縦長断面トカマクプラズマ (elongated tokamak plasma) 202
 - 縦の断熱不変量 (longitudinal adiabatic invariant) 20
 - 端損失 (end loss) 20, 254
 - タンデムミラ (tandem mirror) 255
 - 断熱圧縮 → 加熱
 - 断面積 (cross section) 13
 - クーロン衝突の- 13
 - 核融合反応の- 4
 - 小さい解 (small solution) 67
 - 遅波 (遅進波) (slow wave) 111
 - 中間領域 (intermediate region) 45

中性粒子ビーム電流駆動 → 電流駆動
 中性粒子ビーム入射 → 加熱
 着火条件 (ignition condition) 6
 超粒子 (superparticle) 169
 冷たいプラズマ (cold plasma) 107
 ティアリング不安定性 (tearing insta.) 83
 低域混成共鳴周波数 (lower hybrid resonant freq.) 113
 低域混成波 (lower hybrid wave) 117
 -の近接条件 (accessibility condition) 144
 低域混成加熱 → 加熱
 低域混成電流駆動 → 電流駆動
 抵抗拡散時間 (resistive diffusion time) 38
 抵抗性壁モード (resistive wall mode) 95, 214
 抵抗性ドリフト不安定性 (resistive drift insta.) 92
 抵抗不安定性 (resistive insta.) 80
 デタッチドプラズマ (detached plasma) 207
 デバイ遮蔽 (Debye shield) 2
 デバイ長 (Debye length) 2
 電気抵抗 (electric resistivity) 18
 電気分極 (electric polarization) 107
 電子温度勾配不安定性 (electron temperature gradient insta.) 132, 183
 電子ドリフト周波数 (electron drift freq.) 74, 158
 電子サイクロトロン共鳴 (electron cyclotron resonance) 111
 -加熱 (- heating) → 加熱
 -電流駆動 (- current drive) → 電流駆動
 -波 (- wave) 119
 電子反磁性速度 (electron diamagnetic velocity) 91
 電子プラズマ周波数 (electron plasma freq.) 3
 -波 (- wave) 3
 電磁流体力学的不安定性 (MHD insta.) 49
 電磁流体力学の領域 (MHD region) 45
 電磁流体力学方程式 (magnetohydrodynamic equation) 34
 電流駆動 (current drive)
 中性粒子ビーム-(neutral beam current drive, NBCD) 155
 振動場による-(oscillating field current drive) 235
 低域混成-(lower hybrid current drive, LHCD) 149
 電子サイクロトロン-(electron cyclotron current drive, ECCD) 151
 ブートストラップ電流 (bootstrap current) による- 46, 214
 動的摩擦係数 (coefficient of dynamic friction) 101
 トカマク (tokamak) 186
 -の安全係数 (safety factor) 25, 203
 -の新古典拡散 (neoclassical diffusion) 45
 -の平衡条件 (equilibrium condition) 197
 -のライナー (liner) 186
 -のリミター (limiter) 186

-炉 (- reactor) 4, 216
 ドライサー電場 (Dreicer field) 17
 トランジットタイム減衰 (transit time damping) 104, 138
 ドリフト周波数 (drift frequency) 91, 131
 ドリフト不安定性 (drift insta.) 89, 131
 トロイダル座標 (toroidal coordinates) 225
 トロイダルアルフベン固有モード (toroidal Alfvén Eigenmode, TAE) 76
 トロイダル磁場 (toroidal magnetic field) 24
 トロイダルドリフト (toroidal drift) 24
 遁走電子 (runaway electron) 17

ナ行

内部破壊 (internal disruption) 200
 内部輸送障壁 (internal transport barrier) 211
 波の吸収 (absorption of wave) 138, 139
 波の伝播 (propagation of wave) 140
 波の励起 (excitation of wave) 134
 ニューカムの定理 (Newcomb's theorem) 67
 熱エネルギー (thermal energy) 5, 217
 熱拡散係数 (thermal diffusion coefficient) 41, 169, 244
 熱伝導エネルギー損失 (conductive energy loss) 41
 熱伝導係数 (thermal conductivity) 41
 熱流束 (thermal flux) 41

ハ行

ハイブリッド共鳴 (hybrid resonance) → 混成共鳴
 破壊的不安定性 (disruptive insta.) 202
 長谷川-三間の式 (Hasegawa-Mima eq.) 173
 波動加熱 (wave heating) → 加熱
 バナナ (banana) 27
 -の幅 (- width) 27
 -粒子 (- particle) 27
 -領域 (- region) 45
 浜田座標系 (Hamada coordinates) 248
 ハミルトンの正準方程式 (Hamiltonian's canonical eq.) 22
 ハリス不安定性 (Harris insta.) 132
 パルスのポロイダル電流駆動 (pulsed poloidal current drive, PPCD) 233
 バルーンモード (ballooning mode) 71
 ハロー電流 (halo current) 216
 反磁性 (diamagnetism) 193
 -電流 (diamagnetic current) 42
 非円形断面 (non circular cross section) 202
 微視的不安定性 (microscopic insta.) 131
 比体積 (specific volume) 53
 ピッチ最小 (pitch minimum) 229
 比抵抗率 (specific electric resistivity) 18
 非捕捉粒子 (untrapped particle) 25
 フィッシュ ボン不安定性 (fish bone insta.) 78
 フィルシ-シュルター係数 (Pfirsch-Schlüter factor) 43
 フィルシ-シュルター電流 (Pfirsch-Schlüter current) 42, 200

フェルミ加速 (Fermi acceleration) 20
 フォッカー-プランクの衝突項 (Fokker-Planck's collisional terms) 100, 149
 フォッカー-プランクの方程式 (Fokker-Planck eq.) 99, 149
 輻射損失 (radiation loss) → 放射損失
 ブートストラップ電流 (bootstrap current) 45, 46, 214
 負イオン源 (negative ion source) 212
 負磁気シア (negative shear) 73, 211
 フープ力 (hoop force) 196
 プラズマ電流環の自己インダクタンス (self-inductance of plasma current ring) 196
 プラズマパラメーター (plasma parameter) 2
 プラズマ分散関数 (plasma dispersion function) 126, 127
 ブラゾフ方程式 (Vlasov equation) 99
 プラトー領域 (plateau region) 45
 フルート不安定性 (flute insta.) → 交換不安定性
 分極電流 (polarization current) 12
 分極ドリフト (polarization drift) 12
 分散式 (dispersion relation)
 熱いプラズマ (hot plasma) の- 126
 静電波 (electrostatic wave) の- 129
 冷たいプラズマ (cold plasma) の- 109
 分散媒質におけるエネルギー密度 (energy density in dispersive medium) 137
 分布関数 (distribution function) 97
 -に関する準線形理論 (quasi-linear theory of) 104
 平均最小磁場 (average minimum B field) 54
 平均自由行路 (mean free path) 14
 平衡の式 (equilibrium equation) 192, 193
 ベクトル公式 (vector formula) 39
 ベクトル公式 (一般座標系における)(vector formula in general coordinates) 249
 ベクトルポテンシャル (vector potential) 21
 ベータ比 (beta ratio) 193
 -の上限 (upper limit) 200, 203
 ベッセル関数モデル (Bessel function model) 229
 ヘリカルコイル (helical coil) 238
 ヘリカル対称性 (helical symmetry) 21
 ヘリカルホール (helical hole) 84, 88
 変形ベッセル関数モデル (modified Bessel function model) 229
 ホイスラー波 (whistler wave) 119
 ポインティングベクトル (Poynting vector) 135
 放射損失 (radiation loss) 5, 204
 捕捉粒子 (trapped particle) 27
 -不安定性 (trapped particle insta.) 132
 ボーム拡散 (Bohm diffusion) 159
 ボルツマン方程式 (Boltzmann eq.) 99
 ポロイダル磁場 (poloidal field) 25
 ポロイダルベータ (poloidal beta) 193, 195
 ホロー電流分布 (hollow current profile) 73
 ポンデラモーティブフォース (ponderomotive force) 13

マ行

マイノリティ加熱 (minority heating) 143
 ミラー磁場 (mirror field) 19, 254
 -の閉じ込め時間 (confinement time) 254
 -の閉じ込め条件 (condition of mirror confinement) 20
 ミラー比 (mirror ratio) 20
 無衝突領域 (collisionless region) → バナナ領域
 モード変換 (mode conversion) 134, 143, 145

ヤ行

有効衝突周波数 (effective collisional frequency) 44
 誘電率テンソル (dielectric tensor)
 熱いプラズマ (hot plasma) の- 125
 冷たいプラズマ (cold plasma) の- 108
 輸送障壁 (transport barrier) 211
 横の断熱不変量 (transverse adiabatic invariant) 11
 揺動による拡散係数 (diffusion coefficient due to fluctuation) 158

ラ行

ラグランジの運動方程式 (Lagrange eq. of motion) 22
 ラザフォード項 (Rutherford term) 89
 ラーマー半径 (Larmor radius) 8
 ラングミュアー波 (Langmuir wave)
 → 電子プラズマ波
 ランダウ減衰 (Landau damping) 3, 103, 138
 Li ブランケット (Lithium blanket) 4
 リューヴィユの定理 (Liouville's theorem) 97
 粒子閉じ込め時間 (particle confinement time) 40
 臨界条件 (break even condition) 6
 レイリー-テイラー不安定性 (Rayleigh-Taylor insta.) → 交換不安定性
 レーザープラズマ (laser plasma) → 慣性閉じ込め
 連結距離 (connection length) 41
 連続の式 (equation of continuity) 34, 40
 ローカルモードの安定化条件 (stability of local mode in torus) 229
 ロス・コーン (loss cone) 20
 -不安定性 (- insta.) 132
 Bernatein 波 (Bernstein wave) 130
 Boozer 座標系 (- coordinates) 250
 CMA ダイアグラム (CMA diagram) 115
 Dimit シフト (Dimit shift) 169
 ECCD → 電子サイクロトロン電流駆動
 ECH → 電子サイクロトロン加熱
 ELM → エッジ局所モード
 ERATO コード (ERATO code) 203
 Eta-i モード (mode) 74
 ETG → 電子温度勾配モード
 H モード (H mode) 209
 Harris 不安定性 (Harris insta.) 132
 Hermite マトリックス (Hermite matrix) 136
 ICRF 加熱 → イオンサイクロトロン

周波数領域加熱
INTOR 219
ITER 219
ITG → イオン温度勾配モード
L 波 (L wave) 110
L モード (L mode) 210
LHCD → 低域混成電流駆動
LHH → 低域混成加熱
MHD の線形方程式 (linearized eq.
of MHD) 34
MHD 方程式 → 電磁流体力学方程式
MHD 不安定性 → 電磁流体力学的
不安定性
MHD 領域 → 電磁流体力学的領域
NBCD → 中性粒子ビーム電流駆動
NBI → 中性粒子ビーム入射
R 波 (R wave) 110
RFP → 逆転磁場ピンチ
ST → 球状トカマク
Troyon 係数 (Troyon factor) 203
VH モード (VH mode) 210
X 点 (X point) 195, 239