

## NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

## 回転球殻内のMHDシミュレーションコードの開発

北内英章、木田重雄

(Received - Feb. 2, 1999 )

NIFS-MEMO-29

Feb. 1999

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Oroshi-cho, Toki-shi, Gifu-ken 509-5292 Japan.

**RESEARCH REPORT**  
**NIFS-MEMO Series**

# Numerical Code for an MHD Simulation in a Rotating Spherical Shell

Hideaki Kitauchi and Shigeo Kida<sup>†</sup>

Frontier Research System for Global Change, 1-2-1 Shibaura, Minato-ku, Tokyo  
105-6791

<sup>†</sup> National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki, Gifu 509-5292

## Abstract

A fast and accurate numerical code is developed which simulates the temporal evolution of thermal convection of an electrically conducting fluid together with induced magnetic field by solving a set of Boussinesq magneto-hydrodynamic (MHD) equations in a rotating spherical shell. This is one of the fundamental models with which the mechanisms of an MHD dynamo in a rotating spherical body such as the Earth is investigated. Spatial variations are described by the use of the spectral method which achieves high numerical accuracy; all the dependent variables are expanded in terms of spherical harmonics on spherical surfaces and Chebyshev polynomials in radial direction. The Chebyshev tau method is employed in order to satisfy boundary conditions. Temporal integration is carried out by the use of the Crank-Nicolson scheme for the viscous term and the second-order Adams-Bashforth scheme for the other terms.

**keywords:** MHD dynamo, thermal convection, rotating spherical shell, Boussinesq MHD, pseudo-spectral method, Chebyshev tau method, Coupled method, Crank-Nicolson scheme, Adams-Bashforth scheme.

# 回転球殻内の MHD シミュレーションコードの開発

北内英章・木田重雄†

〒 105-6791 東京都港区芝浦 1-2-1 地球フロンティア研究システム

† 〒 509-5292 岐阜県土岐市下石町 322-6 文部省核融合科学研究所

## 概要

回転する球殻内における電気伝導性流体の熱対流運動とそれによって誘導される磁場の時間発展を Boussinesq MHD 方程式を用いて解く高精度で高速の数値シミュレーションコードを開発する。これは、地球などの回転する球状天体の磁気ダイナモ機構を調べるための基本的なモデルのひとつである。空間変動は、高精度のスペクトル法を用いて記述する。すなわち、経緯度方向は球面調和関数で、動径方向は Chebyshev 多項式で展開する。境界条件は Tau 法を用いて満たす。時間発展は、拡散項には Crank-Nicolson 法 (陰解法)、それ以外の項には 2 次の Adams-Bashforth 法 (陽解法) を採用する。

**keywords:** 回転球殻熱対流ダイナモ, Boussinesq MHD, 擬スペクトル法, Chebyshev Tau 法, Coupled Method, Crank-Nicolson 法, Adams-Bashforth 法.

## 1 基礎方程式系

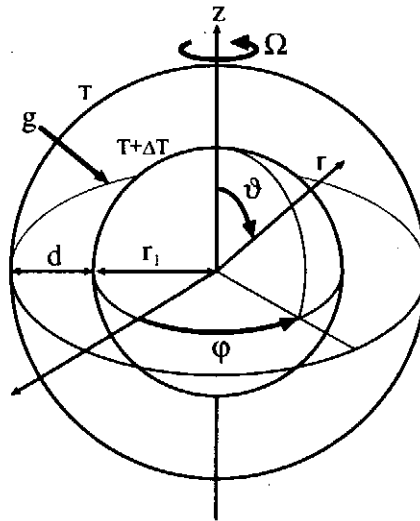


図 1: シミュレーションモデル.

同一角速度  $\Omega$  で回転する半径  $r_1, r_2 (= r_1 + d)$  の同心球に挟まれた電気伝導性流体 (電気伝導率  $\sigma$ ) の熱対流運動を考える (図 1 参照). これは、地磁気の生成維持機構を考察する場合において、熔融鉄でできている地球外核の最も簡単なモデルである. 密度  $\rho$  の流体要素には単位体積あたり重力  $\mathbf{g} = -\rho\gamma\mathbf{r}$  ( $\gamma$  は比例定数) が作用しているとする. ただし  $\mathbf{r}$  は球の中心を始点とする位置ベクトルである. 内球と外球はそれぞれ一様な一定温度

に保たれ, 内球の方が外球よりも  $\Delta T$  だけ高温であるとする (温度に対する境界条件は, より一般的にはフーリエの法則が適用可能である). この温度差によって熱対流運動が駆動される. また, 内球内と外球外は, それぞれ流体と同じ透磁率  $\mu$  をもつ絶縁体と真空であるとする.

Boussinesq 近似と MHD (magneto-hydrodynamics) 近似のもとで, 球とともに回転する系から見た流体の速度  $\mathbf{u}$ , 磁束密度  $\mathbf{b}$  および温度  $T$  の発展方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + P_r R_a T \mathbf{r} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + P_r T_a^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + P_r \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + R_o \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} T) + \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5)$$

である. ただし,  $P = p/\rho + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\gamma|\mathbf{r}|^2 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$  は修正圧力 ( $p$  は真の圧力),  $\hat{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$  は回転軸方向の単位ベクトルである. 式 (1) は流体の運動方程式, 式 (2) は磁場の誘導方程式, 式 (3) は温度の移流拡散方程式である. すべての変数は, 球殻の厚み  $d$  と熱拡散時間  $d^2/\kappa$  ( $\kappa$  は熱伝導率) と両境界の温度差  $\Delta T$  で無次元化してある. そのため無次元のパラメーターが 4 つ

$$P_r = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R_a = \frac{\alpha \gamma \Delta T d^4}{\kappa \nu}, \quad T_a = \left( \frac{2|\boldsymbol{\Omega}| d^2}{\nu} \right)^2, \quad R_o = \frac{1}{\kappa \mu \sigma} \quad (6)$$

現れる. これらをそれぞれ, Prandtl 数, Rayleigh 数, Taylor 数, Roberts 数と呼ぶ. ただし,  $\nu$  は動粘性率,  $\alpha$  は熱膨張率である. 両球面上で速度には粘着条件を課す. 磁束密度は, 内球内と外球外のポテンシャル場  $\mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{b}^{(o)}$  ( $\nabla^2 \mathbf{b}^{(i)} = \nabla^2 \mathbf{b}^{(o)} = 0$ ) に滑らかに接続する. したがって, 境界条件は,

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)}, \quad T = 1 \quad \left( r = r_1 = \frac{\eta}{1-\eta} \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(o)}, \quad T = 0 \quad \left( r = r_2 = \frac{1}{1-\eta} \right) \quad (8)$$

である. ただし,  $\eta = r_1/r_2$  は半径比である. 方程式 (1)-(5) と境界条件 (7),(8) は, 速度, 磁束密度および温度に対する基礎方程式系をなす.

## 2 ポロイダル・トロイダル表現

式 (4) と (5) より速度と磁束密度はともに非発散ベクトル場なので, どちらもポロイダル場とトロイダル場の和

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}U) + \nabla \times \mathbf{r}W, \quad (9)$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}B) + \nabla \times \mathbf{r}J \quad (10)$$

で表すことができる。ここで、 $U$  と  $B$  はそれぞれ速度と磁束密度のポロイダル定義関数、また  $W$  と  $J$  はそれぞれのトロイダル定義関数と呼ばれる。このとき、渦度  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  と電流密度  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b}$  もまた、それぞれポロイダル場とトロイダル場の和

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \times rW) + \nabla \times r\tilde{U}, \quad (11)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times (\nabla \times rJ) + \nabla \times r\tilde{B} \quad (12)$$

で表される。ただし、 $\tilde{U} = -\nabla^2 U$ 、 $\tilde{B} = -\nabla^2 B$  である。定義関数  $U$  と  $W$  を用いて、球座標  $(r, \vartheta, \varphi)$  (図1参照) での速度の各成分  $(u_r, u_\vartheta, u_\varphi)$  を書き下すと、

$$u_r = -\frac{1}{r} \nabla_\perp^2 U, \quad (13)$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \quad (15)$$

となる。ただし、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_\perp^2 \right\}, \quad \nabla_\perp^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (16)$$

である。

速度と磁束密度のポロイダル・トロイダル表現 (9) と (10) を用いると、式 (4) と (5) は自動的に満たされる。運動方程式 (1) の *curl* と *curl curl* をとった式、誘導方程式 (2) とその *curl* をとった式にそれぞれ  $r$  を掛けた式、および移流拡散方程式 (3) より、5つのスカラー関数  $U, W, B, J, T$  の支配方程式

$$-\nabla_\perp^2 \left( P_r \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) W = -r \cdot (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (17)$$

$$-\nabla_\perp^2 \left( P_r \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{U} = -r \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \}, \quad (18)$$

$$-\nabla_\perp^2 \left( R_o \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B = -r \cdot (\nabla \times \mathbf{G}), \quad (19)$$

$$-\nabla_\perp^2 \left( R_o \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) J = -r \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \}, \quad (20)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) T = -(\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (21)$$

が得られる。ここに、

$$\mathbf{F} = P_r R_a T \mathbf{r} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{b} \times \mathbf{j} + P_r T_a^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (22)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b}, \quad (23)$$

$$\mathbf{H} = -uT \quad (24)$$

である。一方、境界条件は式 (7) と (8) より、

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad W = 0, \quad B = B^{(i)}, \quad J = 0, \quad T = 1 \quad (r = r_1), \quad (25)$$

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad W = 0, \quad B = B^{(o)}, \quad J = 0, \quad T = 0 \quad (r = r_2) \quad (26)$$

である (速度に対する境界条件は Appendix A 参照). ただし,  $B^{(i)}$  と  $B^{(o)}$  はそれぞれ内球内と外球外の磁束密度

$$\mathbf{b}^{(i)} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}B^{(i)}), \quad \mathbf{b}^{(o)} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}B^{(o)}) \quad (27)$$

のポロイダル定義関数である.

### 3 数値計算法

境界条件 (25) と (26) を満たす方程式 (17)–(21) の数値解を擬スペクトル法で求める (C. Canuto *et al.* [1]). まず, スカラー関数  $W, U, B, J, T$  の経緯度方向  $(\vartheta, \varphi)$  を切断波数  $L$  の球面調和関数

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (0 \leq |m| \leq l \leq L) \quad (28)$$

で,

$$W(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l W_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (29)$$

$$U(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l U_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (30)$$

$$B(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l B_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (31)$$

$$J(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l J_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (32)$$

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l T_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (33)$$

のように展開する. ここに,  $P_l^m$  は Legendre 陪関数である. 速度と磁束密度のポロイダル・トロイダル表現 (9) と (10) に現われる  $(\vartheta, \varphi)$  によらない不定関数  $W_{00}, U_{00}, B_{00}, J_{00}$  は, 便宜上ゼロとおいた.

それぞれの展開係数  $\{W_{lm}, U_{lm}, B_{lm}, J_{lm} (1 \leq l \leq L)\}, \{T_{lm} (0 \leq l \leq L)\} (0 \leq |m| \leq l)$  の支配方程式を求めるために, 式 (29)–(33) を方程式 (17)–(21) に代入し,  $Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$  (\* は複素共役) を両辺に掛けて  $(\vartheta, \varphi)$  に関して積分する. このとき, 球面調和関数 (28) の正規直交性

$$\int_S Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) dS = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad \int_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (34)$$

を用いて,

$$r^2 \left( D_l - \frac{1}{P_r} \frac{\partial}{\partial t} \right) W_{lm} = \text{WNL}_{lm}, \quad (35)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{1}{P_r} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{U}_{lm} = \text{UNL}_{lm}, \quad (36)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{1}{R_o} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_{lm} = \text{BNL}_{lm}, \quad (37)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{1}{R_o} \frac{\partial}{\partial t} \right) J_{lm} = \text{JNL}_{lm}, \quad (38)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{lm} = \text{TNL}_{lm} \quad (39)$$

が得られる。ただし、

$$D_l = \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} - l(l+1) \right\}, \quad (40)$$

$$\text{WNL}_{lm} = \frac{-r^2}{P_r l(l+1)} \int_S \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) Y_{lm}^* dS, \quad (41)$$

$$\text{UNL}_{lm} = \frac{-r^2}{P_r l(l+1)} \int_S \mathbf{r} \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \} Y_{lm}^* dS, \quad (42)$$

$$\text{BNL}_{lm} = \frac{-r^2}{R_o l(l+1)} \int_S \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) Y_{lm}^* dS, \quad (43)$$

$$\text{JNL}_{lm} = \frac{-r^2}{R_o l(l+1)} \int_S \mathbf{r} \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) \} Y_{lm}^* dS, \quad (44)$$

$$\text{TNL}_{lm} = -r^2 \int_S (\nabla \cdot \mathbf{H}) Y_{lm}^* dS \quad (45)$$

である。

次に、方程式 (35)–(39) の時間微分項を、粘性項には Crank-Nicolson 法をそれ以外の項には 2 次の Adams-Bashforth 法を適用して、

$$r^2 \left( D_l - \frac{2}{P_r \Delta t} \right) W_{lm}^{t+\Delta t} = -r^2 \left( D_l + \frac{2}{P_r \Delta t} \right) W_{lm}^t + 3\text{WNL}_{lm}^t - \text{WNL}_{lm}^{t-\Delta t}, \quad (46)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{2}{P_r \Delta t} \right) \tilde{U}_{lm}^{t+\Delta t} = -r^2 \left( D_l + \frac{2}{P_r \Delta t} \right) \tilde{U}_{lm}^t + 3\text{UNL}_{lm}^t - \text{UNL}_{lm}^{t-\Delta t}, \quad (47)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{2}{R_o \Delta t} \right) B_{lm}^{t+\Delta t} = -r^2 \left( D_l + \frac{2}{R_o \Delta t} \right) B_{lm}^t + 3\text{BNL}_{lm}^t - \text{BNL}_{lm}^{t-\Delta t}, \quad (48)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{2}{R_o \Delta t} \right) J_{lm}^{t+\Delta t} = -r^2 \left( D_l + \frac{2}{R_o \Delta t} \right) J_{lm}^t + 3\text{JNL}_{lm}^t - \text{JNL}_{lm}^{t-\Delta t}, \quad (49)$$

$$r^2 \left( D_l - \frac{2}{\Delta t} \right) T_{lm}^{t+\Delta t} = -r^2 \left( D_l + \frac{2}{\Delta t} \right) T_{lm}^t + 3\text{TNL}_{lm}^t - \text{TNL}_{lm}^{t-\Delta t} \quad (50)$$

のように差分化する。ただし、 $\Delta t$  は時間きざみである。一方、係数  $\{W_{lm}^t, U_{lm}^t, B_{lm}^t, J_{lm}^t (1 \leq l \leq L)\}, \{T_{lm}^t (0 \leq l \leq L)\} (0 \leq |m| \leq l)$  に対する境界条件についても、式 (35)–(39) の導出と同様にして式 (25) と (26) より求めることができ、

$$W_{lm}^t = U_{lm}^t = \frac{dU_{lm}^t}{dr} = \left( \frac{d}{dr} - \frac{l}{r_1} \right) B_{lm}^t = J_{lm}^t = T_{lm}^t = 0, \quad T_{00}^t = \sqrt{4\pi} \quad (r = r_1), \quad (51)$$

$$W_{lm}^t = U_{lm}^t = \frac{dU_{lm}^t}{dr} = \left( \frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r_2} \right) B_{lm}^t = J_{lm}^t = T_{lm}^t = 0, \quad T_{00}^t = 0 \quad (r = r_2) \quad (52)$$

となる (磁束密度に対する境界条件は Appendix A 参照)。

方程式 (46)–(50) は、 $r$  に関する常微分方程式である。これら常微分方程式を境界条件 (51) と (52) のもとで Chebyshev Tau 法を用いて解く。特に、 $r$  に関して 4 階の常微分方程式 (47) は、さらに Coupled Method を用いて解く。

#### 4 Chebyshev Tau 法

2階常微分方程式 (46)–(50) と境界条件 (51),(52) は、それぞれの変数について一般に、

$$\left\{ \tau \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) + r \frac{d}{dr} - l(l+1) - cr^2 \right\} u(r) = f(r), \quad (53)$$

$$L_1[u] = c_1 \quad (r = r_1), \quad (54)$$

$$L_2[u] = c_2 \quad (r = r_2) \quad (55)$$

のように書くことができる。ただし、 $c, c_1, c_2$  は定数で、 $L_1$  と  $L_2$  は線形演算子である。境界条件 (54),(55) を満たす方程式 (53) の数値解を Chebyshev Tau 法を用いて解く。まず、関数  $u(r)$  を Chebyshev 多項式

$$C_n(\zeta) = \cos n\theta, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta, \quad \zeta = \frac{2r - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (56)$$

で

$$u(r) = \sum_{n=0}^N u_n C_n(\zeta) \quad (57)$$

のように展開する。 $N$  は切断波数である。展開係数  $\{u_n\}$  ( $0 \leq n \leq N$ ) の支配方程式を求めるために、式 (57) を方程式 (53) に代入し、 $C_n(\zeta)$  を両辺に掛けて  $\theta$  に関して積分する。このとき、Chebyshev 多項式 (56) の直交性

$$\int_0^\pi C_n(\zeta) C_{n'}(\zeta) d\theta = \frac{\pi a_n}{2} \delta_{nn'}, \quad a_n = \begin{cases} 2 & (n = 0, N) \\ 1 & (1 \leq n \leq N-1) \end{cases} \quad (58)$$

を用いて、

$$w_n + v_n - l(l+1)u_n - cy_n = f_n, \quad (0 \leq n \leq N) \quad (59)$$

が得られる。ただし、

$$f_n = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi f(r) C_n(\zeta) d\theta, \quad (60)$$

$$v_n = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi v(r) C_n(\zeta) d\theta = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi r \frac{du}{dr}(r) C_n(\zeta) d\theta, \quad (61)$$

$$w_n = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi w(r) C_n(\zeta) d\theta = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi r \frac{dv}{dr}(r) C_n(\zeta) d\theta, \quad (62)$$

$$x_n = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi x(r) C_n(\zeta) d\theta = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi r u(r) C_n(\zeta) d\theta, \quad (63)$$

$$y_n = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi y(r) C_n(\zeta) d\theta = \frac{2}{\pi a_n} \int_0^\pi r x(r) C_n(\zeta) d\theta \quad (64)$$

である。一方、式 (57) を境界条件 (54),(55) に代入し、係数  $\{u_n\}$  ( $0 \leq n \leq N$ ) に対する束縛条件

$$\sum_{n=0}^N u_n L_1[C_n] = c_1 \quad (\zeta = -1), \quad (65)$$

$$\sum_{n=0}^N u_n L_2[C_n] = c_2 \quad (\zeta = +1) \quad (66)$$

が得られる。



方程式 (59) を  $\{u_n\}$  と  $\{f_n\}$  ( $0 \leq n \leq N$ ) だけで表し, その低波数側から  $N - 1$  個の方程式と境界条件 (65),(66) は,  $N + 1$  個の未定係数  $\{u_n\}$  ( $0 \leq n \leq N$ ) に対する  $N + 1$  元連立 1 次方程式を構成する. したがって, この連立方程式を解けば, 境界条件 (54),(55) を満たす方程式 (53) の数値解  $u(r)$  が求まる. このように, 関数  $u(r)$  を境界条件を満たさない試行関数  $C(\zeta)$  で展開し, 境界条件を展開係数  $\{u_n\}$  に対する束縛条件としてスペクトル空間で課し, そして係数  $\{u_n\}$  の支配方程式を解く方法を Tau 法という (今の場合, 試行関数として Chebyshev 多項式を用いたので Chebyshev Tau 法と呼ばれる). この方法の場合, 境界条件の数だけ係数  $\{u_n\}$  に対する支配方程式の高波数成分は無視される.

以下では, 方程式 (59) を  $\{u_n\}$  と  $\{f_n\}$  ( $0 \leq n \leq N$ ) だけで具体的に表す. 漸化式

$$(1 + \delta_{n0})v_n - v_{n+2} = nu_n + 2\zeta_0(n+1)u_{n+1} + (n+2)u_{n+2} \quad (n \geq 0), \quad (67)$$

$$(1 + \delta_{n0})w_n - w_{n+2} = nv_n + 2\zeta_0(n+1)v_{n+1} + (n+2)v_{n+2} \quad (n \geq 0) \quad (68)$$

を用いて, 演算  $[(n+1)\{(67) + (68)\}_{n-2} - (n-1)\{(67) + (68)\}_n]$  を実行すると,

$$\begin{aligned} & (1 + \delta_{n2})(n+1)(w_{n-2} + v_{n-2}) - 2n(w_n + v_n) + (n-1)(w_{n+2} + v_{n+2}) \\ &= (n-2)(n+1)(v_{n-2} - v_n + u_{n-2} - u_n) \\ & \quad + 2\zeta_0(n-1)(n+1)(v_{n-1} - v_{n+1} + u_{n-1} - u_{n+1}) \\ & \quad + (n-1)(n+2)(v_n - v_{n+2} + u_n - u_{n+2}) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (69)$$

が得られる. ただし,  $\zeta_0 = (r_2 + r_1)/(r_2 - r_1)$  である. これに方程式 (59) と漸化式 (67) および,

$$x_n = \frac{1}{2}\{(1 + \delta_{n1})u_{n-1} + 2\zeta_0u_n + u_{n+1}\} \quad (n \geq 0), \quad (70)$$

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2}\{(1 + \delta_{n1})x_{n-1} + 2\zeta_0x_n + x_{n+1}\} \quad (n \geq 0) \\ &= \frac{1}{4}\{(1 + \delta_{n2})u_{n-2} + 4(1 + \delta_{n1})\zeta_0u_{n-1} + (4\zeta_0^2 + 2 + \delta_{n1})u_n + 4\zeta_0u_{n+1} + u_{n+2}\} \end{aligned} \quad (71)$$

を代入し整理すると, 方程式 (59) は  $\{u_n\}$  と  $\{f_n\}$  だけで表され,

$$\begin{aligned} & -(1 + \delta_{n4})\frac{1}{4}(n+1)cu_{n-4} - (1 + \delta_{n3})(n+1)c\zeta_0u_{n-3} \\ & + (1 + \delta_{n2})\left[(n+1)\{(n-2)(n-1) - l(l+1) - c\zeta_0^2\} - \left(\frac{1}{2} + \delta_{n3}\right)c\right]u_{n-2} \\ & + (n-1)\{4(n-1)(n+1) + (1 - 3\delta_{n2})c\}\zeta_0u_{n-1} \\ & + \left[2n\left\{(n-1)(n+1)(2\zeta_0^2 + 1) + l(l+1) + c\zeta_0^2 + \frac{1}{4}c\right\} - \frac{3}{4}c\delta_{n2}\right]u_n \\ & + (n+1)\{4(n+1)(n-1) + c\}\zeta_0u_{n+1} \\ & + \left[(n-1)\{(n+2)(n+1) - l(l+1) - c\zeta_0^2\} + \frac{1}{2}c\right]u_{n+2} \\ & - (n-1)c\zeta_0u_{n+3} - \frac{1}{4}(n-1)cu_{n+4} \\ &= (1 + \delta_{n2})(n+1)f_{n-2} - 2nf_n + (n-1)f_{n+2} \quad (2 \leq n \leq N) \end{aligned} \quad (72)$$

となる. ただし,  $u_n \equiv f_n \equiv 0$  ( $n < 0, N < n$ ) である.

## 5 Coupled Method

方程式 (46),(48)–(50) は, 対応する境界条件 (51),(52) のもとで前節の 2 階常微分方程式に対する Chebyshev Tau 法 (以下単に 2 階 Chebyshev Tau 法と呼ぶ) を用いて解くことができる. 一方,  $r$  に関して 4 階の常微分方程式 (47) は, 対応する境界条件のもとで 4 階常微分方程式に対する Chebyshev Tau 法 (4 階 Chebyshev Tau 法), または 2 階 Chebyshev Tau 法を 2 回適用する Coupled Method を用いて解くことができる (J. Kim *et al.* [2]). 前者は以前と同様, 式 (72),(65),(66) に対応する  $N-3$  個の方程式と 4 個の境界条件からなる  $N+1$  元連立 1 次方程式を解けばよい. ここでは, 後者の Coupled Method を説明する.

方程式 (47) と対応する境界条件 (51) と (52) は,

$$r^2 (D_t - c) \tilde{U}(r) = F(r), \quad (73)$$

$$\tilde{U}(r) = -D_t U(r), \quad (74)$$

$$U = \frac{dU}{dr} = 0 \quad (r = r_1), \quad (75)$$

$$U = \frac{dU}{dr} = 0 \quad (r = r_2) \quad (76)$$

のように書くことができる. ただし,  $D_t$  はスペクトル空間での Laplacian (40),  $c$  は定数である. 方程式 (73),(74) と境界条件 (75),(76) を満たす解  $U$  は, 式 (73) の非斉次の特解  $U_0$  と斉次の一般解  $U_1, U_2$  の線形結合で,

$$U = U_0 + c_1 U_1 + c_2 U_2 \quad (77)$$

と表すことができる. ただし,  $c_1$  と  $c_2$  は定数である. これらの特解  $U_0$  と一般解  $U_1$  と  $U_2$  は, 以下で示すように前節で得られた 2 階常微分方程式に対する Chebyshev Tau 法を 2 回適用することによって求めることができる.

### 1. 特解 $U_0$ の解法

$$r^2 (D_t - c) \tilde{U}_0(r) = F(r), \quad (78)$$

$$\tilde{U}_0 = 0 \quad (r = r_1), \quad (79)$$

$$\tilde{U}_0 = 0 \quad (r = r_2). \quad (80)$$

$$r^2 D_t U_0(r) = -r^2 \tilde{U}_0(r), \quad (81)$$

$$U_0 = 0 \quad (r = r_1), \quad (82)$$

$$U_0 = 0 \quad (r = r_2). \quad (83)$$

### 2. 一般解 $U_1$ の解法

$$r^2 (D_t - c) \tilde{U}_1(r) = 0, \quad (84)$$

$$\tilde{U}_1 = 0 \quad (r = r_1), \quad (85)$$

$$\tilde{U}_1 = 1 \quad (r = r_2). \quad (86)$$

$$r^2 D_t U_1(r) = -r^2 \tilde{U}_1(r), \quad (87)$$

$$U_1 = 0 \quad (r = r_1), \quad (88)$$

$$U_1 = 0 \quad (r = r_2). \quad (89)$$

### 3. 一般解 $U_2$ の解法

$$r^2 (D_t - c) \tilde{U}_2(r) = 0, \quad (90)$$

$$\tilde{U}_2 = 1 \quad (r = r_1), \quad (91)$$

$$\tilde{U}_2 = 0 \quad (r = r_2). \quad (92)$$

$$r^2 D_t U_2(r) = -r^2 \tilde{U}_2(r), \quad (93)$$

$$U_2 = 0 \quad (r = r_1), \quad (94)$$

$$U_2 = 0 \quad (r = r_2). \quad (95)$$

ここで、式(78),(84),(90)に対する境界条件(79),(80), (85),(86), (91),(92)に注意する。本来、 $\tilde{U}$ の境界値は解  $U$  が得られて初めて計算できる量である。しかし、境界条件(75),(76)のうち  $U = 0$  を満たす特解  $U_0$  および互いに一次独立な一般解  $U_1, U_2$  を上のように求めておいて、残りの境界条件

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU_0}{dr} + c_1 \frac{dU_1}{dr} + c_2 \frac{dU_2}{dr} = 0 \quad (r = r_1, r_2) \quad (96)$$

を満たすように定数  $c_1$  と  $c_2$  を定めることができる。このようにして得られた関数  $U$  は、4階常微分方程式(73), (74)と境界条件(75),(76)を満たす解となっている。一般解  $U_1$  と  $U_2$  は時間によらないので初期に1度だけ解けばよい。

最後にこの Coupled Method と 4階 Chebyshev Tau 法の使い分けについて述べる。これは利用できる計算機のもとでいかに効率的に計算するかによって異なる。表1は、切断波数が  $N$  の Chebyshev 多項式で展開したときに構成される  $N + 1$  元連立1次方程式の係数行列のゼロ以外の成分数と全成分数を計算方法ごとに示したものである。Coupled Method では2階 Chebyshev Tau 法を2回用いるので因子2が掛けてある。係

計算方法	ゼロ以外の成分数	ゼロ含む全成分数
2階 Chebyshev Tau 法	$(11N - 20)$	$(N + 1)^2$
Coupled Method	$2(11N - 20)$	$2(N + 1)^2$
4階 Chebyshev Tau 法	$(21N - 93)$	$(N + 1)^2$

表1: 2階 Chebyshev Tau 法と Coupled Method, および4階 Chebyshev Tau 法に対して構成される連立1次方程式の係数行列のゼロ以外の成分数と全成分数。  $N$  は Chebyshev 多項式展開の切断波数である。

数行列の成分数は、その連立1次方程式を解くために要する演算数とはほぼ比例関係にある。すなわち、利用できるマシンがメモリーの小さいスカラー計算機である場合、ゼロ以外の成分に対してだけ Gauss 消去法を実行

する Coupled Method が適当である。この場合、係数行列のゼロ以外の成分だけ記憶すればよく、この係数行列はその他の 2 階 Chebyshev Tau 法と共有できるのでメモリーをかなり節約できる。一方、利用できるマシンがメモリーの大きいスカラー計算機である場合、ゼロ以外の成分に対してだけ Gauss 消去法を実行する 4 階 Chebyshev Tau 法が適当である。ほぼ式 (96) を解く分だけ Coupled Method より計算時間を節約できるだけでなく、プログラムコードも極めて簡単になる。しかし、スカラーマシンで計算する場合、いずれも多大な CPU 時間 (1 年以上) を要するのであまり実用的でない。利用できるマシンがベクトル計算機である場合、ゼロを含む全成分に対して LU 分解を実行する Coupled Method (メモリー小)、または 4 階 Chebyshev Tau 法 (メモリー大) がたいへん実用的である。

## 6 まとめ

回転球殻内の電気伝導性流体の熱対流運動によって駆動される Boussinesq MHD ダイナモの高精度で高速なシミュレーションコードを新しく開発した。空間の離散化には高精度な擬スペクトル法を、時間の離散化には数値的に安定なスキームを用いた。このコードは地球外核の熔融鉄の対流運動の簡単なモデルとなっており、より複雑なモデルの基本となる。実際の数値シミュレーションでは初期条件  $\mathbf{u}, \mathbf{b}, T$ 、パラメーター  $\eta, P_r, R_a, T_a, R_o$ 、および解像度  $L, N, \Delta t$  を与えて数値計算する。参考として、われわれが実際に用いた値、およびその計算に要した CPU 時間と使用メモリーを Appendix B に示す [3]-[8]。

数値精度はより大きな解像度  $2L+1, 2N, \Delta t/2$  で計算した結果と比較して確認する。われわれは運動エネルギー

$$\mathcal{E}_K(t) = \int_V \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}, \quad (97)$$

磁気エネルギー

$$\mathcal{E}_M(t) = \int_V \frac{1}{2} |\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}, \quad (98)$$

および渦度  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$  と磁束密度  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  の 3 次元構造を比較して確認した。ここで、積分は全空間に対して実行する。一方、数値安定性は Courant 数を確認する。われわれは、速度  $(u_r, u_\vartheta, u_\varphi)$  と磁束密度  $(b_r, b_\vartheta, b_\varphi)$  に対する Courant 数

$$\frac{u_r \Delta t}{\Delta r}, \quad \frac{u_\vartheta \Delta t}{r \Delta \vartheta}, \quad \frac{u_\varphi \Delta t}{r \sin \vartheta \Delta \varphi}, \quad \frac{b_r \Delta t}{\Delta r}, \quad \frac{b_\vartheta \Delta t}{r \Delta \vartheta}, \quad \frac{b_\varphi \Delta t}{r \sin \vartheta \Delta \varphi} \quad (99)$$

を確認した。ただし、 $\Delta r, \Delta \vartheta, \Delta \varphi$  はそれぞれ動径と緯度および経度方向の格子間距離である。われわれは、非線形項を計算する際に現れるエイリアジング誤差を除去しなかった。これについてもエイリアジング誤差を除去した解と運動エネルギー、磁気エネルギーおよび渦度と磁束密度の 3 次元構造を比較して確認した。

最後に他の数値計算法について簡単に述べておく。A. Kageyama and T. Sato [9] は回転球殻内の圧縮性 MHD シミュレーションを差分法で解いた。しかし、地球外核の熔融鉄の対流運動のように圧縮性効果があまり重要でない問題の場合には、差分法より高精度なスペクトル法が適している。スペクトル法の中にもいろいろな方法がある。W. Hirsching and F. H. Busse [10] は Boussinesq MHD シミュレーションを Fourier Galerkin 法で、G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts [11] は修正 Boussinesq MHD シミュレーションを Chebyshev

Collocation 法で解いた。境界条件を満たす直交関数系で展開する Galerkin 法は、一般に周期境界問題に適している。今の場合、動径方向は非周期的であるのでわれわれが用いた Tau 法または Collocation 法が適当である。

## 謝辞

この数値シミュレーションコードの高速化をしてくださった荒木圭典博士に心から感謝の意を表したい。使用計算機は、文部省核融合科学研究所理論・シミュレーション研究センターのベクトルマシン NEC SX3 である。

## A 速度と磁束密度の境界条件

### A.1 速度の境界条件

速度に対する境界条件 (25),(26) を求める。両球面上で速度に対して粘着条件  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  を課すと式 (13)–(15) より、

$$u_r = -\frac{1}{r}\nabla_{\perp}^2 U = 0, \quad (100)$$

$$u_{\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(\tau U)}{\partial r\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial W}{\partial\varphi} = 0, \quad (101)$$

$$u_{\varphi} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(\tau U)}{\partial r\partial\varphi} - \frac{\partial W}{\partial\vartheta} = 0 \quad (102)$$

となる。したがって、

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad W = 0 \quad (r = r_1), \quad (103)$$

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad W = 0 \quad (r = r_2) \quad (104)$$

である。

### A.2 磁束密度の境界条件

磁束密度に対する境界条件 (51),(52) を求める。内球内と外球外はそれぞれ流体と同じ透磁率をもつ絶縁体と真空であるので、そこでの磁束密度  $\mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{b}^{(o)}$  はともにポテンシャル場  $\phi^{(i)}, \phi^{(o)}$  で、

$$\mathbf{b}^{(i)} = -\nabla\phi^{(i)}, \quad \phi^{(i)}(r, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(i)}(t) r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (r \leq r_1), \quad (105)$$

$$\mathbf{b}^{(o)} = -\nabla\phi^{(o)}, \quad \phi^{(o)}(r, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(o)}(t) r^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (r_2 \leq r) \quad (106)$$

のように記述できる。ただし、 $\phi_{lm}^{(i)}, \phi_{lm}^{(o)}$  はそれぞれの球面調和関数展開の係数である。式 (105) と (10),(13)–(15),(31), (32) および (106) を用いて、内球内 ( $r \leq r_1$ ) と球殻内 ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) および外球外 ( $r_2 \leq r$ ) の磁束密度の各成分を球座標系で表すと次のようになる。

#### 1. 内球内 ( $r \leq r_1$ ) の磁束密度

$$b_r^{(i)} = -\sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l l\phi_{lm}^{(i)} r^{l-1} Y_{lm}, \quad (107)$$

$$b_{\vartheta}^{(i)} = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(i)} r^{l-1} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta}, \quad (108)$$

$$b_{\varphi}^{(i)} = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(i)} \frac{r^{l-1}}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}. \quad (109)$$

2. 球殻内 ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) の磁束密度

$$b_r = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \frac{l(l+1)}{r} B_{lm} Y_{lm}, \quad (110)$$

$$b_{\vartheta} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (\tau B_{lm})}{\partial r} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} + \frac{J_{lm}}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \right\}, \quad (111)$$

$$b_{\varphi} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\tau B_{lm})}{\partial r} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} - J_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \right\}. \quad (112)$$

3. 外球外 ( $r_2 \leq r$ ) の磁束密度

$$b_r^{(o)} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l (l+1) \phi_{lm}^{(o)} r^{-(l+2)} Y_{lm}, \quad (113)$$

$$b_{\vartheta}^{(o)} = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(o)} r^{-(l+2)} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta}, \quad (114)$$

$$b_{\varphi}^{(o)} = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^{(o)} \frac{r^{-(l+2)}}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}. \quad (115)$$

境界での磁束密度の接続条件

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)} \quad (r = r_1), \quad (116)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(o)} \quad (r = r_2) \quad (117)$$

より,  $r = r_1$  で

$$\phi_{lm}^{(i)} = - \frac{l+1}{r_1^l} B_{lm}, \quad (118)$$

$$\phi_{lm}^{(i)} = - \frac{1}{r_1^l} \frac{\partial (\tau B_{lm})}{\partial r}, \quad (119)$$

$$J_{lm} = 0, \quad (120)$$

$r = r_2$  で

$$\phi_{lm}^{(o)} = l r_2^{l+1} B_{lm}, \quad (121)$$

$$\phi_{lm}^{(o)} = - r_2^{l+1} \frac{\partial (\tau B_{lm})}{\partial r}, \quad (122)$$

$$J_{lm} = 0. \quad (123)$$

ゆえに, 磁束密度の展開係数  $\{B_{lm}, J_{lm}\}$  ( $1 \leq l \leq L, 0 \leq |m| \leq l$ ) に対する境界条件は,

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r_1} \right) B_{lm} = J_{lm} = 0 \quad (r = r_1), \quad (124)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r_2} \right) B_{lm} = J_{lm} = 0 \quad (r = r_2) \quad (125)$$

となる。

## B 初期条件, パラメーター, 解像度

われわれは, まず最初にパラメーターを

$$\eta = 0.5, \quad P_r = 1, \quad R_a = 3200, \quad T_a = 8000 \quad (126)$$

と設定して, 基本場

$$\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad T = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (127)$$

に速度と温度の一樣微小攪乱を与えて定常な熱対流場を実現した. 次に, その定常熱対流場に磁束密度の一樣微小攪乱を与えて3種類の Roberts 数

$$R_o = 0.12, \quad 0.10, \quad 0.07 \quad (128)$$

について MHD シミュレーションを実行した. われわれが実際に用いた一樣微小攪乱の具体的な表現は,  $1 \leq l \leq 10, 0 \leq |m| \leq l$  に対して,

$$U_{lm}^{l=0}(r) = a_1 (r - r_1)^2 (r - r_2)^2 e^{i\phi_{lm}^1}, \quad (129)$$

$$W_{lm}^{l=0}(r) = a_2 (r - r_1)^2 (r - r_2)^2 e^{i\phi_{lm}^2}, \quad (130)$$

$$T_{lm}^{l=0}(r) = a_3 (r - r_1)^2 (r - r_2)^2 e^{i\phi_{lm}^3}, \quad (131)$$

$$B_{lm}^{l=0}(r) = a_4 \left\{ c_l^1 r_2 (r - r_1)^2 + c_l^1 c_l^2 (r - r_1) (r - r_2) + c_l^2 r_1 (r - r_2)^2 \right\} e^{i\phi_{lm}^4}, \quad (132)$$

$$J_{lm}^{l=0}(r) = a_5 (r - r_1)^2 (r - r_2)^2 e^{i\phi_{lm}^5} \quad (133)$$

である. その他のモードはすべて0である. それぞれ境界条件 (51),(52) を満足する. ただし,  $c_l^1 = (l-2)r_1 - lr_2$ ,  $c_l^2 = (l+1)r_1 - (l+3)r_2$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 10^{-6}$ ,  $a_4 = 10^{-9}$ ,  $\phi_{lm}^i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) はランダムな位相である.

熱対流およびそれぞれの MHD シミュレーションに要した解像度と時間積分1ステップ当りの CPU 時間および飽和状態までの全 CPU 時間と使用メモリーを表2にまとめた.

Case	$R_o$	$L$	$N$	$\Delta t$	1 step	Total	Memory
Run1	—	31	32	$2.5 \times 10^{-3}$	0.6 sec	1.7 hour	300 MB
Run2	0.12	31	32	$5.0 \times 10^{-4}$	0.6 sec	8.3 day	300 MB
Run3	0.10	31	32	$5.0 \times 10^{-4}$	0.6 sec	8.3 day	300 MB
Run4	0.07	31	64	$2.5 \times 10^{-4}$	1.2 sec	33.3 day	600 MB

表 2: 熱対流 (Run1) および MHD シミュレーション (Run2 ~ Run4) に要した解像度 ( $L, N, \Delta t$ ) と時間積分1ステップ当りの CPU 時間 (1 step) および飽和状態までの全 CPU 時間 (Total) と使用メモリー (Memory).

## 参考文献

- [1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988).
- [2] J. Kim, P. Moin, and R. Moser, "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," *J. Fluid Mech.* **177**, 133 (1987).
- [3] H. Kitauchi, K. Araki, and S. Kida, "Flow structure of thermal convection in a rotating spherical shell," *Nonlinearity* **10**, 885 (1997).
- [4] S. Kida, K. Araki, and H. Kitauchi, "Periodic reversals of magnetic field generated by thermal convection in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 2194 (1997).
- [5] H. Kitauchi and S. Kida, "Intensification of magnetic field by concentrate-and-stretch of magnetic flux lines," *Phys. Fluids* **10**, 457 (1998).
- [6] H. Kitauchi, "Topological structure of magnetic flux lines generated by thermal convection in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1243 (1998).
- [7] S. Kida and H. Kitauchi, "Thermally driven MHD dynamo in a rotating spherical shell," *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130**, 121 (1998).
- [8] S. Kida and H. Kitauchi, "Chaotic reversals of dipole moment of thermally driven magnetic field in a rotating spherical shell," *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 2950 (1998).
- [9] A. Kageyama and T. Sato, "Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo," *Phys. Rev. E* **55**, 4617 (1997).
- [10] W. Hirsching and F. H. Busse, "Stationary and chaotic dynamos in rotating spherical shells," *Phys. Earth Planet. Inter.* **90**, 243 (1995).
- [11] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, "A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle," *Phys. Earth Planet. Inter.* **91**, 63 (1995).



NIFS-MEMO シリーズ出版リスト  
(Recent Issues of NIFS-MEMO Series)

- NIFS-MEMO-1 都築哲哉、東井和夫、松浦清剛、「パソコンによる JIPP T-IIU プラズマの平衡位置フィードバック制御」1991年4月  
T.Tsuzuki, K.Toi and K.Matsuura,  
"Feedback Control of Plasma Equilibrium with Control System Aided by Personal Computer on the JIPP T-II Tokamak"; Apr.1991  
(In Japanese)
- NIFS-MEMO-2 久保田雄輔、大林治夫、宮原 昭、大野和子、中村光一、堀井憲爾、  
「環境磁界の研究 (I) 三次元積分磁束計の開発」1991年7月  
Y.Kubota, H.Obayashi, A.Miyahara, K.Ohno, K.Nakamura and K.Horii,  
"Development of Three-Dimensional Compact Magnetic Dosimeter for Environmental Magnetic Field Monitoring", July,1991  
(In Japanese)
- NIFS-MEMO-3 「核融合科学研究所技術研究会; 1991年3月19,20日 土岐文化プラザ」1991年8月  
"Proceedings of Symposium on Technology in Laboratories; Mar. 19, 20, 1991" Aug. 1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-4 「プラズマ中におけるカオス現象」1991年8月  
"Chaotic Phenomena in Plasmas ", Aug. 1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-5 山崎耕造、「ファジー論理のトロイダルプラズマ制御への応用」  
1992年2月 "Fuzzy Logic Application to Troidal Plasma Control", Feb. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-6 平成3年度 核融合科学研究所 支援調査共同研究報告書 「大出力 マイクロ波源の開発に関する調査研究」1992年4月  
"Development of High Power Microwave Source ", Apr. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-7 平成3年度 核融合科学研究所 共同研究(調査支援研究)研究成果 報告書  
「プラズマにおけるカオス現象」1992年11月  
"Chaotic Phenomena in Plasma, II", Nov. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-8 NIFSシンポジウム報告書「核融合炉材料照射用強力中性子源の設計と大学の役割」1993年1月  
"Design of Intense Neutron Source for Fusion Material Study and the Role of Universities", Jan. 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-9 平成2、3、4年度 核融合科学研究所共同研究研究会研究成果報告書  
「開放磁場における電位と輸送機構」1993年4月  
(Ed.) K. Yatsu and T. Hatori "Potential Formation and Transport in Open Field Line Systems", Apr. 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-10 伊藤公孝、「人口太陽は燃えるか -核融合研究最前線-原子力オープン・スクール講演」1993年5月  
K. Itoh,  
Reports of NIFS Collaboration Workshop from 1990 to 1992 at National Institute for Fusion Science."At the Front of Fusion Research -  
Introductory Lecture Open to Public-", May 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-11 (Ed.) T. Kato  
"Atomic Physics and Radiation in Divertor and/or Disruption Plasmas", Aug. 1993 (In English)
- NIFS-MEMO-12 平成4年度 核融合科学研究所 共同研究(調査支援研究)研究成果報告書  
「プラズマのカオス現象(まとめ)」1993年10月  
"Chaotic Phenomena in Plasma, III", Oct. 1993(In Japanese)
- NIFS-MEMO-13 久保田雄輔、野田信明、相良明男、井上徳之、赤石憲也、本島修、  
「プラズマ対向材料の開発・研究用高熱負荷試験装置ACT」1994年3月  
"Electron Beam Irradiation Test Facility for Research and Development of PlasmaFacing Components", Mar. 1994 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-14 「平成5年度核融合科学研究所技術研究会  
日時:1994年3月23日-24日 場所:セラトピア土岐、土岐商工会議所」1994年7月  
"Proceedings of Symposium on Technology in Laboratories by Department of Engineering and Technical Services", July 1994  
(In Japanese)
- NIFS-MEMO-15 S.-I. Itoh, K. Itoh, G. Soltwisch, K. H. Finken,  
"Study on Sawtooth and Transport -- A Report of Japan-TEXTOR Collaboration --", Jan. 1995 (In English)
- NIFS-MEMO-16 久保田 雄輔、野田信明、相良明男、井上徳之、赤石憲也、山本純也、本島修  
「LHD用ダイバータ板の開発・研究各種カーボン・銅接合材の熱負荷試験」  
Y. Kubota, N. Noda, A. Sagara, N. Inoue, K. Akaishi, J. Yamamoto, O. Motojima,  
"Research and Development of Divertor Plates for LHD (High Heat Flux Tests of Various Kinds of Materials)", Apr. 1995 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-17 江尻 晶,  
「LHDにおける窓の熱設計」  
A. Ejiri,  
"Calculation of the Heat Transfer in the Windows of the Large Helical Device" Nov. 1995 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-18 田辺哲朗、森田健治 編集  
核融合科学研究所共同研究  
「プラズマと壁との相互作用に関する研究会」核融合科学研究所、平成7年9月12日-9月13日  
(Eds.) T. Tanabe and K. Morita  
"Proceedings of the Symposium on Plasma-Materials Interaction" NIFS, Sep. 12-13, 1995; Dec. 1995 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-19 K. Itoh (ed.),  
Study on Sawtooth and Transport in Part of Japan-TEXTOR Collaboration 1995; Feb. 1996
- NIFS-MEMO-20 編集責任、核融合科学研究所、太刀川恭治、山本純也、  
「核融合科学研究所共同研究、核融合炉用先進超伝導体、研究調査報告書 Nb<sub>3</sub>Sn系超伝導体」  
Editors: K. Tachikawa and J.

- Yamamoto,  
 "Studies on Advanced Superconductors for Fusion Device" Part 1 - Present Status of Nb<sub>3</sub>Sn Conductors-", Mar. 1996 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-21 飯吉厚夫、藤原正巳、岡本正雄、大森修義、金子修、笹尾真實子、須藤進、菅野龍太郎、武藤敬、村上定義、竹入康彦、富田幸博、山崎耕造  
 「LHDにおけるD-<sup>3</sup>He核融合の検討」  
 A. Iiyoshi, M. Fujiwara, M. Okamoto, N. Ohyabu, O. Kaneko, M. Sasao, S. Sudo, R. Kanno, T. Mutoh, S. Murakami, Y. Takeiri, Y. Tomita and K. Yamazaki,  
 "Studies on D - <sup>3</sup>He Fusion in LHD". Mar. 1996 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-22 編集責任、核融合科学研究所、太刀川恭治、山本純也、三戸利行  
 「核融合科学研究所共同研究、核融合炉用先進超伝導体、研究調査報告書 2 先進金属系超伝導体」  
 Editors: K. Tachikawa, J. Yamamoto and T. Mito,  
 "Studies on Advanced Superconductors for Fusion Device" Part 2 - Metallic Superconductors other than Nb<sub>3</sub>Sn -, Mar. 1997 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-23 K. Itoh (ed.), S.-I. Itoh, U. Stroth, T. Iwasaki, M. Yagi and A. Fukuyama,  
 "Discussion Record of the Workshop on Nonlocal Transport" June 1997
- NIFS-MEMO-24 Collapse, Terminating Eventsの物理  
 日本物理学会 シンポジウム 第52回年会 1997.3.29  
 "Physics of Collapse and Terminating Events" (in Japanese); July 1997
- NIFS-MEMO-25 中村浩章、池田一昭、山口作太郎  
 「強磁場中でのネルンスト素子の輸送現象とエネルギー変換」  
 H. Nakamura, K. Ikeda, S. Yamaguchi,  
 "Transport Phenomena and Energy Conversion of the Nernst Element in a Strong Magnetic Field" (in Japanese); Nov. 1997
- NIFS-MEMO-26 核融合科学研究所技術部  
 「平成9年度核融合科学研究所技術研究会  
 日時：1998年9月11日・12日 場所：セラトピア土岐」1998年3月  
 "Proceedings of Symposium on Technology in Laboratories by Department of Engineering and Technical Services" Mar. 1998 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-27 編集責任、核融合科学研究所、太刀川恭治、三戸利行  
 「核融合科学研究所共同研究、核融合炉用先進超伝導体、研究調査報告書 3 酸化物系超伝導体」  
 Editors: K. Tachikawa and T. Mito,  
 "Studies on Advanced Superconductors for Fusion Device, Part 3 - High-T<sub>c</sub> Oxide Superconductors -", Mar. 1998 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-28 陰山聡、佐藤哲也  
 「VRシステムComplexCopeプログラミングガイド」  
 A. Kageyama and T. Sato,  
 "VR System ComplexCope Programming Guide" ; Sep. 1998 (in Japanese)
- NIFS-MEMO-29 北内英章、木田重雄  
 「回転球殻内のMHDシミュレーションコードの開発」  
 H. Kitauchi and S. Kida,  
 Numerical Code for an MHD Simulation in a Rotating Spherical Shell; Feb. 1999