



悪条件下のトモグラフィー

大館 暁

National Institute for Fusion Science

2021/3/31 天文・核融合連携準備研究会 (第1回)

自己紹介・アウトライン

研究テーマ

- 核融合プラズマの揺動データ計測・画像計測手法・トモグラフィ手法の開発
(人間に理解可能な少数の成分・情報で複雑な現象を説明したい)
- 核融合プラズマのMHD不安定性の研究 (乱流よりは大きな空間スケール)

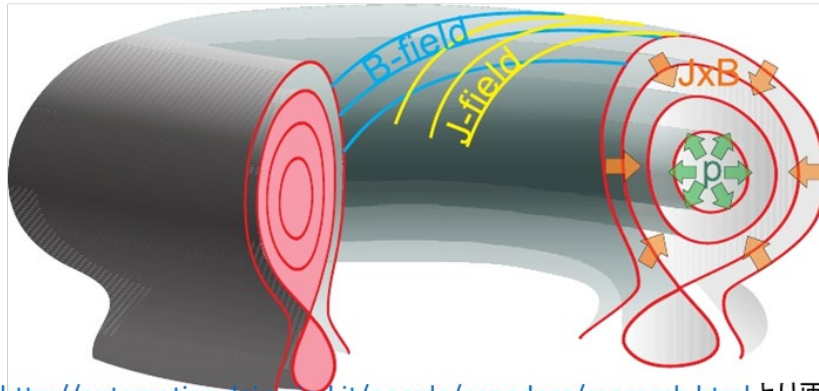
これまでは核融合研・天文台の連携研究は行ってこなかった。トモグラフィ計測手法をベースに連携研究を行っていきたい。

アウトライン

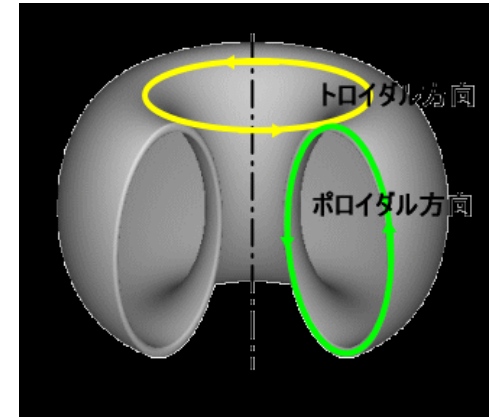
1. 磁場閉じ込め核融合プラズマと2次元放射強度分布再構成
2. 非常に計測の条件が悪く通常の変換の方法が適用できない。磁場閉じ込めプラズマの特徴を用いて悪条件を克服する。**放射強度分布がかなり滑らかで、磁気面上で放射強度一定であることが多い。**これまでは悪条件を克服するためにTruncated SVDを使った解法などがよくつかわれた。
 - ✓ 滑らかな分布
 - Phillips-Tikonov 正則化 (2階微分の総和の最小化)
 - 磁気面上の放射強度一定を仮定できる Fourier-Bessel 分解さらにそのスパース解
 - ✓ 核融合プラズマの特徴を生かす固有関数の選択
3. まとめ

磁場閉じ込め核融合プラズマ

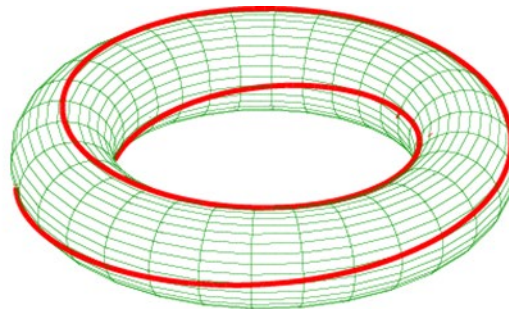
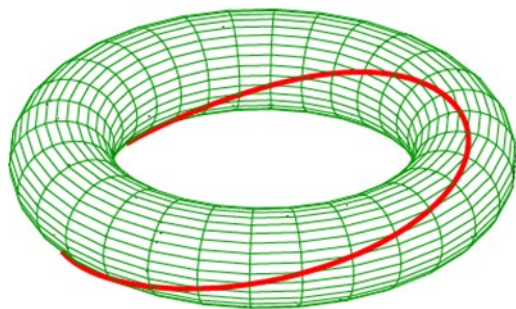
$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{b}$$



<http://automatica.dem.unipd.it/people/cenedese/research.html>より画像引用



- 磁場閉じ込め核融合プラズマでは、磁場の力でプラズマを閉じ込めている。プラズマの圧力は磁気面上で $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の力で支えられている。磁気面上で放射強度一定の仮定を課することができる。

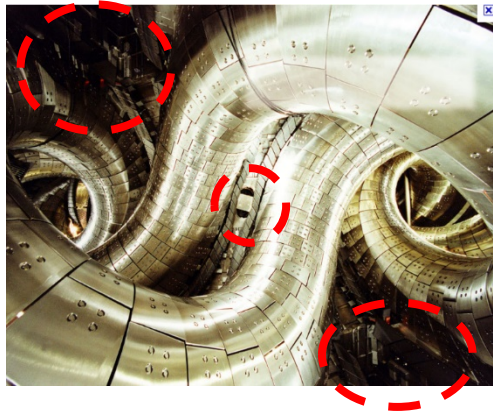


- トロイダル・ポロイダルの対称性は必ずしも仮定できない。
- 磁力線を追跡すると同じ場所に戻ってくる面を「有理面」と呼ぶ。
- プラズマの中の不安定性はこの磁力線に沿って同じ位相であることが期待できる。

プラズマのトモグラフィー問題と回帰問題



計測用窓は限定的(LHD)



- 高温プラズマ実験では物理量の直接測定は困難であり、局所的な物理量は、何らかの重ね合わせをした形で計測される。
- 各検出器の出力を g_m ($m = 1, 2, \dots, M; M = 120$) とし、放射強度分布を $f(\mathbf{r})$ と書けば、計測値は検出器の視線上での積分であるから

$$g_m = \int_l c(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) dl$$

$$g_m = \sum_{k=1}^K h_{mk} f_k$$

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f}$$

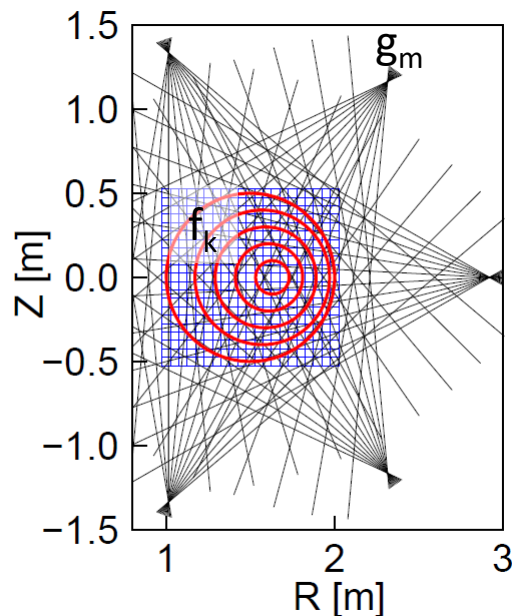
計測値 \mathbf{g} から \mathbf{f} 推定する線形回帰問題に帰結する

minimization of $\Sigma(|g - Hf|^2) + O(f)$,

$O(f) = \Sigma |f|^2$: Tikhonov-Phillips normalization

$O(f) = \Sigma |\nabla f|^2$: SVD based method by Iwama

$O(f) = -\Sigma (f \log(f))$: Maximum entropy method

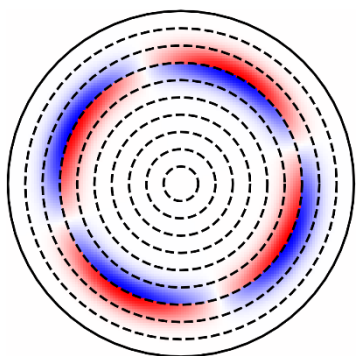


計測器の配置の例 24視線x5セット
核融合プラズマの計測としては比較的良好な条件

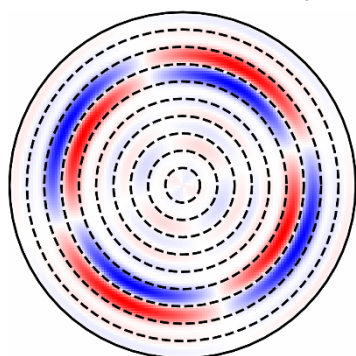
プラズマの放射パターンを直交基底で展開して逆変換

- プラズマの放射強度を直交基底、例えば円形断面ならフーリエベッセル基底を用いて展開する。
- 磁気面の情報が使えるので少ないパターンで構成できる可能性がある。
- 高いモード数の成分を切り捨てることでノイズに強い逆変換。

Island-like localized pattern

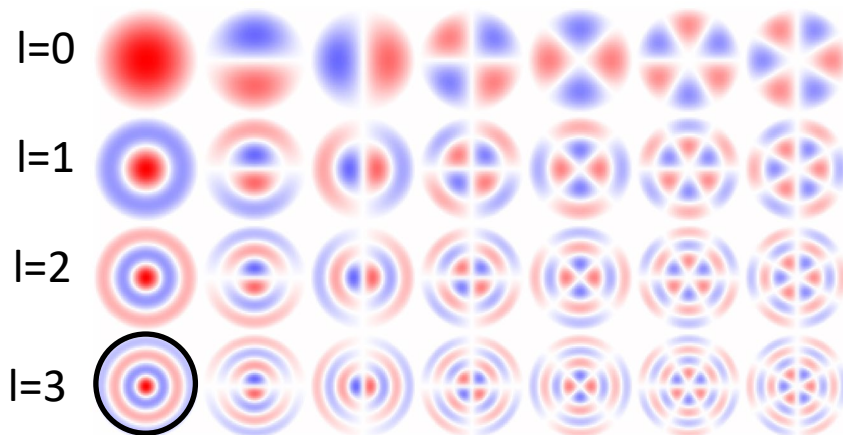


Reconstruction using 165 Fourier-Bessel type orthogonal function ($l=0\sim 10, m=0\sim 7$)



$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{mk} \exp(im\theta) J_m(\lambda_m^l \rho) a$$

a_{mk} is determined by the least square
 $m=0, m=1(\cos, \sin), m=2(\cos, \sin), m=3(\cos, \sin)$



Emission outside the LCFS can be set to be zero. **Good nature for the tomography.**

Reconstruction in circular tokamak such as JIPP-TIIU was quite good.

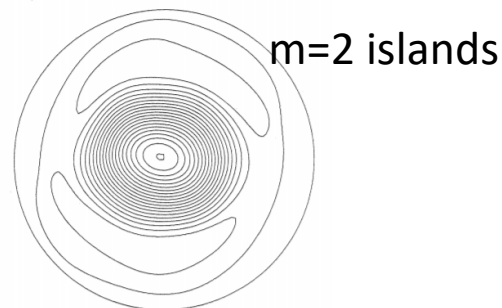


Fig. 6. 2-dimensional display of soft X-ray emis-

直行パターンを使った放射強度パターンの展開



$$\mathbf{g} = \sum_i \beta_i \mathbf{b}_i,$$

$$\Psi_l^m(\rho, \theta) = \exp(im\theta) J_m(\lambda_l^l \rho).$$

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = H\mathbf{b}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \left\{ \sum_i (f_i - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}_i)^2 + \lambda \sum_i |\beta_i|^\alpha \right\}$$

画像イメージを級数展開しておいて、展開係数を計測値から決定する。

従来の技法においては、高次の項の寄与を小さくするなどの手法によって安定な解を得ることができていた。

Y. Nagayama, J. Appl. Phys. 62, 2702 (1987).

スパースモデリング(L1正則化 $\alpha=1$)を使うことで、貢献度の小さい項を0にできる。

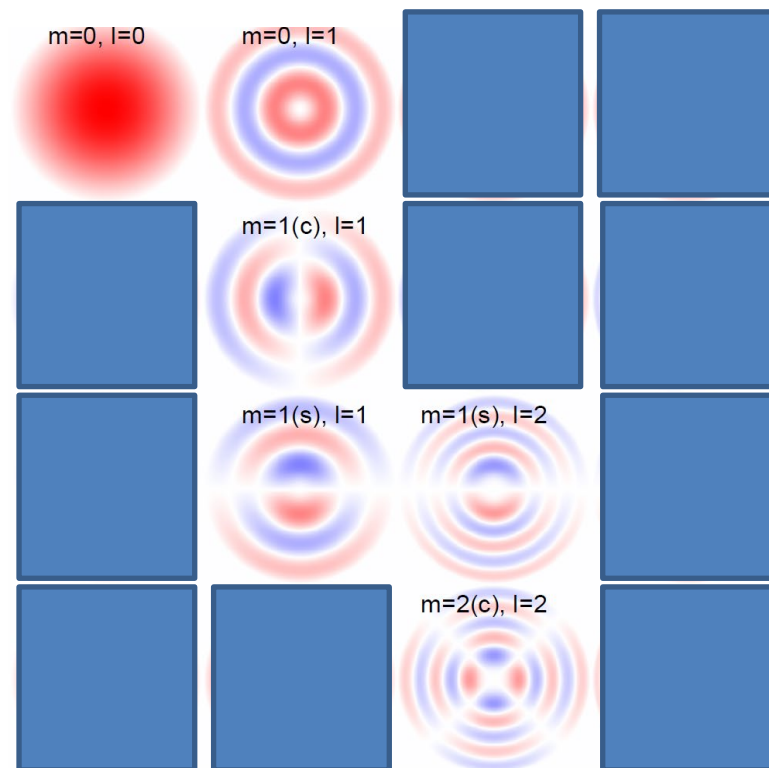


図 5: フーリエ・ベッセル展開で作った基底パターンの例

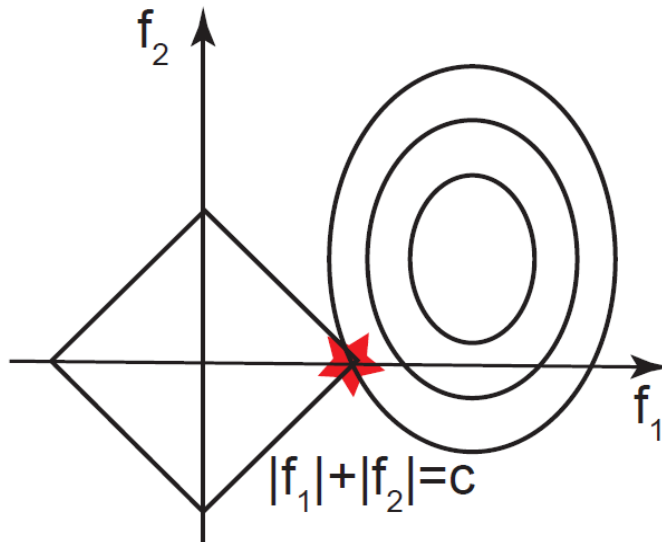
データサイエンスにおけるL1/L2正則化

$$g = Hf$$

$\|g - Hf\|_2 + \alpha \|f\|_p$ の最小化 (成分のn乗の和を $\|\cdot\|_n$ と書く)

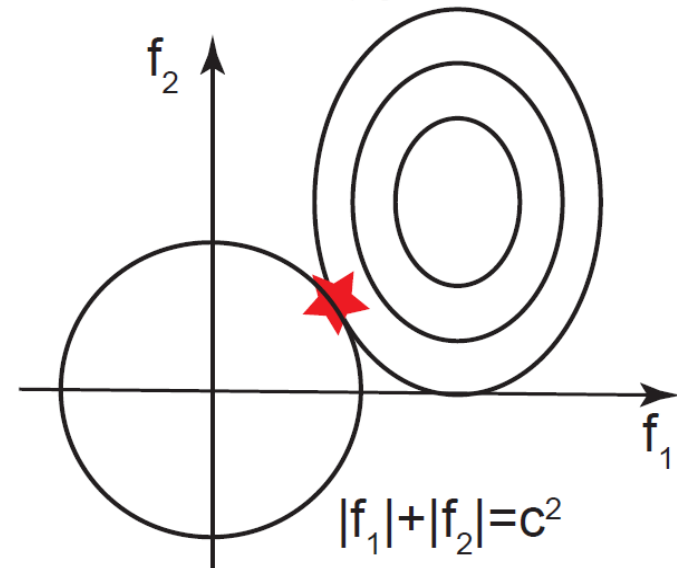
p=1

L1 正則化



p=2

L2 正則化

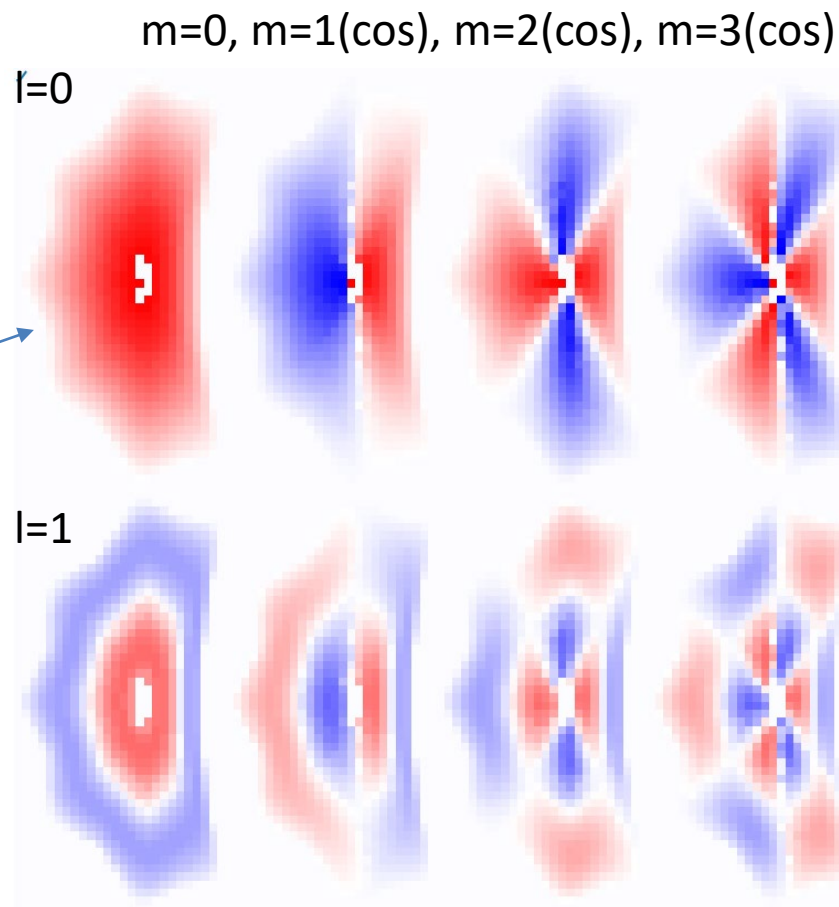
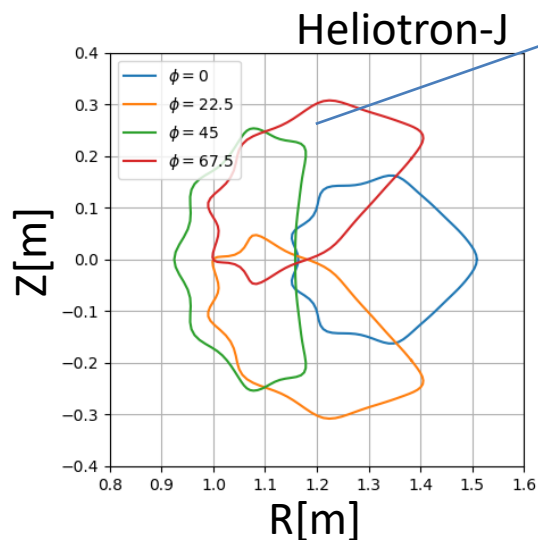


- L1正則化においては多くの項がゼロになりやすい。→ 少数の項で説明する。

非円形のプラズマの放射パターンが展開法で表現できるか？



- Fourier-Bessel 展開は磁気面が円形の場合に有効。非円形プラズマなどの場合はどうするか？
- 磁気面が形成できる場合には磁気座標系上でフーリエベッセル展開を行うことができる。完全な直交系は形成できないが十分有効。



Saito's Laplacian eigen-function



- Green function of the Laplacian is replaced by

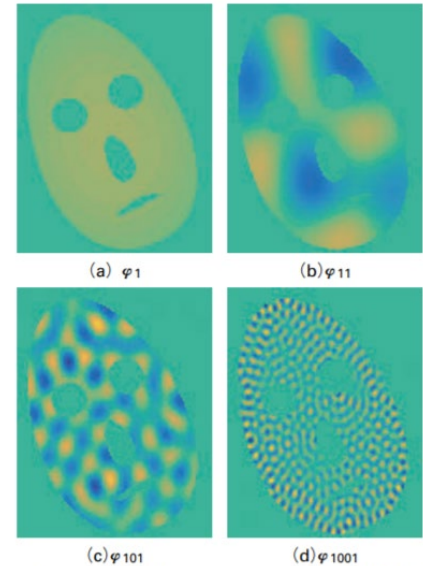
$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{if } d = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \log|\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{if } d = 2, \\ \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-d}}{(d-2)\omega_d} & \text{if } d > 2, \end{cases}$$

- This kernel has eigen function expansion as

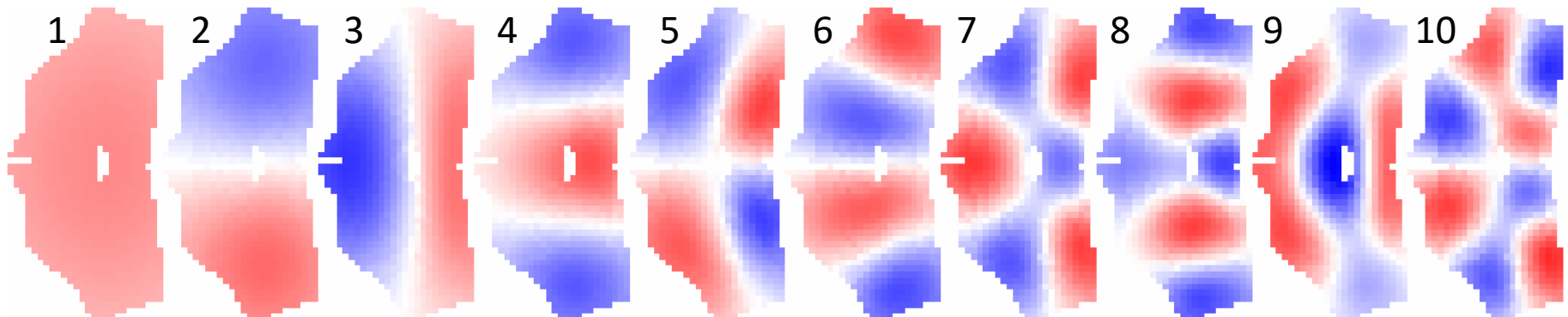
$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \varphi_j(\mathbf{x}) \overline{\varphi_j(\mathbf{y})}.$$

N. Saito, Appl. Comput. Harm. Anal. 25, 68 (2008).

- Discrete type eigen-function can be calculated in **any shape of the region** numerically easily.
- There are many application, such as patten recognition.

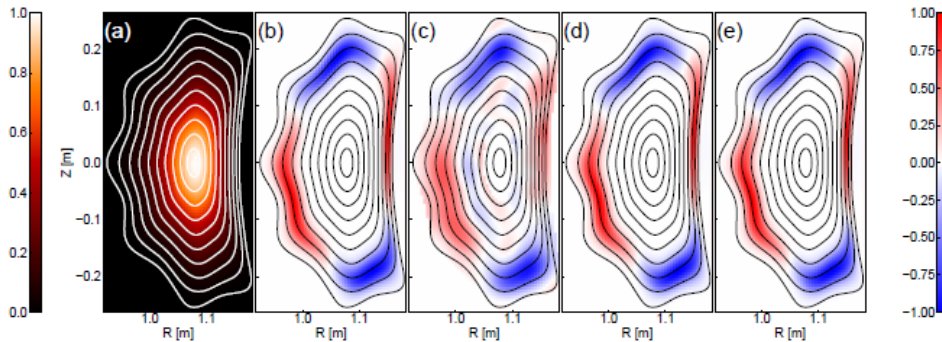


N. Saito, et. al., Journal of Plasma and Fusion Research Vol.92, 904(2016) Fig. 2

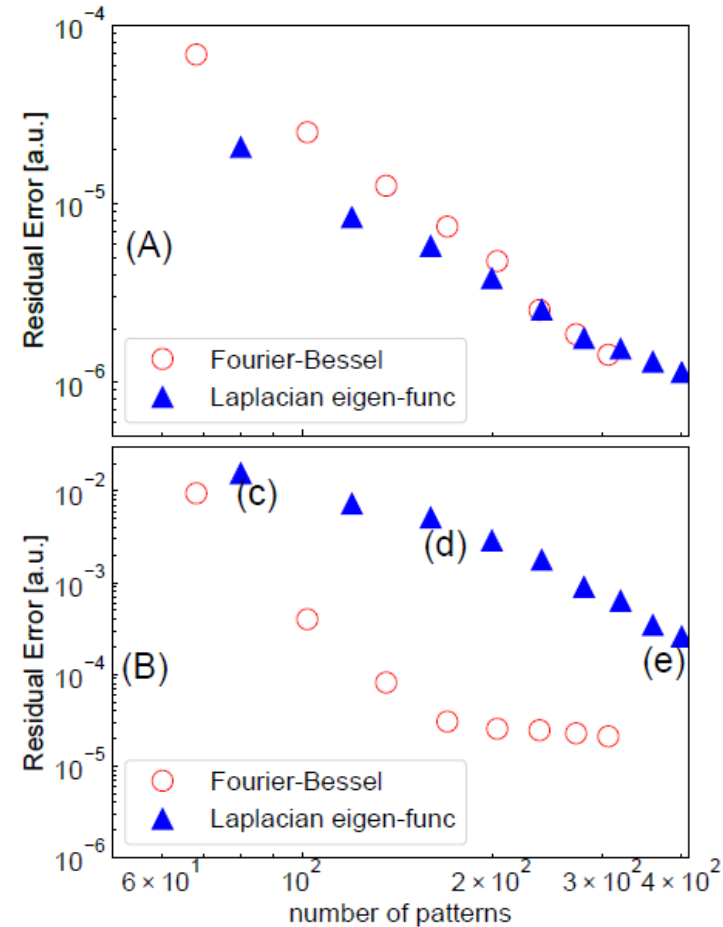


Flux surface of the HJ is used here. It is noted that these eigen functions does not satisfy Dirichlet condition.

2種類の基底パターンは放射強度分布をよく再現

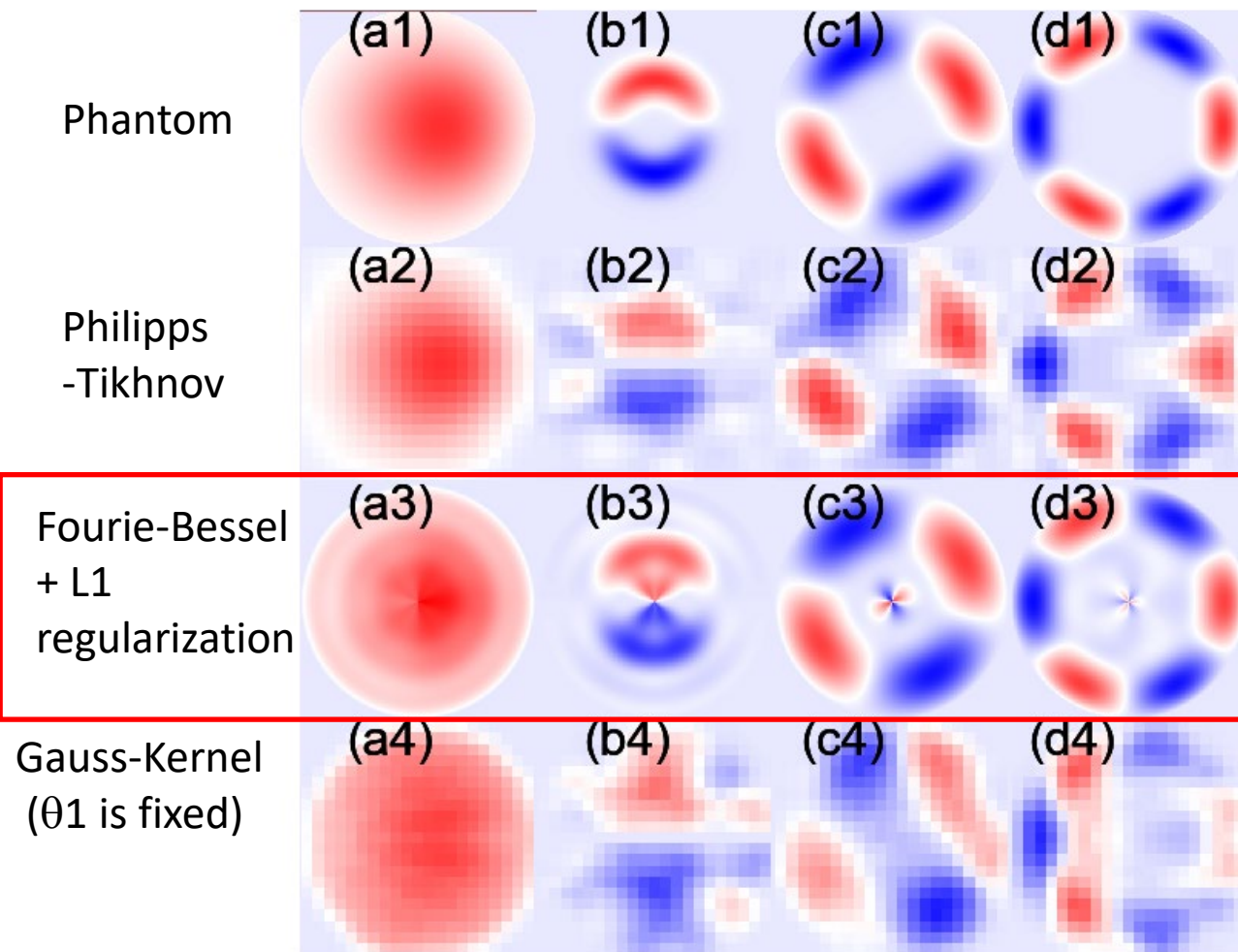


- ふたつのタイプの展開法がプラズマの放射強度を再現できるか数値テストした。
- 磁気面の情報を持っている場合には、フーリエベッセル展開法がより少数の項で放射強度を再現できる。外形だけがわかる場合でも、Saito's Laplacian Eigen function は有力な候補。



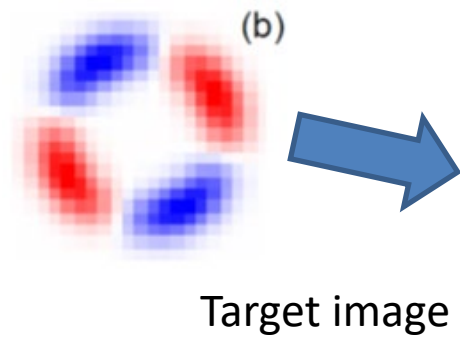
- Saito's Laplacian Eigen Function は境界で0にならないので、プラズマの放射強度分布の再現手段としてはやや弱点がある。

逆構成のテスト



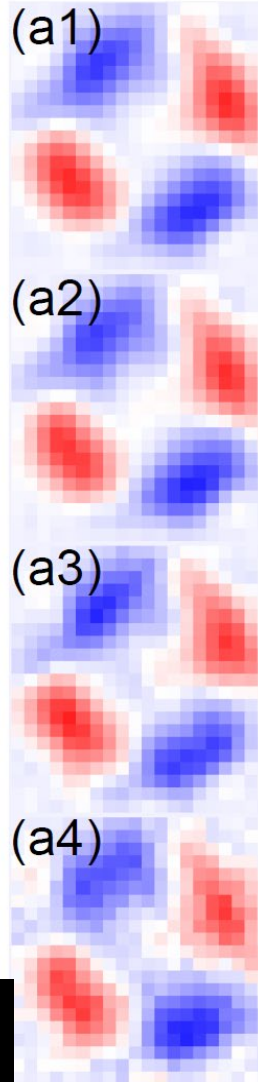
- どの方法もよく Phantom イメージを再現しているが、Philipps-Tikhonov method (Iwama's method) か the Fourie-Bessel expiation + L1 regularizationがよさそうではある。
- (4)はGauss-Kernelを使って、解の空間長を設定して解いたもの。

Series Expansion + Sparse Modelling

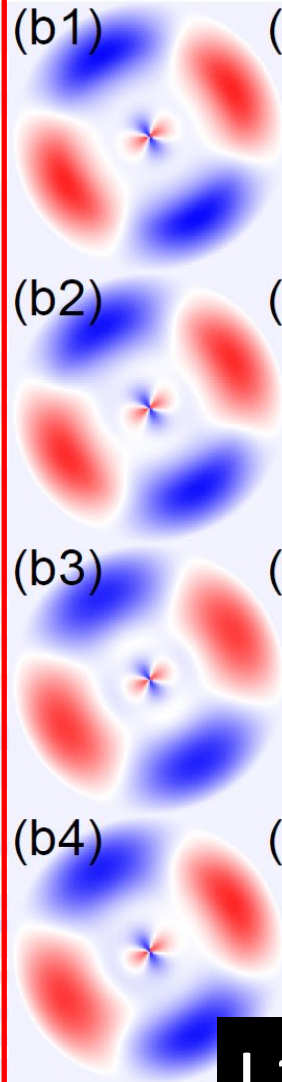


- L1正則化はノイズに強い。
- 悪条件下の逆変換の手法として有力。

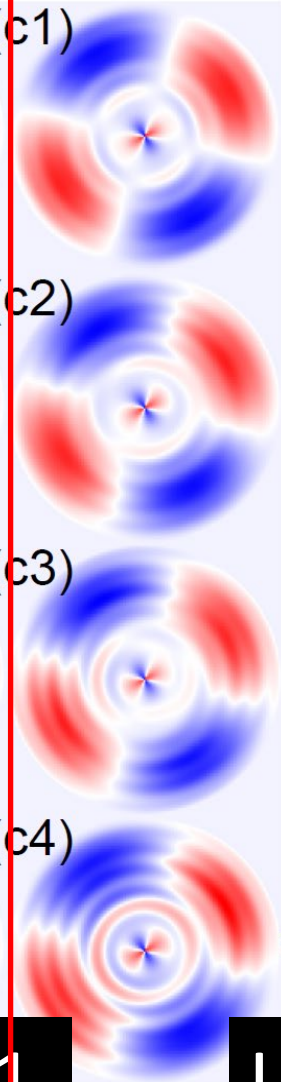
Tikhonov type
Laplacian operator



Fourier-Bessel +
L1 regularization



Fourier-Bessel +
L2 regularization



No noise

7.5% noise

15% noise

22.5% noise

Iwama's type
Regularization method

L1

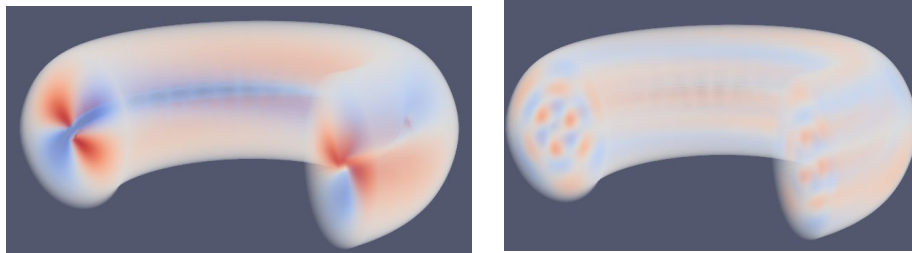
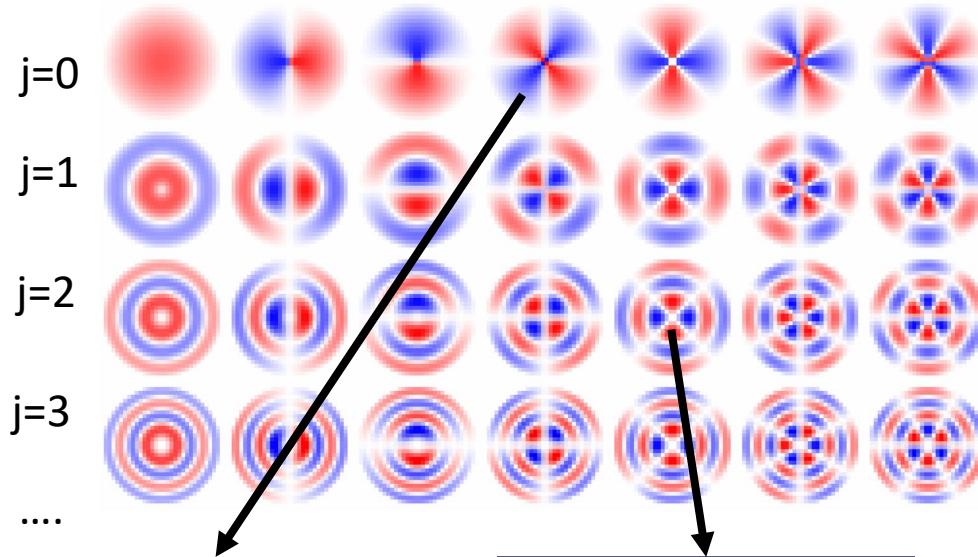
L2

For the tangential measurement 3D pattern is made

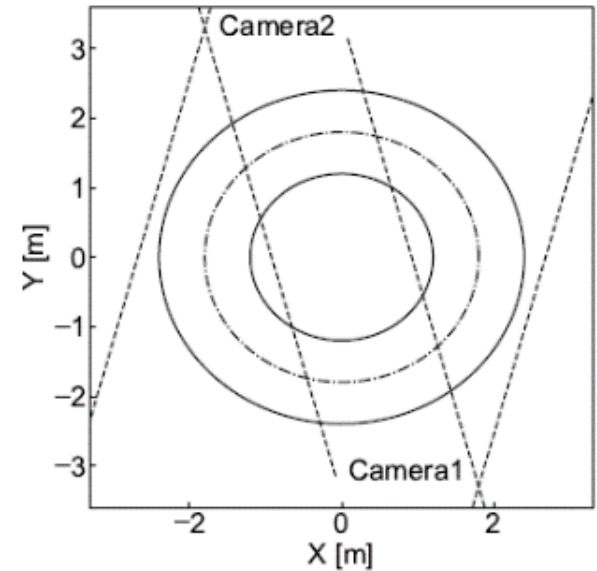


$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{mk} \exp(im\theta) J_m(\lambda_m^l \rho) a$$

$m=0, m=1(\cos, \sin), m=2(\cos, \sin), m=3(\cos, \sin)$
 a_{mk} is determined by the least square

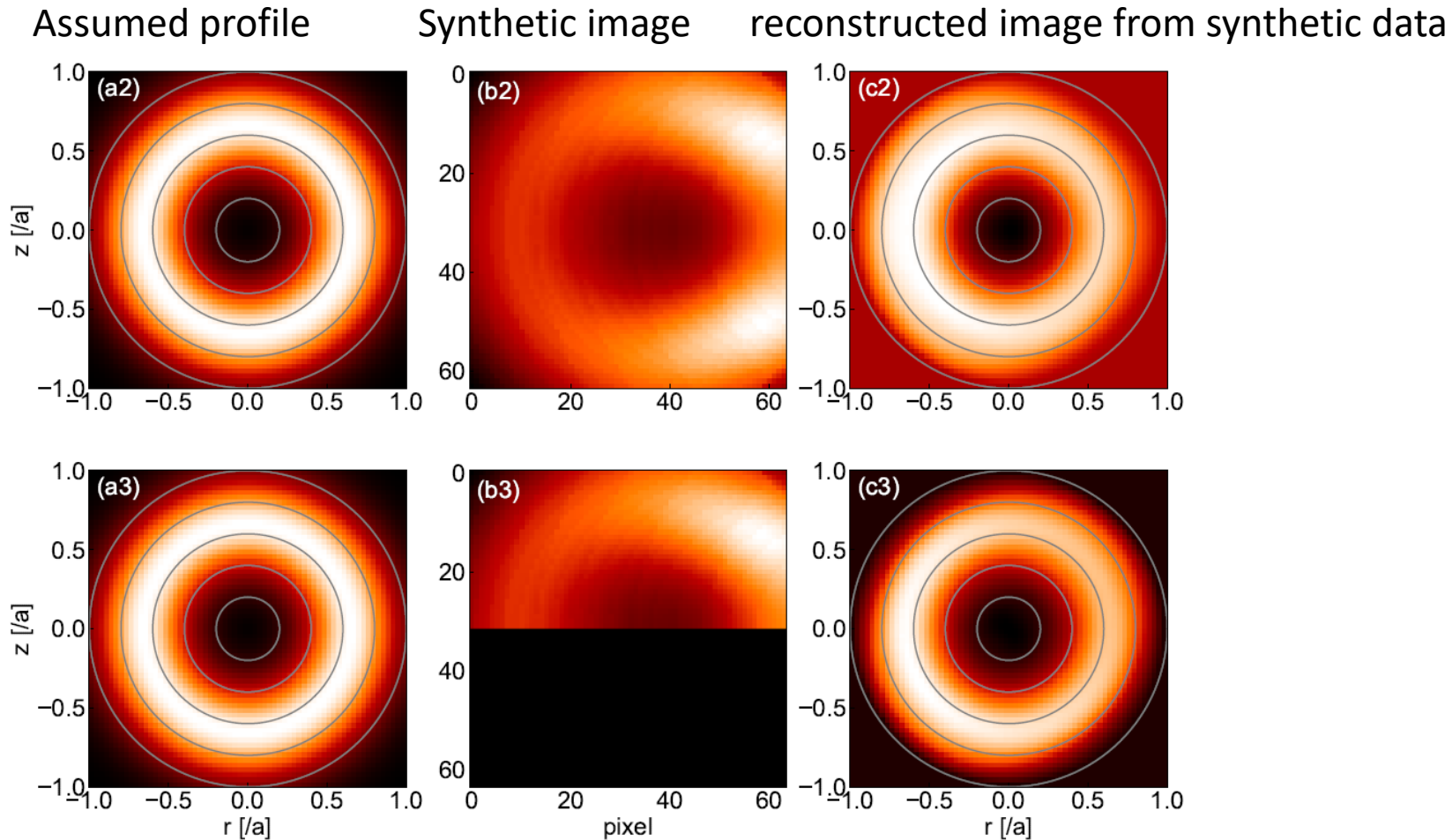


n=1
3d patterns



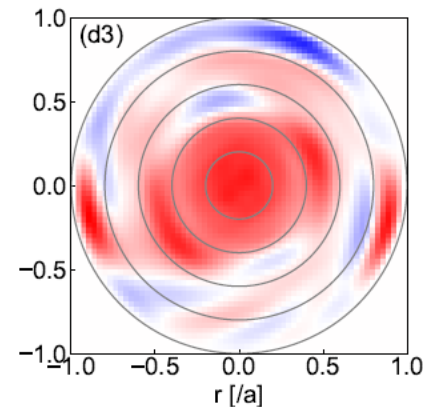
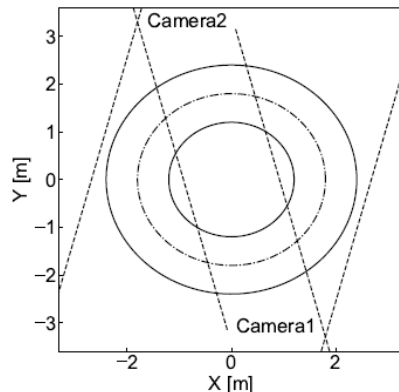
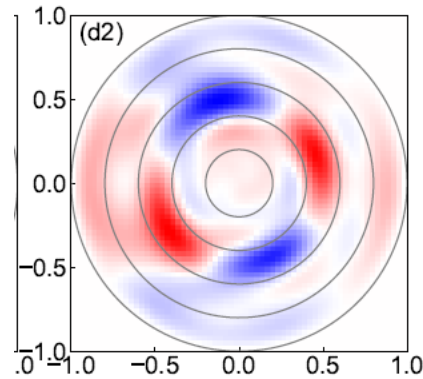
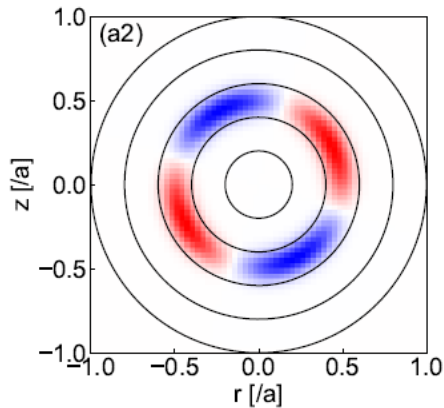
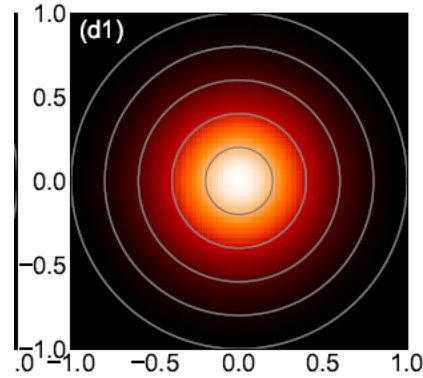
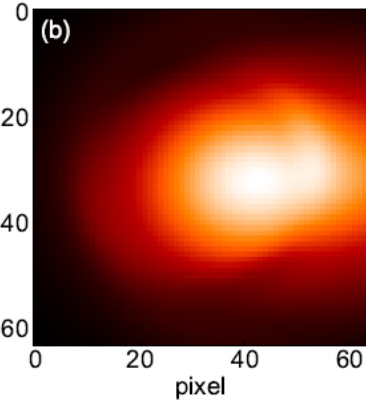
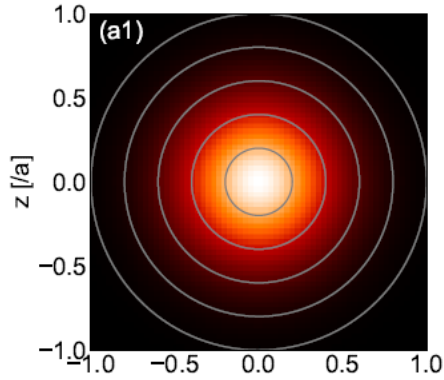
- Reconstruction (close to) orthogonal patterns (Fourier-Bessel type Eigen function + single helicity) is examined.

Reconstruction from tangential image ($n=0$)



- 司会が制限されていても(1/2 image が図中に示されている), 逆変換は満足 of いくものとなる。
- 大域的な展開をもちいることのメリット。

From the numerical test, island structure can be detected.

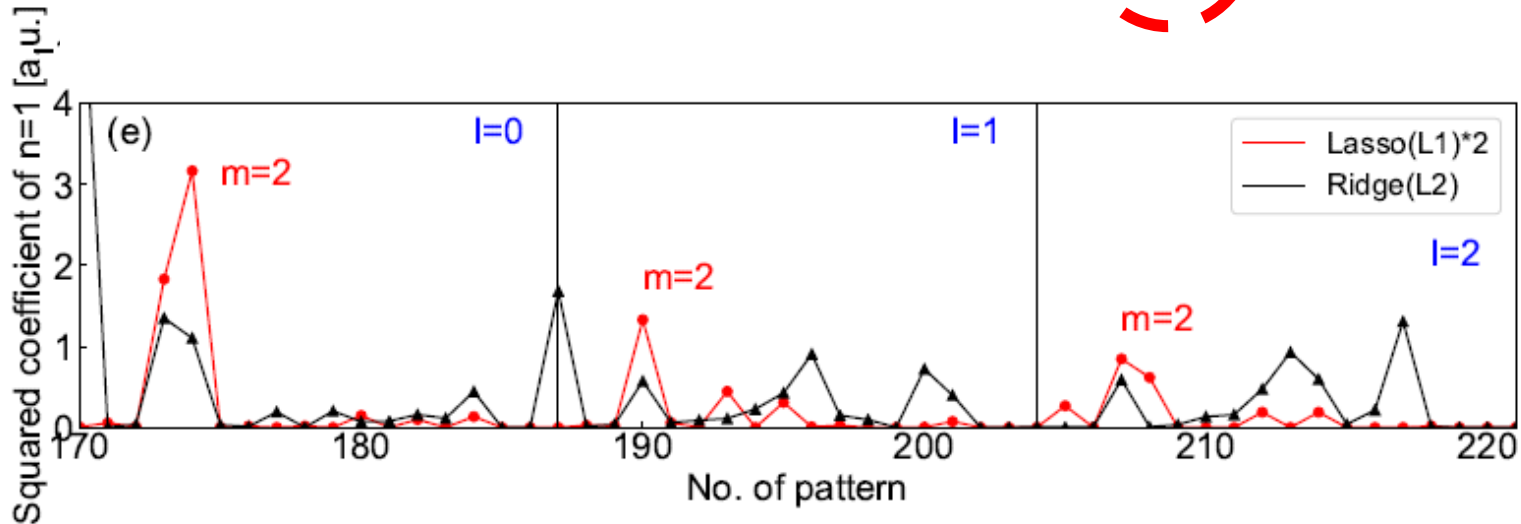


- L1正則化を使うことで、2台の接線カメラのデータから磁気島的な構造を再構成が可能になる。

数値テストはプラズマ全域を観測している。

L1 Regularization is the key for the reconstruction

最小化 $\sum (y - Ax)^2 + \lambda \sum |x_i|$



- The series expansion method applied for the tangentially viewing camera system is also promising from the numerical tests of the reconstruction. If two tangentially viewing system camera system located two toroidal locations, can be used, we can effectively separate $n = 0$ component and $n = 1$ component using L1 type regularization for the reconstruction.

- 核融合プラズマ計測におけるトモグラフィ逆変換は条件が悪く、安定な解を得ることが難しい。
- 回帰問題として解いて、
 - 「解の2回微分の最小化により」解のなめらかさを導入
 - 解の固有関数展開により、核融合プラズマに適した滑らかな解の導入
 - **解の固有関数展開+L1正則化により、滑らかさと悪条件に対処する。**
非常に条件の悪い問題に対しても安定な解を構成できる。
高エネルギー粒子を測定するFIDA装置の逆変換への応用を議論中
 - S. Ohdachi, S Yamamoto, Y Suzuki, S Purohit, N Iwama, Tomographic Inversion Technique Using Orthogonal Basis Patterns, Plasma and Fus. Res 14 (2019), 3402087
 - 大館暁、画像計測における逆変換問題とデータ科学、プラズマ・核融合学会誌,95(2019) 554.
- ガウスカーネルを用いたベイズ的アプローチも有力候補で、現在比較検討中。

Solution using Lasso-based regularization



$$x = \arg \min_x \left[\frac{1}{2} \|v - Fx\|^2 + \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|x\|_{tv} \right]$$

LSQ Lasso smoothness

$$\|x\|_{tv} = \sum_i \sum_j (|x_{i+1,j} - x_{i,j}|^2 + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|^2)$$

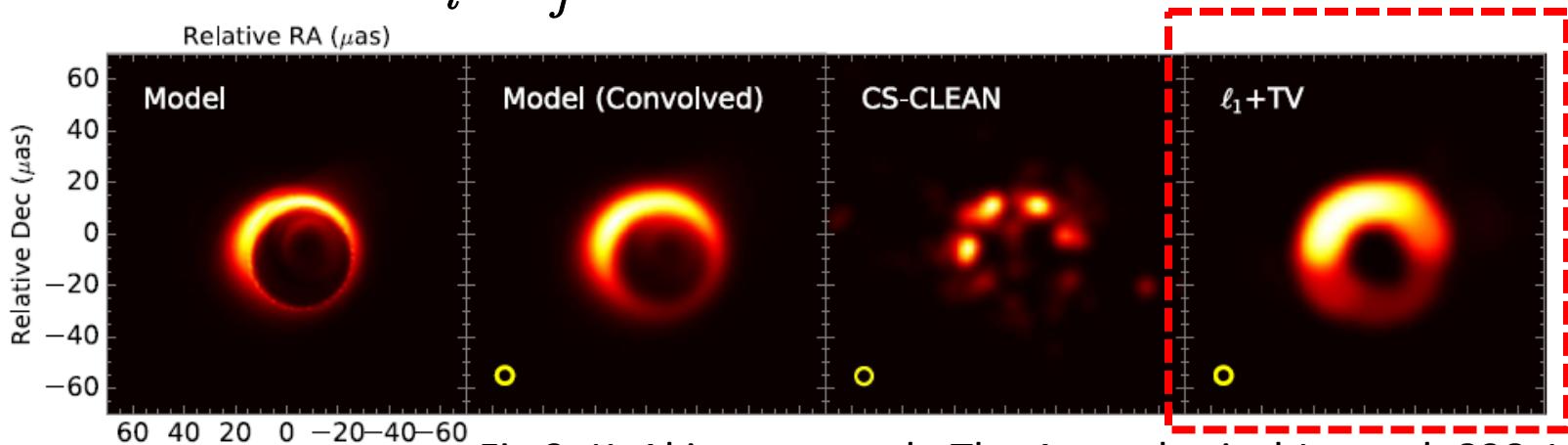
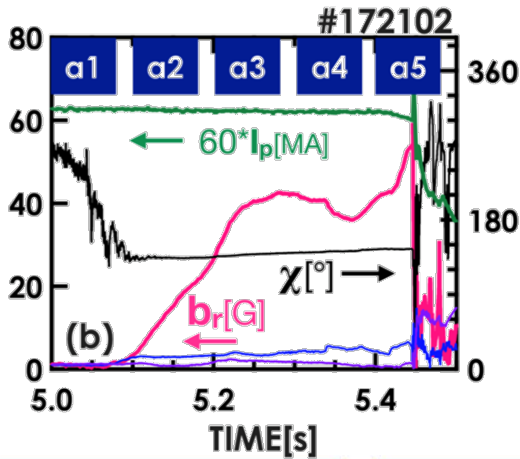


Fig 2: K. Akiyama. et. al., The Astrophysical Journal, 838:1 (2017)

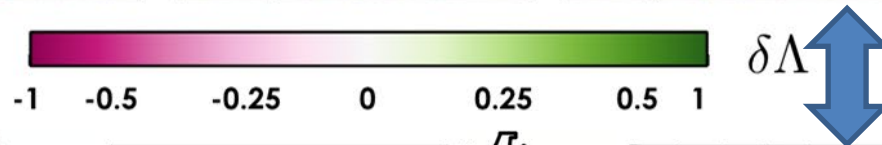
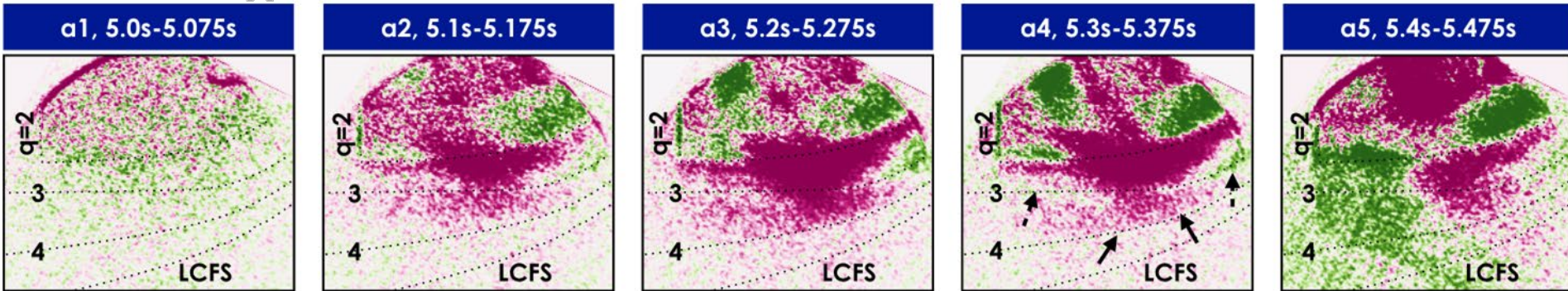
- This result is quite **encouraging** for badly ill-posed problem appears in the fusion plasma tomography.
- **L1-regularization based tomography method is proposed.**

フォーワードモデリングでの比較

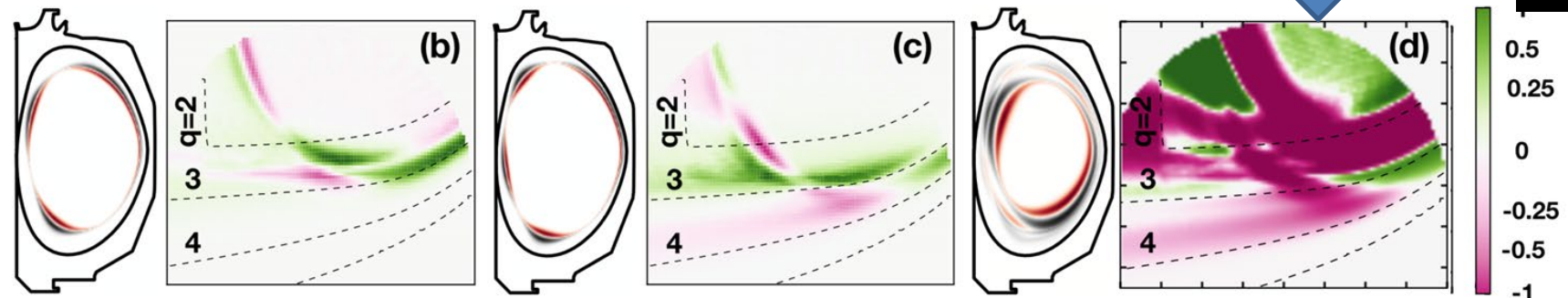


- ディスラプション時の変位は、 $q=2$ 面のtearing 的な変形がドミナントだがそれだけでは測定を説明できない。
- $q=2, q=3$ の磁気島も同時に生成されている。
- 全くソースを予想できないパターンもあるので、逆変換を行いたい。

実験



モデリング



ガウスカーネルを使ったトモグラフィー

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad \text{近くにピクセルで似たシグナル。} \quad \kappa(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2}{2l_i^2}\right)$$

- 放射強度の各ピクセルの値を確率分布、ここではn次元正規分布に従うことを仮定する。 Σ_f は共分散行列。

$$p(\mathbf{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \|\Sigma_f\|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)^T \Sigma_f^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)\right]$$

- ノイズが独立の正規分布をなしているとするれば、

$$p(\mathbf{d} | \mathbf{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \|\Sigma_d\|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d})^T \Sigma_d^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d})\right]$$

- Bayesの定理より、 $p(\mathbf{f} | \mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d} | \mathbf{f})p(\mathbf{f})}{p(\mathbf{d})}$ となるので、

$$p(\mathbf{f} | \mathbf{d}) = \frac{1}{p(\mathbf{d})} \frac{1}{(2\pi)^{(M+N)/2} (\|\Sigma_d\| \|\Sigma_f\|)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d})^T \Sigma_d^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d}) + (\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)^T \Sigma_f^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)\right\}\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d})^T \Sigma_d^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{d}) + (\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)^T \Sigma_f^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)\right\}\right]$$

$$\Sigma_f^{post} = (\mathbf{R}^T \Sigma_d^{-1} \mathbf{R} + \Sigma_f^{-1})^{-1} \quad \text{解の分散}$$

$$\mathbf{m}_f^{post} = \mathbf{m}_f + \Sigma_f^{post} \mathbf{R}^T \Sigma_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{R}\mathbf{m}_f) \quad \text{確率分布を最大にする解}$$

Tikhonov 正則化解を各画素ごとに与えたものと同等