

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

講義「プラズマ物理の基礎」

平成5年度 総合大学院大学
数物科学研究科 核融合科学専攻

岡 本 正 雄

Lecture Note on the Bases of Plasma Physics
Graduate University for Advanced Studies

M. Okamoto

(Received - Jan. 31, 1994)

NIFS-PROC-15

Feb. 1994

RESEARCH REPORT
NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Nagoya 464-01, Japan.

講義 「プラズマ物理の基礎」

平成5年度

総合研究大学院大学

数物科学研究科 核融合科学専攻

岡 本 正 雄

Lecture Note on the Bases of Plasma Physics

Masao Okamoto

Graduate University for Advanced Studies

Synopsis

The lecture on the "Bases of Plasma Physics" was given from April to June, 1993 to the students of the Fusion Science Course, Department of Mathematical and Physical Science of the Graduate University for Advanced Studies and to other graduate students at the National Institute for Fusion Science. A transcript of the lecture is presented.

Key words: Plasma Physics, single particle orbit, kinetics, fluid description, magnetohydrodynamics, wave theory, transport theory

はじめに

本稿は、平成5年4月から6月にかけて、核融合科学研究所大学院教育協力委員会主催の講義の一環として、総合研究大学院大学数物科学研究科核融合科学専攻の学生、核融合科学研究所特別研究学生等を対象に行ったプラズマ物理の基礎の講義に一部修正、加筆した講義録である。受講者の学部時代の専攻が多様であるため、簡単な物理の基礎知識で理解できるよう平易に書かれている。プラズマ物理の基礎としては本講義録は充分でなく欠けている重要な基礎過程が多くあり、また、まとめ方もかなり片寄っていると思われるが、今後さらに加筆して充実させる事を前提にここに講義録を出版する。

目 次

§1 序

1) プラズマの概念	1
2) 平均熱運動エネルギー	3
3) デバイシャヘイ	4
4) プラズマ振動	6
5) プラズマ・パラメータ	9

§2 単一荷電粒子の運動

(1) 一様な場	11
1) 一様磁場	11
2) 磁気モーメント	14
3) 一様な外力場	15
(2) 非一様磁場	18
1) grad B ドリフト	19
2) 曲率ドリフト	20
(3) 粒子軌道とトーラス	22
1) 案内中心の運動	22
2) 単純トーラス	24
(4) ミラー場	26
1) 磁気ミラー	26
2) μ の保存	28
3) ミラー比	29
4) フェルミ加速と断熱圧縮	30
(5) 時間的に変動する場 *	
(6) 断熱不変量 *	

§3 運動論

(1) ボルツマンの式	32
1) 分布関数	32
2) ボルツマンの式の導出	32
3) ブラソフの式	35
4) BBGKY の理論	35
(2) マックスウェルの式	36
(3) プラズマ振動とランダウ減衰	37

(4) ランダウ減衰の物理的描像	47
(5) プラズマ分散関数	52
1) プラズマ分散関数	52
2) プラズマ振動	54
3) イオン音波	55
(6) プラズマ波エコー *	

§ 4 クーロン衝突

(1) クーロン衝突の特徴	60
1) 弾性散乱	60
2) 大角散乱の場合	62
3) 運動量変化	62
4) 微小角散乱の効果	64
5) エネルギー変化	66
6) 熱化プラズマ	68
(2) 衝突時間	68
1) 速度空間での拡散	68
2) 緩和時間	71
3) 熱化粒子の衝突時間	72
(3) 衝突積分	74
(4) 高エネルギー粒子の衝突	76
1) 高エネルギー・イオンの衝突減衰	76
2) 高エネルギー電子の場合 *	
(5) 逃走電子 *	

§ 5 流体近似と電磁流体力学

(1) 流体近似	81
1) 流体方程式系	81
2) 古典的輸送係数	84
(2) 電磁流体力学	87
1) 1 流体方程式	87
2) オームの式	91
3) MHD方程式系	94
4) 凍り付きの定理	96
(3) 磁気流体波	98

§6 プラズマ波動

(1) 波動の基本的性質	108
1) 波の表現	108
2) 位相速度	108
3) 群速度	109
4) 屈折率	110
5) 分散式	110
6) 遮断と共鳴	110
(2) 冷たいプラズマ近似	111
1) 誘電率テンソル	111
2) 分散式	113
3) 偏光性	115
4) 平行伝搬	117
5) 垂直伝搬	119
6) 電磁流体波	120
7) イオンサイクロトロン波	121
8) 電子サイクロトロン波	122
(3) プラズマ振動とイオン音波	124
1) 2流体モデルと分散式	124
2) プラズマ振動	126
3) イオン音波	127
(4) 有限温度の効果	128
1) 波動方程式と分散式	128
2) 静電近似	129
(5) 波のエネルギー *	

§7 MHD 平衡と安定性

(1) MHD 平衡	131
1) 理想 MHD の平衡	131
2) 磁束	132
3) 回転変換と安全係数	133
4) 有理面	134
5) 磁気シア	135
6) 磁気井戸	135
7) 軸対称系での平衡の式	136
(2) エネルギー原理 *	

(3) 交換型不安定性	137
1) 磁場の湾曲	138
2) 重力不安定性	138
3) 安定化効果	140
4) 重力不安定性の粒子的描象	142
5) 交換型不安定性の条件	143
(4) キンク不安定性	145
1) ソーセージ不安定性	146
2) キンク不安定性	148
3) Kruskal-Shafranov 限界	149
(5) バルーニング不安定性 *	
(6) 抵抗性 MHD 不安定性 *	

§8 プラズマの輸送

(1) 古典的拡散	153
1) プラズマの流れ	153
2) 拡散	154
3) 古典的拡散の物理機構	156
4) 不純物イオンの古典的拡散	158
(2) 新古典的輸送 *	
(3) 異常輸送 *	

§9 非線形現象 *

* 原稿なし

§1 序

1) プラズマの概念

温度を上昇させていくと物質は固体から液体、気体へとその状態を変えていく。さらに温度を上げると気体中の分子は原子となりやがて原子は電離し、正の電荷を持つ原子核と負の電荷を持つ電子の集合体となる。このような電離気体の集合体で、ある空間尺度で見たとき電氣的に準中性状態にあるものをプラズマという。プラズマは固体、液体、気体と並べて、物質の第4状態ということがある。プラズマ中の電離していない中性粒子に対する電離気体の割合を電離度という。気体を数eV（数万度）から数10eV（数10万度）に加熱すると、中性粒子の殆どない完全電離プラズマが得られる。電離度の低いプラズマは弱電離プラズマと呼ばれ、グロー放電の陽光柱内のプラズマは電離度1%以下の弱電離プラズマである。半導体中の電子とホール（正孔）の集合もプラズマとみなす事ができ、固体中のプラズマを固体プラズマと呼ぶ事がある。地上にも宇宙空間にもプラズマ状態は多く見られるが、本講義では核融合プラズマ、特に磁場閉じ込め方式（ヘリカル系やトカマク装置など）において得られる完全電離の気体プラズマを主として考える。このようなプラズマは、プラズマ粒子の個数密度は $10^{16}m^{-3}$ から $10^{21}m^{-3}$ 程度であり、温度は数eV（数万度）から数10keV（数億度）の範囲にある。ちなみに $0^{\circ}C$ 、1気圧の中性気体の分子密度は約 $3 \times 10^{25}m^{-3}$ であるので、気体プラズマは極めて希薄なガスと言えよう。このように気体プラズマは高温で希薄であるという事がその特徴である。

プラズマは荷電粒子から成る。真空中では、 q_1 の電荷を持つ荷電粒子と q_2 の電荷を持つ荷電粒子との間にはクーロン力

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

が働く。 r は2粒子間の距離である。クーロン力は重力場と同じ遠達力である。ただし、二つの電荷粒子の符号により引力のみならず斥力にもなる。気体プラズマでは粒子間に働

く力はこのクーロン力が全てである。ポテンシャルエネルギーは

$$U \propto \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1.2)$$

である。気体プラズマが完全電離、あるいはある程度の電離度を維持するためには、プラズマは

熱運動エネルギー $\gg$ ポテンシャルエネルギー

でなければならない。また、粒子1個の体積を v 、粒子の総数を N とすると vN はプラズマ全体の体積と比べて無視できる程小さいので、プラズマはほぼ理想気体とみなせる。

クーロン力は遠達力であるので、ある粒子には周りの多くの粒子が同時に力を及ぼす。今、無限に一樣に拡がったプラズマを考える。ある粒子を中心に球を描くとこの球は r^3 で大きくなり、従って考えている粒子に力を及ぼす粒子は r^3 で増えていく。一方クーロン力は r^2 でしか減衰しないので、考えている粒子には無限個の粒子が力を及ぼす。しかし、現実には、ある粒子の周りには相対的にその粒子と異符号の粒子が集まりその粒子の作るポテンシャルを遮蔽する。この遮蔽長をデバイ長という。デバイ長内での粒子間相互作用のうち最も波長の短いものを衝突という。プラズマ粒子の衝突過程は、二つの粒子が充分近くまで接近して大きな相互作用を及ぼし合うような大角散乱はむしろ希で、考えている粒子が周りの多くの粒子と同時に相互作用する小角、あるいは微小角散乱の衝突過程が支配的である。微小角散乱の積み重ねの結果、考えている粒子がその初期の速度方向を 90° 変えるまでの時間を（狭義の）衝突時間といい、その逆数を衝突周波数という。衝突周波数 ν はプラズマの密度 n に比例して大きくなり、温度 T の $3/2$ 乗に逆比例する ($\nu \propto n/T^{3/2}$)。高温希薄な気体であるプラズマは当然衝突が少ない。 0°C 、1気圧の空気では空気分子の自由平均行程は $6 \times 10^{-8}\text{m}$ 程度、衝突周波数は $\nu \sim 5.5 \times 10^9/\text{s}$ 程度である。 $n = 10^{19}\text{m}^{-3}$ 、 $T = 100\text{eV}$ のプラズマでの電子の衝突周波数は $\nu_e \sim 4.7 \times 10^5/\text{s}$ 、 $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$ 、 $T = 10\text{keV}$ のプラズマでは $\nu_e \sim 4.7 \times 10^3/\text{s}$ 程度と極めて小さい。

プラズマでは衝突が少ないという事実と、熱運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりずっと大きいことから、プラズマ中では粒子は（ミクロに見ると微小に揺れ動いているが）殆ど自由に走っている（almost free streaming と呼ばれる事がある [1]）。

プラズマの著しい特徴は集団運動を引き起こす事である。これはプラズマ粒子間に働くクーロン力が遠距離まで作用する遠達力である事に起因している。多数の無限の自由度を持つ粒子群が相互作用し、様々な波長の、様々な周波数の集団運動を起こす。この結果プラズマは気体といっても多様な側面を持つ。即ち、プラズマは、単一粒子的な振る舞いをしたり、流体的振る舞いをしたりし、完全導体的、不完全導体的側面や誘電体的側面などを持つ極めて複雑な複合体であり、本質的に非線形的振る舞いをする多体系であると言える。

2) 平均熱運動エネルギー

熱平衡状態にあるプラズマはあらゆる速度の粒子を含んでおり、速度空間における粒子密度の分布はマックスウェル分布が最も確からしいと考えられている。1次元マックスウェル分布は、速度を v_x とすると次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} f(v_x) &= n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} m v_x^2 / T \right] \\ &= n \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{th}} \exp \left[-v_x^2 / v_{th}^2 \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

$f(v_x)dv_x$ は $1m^3$ 当たり v_x と $v_x + dv_x$ の間の速さを持つ粒子の個数を表す。ここで

$$v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

は熱速度と呼ばれ、 n は密度 [m^{-3}], m は質量 [kg], T は温度 [J] である。プラズマでは温度は電子ボルト [eV] 単位で表す事が多い。1eV = 1.6022×10^{-19} Joule であるので、Joule 単位の温度と eV 単位の温度との間には

$$T[\text{Joule}] = 1.6022 \times 10^{-19} T[\text{eV}] \quad (1.4)$$

の関係がある。また、絶対温度とは $1\text{eV} = 11600^\circ\text{K}$ の関係にある。

平均の熱運動エネルギーは分布関数で運動エネルギーを平均する事で定義され次のようになる。

$$E_{av} = \langle \frac{1}{2}mv_x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv_x^2 f(v_x) dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv_x^2 e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_T^2} dv_x} = \frac{1}{2}T \quad (1.5)$$

3次元の場合、マックスウェル分布は次の式で与えられる。

$$f(\vec{v}) = n \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} v_T^3} \exp[-v^2/v_T^2] \quad (1.6)$$

速度 $\vec{v}$ の3成分を v_x, v_y, v_z とするとその大きさの2乗は $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。この時、平均の熱運動エネルギーは

$$E_{av} = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}T \quad (1.7)$$

となり、平均運動エネルギーは1自由度(1粒子)当たり $T/2$ である。速度の2乗平均は

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_T \quad (1.8)$$

である。電子は電子で、イオンはイオン同志で緩和し、その緩和時間は異なるので $T_e \neq T_i$ の状態がある。その後電子群とイオン群が緩和し $T_e = T_i = T$ となる。

3) デバイ遮蔽

点電荷 q が真空中に作るクーロンポテンシャル場は

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.9)$$

である。ただし $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ である。この場の影響を受けてプラズマ中の荷電粒子の空間分布が一様でなくなり、この結果摂動の空間電荷が生じ、これが新しくポテン

シャル場を作る。このポテンシャル場ともの真空中のポテンシャル場の重なりとしてプラズマ中のポテンシャル場が決まる。温度 T の電子ガスを考える。電子ガスではイオンは重いので動かず一様に分布するバックグラウンドと考える。電子の密度を n_e 、イオンの密度を n_i とする。イオンの密度は一様で $n_i = n_o = \text{const.}$ である。ある電荷 q の位置を原点にとる。電子の電荷は $q = -e$ (e は素電荷で $e = 1.6021 \times 10^{-19} \text{C}$) である。

ポアッソンの式は

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_o} \delta(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_o} e(n_e - n_o) \quad (1.10)$$

で与えられる。 $\delta(\vec{r})$ はデルタ関数である。電子密度 n_e はボルツマン分布

$$n_e = n_o \exp[e\varphi(\vec{r})/T] \quad (1.11)$$

で与えられる。式(1.11)で $e\varphi(\vec{r})$ はポテンシャルエネルギー、 T は運動エネルギーに相当する。プラズマでは、ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーと比較するとはるかに小さく

$$e\varphi(\vec{r})/T \ll 1 \quad (1.12)$$

が成り立つ。従って式(1.11)から摂動の電子密度は

$$n_e - n_o \cong n_o \left(1 + \frac{e\varphi(\vec{r})}{T}\right) - n_o = n_o \frac{e\varphi(\vec{r})}{T} \quad (1.13)$$

となり、ポアッソンの式(1.10)は

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \frac{e^2 n_o}{\epsilon_o T} \varphi(\vec{r}) - \frac{q}{\epsilon_o} \delta(\vec{r}) \quad (1.14)$$

となる。ここで

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{n_0 e^2}} \quad (1.15)$$

という新しい長さの物理量を導入し、 $r = \infty$ で $\varphi = 0$ となる解を求めると

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/\lambda_D) \quad (1.16)$$

がポアッソンの式の解として得られる。ある一つの電荷 q の作るポテンシャルは、周りの電子に遮蔽され、 λ_D 程度しか届かない事が分かる。 λ_D のことをデバイ長、あるいはデバイ半径という。

電子は軽いので速やかに動いて電荷 q の作るポテンシャルを遮蔽しようとする。その結果、ある電子の周りには相対的にイオンが集まり、あるイオンの周りには電子が集まり、それぞれのポテンシャル場を遮蔽する。従ってデバイ半径内では電気的中性は破られている事になり、デバイ長より大きな空間スケールでは電氣的に準中性である。デバイ長の大きさを典型的な場合に求める。デバイ長は

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}\right)^{1/2} = 7.45 \times 10^{-7} (T_e [\text{eV}])^{1/2} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{10^{20}}\right)^{-1/2} [\text{m}] \quad (1.17)$$

で与えられ、 $T_e = 1\text{keV}$ 、 $n_e = 5 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ の時、 $\lambda_D = 3.33 \times 10^{-5}\text{m} = 3.33 \times 10^{-3}\text{cm}$ で、 $T_e = 100\text{eV}$ 、 $n_e = 10^{16}\text{m}^{-3}$ の時、 $\lambda_D = 7.45 \times 10^{-4}\text{m} = 7.45 \times 10^{-2}\text{cm}$ である。

プラズマは λ_D より充分大きなスケールで見ると電氣的に準中性であるといえる。但し、準中性と言っても電磁力がいっさい生じない程完全な中性ではない。プラズマの系の特徴的な長さを L とすると、電離気体がプラズマである条件は $\lambda_D \ll L$ である。

4) プラズマ振動

集団運動の最も簡単な例としてプラズマ振動を考える。プラズマ粒子（電子とイオン）は初期に空間的に一様に分布しているとする。イオンは重く均一に分布したまま動かないとする。即ち電子ガスを考える。図 1.1(a) のように何らかの原因で電子群がイオン群から

ずれて荷電分離が生じたとする。イオン群から電子群に向かって電場 E が生ずる。この電場により電子群は加速され右から左へ動き、荷電分離を打ち消そうとする（遮蔽効果）。しかし、図 1.1(b) のように、電子群は慣性のため平衡状態となるイオン群の位置を通り過ぎ、右から左の方向に電場が生ずる。この電場を打ち消すように電子群は右に動く。このように図 1.1(c) のようにもとの平衡状態の位置にあったイオン群の周りに電子群は振動する。

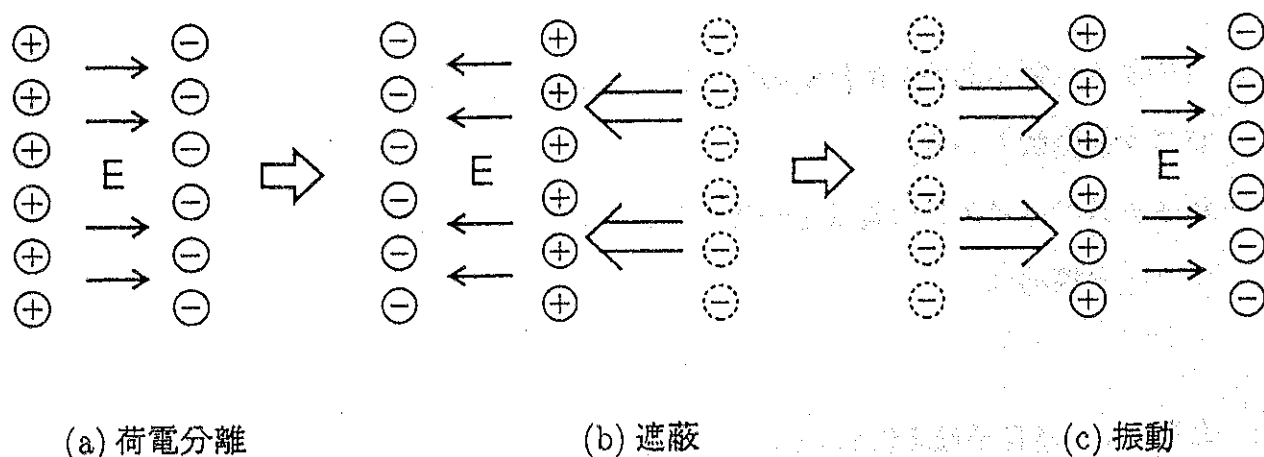


図 1.1 プラズマ振動

初期の平衡状態の電子密度を n_{eo} とする。摂動により電子群が ξ だけ動き、その結果電子密度は $\tilde{n}_e$ だけ n_{eo} からずれるとする。 $\tilde{n}_e$ は密度に対する連続の式

$$\tilde{n}_e + \frac{d}{dx} n_{eo} \xi = 0 \quad (1.18)$$

を満たす。ポアッソンの式は

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{e}{\varepsilon_o} \tilde{n}_e = \frac{e}{\varepsilon_o} \frac{d}{dx} n_{eo} \xi \quad (1.19)$$

となり電場は

$$E = \frac{e n_{eo}}{\varepsilon_o} \xi \quad (1.20)$$

で与えられる。 ξ に対する運動方程式は

$$m_e \ddot{\xi} = -eE \quad (1.21)$$

であり、次のように書ける。

$$\ddot{\xi} + \omega_{pe} \xi = 0 \quad (1.22)$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (1.23)$$

このように電子群は平衡位置の周りに角振動数 ω_{pe} で振動する事がわかる。 ω_{pe} のことをプラズマ振動数という。

電子ガスではイオンの質量を無限大としたが、これを有限とし、イオンの運動も許すと、プラズマ振動は

$$\omega_{pe} = \left(\sum_a \frac{n_a q_a^2}{\epsilon_0 m_a} \right)^{1/2} \quad (1.24)$$

となる。 a は粒子種を表し ($a=e$: 電子、 $a=i$: イオン)、 q_a は a 種粒子の電荷数である ($q_e = -e, q_i = Z_i e$)。プラズマ振動の大きさを計算してみよう。 ω_{pe} は

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 5.64 \times 10^{11} \left(\frac{n_e [\text{m}^{-3}]}{10^{20}} \right)^{1/2} [\text{s}^{-1}] \quad (1.25)$$

と書け、プラズマ振動は電子密度のみの関数である事に注意しよう ($\sqrt{n_e}$ に比例する)。
 $n_e = 10^{16} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 5.64 \times 10^9 \text{s}^{-1}$ 、 $n_e = 10^{19} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 1.78 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$ 、
 $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$ の時、 $\omega_{pe} = 5.64 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$ である。このように電子プラズマ振動は非常に高い振動数を持つ。このような高周波振動では重いイオンはついて行けず、イオンは動かないとした電子ガス・モデルは充分良い近似である事が分かる。

図 1.2 のように角周波数 ω の電磁波が真空中 (あるいは空气中) を通りプラズマに入射したとする。プラズマの表面には密度勾配があり、密度は空間的に変化している。プラズマ表面で電磁波はプラズマ振動を励起し、励起されたプラズマ振動は電磁波を遮蔽しようとする。 $\omega > \omega_{pe}(x_1)$ となる位置では電磁波は完全に遮蔽される事なくプラズマ中に入

るが、 $\omega < \omega_{pe}(x_2)$ となる所では電磁波は反射されてしまう。ラジオ波が電離層で反射され、FM 波が透過するのはこのためである。

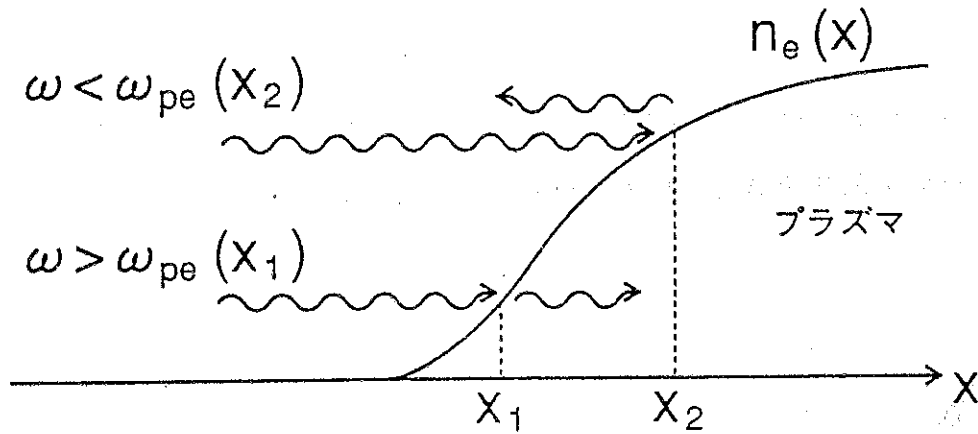


図 1.2 電磁波の透過と反射

5) プラズマパラメータ

デバイ長を半径とする球を考え、その球の中にあるプラズマ粒子数を N_D とする。即ち

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \quad (1.26)$$

ここで n は単位体積当たりの粒子密度である。 N_D の大きさは、例えば、 $T_e = 1\text{keV}$ 、 $n = 5 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$ の時、 $N_D = 7.73 \times 10^6$ で非常に大きな数である。 N_D の逆数

$$g = \frac{1}{N_D} = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi n \lambda_D^3} \quad (1.27)$$

をプラズマパラメータという。気体プラズマでは g は非常に小さな数である。 g の意味を考えよう。 g を

$$g = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{n \lambda_D} \frac{ne^2}{\epsilon_0 T} = \frac{3e^2}{4\pi \epsilon_0 \lambda_D} \cdot \frac{1}{T} \quad (1.28)$$

と書くと、式 (1.16) より $e^2/4\pi\epsilon_0\lambda_D$ は平均ポテンシャル・エネルギー、 T は式 (1.7) より平均熱運動エネルギーに相当するので

$$g \sim \frac{\text{平均ポテンシャル・エネルギー}}{\text{平均熱運動エネルギー}} \ll 1$$

と言える。つまり $g \ll 1$ は平均ポテンシャル・エネルギーが平均熱運動エネルギーよりずっと小さい事を意味している。 $g \ll 1$ は電離気体がプラズマであるための条件である。

参考文献

本稿をまとめるに当たり参考にしたプラズマ物理のテキストを参考文献として紹介する。いずれも標準的な入門書である。

- [1] T.H.Stix, "*Theory of Plasma Waves*", McGraw-Hill co. 1962.
- [2] L.Spitzer, Jr., "*Physics of Fully Ionized Gases*", Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1967.
- [3] F.F.Chen, "*Introduction to Plasma Physics*", Plenum Press, New York, 1974.
- [4] 宮本健郎、「核融合のためのプラズマ物理」 岩波書店 1976 年
- [5] 関口忠・一丸節夫、「プラズマ物理工学」 物性工学講座、オーム社、1969 年
- [6] 吉川庄一・飯吉厚夫、「核融合入門—高温プラズマの閉じ込め—」 共立出版、1975 年
- [7] S.Ichmaru, "*Basic Principles of Plasma Physics*", W.A.Benjamin, Inc., 1975.

§ 2 単一荷電粒子の運動

与えられた電磁場 $\vec{B}$, $\vec{E}$ の中での単一荷電粒子の運動を考える。粒子の運動は与えられた $\vec{B}$, $\vec{E}$ に影響を与えないとする。a 種粒子 (a=e: 電子、a=i: イオン) に対する運動方程式は

$$m_a \frac{d\vec{v}}{dt} = q_a (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

で与えられる。 m_a は質量、 q_a は電荷 ($q_e = -e$, $q_i = Z_i e$, e は素電荷で $e = 1.6021 \times 10^{-19} \text{C}$) である。この方程式を典型的な場合に解く。

(1) 一様な場

1) 一様磁場 $\vec{B}$ ($\vec{E} = 0$)

プラズマに外部から磁場 $\vec{B}$ が加えられている場合を考える。電場 $\vec{E}$ は存在しないとする。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

但し、粒子種を示す a は省略した。以下でも必要のない時は a は省略する。速度 $\vec{v}$ を磁場 $\vec{B}$ に平行な成分 $\vec{v}_{\parallel}$ と垂直な成分 $\vec{v}_{\perp}$ に分ける。

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (2.3)$$

粒子の運動エネルギーは全エネルギー W 、垂直エネルギー $W_{\perp}$ 、平行エネルギー $W_{\parallel}$ 、それぞれ

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v^2 = W_{\perp} + W_{\parallel} \\ W_{\perp} &= \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \\ W_{\parallel} &= \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

と定義できる。全エネルギー W は

$$\frac{dW}{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (2.5)$$

であるので、 W ＝一定である。すなわち、粒子に働く力は常に運動方向に垂直で静的磁場は仕事をしないため、粒子の運動エネルギーは保存される。平行エネルギー $W_{\parallel}$ も同様に

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = m\vec{v}_{\parallel} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}_{\parallel} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (2.6)$$

であり、 $W_{\parallel}$ ＝一定である。従って、 $W_{\perp} = W - W_{\parallel}$ ＝一定になる。以上は $\vec{B}$ が空間的に変化していても成立する。

磁場 $\vec{B}$ が一様で z 方向を向いているとする。大きさを B とすると $\vec{B} = (0, 0, B)$ であり、運動方程式(2.2)の各成分は

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

と書ける。これらの式の解は

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= r_L \sin(\omega_c t + \alpha) \\ y - y_0 &= r_L \cos(\omega_c t + \alpha) \\ z - z_0 &= v_{z0} t \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

と書ける。 x_0, y_0, z_0 は粒子の初期位置である。 α は任意の定数である。 v_{z0} は z 方向の速さで一定である。 ω_c は

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (\omega_{ce} = -\frac{eB}{m_e}, \quad \omega_{ci} = \frac{Z_i eB}{m_i}) \quad (2.9)$$

で定義されサイクロトロン周波数と呼ばれる。但し ω_c は符号を含むことに注意する必要がある。符号を含まず、常に正の値を取るサイクロトロン周波数を

$$\Omega = \left| \frac{qB}{m} \right|, \quad (\Omega_e = \frac{eB}{m_e}, \quad \Omega_i = \frac{Z_i eB}{m_i}) \quad (2.10)$$

と定義しておく。 r_L はラーモア半径と呼ばれ

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega}, \quad (r_{Le} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_e}, \quad r_{Li} = \frac{v_{\perp}}{\Omega_i}) \quad (2.11)$$

で定義される。 $v_{\parallel}$ と $v_{\perp}$ は磁場に平行、及び垂直方向の粒子の初期速度の大きさである。以上から荷電粒子は磁場の方向(z 方向)には等速運動を行い、磁場に垂直方向($x-y$ 平面上)には半径 r_L の円運動を行い、全体として磁力線に巻きつくらせん運動をすることがわかる。円運動の回転の方向は電子とイオンで逆向きである。円運動の中心を旋回中心、あるいは案内中心と呼び、一様磁場の場合、この中心は磁場方向に一様に進む。図 2.1 に電子、及びイオンの運動を図示する。

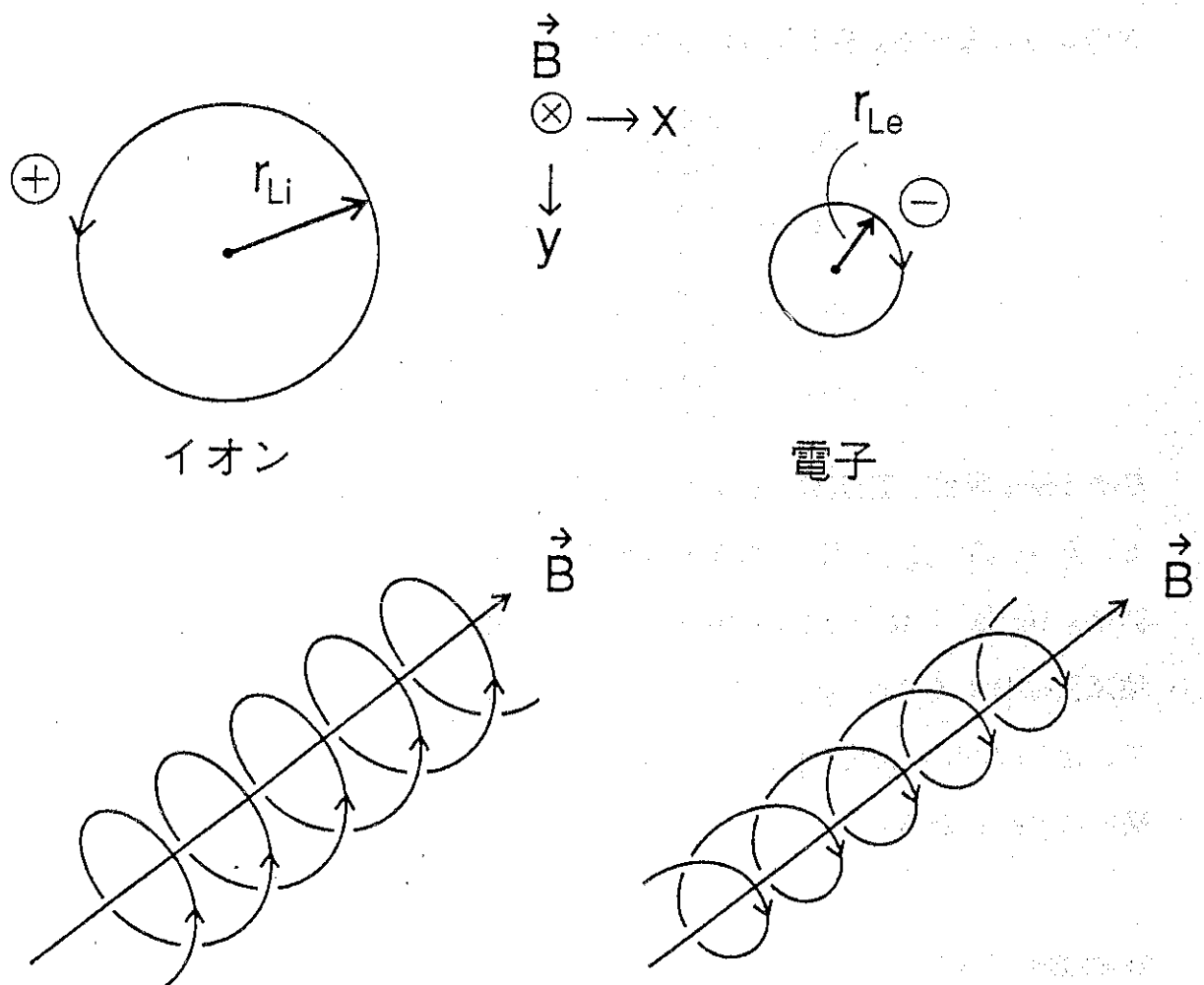


図 2.1 単一荷電粒子の一様磁場中での運動

電子とイオンのサイクロトロン周波数の比は、 $\Omega_i/\Omega_e = Z_i m_e/m_i$ で、 $\Omega_i \ll \Omega_e$ 、すなわち Ω_e は Ω_i より質量比程度（水素イオンの場合 1,830 倍）大きい。もし、 $v_\perp$ が同じなら、ラーモア半径の比は $r_{Li}/r_{Le} = \Omega_e/\Omega_i = m_i/(Z_i m_e)$ であるので、 $r_{Le} \ll r_{Li}$ 、すなわちイオンのラーモア半径は電子より質量比程度だけ大きい。電子とイオンのこのような差は非常に重要でしっかり憶えておく必要がある。

サイクロトロン周波数とラーモア半径の大きさを典型的な場合に計算してみよう。電子、及びイオンに対するサイクロトロン周波数 Ω_e, Ω_i とラーモア半径 r_{Le}, r_{Li} はそれぞれ次のように書ける。但し $v_\perp$ は v_T で与えられるとする。

$$\Omega_e = \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B \quad [\text{s}^{-1}] \quad (2.12)$$

$$\Omega_i = \frac{Z_i e B}{m_i} = 9.58 \times 10^7 \frac{Z_i B}{A_i} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (2.13)$$

$$r_{Le} = \frac{v_{Te}}{\Omega_e} = 3.37 \times 10^{-6} (T_e)^{1/2} \frac{1}{B} \quad [\text{m}] \quad (2.14)$$

$$r_{Li} = \frac{v_{Ti}}{\Omega_i} = 1.44 \times 10^{-4} \frac{1}{Z_i} (A_i T_i)^{1/2} \frac{1}{B} \quad [\text{m}] \quad (2.15)$$

B は Tesla 単位、 T_e, T_i は eV 単位で Z_i と A_i はイオンの電荷数、質量数である。例として、 $B = 2\text{T}$, $T_e = T_i = 500\text{eV}$ 、水素プラズマ ($A_i = 1, Z_i = 1$) を考えると、 $\Omega_e = 3.52 \times 10^{11} [\text{s}^{-1}]$, $\Omega_i = 1.92 \times 10^8 [\text{s}^{-1}]$, $r_{Le} = 2.67 \times 10^{-5} [\text{m}]$, $r_{Li} = 1.14 \times 10^{-3} [\text{m}]$ である。地磁気はおよそ 0.3 Gauss、つまり、 $B = 0.3 [\text{G}] = 0.3 \times 10^{-4} [\text{T}]$ で、 $A_i = Z_i = 1$ に対して、 $\Omega_e = 5.28 \times 10^6 [\text{s}^{-1}]$, $\Omega_i = 2.387 \times 10^3 [\text{s}^{-1}]$ となり、サイクロトロン周波数は非常に高いことがわかる。

2) 磁気モーメント

旋回運動を行う 1 個の荷電粒子の磁気モーメント μ は

$$\begin{aligned} \mu &= (\text{電流の大きさ}) \times (\text{面積}) \\ &= \left(q \frac{\omega_c}{2\pi} \right) \cdot (\pi r_L^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B} = \frac{W_{\perp}}{B} \quad (2.16)$$

で定義される。ベクトルの向きまで考えると

$$\vec{\mu} = -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\vec{B}}{B} \quad (2.17)$$

と定義できる。旋回運動する粒子はもとの外部磁界を打ち消そうという方向に周る。

ラーモア半径と比較して磁場がゆっくりと変動する場合は、 μ は粒子の運動中保存される。即ち、磁場の変動長を L_B とした時 $r_L \ll L_B$ なら μ は一定で、粒子はほぼ完全に旋回運動を行う事ができる。

3) 一様な外力場

プラズマに一様な磁場 $\vec{B}$ と一様な外力 $\vec{F}$ が加わっている場合の単一荷電粒子の運動を考える。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.18)$$

である。磁力線方向の運動方程式は、 $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ と書くと

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = \vec{F}_{\parallel} \quad (2.19)$$

であり、荷電粒子は力 $\vec{F}_{\parallel}$ を受け単純な加速運動をする。すなわち

$$v_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{m}t + v_{\parallel 0} \quad (2.20)$$

である。但し $v_{\parallel 0}$ は磁力線方向の初期速度である。磁場 $\vec{B}$ に垂直方向の運動は

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{F}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (2.21)$$

により記述される。ここで $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_F + \vec{v}_1$ とおく。ただし $\vec{v}_F$ は

$$\vec{v}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (2.22)$$

で定義される一様なドリフト速度である。垂直方向の運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}_F}{dt} + m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_\perp + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \times \vec{B} + q\vec{v}_1 \times \vec{B} = q\vec{v}_1 \times \vec{B} \quad (2.23)$$

となる。 $\vec{F} = \text{const.}$ の時は $d\vec{v}_F/dt = 0$ であるが、 $\vec{F}$ が空間的に変化してもその変化がラーモア半径よりずっとゆっくりしていると $d\vec{v}_1/dt$ に比べて左辺第1項は無視できる。 $\vec{v}_1$ は単純な旋回運動を表しているにすぎない。これより、一様な磁場 $\vec{B}$ と一様な外力 $\vec{F}$ のもとの荷電粒子は、案内中心 (旋回中心) が式 (2.22) に従って磁場 $\vec{B}$ に垂直な方向に一様な大きさでドリフトし、 $\vec{B}$ に垂直な方向にはこの旋回中心の周りに旋回運動 (円運動) し、 $\vec{B}$ の平行方向には単純な等加速度運動をすることがわかる。

外力が電場の場合を考える。すなわち

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.24)$$

とする。この時、粒子の案内中心の磁場 $\vec{B}$ を横切るドリフト速度 $\vec{v}_E$ は式 (2.22) より

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.25)$$

となる。これを $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトという。磁力線に平行方向には単純な加速度運動

$$v_{\parallel} = \frac{q}{m} E_{\parallel} t + v_{\parallel 0} \quad (2.26)$$

を行う。垂直方向には案内中心が $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトで磁場を横切り、このドリフトする案内中心の周りに粒子は旋回運動をする。 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトは電荷 q 、質量 m に依存しないため、電子とイオンに対してその向きも大きさも同じである。 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトを図 2.2 に示す。

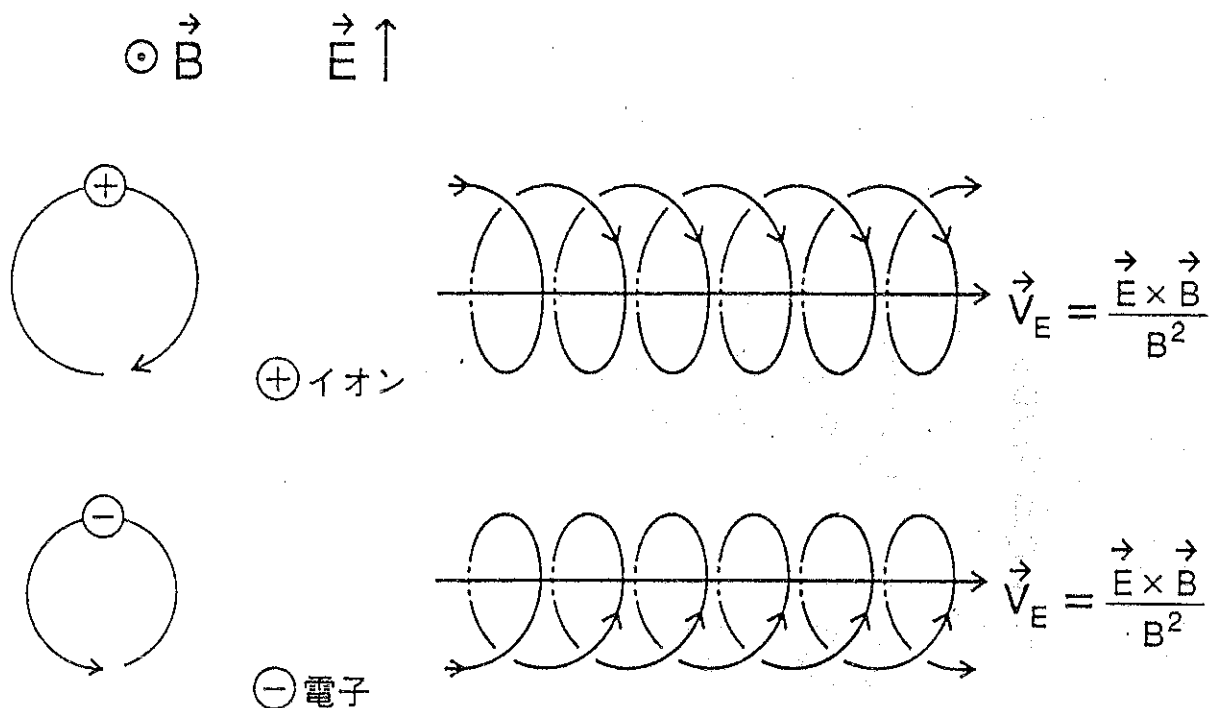


図 2.2 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフト

図 2.2 からわかるように、例えばイオンは円運動の左側で $\vec{E}$ により加速されラーモア半径が大きくなるが、右側では減速されラーモア半径が小さくなり、その結果 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトが生ずる。電子も左側で加速、右側で減速され、案内中心はイオンと同じ方向にドリフトする。

外力が重力の場合を考える。すなわち

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (2.27)$$

とする。 $\vec{g}$ は重力加速度である。案内中心の磁場を横切るドリフト速度 $\vec{v}_g$ は、式 (2.22) より

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.28)$$

となる。これを重力ドリフト (g ドリフト) という。重力ドリフトは電荷 q にも質量 m にも依存するので、電子とイオンとでは向きは逆で、大きさは

$$\left| \frac{v_{gi}}{v_{ge}} \right| = \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{Z_i} \gg 1 \quad (2.29)$$

で、イオンの重力ドリフトの方がずっと大きい。すなわち重力ドリフトは図 2.3 の様になる。

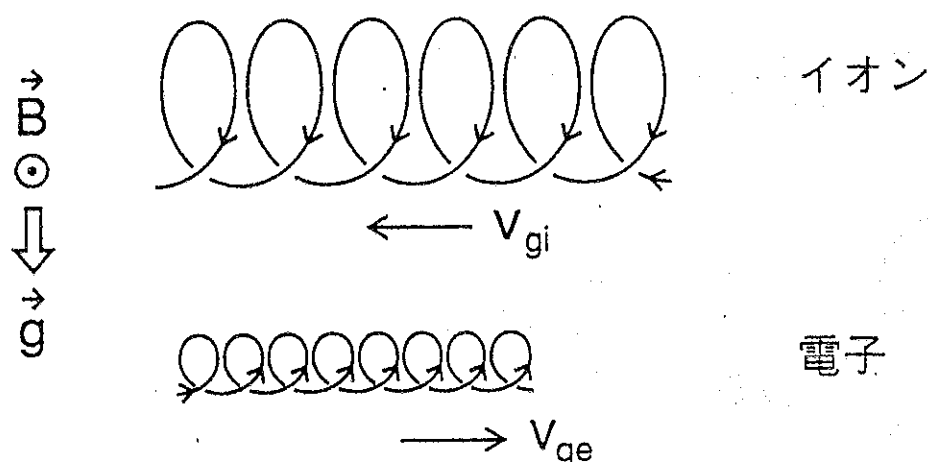


図 2.3 重力ドリフト

プラズマに加わる重力は実際には極めて小さく無視できる。磁力線が曲率を持つとき（曲がっている時）、磁力線に沿って走る粒子は遠心力を受け実効的な重力 $\vec{g}_{eff}$ を感じる。このような時案内中心は実効的な重力により磁場に垂直方向にドリフトし、重力ドリフトが重要になる。

注意しなければならないことには、 $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトは荷電分離を生じないが、重力ドリフトは荷電分離を引き起こすことである。

(2) 非一様磁場

磁場 $\vec{B}$ が一様でなく曲率を持つ場合（曲がっている場合）や、磁場方向、あるいは磁場に垂直方向にその大きさ $B = |\vec{B}|$ が変化する場合を考える。このような時は、一般に粒子の運動方程式に対しては近似解しか得られない。磁場 $\vec{B}$ の非一様性の特徴的長さを L と

する。ラーモア半径 r_L は L よりはるかに小さい、すなわち $r_L/L \ll 1$ と仮定する。このような仮定のもとに粒子軌道の運動方程式を解析する理論を第1近似軌道理論という。

1) grad B ドリフト

磁場 $\vec{B}$ は z 方向を向いており、 $\vec{B}$ に垂直な方向に $\vec{B}$ の大きさが変化している場合を考える。すなわち $\vec{B} = (0, 0, B(y))$ とする。運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \equiv \vec{F} \quad (2.30)$$

の成分は

$$\left. \begin{aligned} F_x &= qv_y B(y) \\ F_y &= -qv_x B(y) \\ F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

である。 z 方向、すなわち $\vec{B}$ の方向は等速運動に過ぎない。 $B(y)$ を $y = 0$ の周りに展開する。

$$B(y) = B_0 + y \frac{\partial B}{\partial y} + \cdots \quad (2.32)$$

ここで y はラーモア半径 r_L 程度であるので $r_L/L \ll 1$ の仮定により、右辺第2項は第1項と比較すると充分小さい。第0近似 ($B(y) = B_0$) の解、

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r_L \sin \omega_c t & y - y_0 &= r_L \cos \omega_c t \\ v_x &= r_L \omega_c \cos \omega_c t & v_y &= -r_L \omega_c \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (2.33)$$

を式 (2.31) に代入すると

$$\begin{aligned} F_x &= -qr_L \omega_c \sin \omega_c t \left\{ B_0 + (r_L \cos \omega_c t + y_0) \frac{\partial B}{\partial y} \right\} \\ F_y &= -qr_L \omega_c \cos \omega_c t \left\{ B_0 + (r_L \cos \omega_c t + y_0) \frac{\partial B}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。 ω_c の周期で平均すると

$$\bar{F}_x = 0, \quad \bar{F}_y = -\frac{1}{2} q r_L^2 \omega_c \frac{\partial B}{\partial y} \quad (2.35)$$

となる。grad B ドリフトよりも旋回運動の方がずっと速いのでこのような平均をしても意味がある。粒子の運動は旋回運動をする部分と、外力 $\vec{F}_y$ によるドリフトの部分からなると考えることができる。すなわち運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}_0 + \vec{F}_y \vec{e}_y \quad (2.36)$$

と書ける。 $\vec{F}_y$ は式 (2.35) で与えられる。この式は r_L/L の 1 次までの近似で正しい。 $\vec{F}_y$ はこの近似で一定とみなせるので、案内中心は式 (2.22) に従って

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{q} \frac{1}{B^2} \left(-\frac{1}{2} q r_L^2 \omega_c \frac{\partial B}{\partial y} \right) B = -\frac{1}{2} r_L^2 \omega_c \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y} \quad (2.37)$$

の大きさで磁場に垂直方向にドリフトする。

一般化すると grad B ドリフトは次のように与えられる。

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.38)$$

ここで ω_c は式 (2.9) で定義したサイクロトロン周波数で符号を含む。 ω_c の表式を代入すると grad B ドリフトは

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{1}{qB} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.39)$$

と書け、 q と m とに依存していることがわかる。電子とイオンに対してドリフトの向きは丁度逆であり、大きさはイオンの grad B ドリフトの方が電子のそれよりも $m_i/(Z_i m_e)$ 倍だけ大きい。grad B ドリフトは荷電分離を生ずる。

2) 曲率ドリフト

磁力線に曲率がある場合の荷電粒子の軌道を考える。例えばトカマク装置ではトロイダル磁場は主半径を曲率半径として磁力線が曲がっている。荷電粒子の磁力線方向の速さを $v_{\parallel}$ とする。磁力線の曲率半径を $\vec{R}_c$ 、曲率の方向を曲率中心から外に向かうものとする、粒子は遠心力

$$\vec{F}_{cf} = m v_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (2.40)$$

を感じる。ラーモア半径と比較すると R_c はずっと大きい場合を考える。このようなときは、式 (2.35) 以下の議論により、 $\vec{F}_{cf}$ は一定とみなせる。従って一様な外力のある場合のドリフトの式 (2.22) より、粒子は次の式に従って磁場に垂直方向に曲率ドリフトを行う。

$$\vec{v}_c = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_{cf} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.41)$$

このドリフトは電荷 q と質量 m を含むので、電子とイオンとではドリフトの向きは正反対で、大きさはイオンの方が $m_i/(Z_i m_e)$ 倍だけ大きい。

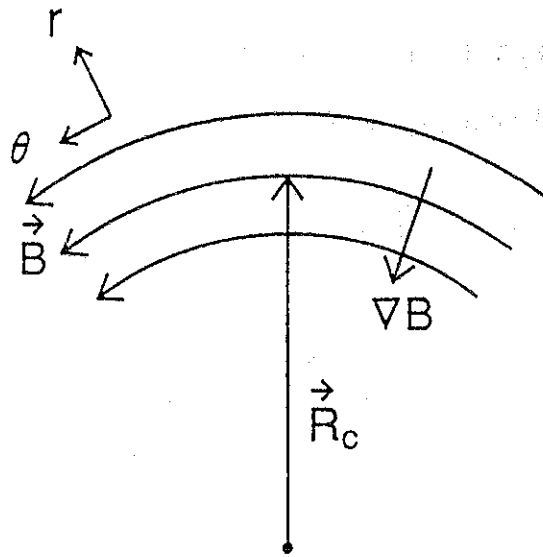


図 2.4 曲率を持つ磁場

磁力線が湾曲すると必ず ∇B が生ずる。すなわち曲率ドリフトに必ず grad B ドリフトが加わる。簡単のため真空磁界を考えるこの時、 $\nabla \times \vec{B} = 0$ が成立する。円筒座標 (R, ϕ, Z) を考え $\vec{B}$ は ϕ 成分のみ持ち $\vec{B} = (0, B_\phi, 0)$ とする。すなわち図 (2.4) のように、 B_ϕ は曲率半径 R_c で湾曲しているとする。 B の勾配は、 $\nabla B = -|\nabla B| \vec{e}_R$ であり、 $(\nabla \times \vec{B})_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_\phi) = 0$ より B_ϕ すなわち $|\vec{B}|$ は $|\vec{B}| = B_\phi \propto 1/R_c$ となり

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (2.42)$$

が成立する。この時 grad B ドリフトは式 (2.39) より

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{1}{qB} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{1}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (2.43)$$

となる。式 (2.39) のドリフトと式 (2.43) のドリフトをあわせて、真空湾曲磁場中でのドリフトは

$$\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2) \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \quad (2.44)$$

で与えられる。

ドリフト $\vec{v}_B$ は q と m に依存するので、電子とイオンとでドリフトの向きは正反対でそのため荷電分離を引き起こす。ドリフトの大きさは $m_i \gg m_e$ であるので $|v_{Bi}| \gg |v_{Be}|$ でありイオンの方がずっと大きい。曲率ベクトル $\vec{R}_c$ は

$$\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = -(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} \quad , \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} \quad (2.45)$$

であるので $\vec{v}_c$ は

$$\vec{v}_c = \frac{m v_{\parallel}^2}{q B^2} \vec{B} \times (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (2.46)$$

とも書ける。

(3) 粒子軌道とトーラス

1) 案内中心の運動

一様な磁場のもとでは、荷電粒子はある磁力線の周りに旋回運動しながら磁力線に沿って等速運動する。すなわち磁力線の周りにらせん運動をし、旋回を中心、すなわち案内中心は磁力線に沿って走るだけで磁力線に垂直方向には動かない。電場 $\vec{E}$ が存在したり、磁場が不均一であると、粒子は磁力線を横切ってドリフトする。今、ラーモア半径 r_L が考えているプラズマの特徴的長さ（プラズマ半径や、密度勾配長、温度勾配長、磁場の変化する空間的尺度など）よりずっと小さいとすると、粒子の運動をサイクロトロン周期で平均した案内中心の運動を論ずれば充分であることが多いだろう。このような案内中心の運動方程式は、磁場を横切るドリフトが、旋回運動と比べて充分遅ければ妥当なものとな

る。案内中心の運動は、磁力線方向の運動と磁場を横切るドリフトから成るので、もし、電場 $\vec{E}$ と磁場の曲がり、不均一が存在するとすると、真空場（電流が存在しない）では次のように書ける。

$$v_G = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3} + \frac{m}{q} v_{\parallel}^2 \frac{\vec{B} \times (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b}}{B^2} \quad (2.47)$$

ただし、 $\vec{b} = \vec{B}/B$ である。

プラズマ粒子は平均として熱速度 v_T の速さで走っている。粒子はおおよそ $v_{\parallel} \sim v_T$ の速さで磁力線に沿って走る。磁力線の周りにはおおよそ $v_{\perp} \sim v_T$ の速さでラーモア運動をしている。イオンについて案内中心の運動、すなわち磁場を横切るドリフトの大きさを考えてみる。イオンの熱速度は

$$v_{Ti} = \left(\frac{2T_i}{m_i} \right)^{1/2} = 1.38 \times 10^4 \left(\frac{T_i}{A_i} \right)^{1/2} \quad [\text{m/s}] \quad (2.48)$$

で与えられる。ただし A_i は考えているイオンの質量数でイオン温度 T_i はeV単位である。例として、大半径 $R = 1\text{m}$ 、小半径 $a = 0.2\text{m}$ 、 $T_e = T_i = 500\text{eV}$ 、 $B = 2\text{T}$ 、 $n_e = n_i = 3 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ 、 $Z_i = 1$ 、 $A_i = 1$ のトーラス・プラズマを考える。イオンの熱速度の大きさは、 $v_{Ti} = 3.09 \times 10^5\text{m/s}$ となる。プラズマ中のポテンシャルを Φ 、電場を E とし、 $e\Phi$ は温度の2倍程度とすると($e\Phi \sim 2T \sim 1000\text{eV}$)、電場は $E \sim \frac{\Phi}{a} = \frac{1000}{0.2} = 5 \times 10^3\text{V/m}$ 程度で、 $E \times B$ ドリフトの大きさは、

$$v_E = \frac{E}{B} = \frac{5 \times 10^3}{2} = 2.5 \times 10^3\text{m/s} \quad (2.49)$$

となる。 ∇B ドリフトの大きさは

$$|v_{\nabla B}| = \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{|\vec{B} \times \nabla B|}{B^3} \sim \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{e} \frac{1}{RB} \sim \frac{\frac{3}{2} T}{e} \frac{1}{RB} = 500 \frac{1.5}{1 \times 2} = 375\text{m/s} \quad (2.50)$$

程度で、湾曲ドリフトの大きさは

$$|\vec{v}_R| = \frac{m}{q} v_{\parallel}^2 \left| \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \right| \sim \frac{m v_{\parallel}^2}{e} \frac{1}{RB} \sim \frac{3T}{e} \frac{1}{RB} = 750\text{m/s} \quad (2.51)$$

である。従って $v_{\parallel} \sim v_T$ であるので

$$v_{\parallel} \gg v_G \quad (2.52)$$

であることがこの例から明かである。。すなわち、磁界を横切るドリフトは、磁力線に沿う粒子の運動や旋回運動と比較すると非常に遅い運動である。粒子は（周回運動をしながら）殆ど磁力線に沿って走りながら磁力線に垂直方向にゆっくりドリフトしている。

2) 単純トーラス

磁場閉じ込め核融合装置にはいろいろな方式がある。トカマクや RFP（逆転磁場ピンチ）のような軸対称系、ヘリオトロンやステラレータ、タンデム・ミラーなどの非軸対称系に分類される。あるいはヘリカル系やトカマクのようにドーナツ状の容器にプラズマが閉じ込められるトーラス系と、ミラーやカusp磁場を用いるオープン系とに分類できる。ここではトーラスについて考える。図 2.5 にトーラスを上から見た図と横断面図を示す。

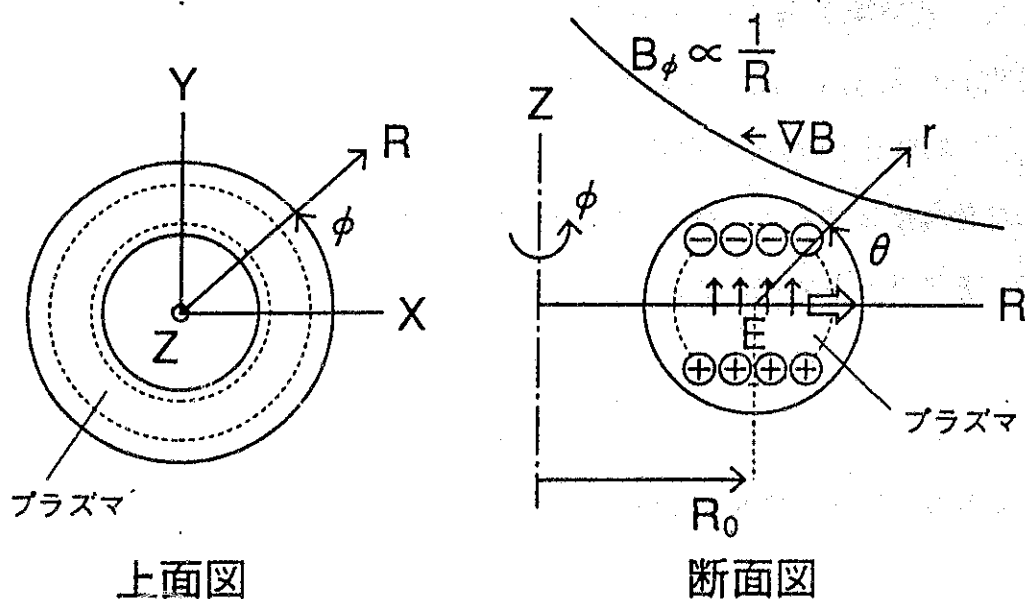


図 2.5 トーラス概念図

図 2.5 では簡単のためトーラス断面図を円とし、その中のプラズマの断面も円とした。Z 軸をトーラス中心軸と呼び、Z 軸を周る ϕ 方向をトロイダル方向、あるいはトーラス方向

という。断面図においてプラズマの中心を周る θ 方向をポロイダル方向と呼ぶ。断面図においてプラズマ中心からの距離 r を小半径、また、 Z 軸を中心とする円の半径 R を大半径という。ある点における r と R の比、 R/r をアスペクト比という。断面図において $r = a_p$ がプラズマの境界とすると、 a_p はプラズマ半径を表す。 Z 軸からプラズマ中心までの R 方向の距離を R_0 とすると、 R_0 をプラズマ主半径といい、 R_0/a_p をプラズマ・アスペクト比と呼ぶ。

今、トーラスにはトロイダル方向にのみ磁場が存在するとしよう。このようなトーラスを単純トーラスという。 Z 軸に沿って電流を流すとトロイダル磁場 B_ϕ が作れる。実際にはトーラス表面にポロイダル方向にコイルを巻き（トロイダル・コイルという）通電すると B_ϕ が生成される。トロイダル磁場はアンペアの周回定理により

$$B_\phi = \frac{B_0 R_0}{R} \quad (2.53)$$

となる。ここでは真空場のみを考えた。 $R = R_0$ で $B_\phi = B_0$ となるようにこの式は表現されているが、重要なことは、 $B_\phi \propto 1/R$ 、すなわち、トロイダル磁場の大きさは主半径 R に逆比例する事である。トーラスでのプラズマ閉じ込めにとって、このトロイダル磁場の不均一性は決定的なものである。単純トーラスでは ∇B も $\vec{R}_c$ も存在し

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = -\frac{1}{R}\vec{e}_R \quad (2.54)$$

である。トロイダル磁場を ϕ 方向にとると($B_\phi = -B\vec{e}_\phi$)、曲率ドリフトも $\text{grad } B$ ドリフトも式(2.47)よりイオンは $-Z$ 方向、電子は $+Z$ 方向であることがわかる。この結果、図2.5のように荷電分離が生じ、 $+Z$ 方向に電場 E が生成され、その結果 $E \times B$ ドリフトでイオンも電子もトーラス外向きに(R 方向)に押し出されてしまう。このように単純トーラス（トロイダル磁場のみが存在）では平衡はなくプラズマは閉じ込められない。

プラズマを容器内に閉じ込めるためには、図2.5のように上下に分離した電荷を短絡させてやればよい。このためにはトーラス上部($Z > 0$)と下部($Z < 0$)とで磁力線が連結していればよい。もし、ポロイダル方向(θ 方向)に磁場 B_θ が存在すれば、 B_ϕ と B_θ とが重

なりトーラス方向にらせん状の磁力線を形成する。これによりプラズマ上部に帯電した電子は磁力線に沿って走り、プラズマ下部のイオン電荷を短絡する。こうすればZ方向の電場も打ち消されプラズマは容器内に閉じ込められるであろう。このようにポロイダル磁場を加えて磁場にひねりを与えることを、回転変換をつくるという。トカマクではトーラス方向にプラズマ電流を流すことにより B_θ を作り回転変換を与え平衡を得ようとする。ヘリカル系では外部ヘリカル・コイルに電流を流すことにより磁場にひねりを加える。このように磁場にひねりをつけること、あるいは回転変換を与えることがトーラス装置によるプラズマ閉じ込めの原理である。

(4) ミラー場

1) 磁気ミラー

図 2.6 のように 2 つのコイルに同方向に電流を流すとミラー磁場が作れる。この磁場は θ に関して対称で、磁場 $\vec{B}$ は殆ど Z 方向を向いているが、Z 方向に沿って $\vec{B}$ の大きさが変化する。すなわちコイル近傍で B は大きく、2 つのコイルのまん中で B は最小になる。

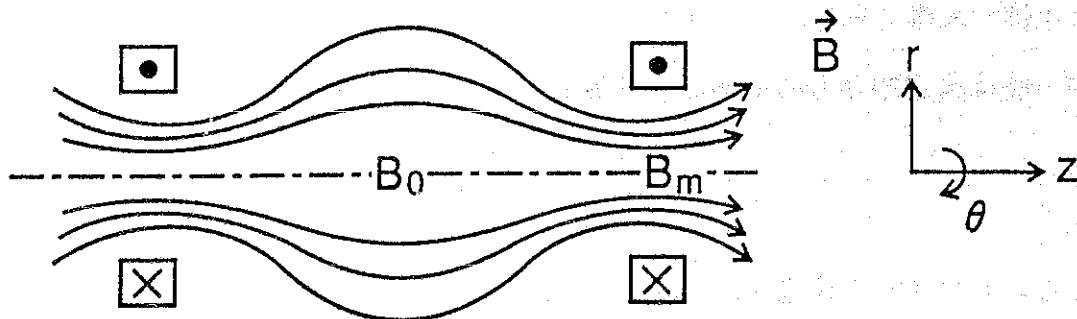


図 2.6 ミラー場

対称軸であるので、 $\partial/\partial\theta = 0$ であり $B_\theta = 0$ である。 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ は円筒座標 (r, θ, z) で

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.55)$$

と書け、 B_z が z 方向に変化すれば必ず B_r が存在することがわかる。 $\partial B_z/\partial z$ が $r=0$ で与えられ、これが r とともに大きく変化しないとすと B_r は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} rB_r &= -\int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial r} dr \simeq -\frac{1}{2}r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0} \\ B_r &= -\frac{1}{2}r \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0} \end{aligned} \quad (2.56)$$

r 方向の ∇B は案内中心の θ 方向のドリフトを生ずる。半径 r 方向のドリフトはない。ローレンツ力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ の成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_r &= qv_\theta B_z \\ F_\theta &= q(-v_r B_z + v_z B_r) \\ F_z &= -qv_\theta B_r \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

F_r と F_θ の第1項は普通のラーモア運動を起こすもので、 F_θ の第2項は $r \cong 0$ で消える。軸より離れた所では F_θ が r 方向のドリフトを引き起こすが、このドリフトは単に案内中心を $\vec{B}$ 方向に沿わせているだけである。 F_z の式は、 B_r により z 方向に力が働くことを示している。式(2.56)を使うと

$$\begin{aligned} F_z &= -qv_\theta B_r \\ &= +qv_\theta \frac{1}{2}r B'_{zo} \quad (B'_{zo} \equiv [\partial B_z/\partial z]_{r=0}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

となる。簡単のため旋回中心が軸上にある粒子を考える。 v_θ は旋回の間一定で、 $v_\perp = \text{const.} > 0$ とすると電子に対して $v_\theta = v_\perp$ 、イオンに対して $v_\theta = -v_\perp$ になる。平均的な力は、 $r = r_L$ であるので、

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2}qv_\perp r_L B'_{zo} = \mp \frac{1}{2}q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} B'_{zo} = -\frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.59)$$

となる。磁気モーメントを使うと

$$\bar{F}_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.60)$$

となり、一般的には

$$\vec{F}_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B \quad (2.61)$$

と書くことができる。 $\nabla_{\parallel}$ は磁気線に沿う微分を示す。これは粒子が B の大きい方へ走ると進行方向と逆向きの力を受けることを意味する。

2) μ の保存

式(2.61)で表される $\vec{F}_{\parallel}$ は、 B の強くなる方向と逆の方向に力が働く事を示しており、粒子は B の弱い所へ行こうとすることがわかる。運動方程式の $\vec{B}$ に沿った成分は

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.62)$$

であり、この式から

$$v_{\parallel} = \frac{ds}{dt} \quad (2.63)$$

$$mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{ds}{dt} \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (2.65)$$

が成立する。粒子のエネルギー保存の式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \right) = 0 \quad (2.66)$$

と比較すると

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (2.67)$$

が成立することがわかる。すなわち、粒子の運動に沿って $\mu = \text{const.}$ であり μ は保存されることが示された。

単一荷電粒子の磁場に平行方向の速度 $v_{\parallel}$ は(静電場が存在していないとすると)

$$v_{\parallel} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (W - \mu B)} \quad (2.68)$$

で与えられる。 $W = mv^2/2$ (粒子の全運動エネルギー)は保存量で($W = \text{const.}$)、符号 $\pm$ は磁場に平行方向か反平行方向かを示している。粒子が B の弱い所から出発して、 B の大きい方へ向かったとする。 $\mu = \text{const.}$ であるので粒子が進むにつれ μB が大きくなり、従って $v_{\parallel}$ が減少する。 W が一定 ($v^2 = \text{一定}$) であるので比 $v_{\perp}/v_{\parallel}$ は大きくなる。粒子がさらに大きな B の所へ進み $W = \mu B$ になったとすると $v_{\parallel} = 0$ となりここで粒子は反射される。これがミラー場における粒子閉じ込めの原理である。

3) ミラー比

図 2.6 においてある粒子が磁場の弱い所 (B_0 近傍) から磁場 $\vec{B}$ に完全に平行に走ったとする。この時 $\mu = 0$ で粒子は何の力も受けない。このような粒子は反射されることなくプラズマ端を通りすぎ壁に当たってしまうだろう。また、 $v_{\perp}/v_{\parallel}$ が小さい粒子は B の大きい方へ進んで B の最大値 B_m の所に達しても $W = \mu B$ とならず ($v_{\parallel} = 0$ とならず)、そのまま逃げてしまうであろう。 $v_{\perp}/v_{\parallel}$ が大きくある値以上であれば $B \leq B_m$ の所で $v_{\parallel} = 0$ となり、粒子は反射され閉じ込められるであろう。

図 2.6 のミラー場の中心で B は最小値 B_0 を持つとする。ここで $v_{\perp} = v_{\perp 0}$, $v_{\parallel} = v_{\parallel 0}$ の粒子が $B = B'$ ($B_0 < B' \leq B_m$) で $v_{\perp} = v'_{\perp}$, $v_{\parallel} = 0$ となり反射されるとする。 μ の保存とエネルギーの保存とより

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}m(v'_{\perp})^2}{B'} \quad (2.69)$$

$$(v'_{\perp})^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 \equiv v_0^2 \quad (2.70)$$

が成立する。これらより

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^2}{(v'_{\perp})^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \equiv \sin^2 \theta \quad (2.71)$$

の関係式が得られる。 θ は B が最も弱い点におけるピッチ角である。 θ が小さすぎると B' は B_m を越え、粒子は反射されず逃げてしまう。閉じ込められる粒子の最小ピッチ角 $\theta_{\min}$ は $B' = B_m$ で与えられるものである。すなわち、

$$\sin^2 \theta_{\min} = \frac{B_0}{B_m} \equiv \frac{1}{R_m} \quad (2.72)$$

で与えられる $\theta_{\min}$ より大きな θ を持つ粒子のみが反射し閉じ込められる。 R_m のことをミラー比という。 B_0 における速度空間を図 2.7 のように書く。 v_z 軸と $\theta_{\min}$ の角度をなす円錐の中の粒子はミラー場において反射されることなく逃げてしまう。この円錐をロス・コーンまたは損失円錐という。

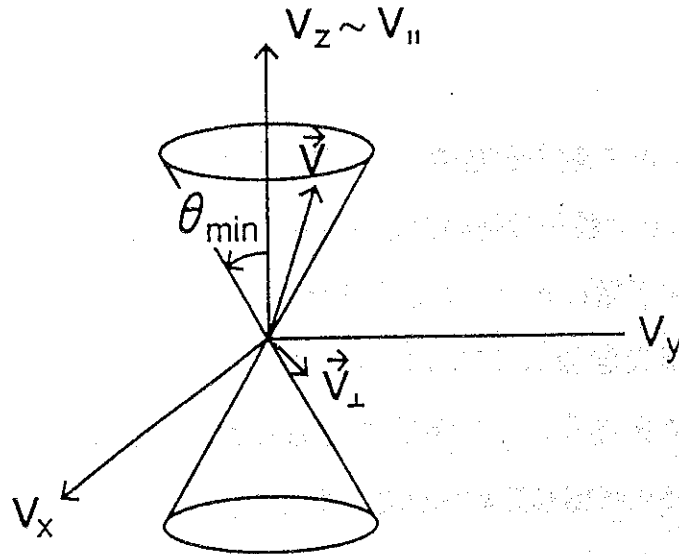


図 2.7 ロス・コーン

4) フェルミ加速と断熱圧縮

ミラー磁場は($v_{\perp}$ の大きい) 粒子を反射させることができるので磁気鏡と呼ばれる。二つの磁気鏡を互いにゆっくりと接近させていくと、粒子は反射されるたびに加速される。磁場の大きさは軸に沿って一定で磁気鏡の接近により変化しないとし、接近速度 $V = -dL/dt$ は粒子の磁力線方向の速さ $v_{\parallel}$ よりずっと小さいとする。粒子は1回の周期運動ごとに $2V$ だけその速さを増す。すなわち、

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{2L} \cdot 2V = -\frac{v_{\parallel}}{L} \frac{dL}{dt} \quad (2.73)$$

これより

$$Lv_{\parallel} = \text{const.} \quad (2.74)$$

が成立する。一方、二つの磁気鏡の間のプラズマ粒子の総数は一定、すなわち、 n を密度とすると $Ln = \text{一定}$ であるので、粒子の平行方向のエネルギーは

$$W_{\parallel} \propto \frac{1}{L^2} \propto n^2 \quad (2.75)$$

となる。磁気鏡の接近により L が短くなるにつれ n は増加するので $W_{\parallel}$ は大きくなっていく。これをフェルミ加速という。

圧力を p 、体積を V とすると断熱変化では

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \quad (2.76)$$

である。ここに γ は比熱比で自由度 f と

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \quad (2.77)$$

の関係がある。 $p = nT$ であり、 $nV = \text{一定}$ とすると

$$T \propto n^{\gamma-1} \quad (2.78)$$

の関係が成立する。 $W_{\parallel} = T/2$ であるのでフェルミ加速は $\gamma = 3$ 、すなわち自由度 $f = 1$ の断熱変化に相当する。今、磁場を時間的に強めていく事を考える。即ち磁場を断熱圧縮する。 $\mu = W_{\perp}/B = \text{一定}$ だとすると

$$W_{\perp} \propto B \quad (2.79)$$

に従って垂直方向のエネルギーが増加していく。粒子間に少し衝突があれば B に比例して大きくなる旋回エネルギーは熱エネルギーになりプラズマは加熱される。プラズマ粒子は磁場にほとんど巻き付いているので圧縮中 $BV = \text{一定}$ とみてよい。従って $W_{\perp}$ は

$$W_{\perp} \propto B \propto n \quad (2.80)$$

のように増加する。式 (2.78) からこれは $\gamma = 2$ 、すなわち自由度 $f = 2$ の断熱変化とみなせる。

§ 3 運動論

(1) ボルツマンの式

1) 分布関数

空間座標 $\vec{x} = (x, y, z)$ と速度座標 $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ で定義される 6 次元位相空間での微少体積 $d\Omega$

$$d\Omega = d\vec{x}d\vec{v} = d^3x d^3v = dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (3.1)$$

中に含まれる粒子数を

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\Omega = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (3.2)$$

と書き $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ をその粒子についての分布関数と呼ぶ。微少体積 $d\Omega$ 内ではプラズマはぬりつぶされており、連続体として取り扱われる。

2) ボルツマンの式の導出

分布関数 f を支配する式は一般にボルツマンの式と呼ばれる。ここではごく簡単に直感的にそれを導出する。

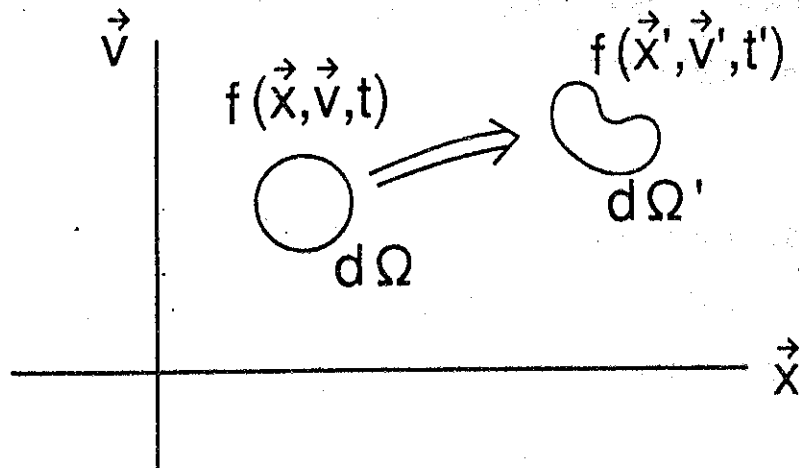


図 3.1 6 次元位相空間

図 3.1 のように、時刻 t に $d\Omega$ に $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\Omega$ 個の粒子があり、粒子の運動の結果微小時間 Δt 後に $d\Omega'$ に移ったとする。このあいだ粒子間の衝突や粒子の生成、消滅がないとすると

$$f(\vec{x}', \vec{v}', t')d\Omega' = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\Omega \quad (3.3)$$

が成立するはずである。 Δt 後には

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \Delta\vec{x} \\ \vec{v}' &= \vec{v} + \Delta\vec{v} \\ t' &= t + \Delta t \\ d\Omega' &= Jd\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

が成立している。ただし、 J はヤコビアンである。 $\Delta t, |\Delta\vec{x}|, |\Delta\vec{v}|$ を微小量とし、 $f(\vec{x}', \vec{v}', t')$ を $\vec{x}, \vec{v}, t$ の周りに展開すると

$$\begin{aligned} f(\vec{x}', \vec{v}', t') &= f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{v} + \Delta\vec{v}, t + \Delta t) \\ &\simeq f(\vec{x}, \vec{v}, t) + \Delta\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ヤコビアン J は $(\Delta t)^2$ 以上を無視すると $J = 1$ である。故に

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \Delta\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.6)$$

が成立し、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.7)$$

が成立する。今、粒子に加わる力 $\vec{F}$ を電磁場とすると

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。よって次の式が導ける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \nabla_v \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$$

もし $d\Omega \rightarrow d\Omega'$ の時に粒子の衝突や生成、消滅があればこの変化率を $\delta f/\delta t$ と書くと

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f = \frac{\delta f}{\delta t} \quad (3.10)$$

と書ける。これをボルツマンの式という。

一般に、電子、イオン、不純物イオン等はそれぞれ質量と電荷が異なり、また緩和時間が異なるので、それぞれの粒子種 a に対する 1 体の分布関数 f_a に対してボルツマンの式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \vec{v} \cdot \nabla f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) + \frac{q_a}{m_a}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{\delta}{\delta t} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (3.11)$$

$$(a = e, i, I, \dots)$$

粒子種 a の密度 n_a 、電荷密度 ρ_e 、電流密度 $\vec{J}$ はそれぞれ次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} n_a(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \\ \rho_e(\vec{x}, t) &= \sum_a q_a n_a(\vec{x}, t) \\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \sum_a q_a \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f_a(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$\rho_e, \vec{J}$ がマックスウエルの式で用いられ $\vec{E}, \vec{B}$ が決められる。この $\vec{E}, \vec{B}$ はボルツマンの式で f_a を決める。このようにしてボルツマンの式とマックスウエルの式はお互い結合しており、一つの閉じた方程式系を形成する。ここで注意すべきことは、プラズマは微小位相空間 $d\Omega$ の中でぬりつぶされ連続体として扱われているということである。 f はスムーズな分布関数であり、従って $\vec{E}, \vec{B}$ もスムーズな電磁場である。衝突による極端に波長の短い電場等は右辺 $\delta f/\delta t$ に押し込められている。

3) ブラソフの式

ボルツマンの式で右辺 $\delta f/\delta t$ が無視できる場合は

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{x} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a = 0 \quad (3.13)$$

となり、これをブラソフの式という。ある現象の特徴的時間が衝突時間より十分短いときこのように $\delta f/\delta t$ が無視できる。ブラソフの式には単一体としての粒子の特性は全くない。個々の粒子の単一体としての特性は m, q, n, T により特徴づけられる。ただし m は粒子の質量、 q は電荷、 n は密度、 T は熱運動エネルギーである。今、仮想的に粒子をどんどん分割していくことを考える。すなわち $m \rightarrow 0, q \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ となる極限まで粒子を分割していく。ただし、 nm, nq, nT は一定の有限値に留めておく。当然、Debye 半径 λ_D とプラズマ振動数 ω_p は有限である。これを Rosenbluth チョップという [1]。この極限は粒子性のない流体極限であり、ブラソフの式はこの意味で流体極限で成立するものである。

Vlasov の式は 1 階偏微分方程式であり、その特性方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \frac{df}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

であり、これらの式とブラソフの式は等価である。この運動方程式では一つの粒子は、すべての粒子が作り出す平均の場の中で運動する事を表している。

4) BBGKY の理論

平衡状態からずれた N 体の粒子から成る統計力学系の運動論的方程式は Liouville の方程式で与えられる。これは $6N$ 次元位相空間における N 体の分布関数が満たす方程式である [2]。Liouville の式を積分すると $(N-1)$ 体分布関数に対する式を得ることができ、これを積分すると $(N-2)$ 体分布関数に対する式が得られる。この手続きを繰り返すと 2 体分

布関数に対する式 $f(\vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{x}_2, \vec{v}_2, t)$ が得られ、最後に 1 体分布関数に対する式 $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ が得られる。このようにすると、1 体分布関数は 2 体分布関数を含み、2 体分布関数は 3 体分布関数を含むという階層方程式系が得られる。階層方程式系をプラズマパラメータ $g \ll 1$ で展開する。詳細は省略するが、 $g \rightarrow 0$ の極限で Vlasov の式が得られ、 g の 1 次までとると、ボルツマンの式が得られる。ボルツマンの式では右辺に 2 体の相関が入っている。このように Liouville の式から 1 体分布関数に対する式を導く理論を BBGKY の理論という [3,4]。

(2) マックスウェルの式

電磁気学の教科書に普通にかかれているマックスウェルの式（静止状態の等方性の固体又は液体の媒体を対象としていることが多い）は次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{J}_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{ext} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$\vec{J}_{ext}, \rho_{ext}$ は外部（又は真の）電流、電荷密度で、磁化電流や分極電流は含まれない。分極電流は $\partial \vec{D} / \partial t$ の中に、磁化電流は $\nabla \times \vec{B}$ のかわりに $\nabla \times \vec{H}$ を用いた事により陰に含まれている。電気変位と $\vec{D}$ と電場強度 $\vec{E}$ は誘電率 ϵ で、磁束密度 $\vec{B}$ と磁場強度 $\vec{H}$ は透磁率 μ で結ばれている。

しかし、プラズマでは分極電荷、分極電流が主役をなす事も多く、これらを全部陽に含んだ全電荷密度、全電流密度を用いる方がより直接的で便利であり扱いに誤りが生じない。また、プラズマ中の物理現象は全て充分速く、従って透磁率 μ は意味をなさず常に

$\mu = \mu_0$ としてよい [5]。プラズマ物理で普通使われるマックスウェル方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}) \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

のように記述される。 ρ_e は電荷密度、 $\vec{J}$ は全電流密度を表す。 c は光速で $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ の関係がある。

気体プラズマは古典的・非相対論的物理で殆どの場合記述する事ができ、その基礎方程式系はボルツマンの式 (3.10)、マックスウェルの式 (3.16)、密度、電荷、電流を決める式 (3.12) から成る。

(3) プラズマ振動とランダウ減衰

無限に一様に拡がったプラズマを考え、そのプラズマに何か摂動を加えた時どのような波が発生し、その波がどのように減衰するか（あるいは成長するか）調べる。次の仮定をおく。1. 外部場はない ($\vec{B}_0 = 0, \vec{E}_0 = 0$)。2. 2体衝突は無視する。(速い振動を考えるので $\omega \gg \nu$ 、従って $\nu \rightarrow 0$ の極限を考える。) 3. イオンはバックグラウンドとし、その運動は考えない。つまり振動が速すぎて重いイオンはついて行けない。第0近似で $n_{e0} = Z_i n_{i0}$ である。4. 磁場の摂動 $\vec{B}$ は無視し静電場のみ考える。これを静電近似という (§6 で述べる)。以下ランダウの論文 [6] に従って記述する。

電子の分布関数を $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ とすると Vlasov の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.17)$$

が成立する。 f は零次と摂動分の1次に分ける。

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t) \quad (3.18)$$

f_0 は無限に広がったプラズマ電子に対する速度空間での分布関数（例えばマックスウェル分布）であり、 f_1 は摂動を受けたため生じた摂動部分の分布関数で $|f_0| \gg |f_1|$ である。（加える摂動は充分小さいとする。）ブラソフの式を線形化する。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \vec{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.19)$$

$\vec{E}_1$ は摂動を受けた結果生じた電場で 1 次の微少量である。ポアッソンの式は

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e, \quad \vec{E}_1 = -\nabla \varphi \quad (3.20)$$

から次のように与えられる。

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad (3.21)$$

ここで ρ_e は摂動を受けて分極した電荷密度で、定義式 (3.12) から

$$\begin{aligned} \rho_e &= Z_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_e d^3v \\ &= Z_i \int_{-\infty}^{\infty} f_{i0} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e0} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \\ &= Z_i n_{i0} - n_{e0} - e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで f_{i0} はイオンの分布関数（イオンの分布関数には摂動部分はない）、 f_{e0} は電子の分布関数で f_1 は式 (3.18) の摂動の分布関数である。 n_{e0} と n_{i0} は零時での電子とイオンの密度で零次では $Z_i n_{i0} = n_{e0}$ であるから

$$\rho_e = -e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3v \quad (3.23)$$

$$(d^3v = dv_x dv_y dv_z = d\vec{v})$$

結局 1 次の式は、以下簡単のため f_1 を f と書くと、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \varphi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.24)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f d^3v \quad (3.25)$$

となる。初期にある決まった非平衡な分布関数が与えられたとしてその結果生ずる摂動を上記2つの式(3.24)と(3.25)を解いて考える。摂動は多数の波数 $\vec{k}$ を持った波の重ね合わせであるので(線形理論)、波数 $\vec{k}$ を持つ一つの波のみ考えれば充分である。 $\vec{k}$ は境界により決まる量で実数である(プラズマが無限に広がっていると連続スペクトルになる)。摂動 f と φ は $\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]$ に比例する。すなわち、

$$\begin{aligned} f(\vec{v}, \vec{r}, t) &\propto f_{\vec{k}}(\vec{v}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ f(\vec{v}, \vec{r}, t=0) &\propto g_{\vec{k}}(\vec{v}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \varphi(\vec{r}, t) &\propto \varphi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$\vec{k}$ の方向を x 軸にとる。方程式系は v_y, v_z で積分してしまうと x 方向の1次元問題となる。 $u \equiv v_x$ とし、 $f_{\vec{k}}, g_{\vec{k}}, \varphi_{\vec{k}}$ を以下(混同しない限り) f, g, φ と書くことにすると、式(3.24)と(3.25)は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + iku f - i \frac{e}{m} k \varphi \frac{\partial f_0}{\partial u} = 0 \quad (3.27)$$

$$k^2 \varphi = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f du \quad (3.28)$$

となる。これらの式をラプラス変換する。 $f(u, t)$ のラプラス変換は

$$f_p(u) = \int_0^{\infty} f(u, t) e^{-pt} dt \quad (R_e(p) > 0) \quad (3.29)$$

で定義され、この逆変換は

$$f(u, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} f_p(u) e^{pt} dp \quad (3.30)$$

で与えられ、 φ に対しても同様に定義できる。

$$\varphi_p = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt \quad (R_e(p) > 0) \quad (3.31)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \varphi_p e^{pt} dp \quad (3.32)$$

ラプラス変換は $R_e(p) > 0$ の時のみ定義できる。

線形化したブラソフの式 (3.27) をラプラス変換すると

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t} e^{-pt} dt + iku \int_0^\infty f e^{-pt} dt - i \frac{ek}{m} \frac{\partial f_0}{\partial u} \int_0^\infty \varphi e^{-pt} dt = 0 \quad (3.33)$$

が得られる。ここで第1項は部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t} e^{-pt} dt &= f e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty f p e^{-pt} dt \\ &= -f(t=0) + p f_p \\ &= -g + p f_p \end{aligned} \quad (3.34)$$

従って

$$(p + iku) f_p - ik \frac{e}{m} \varphi_p \frac{\partial f_0}{\partial u} = g \quad (3.35)$$

となり、ポアッソンの式 (3.28) から

$$k^2 \varphi_p = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty f_p du \quad (3.36)$$

を得る。式 (3.35) から

$$f_p(u) = \frac{1}{p + iku} \left\{ g(u) + ik \frac{e}{m} \varphi_p \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \right\} \quad (3.37)$$

が得られ、この式を (3.36) に代入すると

$$\varphi_p = \frac{e}{\epsilon_0 k^2} \frac{\int_{-\infty}^\infty g(u) \frac{1}{p + iku} du}{1 - i \frac{e^2}{m \epsilon_0 k} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_0(u)}{\partial u} \frac{1}{p + iku} du} \quad (3.38)$$

を得る。式 (3.37) と (3.38) を逆変換すると問題の答が得られる。 f_p と φ_p は p の複素平面において $R_e(p) > 0$ (右半平面) でのみ意味がある。 u を複素数へ拡張し、 $R_e(p) \leq 0$ の左半平面へ解析接続することを考える。 u の積分路 C は $R_e(p) > 0$ の時、図 3.2(a) のように実軸に沿う。 $R_e(p) \leq 0$ では積分路 C は図 3.2(b), (c) のように積分路を取るとよい。

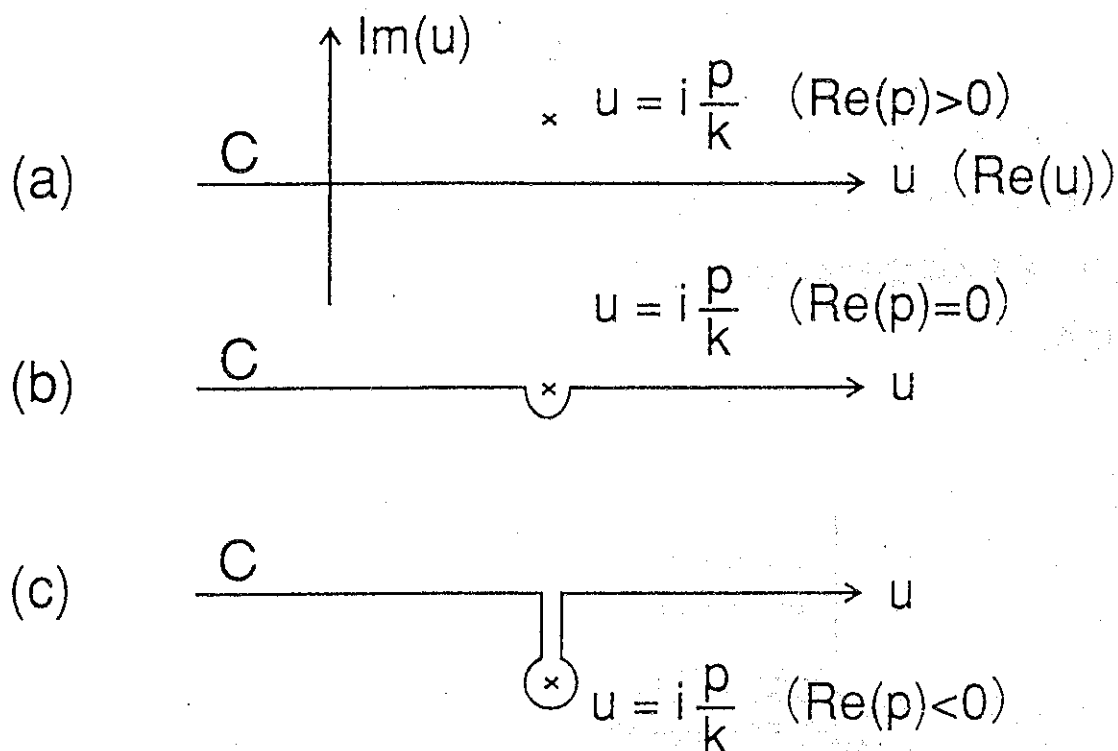


図 3.2 u の積分路

式 (3.38) における次の積分

$$I_g(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{1}{p + iku} du = \int_C g(u) \frac{1}{p + iku} du \quad (3.39)$$

では、積分路 C は $R_e(p)$ の正負に応じて上の図 (3.2) のように取る。ここで初期に与える分布 $g(u)$ は u の複素平面において、特異点を持たないと仮定する。 C に沿う u の積分は特異点 $u = ip/k$ を常に上に見るので、 $g(u)$ が正則な関数である限り、積分 $I(p)$ は任意の p に対して特異点を持たない。式 (3.38) の中のもう一つの u の積分

$$I_f(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du = \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du \quad (3.40)$$

も同様に df_0/du が任意の u に対して特異点を持たないため (例えば f_0 がマックスウェル分布の時) C に沿って u の積分を行うと $I_f(p)$ も又正則な関数となる。従って $g(u)$ が特異

点を持たない限り、 φ_p の特異点、あるいは極は式(3.38)の分母=0のみからしか出ない。
すなわち

$$1 = \frac{e^2}{\epsilon_0 m k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \quad (3.41)$$

を満たす p が極となる。式(3.41)は分散式である。(ある与えられた k に対して p が決まる。) 例えば f_0 がマックスウェル分布の時全ての極は左半平面上 ($\text{Re}(p) \leq 0$) にある。

φ_p のラプラス逆変換は式(3.32)で与えられるが、この積分路は全ての極を左に見るように取る。

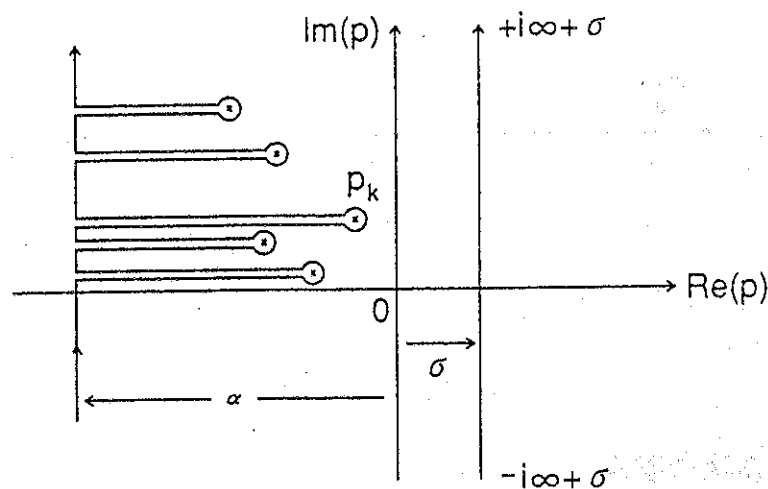


図 3.3 ラプラス逆変換の積分路

ここでx印は分散式(3.41)を満たす極である。再び解析接続により、積分路を上図(3.3)のように極を囲むよう変形する。極が1位であると

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \varphi_p e^{pt} dp = \sum_i R_i e^{p_i t} + \int_{-i\infty-\alpha}^{+i\infty-\alpha} \varphi_p e^{pt} dp \quad (3.42)$$

ここで R_i は i 番目の留数である。 α を充分大きくとると式(3.42)の第2項で $|R_c(p)|$ はいくらでも小さくする事ができこの積分はゼロにできる。また $t \rightarrow \infty$ の極限で右辺第1項

では一番大きな極 p_k の項のみ残る。従って $\varphi(t)$ は次のように振る舞う。

$$\varphi(t) = R_k e^{p_k t} \quad (3.43)$$

$p_k = -i\omega$ ($\omega = \omega_r + i\gamma$, ω_r と γ は実数) とおくと

$$\varphi(t) \propto e^{p_k t} \propto e^{-i\omega_r t + \gamma t} \quad (3.44)$$

のように振る舞う。 ω_r は振動数で γ は $\gamma > 0$ の時成長率、 $\gamma < 0$ なら減衰率を示す。

以上から、初期分布 $g(u)$ が u 複素平面で特異点を持たない限り、分散式 (3.41) を解いて (ある k に対する) p を得る事ができれば、問題は解決された事になる。分散式 (3.41) を次のように書く。

$$\begin{aligned} 1 &= i \frac{\omega_p^2}{k} \frac{1}{n_0} \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{p + iku} du \\ \omega_p &= \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} = \left(\frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ω_p は電子プラズマ振動数である。分散式 (3.45) を $k \rightarrow 0$ の極限で解く。特異点 $u = ip/k$ は大きさ $|u|$ が大きく、また df_0/du は $|u| \rightarrow \infty$ でゼロになると考えてよい (例えばマックスウェル分布)。従って式 (3.45) を解く第 1 近似として $u = ip/k$ の特異点を無視して、実軸に沿う積分のみで評価する。 $u \ll |ip/k|$ として式 (3.45) の $1/(p + iku)$ を展開する。

$$\frac{1}{p + iku} = \frac{1}{p(1 + iku/p)} \simeq \frac{1}{p} \left(1 - i \frac{ku}{p} - \frac{k^2 u^2}{p^2} + i \frac{k^3 u^3}{p^3} \right) \quad (3.46)$$

結果から明らかになるが $\omega_r \gg |\gamma|$ であるので展開の条件は

$$u \ll \left| i \frac{p}{k} \right| = \left| i \frac{R_e(p) + i I_m(p)}{k} \right| = \left| \frac{\omega_r}{k} + i \frac{\gamma}{k} \right| \simeq \frac{\omega_r}{k} \quad (3.47)$$

即ち $v_T \ll \omega_r/k$ に相当する ($v_T = \sqrt{2T_e/m_e}$: 電子の熱速度)。

零次の分布としてマックスウェル分布 (1次元)

$$f_0(u) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_T} \exp(-u^2/v_T^2) \quad (3.48)$$

を考える。式 (3.45) に式 (3.46) を代入し、このマックスウェル分布を使うと

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} \left(1 - \frac{k^2}{p^2} \frac{3}{2} v_T^2\right) \quad (3.49)$$

が得られる。 $1 \gg k^2 v_T^2 / p^2$ だから第 2 項の p^2 は ω_p^2 でおきかえてよい。また、 $v_T^2 / \omega_p^2 = 2\lambda_D^2$ ($\lambda_D = (\epsilon_0 T / n_0 e^2)^{1/2}$: デバイ半径) の関係を使うと分散式は (第 1 近似で)

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} + 3k^3 \lambda_D^2 \quad (3.50)$$

となる。

次に第 1 近似で無視した特異点 (極) $u = ip/k$ の寄与を考える。 $k \rightarrow 0$ の極限で $\gamma = R_e(p) \rightarrow 0$ と仮定する。(結果から γ は $k \rightarrow 0$ の時指数関数的にゼロになる。) 又、(3.50) から明かなように $k \rightarrow 0$ でも $\omega_r (= \omega_p)$ は有限の値に留まる。この仮定を保証するため積分路は図 3.4

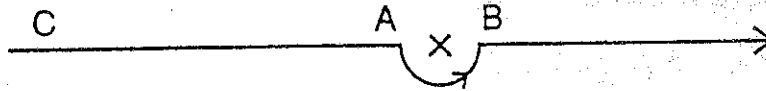


図 3.4 $k \rightarrow 0$ の極限での積分路

のように取る。点 A、B は $u = ip/k$ (×印) に充分近くかつ $|I_m(u)| = |\gamma|/k$ より充分大きく取る。分散式 (3.45) は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \int_C \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \\ &= \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{1}{u - ip/k} du + \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \int_{AB} \frac{df_0}{du} \frac{1}{u - ip/k} du \end{aligned} \quad (3.51)$$

と書ける。ここに右辺第 1 項は特異点を除く実軸に沿う積分を示し、第 2 項は半円 AB に沿う積分を示す。第 1 項は $1/(u - ip/k)$ を展開する事により既に計算されており式 (3.50) で与えられる。半円の積分は $\pi i \times \text{Residue}$ だから、式 (3.51) は式 (3.50) を考えると

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{p^2} + 3k^2\lambda_D^2 + \pi i \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{1}{n_0} \frac{df_0(u)}{du} \Big|_{u=ip/k} \quad (3.52)$$

が得られる。 $p = -i\omega_r + \gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ として式 (3.52) から ω_r と γ を求める。式 (3.52) の πi の項は高次であるので、ここでは $u = ip/k = \omega_r/k$ とおいてよい。 γ^2 を無視し、式 (3.52) の実数部をとると振動数が得られる。

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \omega_p^2 + 3k^2\lambda_D^2\omega_r^2 \simeq \omega_p^2 + 3k^2\lambda_D^2\omega_p^2 \\ \omega_r &= \omega_p \left(1 + \frac{3}{2}k^2\lambda_D^2\right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここではもちろん $k^2\lambda_D^2 \ll 1$ である。即ち、今考えている波動はその波長がデバイ長よりずっと長い。

虚数部をとると

$$\gamma = \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2 n_0} \frac{df_0(u)}{du} \Big|_{u=i\frac{\omega_r}{k}} \quad (3.54)$$

が得られる。 f_0 にマックスウェル分布を代入すると

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{k^3 \lambda_D^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} - \frac{3}{2}\right) \quad (3.55)$$

となる。 $k^2\lambda_D^2 \ll 1$ なので $\exp$ の中の $3/2$ は無視してもよい。 $\vec{k}$ の方向を x 軸に取ったので $k > 0$ であり、 $\omega_p > 0$, $\lambda_D > 0$ だから $\gamma < 0$ である。 $\varphi(t) \propto e^{\gamma t}$ であるから Maxwell 分布の場合、プラズマ振動は必ず減衰する。これをランダウ減衰と言う。

ランダウ減衰に関して次の3点を注意しておこう。

1. ランダウ減衰は、初期分布 $g(u)$ が複素 u 平面上に特異点を持たないと仮定した結果であり、そのため φ_p の特異点は分散式 (式 (3.38) の分母=0) からのみ出た。 $g(u)$ のこの仮定により分散式が解を与える。 $g(u)$ の選び方によっては分散式以外からも特異点があり、減衰しない解を得る事も可能である。

2. $f(u, t)$ は式 (3.37)

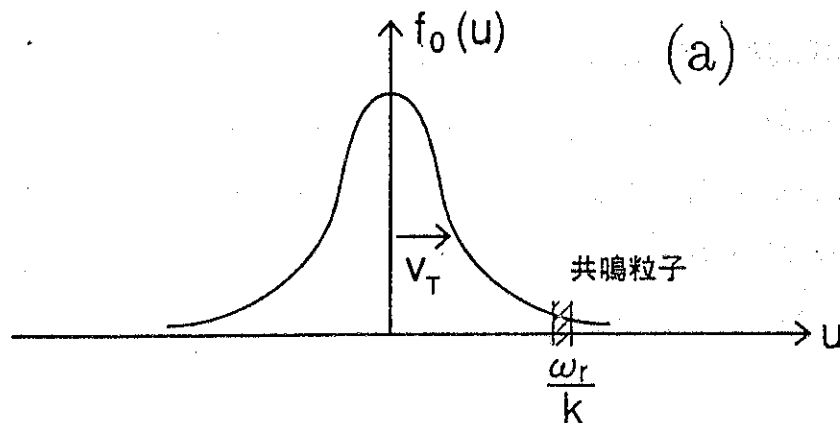
$$f_p(u) = \frac{1}{p + iku} \left\{ g(u) + \frac{ike}{m} \varphi_p \frac{df_0}{du} \right\} \quad (3.56)$$

をラプラス逆変換すると得られる。 $p + iku = 0$ に特異点がある事を考えると

$$f(u, t) \propto e^{-ikut} \quad (3.57)$$

のように e^{-ikut} に比例する項が現れる。 φ_p の極 (分散式=0) の寄与は $e^{\gamma t}$ ($\gamma < 0$) なので $t \rightarrow \infty$ で消える。しかし e^{-ikut} は振動成分なので波が完全に減衰した後もこの振動項は残る。これは初期分布 $g(u)$ により受けた摂動を各々の粒子はいつまでも記憶している事を意味する。

3. 振動数 ω_r は式 (3.53) で与えられるがこれはマックスウェル分布の結果である。 $v_T \ll \omega_r/k$ として特異点の寄与を無視して得られた。つまりプラズマ振動を決めるのはプラズマ全体で、減衰率 γ を決めるのは特異点近傍のわずかな粒子のみである。つまり $u \sim \omega_r/k$ の速さを持つ少数の粒子のみが波と共鳴し波を減衰させたのである。 $u \sim \omega_r/k$ 近くの共鳴粒子を除いてもプラズマ振動 (ω_r) は変わらないと考えると、もし $df_0/du > 0$ であると、式 (3.54) より $\gamma > 0$ となる成長する解が得られる。すなわち、分布のすそので $df_0/du > 0$ となっている場合はプラズマ振動は時間と共に成長する。このように不安定になる場合を逆ランダウ減衰、あるいはランダウ成長と言う。



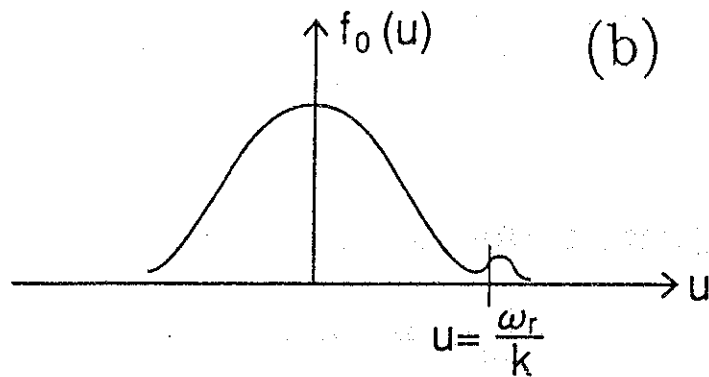


図 3.5 分布関数とランダウ減衰

(a) ランダウ減衰、(b) 逆ランダウ減衰

(4) ランダウ減衰の物理的描象

既に述べたようにプラズマ振動はプラズマ粒子全体で作られ、振動の減衰は、速度が $v \sim \omega_r/k$ 近傍の少数の粒子と波の共鳴により起こる。 ω_r/k は波の位相速度である。 $v \sim \omega_r/k$ の粒子は電場 E と相互作用し、 E のある位相のところで加速されエネルギーを得、別の位相のところでは逆に減衰を受けエネルギーを失う。粒子がエネルギーを得る過程では E はエネルギーを失い、粒子がエネルギーを失う過程では E はエネルギーを得る。全体として粒子がエネルギーを得ると E は減衰していき、従って波は減衰する。共鳴粒子以外の波動を作る主プラズマはこの過程に殆ど関係ない。 $v \sim \omega_r/k$ の粒子は E により加速されたり減速したりする。共鳴粒子と E の位相の関係、 $v > \omega_r/k$ の粒子数と $v < \omega_r/k$ の粒子の個数の大小などで全体のエネルギーのやりとりが決まる。

今、摂動により生じた電場を

$$E = E_1 \sin(kx - \omega t) \quad (3.58)$$

とする。 $\omega \sim \omega_p$ で $E_1 \propto e^{\gamma t}$ であるが、 $\omega \gg \gamma$ とし、 ω^{-1} の時間スケールの間 $E_1 = \text{const.}$ として粒子軌道を計算し、粒子 (電子のみを考える) の運動エネルギーを計算する。運動

方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = qE_1 \sin(kx - \omega t) \quad (m = m_e, \quad q = -e) \quad (3.59)$$

零次においては

$$x = v_0 t + x_0 \quad (3.60)$$

ここで多数の粒子に対して初期値 x_0 はランダムとする。1 次の式は

$$m \frac{dv_1}{dt} = qE_1 \sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) \quad (3.61)$$

であるが、 $t = 0$ で $v_1 = 0$ として式 (3.61) を解く。 $t = 0$ で $v_1 \neq 0$ なら $t = 0$ で $kv_0 - \omega \simeq 0$ の粒子が大きな v_1 を持つ事になり、これは特別な初期条件になってしまう。式 (3.61) から

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{qE_1}{m} \int_0^t \sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) dt \\ &= -\frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\cos(kx_0 + kv_0 t - \omega t)}{kv_0 - \omega} - \frac{\cos(kx_0)}{kv_0 - \omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t v_1 dt \\ &= -\frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\sin(kx_0 + kv_0 t - \omega t) - \sin(kx_0)}{(kv_0 - \omega)^2} - t \frac{\cos(kx_0)}{kv_0 - \omega} \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

ここで、同様の理由により $t = 0$ で $x_1 = 0$ とした。 $kx_1 \ll 1$ ($x_1 \ll \lambda/2\pi$) と仮定して次のオーダーを含めて計算する。

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= m \frac{d}{dt}(v_0 + v_1 + v_2) = m \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) \\ &= qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) \cos(kx_1) + \cos(kx_0 + \alpha t) \sin(kx_1) \} \\ &\simeq qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) + \cos(kx_0 + \alpha t) kx_1 \} \end{aligned} \quad (3.64)$$

但し $\alpha \equiv kv_0 - \omega_0$ である。粒子の運動エネルギー K の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt} m(v_0 + v_1 + v_2) \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \\ &= mv_0 \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) + v_1 \frac{dv_1}{dt} \\ &= v_0 qE_1 \{ \sin(kx_0 + \alpha t) + \cos(kx_0 + \alpha t) kx_1 \} \\ &\quad - \frac{qE_1}{m} \left\{ \frac{\cos(kx_0 + \alpha t)}{\alpha} - \frac{\cos(kx_0)}{\alpha} \right\} qE_1 \sin(kx_0 + \alpha t) \end{aligned} \quad (3.65)$$

この式の x_1 に式 (3.63) を代入して初期位置 x_0 について平均する。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle_{x_0} &\simeq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{dK}{dt} \cdot dx_0 \\ &= \frac{q^2 E_1^2}{2m} \left(-\frac{\omega \sin \alpha t}{\alpha^2} + \frac{\alpha + \omega}{\alpha} t \cos \alpha t \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

このエネルギー変化に寄与するのは、 $\alpha = kv_0 - \omega \simeq 0$ の粒子、すなわち共鳴粒子である。従って $|\alpha| \ll \omega$ と考えてよい。式 (3.66) の右辺第 2 項の $(\alpha + \omega)\alpha$ を ω/α で近似する。この時式 (3.66) は次のように書ける。

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \frac{q^2 E_1^2}{2m} v_0 \frac{d}{dv_0} \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] \quad (3.67)$$

ただし、添字 x_0 は省略した。 v_0 の分布関数 $f_0(v_0)$ で平均をとる。

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \frac{q^2 E_1^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} v_0 f_0 \frac{d}{dv_0} \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] dv_0 \quad (3.68)$$

部分積分より

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = -\frac{\epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2}{2 n_0} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 + v_0 f'_0) \frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} dv_0 \quad (3.69)$$

となる。 f_0 に関する積分は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \frac{\sin \alpha t}{\alpha} dv_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \left(\frac{\alpha + \omega}{k} \right) \frac{\sin \alpha t}{\alpha} d \left(\frac{\alpha + \omega}{k} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\alpha) \frac{\sin \alpha t}{\alpha} d \frac{\alpha}{k} \\ &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} g_0 \left(\frac{x}{t} \right) \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (3.70)$$

となり $t \rightarrow \infty$ で $g_0 \rightarrow 0$ 、つまりこの積分は消える。式 (3.69) は

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = -\frac{\epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2 \omega}{2 k n_0} \int_{-\infty}^{\infty} f'_0 \left[\frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} \right] dv_0 \quad (3.71)$$

となる。ただし、積分には $\alpha = kv_0 - \omega \simeq 0$ が効くので式 (3.69) の積分の中の $v_0 f'_0$ の v_0 は ω/k でおきかえた。 $t \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} = \frac{\pi}{k} \delta \left(v_0 - \frac{\omega}{k} \right) \quad (3.72)$$

が成立する事を使うと、式 (3.71) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle &= -\frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \frac{\omega}{k n_0} \int_{-\infty}^{\infty} f'_0 \frac{\pi}{k} \delta(v_0 - \frac{\omega}{k}) dv_0 \\ &= -\frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \frac{\omega}{k^2} \pi \frac{1}{n_0} f'_0(v_0 = \frac{\omega}{k})\end{aligned}\quad (3.73)$$

次に波のエネルギーについて考える。§6 で波のエネルギーを一般的に考察するが、今考えているプラズマ波動の持つエネルギー $\langle W_p \rangle$ は

$$\langle W_p \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{4} (1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \quad (3.74)$$

で与えられる。第1項は電場の持つエネルギー $\langle W_E \rangle$ で

$$\langle W_E \rangle = \langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{4} \quad (3.75)$$

である。第2項はプラズマ粒子の波としてのエネルギー $\langle W_K \rangle$ で $\omega \simeq \omega_p$ の時

$$\langle W_p \rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \quad (3.76)$$

となる。粒子が波からエネルギーをもらうと波はその分エネルギーを失うので

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dW_p}{dt} \right\rangle = 0 \quad (3.77)$$

である。式 (3.73) は

$$\left\langle \frac{dW_p}{dt} \right\rangle = \pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \omega \frac{1}{n_0} f'_0 \quad (3.78)$$

となる。 $W_p \propto \exp(2\gamma t)$ であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\pi \omega_p^2}{2 k^2} \omega \frac{1}{n_0} f'_0 \\ &= \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2} \frac{1}{n_0} \frac{df_0}{dv} \Big|_{v=\frac{\omega_p}{k}}\end{aligned}\quad (3.79)$$

が求まり、ランダウの結果と一致する。

静電ポテンシャルに捕捉される粒子について考える。 $v_\phi = \omega/k$ で動く系でみる。式(3.58)の電場とその静電ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 \sin(kx) \\ \phi &= -\phi_1 \cos(kx) \quad (\phi_1 = \frac{E_1}{k}) \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

と書ける。 ϕ_1 が充分大きいと $v \simeq 0$ (もとの系では $kv - \omega \simeq 0$)の粒子はポテンシャルに捕捉される。このような粒子を捕捉粒子という。ポテンシャルに捕捉されない v の大きな粒子を非捕捉粒子という。位相空間での粒子の運動を書くと図3.6のようになる。

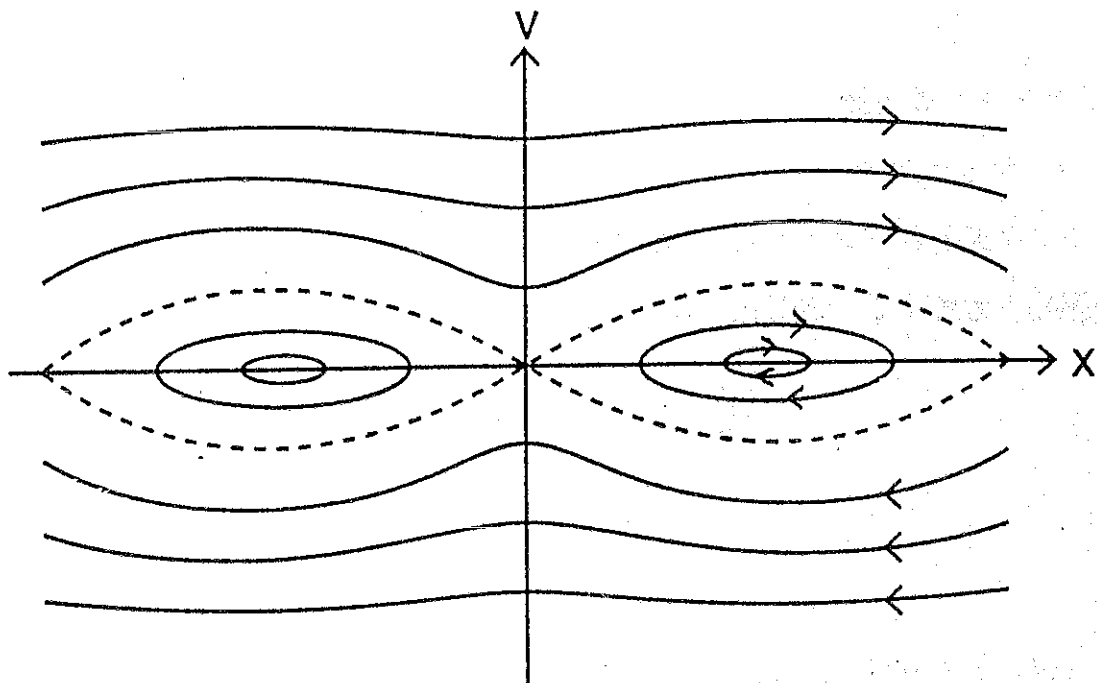


図 3.6 位相空間での捕捉粒子と非捕捉粒子

図3.6のセパトリックス(点線)内にある粒子は捕捉され、ポテンシャルの谷のなかで周期運動をする。粒子がポテンシャルの底深く捕捉され周期運動をしているとすると、 $kx \ll 1$ であるので

$$m \frac{dv}{dt} = qE_1 \sin kx \simeq qE_1 kx \quad (3.81)$$

となり、その周期運動の振動数 ω_b は

$$\omega_b = \sqrt{\frac{qkE_1}{m}} = \sqrt{\frac{q}{m}k^2\phi_1} \quad (3.82)$$

で与えられる。捕捉粒子は本質的に非線形的に取り扱わねばならない。ランダウ減衰は線形理論であり、粒子がポテンシャルに捕捉されてしまう前に波は減衰してしまわねば理論は成立しない。即ち、ランダウ減衰率を γ_{LD} とすると $\gamma_{LD} \ll \omega_b^{-1} = \sqrt{m/(qk^2\phi_1)}$ がランダウ減衰の条件である。 ϕ_1 が大きく $\gamma_{LD}^{-1} \ll \omega_b^{-1}$ が成立しないときは非線形的取扱いが必要になる。

(5) プラズマ分散関数

1) プラズマ分散関数

プラズマ振動とランダウ減衰を論じたときと同じ条件で考える。ただし、ここではイオンの運動も考慮する。線形化されたブラソフの式とポアッソンの式は次のとおりである。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a - \frac{q_a}{m_a} \nabla \varphi \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.83)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_a q_a \int_{-\infty}^{\infty} f_a d^3v \quad (3.84)$$

$$a = e, i$$

この方程式系の取扱いは既に明らかにされている。 $\vec{k}$ を実数、 ω を複素数として

$$\left. \begin{aligned} f &\sim f_{\vec{k}\omega} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \\ \varphi &\sim \varphi_{\vec{k}\omega} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

とする。式(3.83)、(3.84)は

$$i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega) f_{\vec{k}\omega} - i \frac{q}{m} \varphi_{\vec{k}\omega} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.86)$$

$$k^2 \varphi_{\vec{k}\omega} = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ Z_i e \int_{-\infty}^{\infty} f_{i\vec{k}\omega} d^3v - e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e\vec{k}\omega} d^3v \right\} \quad (3.87)$$

となり、これより

$$\varphi_{\vec{k}\omega} = \frac{1}{k^3 \epsilon_0} \left\{ (Z_i e)^2 \frac{1}{m_i} \varphi_{\vec{k}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{i0}}{\partial \vec{v}}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} d^3 v + e^2 \frac{1}{m_e} \varphi_{\vec{k}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \vec{v}}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} d^3 v \right\} \quad (3.88)$$

を得る。 $\vec{k}$ 方向を x 軸にとり $u \equiv v_x$ とし、 v_y, v_z で積分する。分散式は次のように与えられる。

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - \omega/k} \frac{1}{n_0} \frac{df_{0e}}{du} du + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - \omega/k} \frac{1}{n_0} \frac{df_{0i}}{du} du \quad (3.89)$$

零時の分布関数はマックスウェル分布をしていると考える。すなわち、

$$f_{0a} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{Ta}} e^{-u^2/v_{Ta}^2} \quad (v_{Ta}^2 = \frac{2T_a}{m_a}) \quad (3.90)$$

この場合、分散式 (3.89) は次のように書ける。

$$K(k, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} Z(\zeta_e) + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.91)$$

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_{e0} e^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_{Di} = \left(\frac{\epsilon_0 T_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \right)$$

$$\zeta_e = \sqrt{2} \frac{\omega}{k v_{Te}}, \quad \zeta_i = \sqrt{2} \frac{\omega}{k v_{Ti}}$$

ここで Z はプラズマ分散関数と呼ばれ

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C \frac{x e^{-x^2}}{x - \zeta} dx \quad (3.92)$$

で定義される。積分路 C は既に述べたとおりである。恒等式

$$\frac{1}{x - \zeta} = i \int_0^{\infty} e^{-i(x-\zeta)t} dt \quad (3.93)$$

を用いると

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= 1 + \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x - \zeta} dx \\ &= 1 - \zeta e^{-\zeta^2/2} \int_0^{\zeta} e^{y^2/2} dy + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta e^{-\zeta^2/2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

が成立し、この式をそのまま下半面でも用いれば解析接続は完了する。なお、

$$W(\zeta) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x - \zeta} dx \quad (3.95)$$

をプラズマ分散関数と呼ぶ事もあり、これに対しては数表も作られている [7]。

プラズマ分散関数に対しては次の級数展開と漸近展開がしばしば使われる。

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta e^{-\zeta^2/2} + 1 - \zeta^2 + \frac{\zeta^4}{3} + \dots \quad (\zeta \ll 1) \quad (3.96)$$

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta e^{-\zeta^2/2} - \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{\zeta^4} - \dots \quad (\zeta \gg 1) \quad (3.97)$$

2) プラズマ振動

プラズマ振動を式 (3.91) から導いてみよう。このため考えている波の位相速度が電子及びイオンの熱速度よりずっと大きい場合を考える。すなわち、 $v_{Ti} \ll v_{Te} \ll \omega/k$ とする。 $\zeta_i \gg 1$, $\zeta_e \gg 1$ であるので Z に漸近展開式 (3.97) をあてはめる。そうすると分散式は次のように簡単になる。

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_e e^{-\zeta_e^2/2} - \frac{1}{\zeta_e^2} - \frac{3}{\zeta_e^4} \right\} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left\{ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_i e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{1}{\zeta_i^2} - \frac{3}{\zeta_i^4} \right\} = 0 \quad (3.98)$$

$\zeta_i/\zeta_e = v_{Te}/v_{Ti} \gg 1$ であるので $\exp(-\zeta_i^2/2)$ の項は無視できる。また $1/\zeta_i^2$, $3/\zeta_i^4$ の項も小さく結局イオンの項は落とすことができ分散式は、

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\omega}{k v_{Te}} e^{-\omega^2/k^2 v_{Te}^2} - \frac{k^2 v_{Te}^2}{2\omega^2} - \frac{3k^4 v_{Te}^4}{4\omega^4} \right\} = 0 \quad (3.99)$$

となる。 $\omega = \omega_r + i\gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ とすると分散式は

$$1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_D^3} e^{-\omega_r^2/k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 3k^2 \lambda_D^2 \simeq 0 \quad (3.100)$$

と近似でき、この式からプラズマ振動の振動数と減衰率は

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2\right) \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_D^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} - \frac{3}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

と得られる。 ω_r, γ ともすでに得たものと一致する。

3) イオン音波

プラズマ振動は非常に速い振動で重いイオンは殆どついていけなく、ただ単に第0近似で中性化の役割を果たすだけである。ここでは、ゆっくり振動し、イオンの運動が重要となる場合の例としてイオン音波を考える。低周波での運動はイオンが主な役割を果たし、電子は軽いので殆ど瞬時にイオンの運動に対して遮蔽効果を示すのみである。今考えている波の位相速度は

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te} \quad (3.102)$$

を満たすとする。分散式 (3.91)

$$K(k, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} Z(\zeta_e) + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.103)$$

において、 $\zeta_e = \sqrt{2}\omega/kv_{Te} \ll 1$ であるので $Z(\zeta_e)$ に対して級数展開の式 (3.96)、即ち

$$Z(\zeta_e) = 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta_e e^{-\zeta_e^2/2} \simeq 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta_e \quad (3.104)$$

を用いる。分散式は

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{Di}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} Z(\zeta_i) = 0 \quad (3.105)$$

となる。 $\omega = \omega_r + i\gamma$, $\omega_r \gg |\gamma|$ を考える。 ζ_e 中の ω は ω_r でよい

式 (3.105) の実数部、虚数部からそれぞれ

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} = -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \text{Re}\{Z(\zeta_i)\} \quad (3.106)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{Di}^2} = -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \text{Im}\{Z(\zeta_i)\} \quad (3.107)$$

が得られる。 $\zeta_i = \sqrt{2}\omega/kv_{Ti} \gg 1$ であるので

$$\begin{aligned} Z(\zeta_i) &\simeq i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta_i e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{1}{\zeta_i^2} - \frac{3}{\zeta_i^4} \\ &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\omega_r}{kv_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{k^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} - 3 \frac{k^4 v_{Ti}^4}{4\omega^4} \\ &\simeq i\sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{kv_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} - \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \left(1 - 2i \frac{\gamma}{\omega_r}\right) - 3 \frac{k^4 v_{Ti}^4}{4\omega_r^4} \end{aligned} \quad (3.108)$$

となる。この実数部、虚数部は次のとおりである。

$$R_e\{Z(\zeta_i)\} = -\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} - \frac{3}{4} \frac{k^4 v_{Ti}^4}{\omega_r^4} \quad (3.109)$$

$$I_m\{Z(\zeta_i)\} = \sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k v_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} + 2 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \frac{\gamma}{\omega_r} \quad (3.110)$$

式(3.106)、(3.109)から

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left(\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} + \frac{3}{4} \frac{k^4 v_{Ti}^4}{\omega_r^4} \right) = 0 \quad (3.111)$$

が得られる。関係式

$$\frac{v_{Ti}^2}{\lambda_{Di}^2} = \frac{2T_i}{m_i} \frac{n_{i0} Z_i^2 e^2}{\epsilon_0 T_i} = 2\omega_{pi}^2$$

を用いると

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} + \frac{3}{4} k^2 \cdot 2\omega_{pi}^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_r^4} = 0 \quad (3.113)$$

が得られる。第1近似として左辺第4項を無視すると

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + 1/(k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (3.114)$$

となる。これを式(3.113)の最後の項に代入する。

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2} k^2 \omega_{pi}^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_r^4}} \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}} \left\{ 1 + \frac{\frac{3}{2} k^2 \omega_{pi}^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^4 (1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2})} \right\} \\ &= \frac{k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} k^2 \omega_{pi}^2 v_{Ti}^2 \frac{(1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2})^2}{\omega_{pi}^4} \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}} \right\} \\ &= \frac{k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} k^2 v_{Ti}^2 \frac{1}{\omega_{pi}^2} \frac{1 + k^2 \lambda_{De}^2}{k^2 \lambda_{De}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.115)$$

今、 $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi}^2 \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{pi}^2} \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \right) \\ &= k^2 \frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i} \end{aligned} \quad (3.116)$$

と近似できる。ここで音速を

$$C_S \equiv \sqrt{\frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i}} \quad (3.117)$$

で定義すると、振動数は

$$\omega_r = k C_S \quad (3.118)$$

と書ける。これは位相速度が音速のイオン音波を表している。

式(3.107)、(3.110)から

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{De}^2} &= -\frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left(\sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k v_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} + 2 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \frac{\gamma}{\omega_r} \right) \\ &= -\sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} - 2 \frac{v_{Ti}^2}{\lambda_{Di}^2} \frac{\gamma}{\omega_r^3} \end{aligned}$$

が成立し、これから減衰率

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\lambda_{De}^2 \omega_r^3}{2 v_{Ti}^2} \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_e}{k^2 \lambda_{De}^2} - \sqrt{\pi} \frac{\omega_r}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} \right) \\ &= -\frac{k C_S^4}{4 \omega_{pi}^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_{De}^2 v_{Te}} \left(1 + \frac{\lambda_{De}^2 v_{Te}}{\lambda_{Di}^2 v_{Ti}} e^{-\zeta_i^2/2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。関係式

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{De}^2 v_{Te}}{\lambda_{Di}^2 v_{Ti}} &= \frac{\epsilon_0 T_e}{n_{e0} e^2} \frac{n_{i0} Z_i^2 e^2}{\epsilon_0 T_i} \left(\frac{2T_e}{m_e} \frac{m_i}{2T_i} \right)^{1/2} \\ &= \frac{Z_i T_e}{T_i} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \\ \frac{\zeta_i^2}{2} &= \frac{1}{2} \frac{2 \omega_r^2}{k^2 v_{Ti}^2} = \frac{k^2 C_S^2}{k^2 v_{Ti}^2} \end{aligned} \quad (3.119)$$

を使うと減衰率は

$$\frac{\gamma}{\omega_r} = -\frac{\sqrt{\pi} C_S^3}{4 \omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 v_{Te}} \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{-C_S^2/v_{Ti}^2} \right) \quad (3.120)$$

と表せる。第1項は電子の寄与、第2項はイオンの寄与である。

もし電子温度がイオン温度よりずっと高いとすると、すなわち、 $T_e \gg T_i$ の時音速は

$$C_S \simeq \sqrt{\frac{Z_i T_e}{m_i}} = \sqrt{\frac{Z_i}{2} \frac{T_e}{T_i}} v_{Ti} \quad (3.121)$$

となり、減衰率は

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma}{\omega_r} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{Z_i T_e}{m_i} \sqrt{\frac{Z_i T_e}{m_i}} \frac{\epsilon_0 m_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0 T_e} \sqrt{\frac{m_e}{2 T_e}} \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{-\frac{Z_i T_e}{T_i}}\right) \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{Z_i m_e}{m_i}} \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i} e^{-\frac{Z_i T_e}{T_i}}\right) \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

となる。この式で () の中の1は電子によるランダウ減衰で、第2項はイオンによるランダウ減衰である。 $Z_i = 1, \sqrt{m_i/m_e} \simeq 43$ の時、 $T_e/T_i = 10 \sim 15$ で電子の寄与とイオンの寄与はほぼ同程度になる。 $T_e/T_i \lesssim 3$ 程度になると非常に強いイオンのランダウ減衰が生ずる。図3.7に電子とイオンの分布関数を示す。(a)では $T_e \gg T_i$ で、 $\omega/k \sim c_s$ の速度のところにはイオンは全く存在せず、従ってランダウ減衰は電子との共鳴による。(b)では $T_e \simeq T_i$ でイオンの分布が広がり、 $\omega/k \sim c_s$ のところにもイオンの分布のすそのが延びてきている。ここでは電子だけでなくイオンもランダウ減衰に寄与する。しかしイオンの方が(質量が大きいため、あるいは $v_{Ti} \ll v_{Te}$ のため)すそのでの分布の勾配が急峻で共鳴する ω/k の所で df_{oi}/dv は大きいので、イオンによるランダウ減衰は極めて大きい。

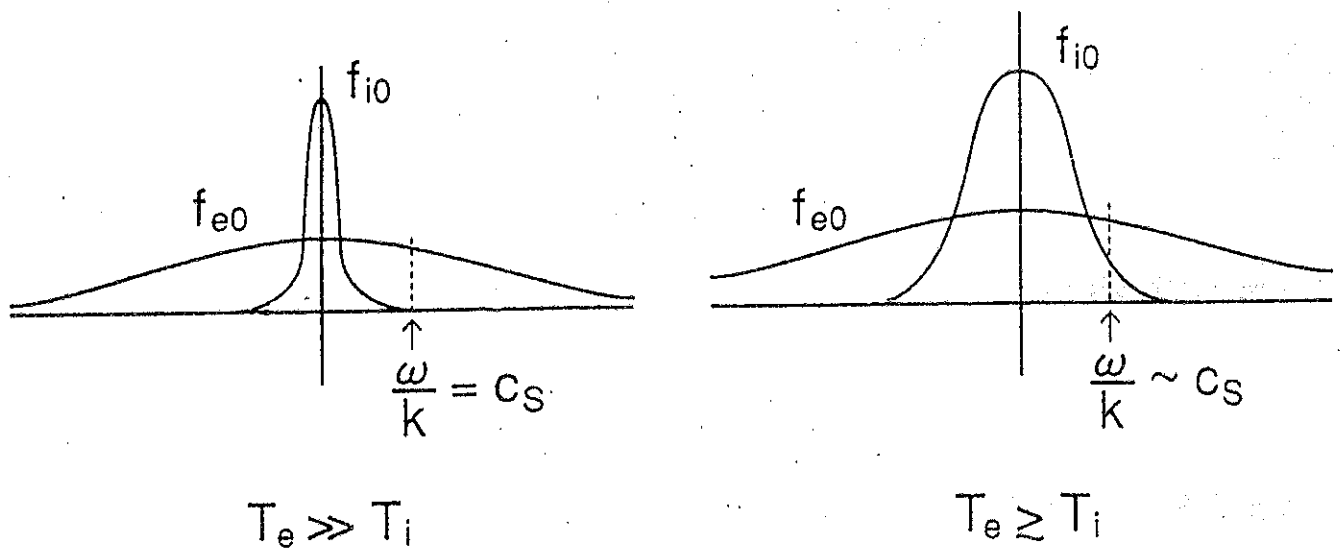


図3.7 イオンによるランダウ減衰

参考文献

- [1] N.Rostoker and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 3 , 1 (1960)
- [2] ランダウ・リフシッツ、「統計物理学」 岩波書店 1957 年 (小林秋男他共訳)
- [3] N.N.Bogoliubov, in Studies in Statistical Mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [4] 後藤憲一、「プラズマ物理」 共立出版、1967 年
- [5] ランダウ・リフシッツ、「電磁気学」 東京図書 (井上健男他共訳)
- [6] L.Landau, J.Phys. (U.S.S.R.) 10, (1946) 25.
- [7] B.D.Fried and S.D.Conte, "*The Plasma Dispersion Function*", Academic Press, 1961.

§4 クーロン衝突

(1) クーロン衝突の特徴

中性子気体（例えば空気）の衝突過程では、2つの粒子が充分接近して始めて相互作用し、粒子の軌道は大きく曲げられる。これに対してプラズマ粒子の衝突は相互作用がクーロン力であり、この力は遠達力であるため、中性粒子とは全く異なる衝突過程となる。クーロン衝突の特徴は次の2点にあるといえよう。

1. 衝突断面積は、粒子の速が大きくなると急激に小さくなる。 $\nu \propto 1/v^3$
2. 衝突過程においては微小角散乱の積み重ねが支配的である。

1) 弾性散乱

質量 m_1 の粒子と質量 m_2 の粒子との弾性衝突を重心系で考える。クーロン力のような中心力場では2つの粒子は同一平面内で運動する。図4.1において μ は換算質量 ($1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$), b は衝突パラメータ、 χ は散乱角で、 χ は小さな b に対して大きく、大きな b に対して小さい。 χ が大きい場合を大角散乱、小さいと小角散乱、 χ が極めて小さい散乱を微小角散乱という。

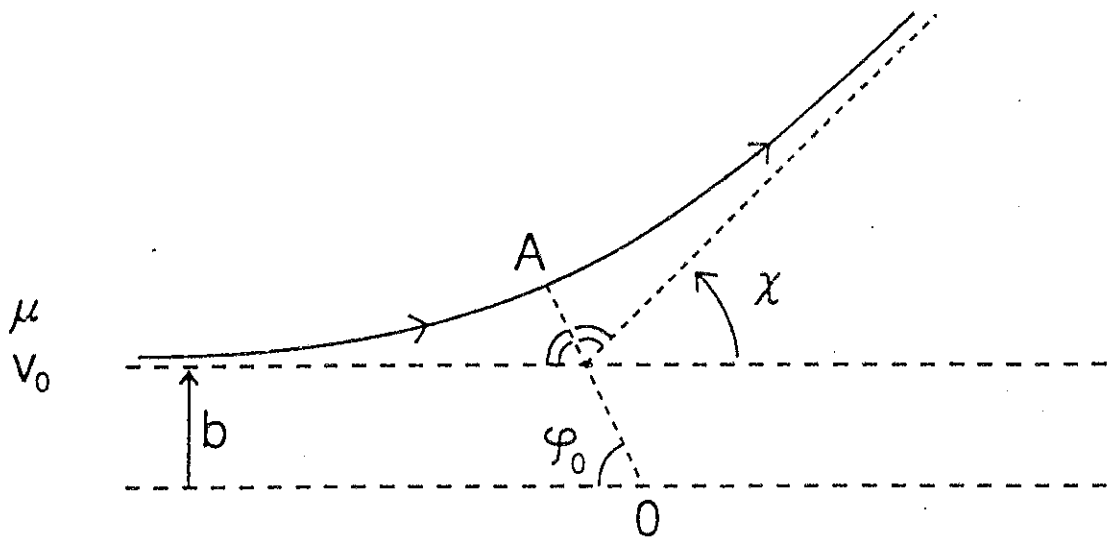


図4.1 弾性衝突

散乱角 χ の方向の微小立体角 $d\Omega$ 内に単位時間に散乱される電子の数を dN とすると

$$dN = \Phi d\sigma \quad (4.1)$$

である。ここで Φ は入射束 [$s^{-1} \cdot m^{-2}$], $d\sigma$ は散乱面積 [m^2], $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ である。衝突パラメータ b を使うと

$$dN = 2\pi b db \Phi \quad (4.2)$$

と書けるので、散乱の断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db \\ &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \frac{b}{\sin\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

で与えられる。

クーロン場の場合を考える。2つの粒子の電荷を q, q' とするとポテンシャルは

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} \quad (4.4)$$

であり、この時散乱角は次の式で与えられる [1]。

$$\cot \frac{\chi}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\mu v_0^2 b}{qq'} \quad (4.5)$$

これより $db/d\chi$ が求まる。 $d\sigma$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(qq')^2}{[8\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 \sin^2(\chi/2)]^2} \quad (4.6)$$

で与えられこれはラザフォードの式と呼ばれる [1]。

2) 大角散乱の場合

$\chi = 90^\circ$ の場合を考える。

$$\cot \frac{\chi}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\mu v_0^2 b_0}{qq'} = 1, \quad (4.7)$$

すなわち、衝突パラメータが

$$b_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\mu v_0^2} \quad (4.8)$$

のとき、 90° 散乱する。このときの散乱の全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_{90^\circ} &\simeq (2b_0)^2 = 4\pi \left(\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{\mu v_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

となり衝突周波数は

$$\nu_d^{90^\circ} \simeq n v_0 \sigma_{90^\circ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{n q^2 q'^2}{m v_0^3} \propto \frac{1}{v_0^3} \quad (4.10)$$

となり入射速度 v_0 の 3 乗に逆比例して小さくなる。ただし、ここで n は場の粒子密度である。平均自由行程は

$$l_d = v_0 / \nu_d = 4\pi\epsilon_0^2 \frac{m v_0^4}{n (qq')^2} \quad (4.11)$$

で与えられる。

3) 運動量変化

簡単のため電子 ($-e, m_e$) とイオン ($Z_i e, m_i$) の場合を考える。 $m_e \ll m_i$ であるのでイオンは止まっていて散乱中心になっているとする。すなわち、換算質量は $\mu \simeq m_e$ とみなしてよい。

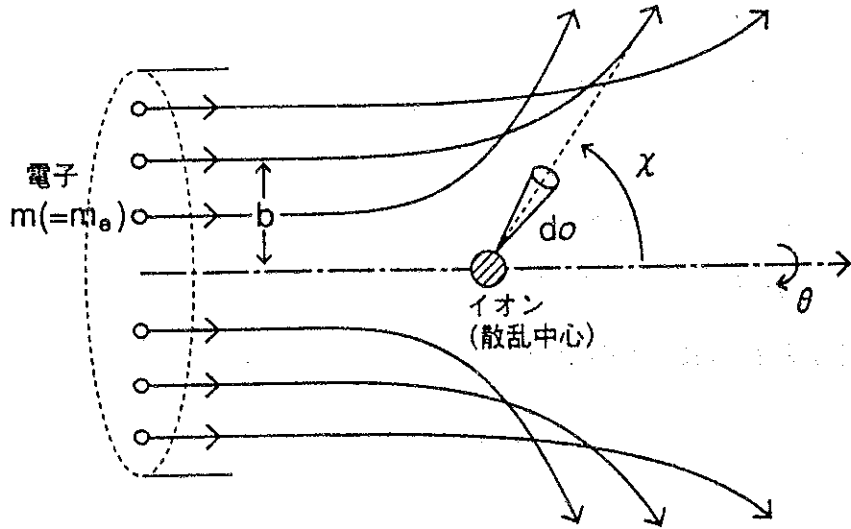


図 4.2 重いイオンによる電子の散乱

入射方向に対する入射粒子（電子）の運動量変化（減少）は、 $m_i \gg m_e$ なので散乱後 $v \simeq v_0$ であると考えてよいから、

$$\begin{aligned}\Delta P &= m_e v_0 (1 - \cos \chi) \\ &= P_0 (1 - \cos \chi)\end{aligned}\quad (4.12)$$

で与えられる。ただし、 $P_0 = m_e v_0$ は入射運動量である。すべての b （または χ ）にわたっての入射方向に対する運動量変化（減少）の平均的割合は、 $\mu = m_e = m$, $v_0 = v$ とにおいて

$$\begin{aligned}Q_m &\equiv \int \frac{\Delta P}{P_0} \frac{d\sigma}{do} do \\ &= \int_{\chi_m}^{\pi} (1 - \cos \chi) \frac{(qq')^2}{[8\pi\epsilon_0 m v^2 \sin^2(\frac{\chi}{2})]^2} 2\pi \sin \chi d\chi \\ &= \frac{(qq')^2 \cdot 2\pi}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4} \int_{\chi_m}^{\pi} \frac{(1 - \cos \chi) \sin \chi}{\sin^4(\frac{\chi}{2})} d\chi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{m v^2}\right)^2 \ln[(\sin \frac{\chi_m}{2})^{-1}]\end{aligned}\quad (4.13)$$

と計算できる。 $\chi_m \ll 1$ なので $\sin \chi/2 \sim \chi/2$ とおくと入射時に対する衝突後（散乱後）の運動量変化は

$$Q_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{m v^2}\right)^2 \ln\left(\frac{2}{\chi_m}\right) = \sigma_{90^\circ} \ln \frac{2}{\chi_m}\quad (4.14)$$

となる。

4) 微小角散乱の効果

式(4.14)で与えられる運動量変化 Q_m は $\chi_m \rightarrow 0$ に対して対数的に発散してしまう。これはクーロン力が遠達力だからである。任意の衝突パラメータ b の 90° 散乱の衝突パラメータ b_0 に対する比は微小角散乱の時(b が大きい時、すなわち χ が小さい時)

$$\begin{aligned} \tan \frac{\chi}{2} &\simeq \frac{\chi}{2} \\ \frac{b_0}{b} &= \frac{1}{\cot \frac{\chi}{2}} \simeq \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

で与えられる。 χ は b に対してゆっくりしか減少しない。従って、散乱体から充分遠くにある粒子も式(4.14)の積分に効いて、 $\chi \rightarrow 0$ で運動量変化は対数発散する。

クーロンポテンシャルはデバイ長程度で遮蔽される。従って一番大きな衝突パラメータ b はデバイ長 λ_D 程度と考えて良いだろう。すなわち

$$b_{max} = \lambda_D \quad (4.16)$$

とおく。従って、最小の散乱角 χ_m は

$$\cos \frac{\chi_m}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{mv^2\lambda_D}{qq'} \sim \frac{1}{\chi_m/2} \quad (\chi_m \ll 1) \quad (4.17)$$

$$\frac{2}{\chi_m} = 4\pi\epsilon_0 \frac{mv^2\lambda_D}{qq'} = \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (4.18)$$

で与えられ、運動量変化は次のように与えられる。

$$Q_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{qq'}{mv^2} \right)^2 \ln \Lambda = \sigma_{90^\circ} \ln \Lambda \quad (4.19)$$

ただし Λ は

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (4.20)$$

と定義され、 $\ln\Lambda$ のことをクーロン対数という。運動エネルギー $mv^2/2$ の平均は $3T/2$ であるので最小のパラメータ (90° 散乱) b_0 は

$$b_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{mv^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{3T}$$

で与えられ、これをランダウ・パラメータという事がある。 Λ はプラズマ・パラメータ g と次のような関係にある。 $q = q' = e$ とおくと、

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{\lambda_D}{b_0} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}} 4\pi\epsilon_0 \frac{3T}{qq'} = 12\pi\epsilon_0^{3/2} \frac{T^{3/2}}{\sqrt{ne^3}} \\ &= 12\pi n\lambda_D^3 = 9 \cdot \frac{4}{3} n\lambda_D^3 = 9N_D = \frac{9}{g} \end{aligned} \quad (4.22)$$

プラズマ・パラメータは $g = 1/N_D \ll 1$ であるので Λ は大きな量である。しかし対数依存性のため Q_m は Λ の変化に敏感ではない。

衝突周波数を粒子の進行方向の運動量変化率で定義する。電子がイオンに散乱されるときに衝突周波数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nu_s^{e-i} &\equiv nvQ_m \\ &= \frac{n}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{(qq')^2}{m^2v^3} \ln\Lambda = \nu_d^{90^\circ} \ln\Lambda \end{aligned} \quad (4.23)$$

以上の簡単な論議から衝突周波数に関して以下の重要な事が分かる。

$$1. \quad \nu_s^{e-i} \propto 1/v^3$$

衝突周波数は v^3 とともに小さくなり、速い粒子ほど衝突が少ない。これは2つの粒子がお互いに速く走るほど相互作用している時間が短いためである。

$$2. \quad \nu_s^{e-i} \propto \ln\Lambda$$

これは微小角散乱の積み重ねを表す。 Λ は大きな数で、 n と T に依存するが、 $\ln\Lambda$ は対数なので n や T の変化に敏感でない。 $\ln\Lambda$ は大角散乱に対する微小角散乱の割合を表すと考えてよい。典型的には $\ln\Lambda = 10 \sim 20$ である。従って、大角散乱より微小角散乱が衝突過程で支配的といえる。

5) エネルギー変化

電子とイオンの衝突を考え、この時のエネルギー変化を考える。 $m_e \ll m_i$ なのでイオンはほぼ静止しているとしてよい。図4.3のように電子(質量 m_e 、速さ v_0)が衝突パラメータ b で入射し、イオンと衝突し散乱角 χ で散乱され、静止していたイオンは角 χ' の方向に速さ v' で動く。

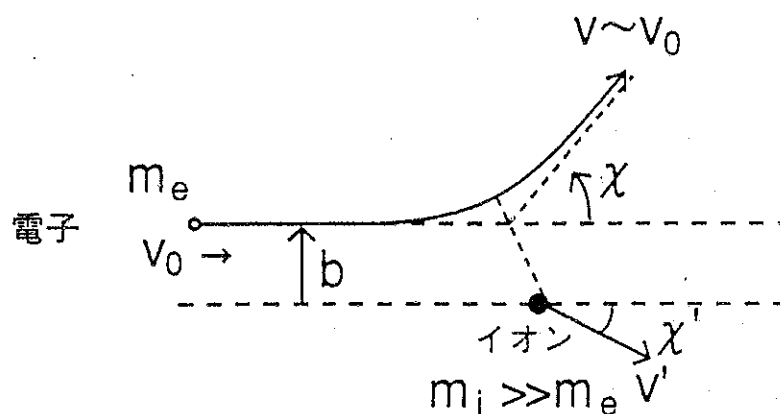


図 4.3 電子とイオンの衝突

衝突後電子は大きく方向を変えるがイオンは少ししか方向を変えない。衝突前にイオンは静止しているとしてよいから運動量保存の式は

$$\begin{aligned} m_e v_0 &= m_e v_0 \cos \chi + m_i v' \cos \chi' \\ 0 &= m_e v_0 \sin \chi - m_i v' \sin \chi' \end{aligned} \quad (4.24)$$

である。また、電子の失うエネルギーはイオンの得るエネルギーに等しいから

$$\begin{aligned} \Delta E \equiv \frac{m_i}{2} (v')^2 &= E_0 \frac{2m_e}{m_i} (1 - \cos \chi) \\ (E_0 &= \frac{1}{2} m v_0^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

であり、衝突によるエネルギーの変化 ΔE は次のように小さいことがわかる。

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 2 \frac{m_e}{m_i} (1 - \cos \chi) \ll 1 \quad (4.26)$$

電子は衝突によりその方向は変わるがエネルギー変化は小さい。従って、衝突後も電子の速さは v_0 とおいた仮定は正当化されたことがわかる。

散乱される粒子の運動エネルギーの平均損失率の断面積は

$$\begin{aligned} Q_E &\equiv \int \frac{\Delta E}{E_0} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ &= \int 2 \frac{m_e}{m_i} (1 - \cos\chi) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ &= 2 \frac{m_e}{m_i} Q_m \end{aligned} \quad (4.27)$$

で与えられる。 Q_m は式(4.14)で与えられる運動量平均損失率の断面積である。 $m_e \ll m_i$ だから $Q_E \ll Q_m$ でエネルギーの変化率は小さい。

エネルギー変化に相当する衝突周波数は

$$\nu_E^{e-i} = 2 \frac{m_e}{m_i} \nu_s^{e-i} \quad (4.28)$$

と定義することができ、衝突時間は

$$\tau_E^{e-i} \equiv 1/\nu_E^{e-i}, \quad \tau_s^{e-i} \equiv 1/\nu_s^{e-i} \quad (4.29)$$

$$\tau_E^{e-i} = \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_e} \tau_s^{e-i} \quad (4.30)$$

のように表すことができる。電子がイオンと衝突した時の電子の運動量変化の時間より電子とイオンがエネルギーをやり取りする時間の方がはるかに長い。 τ_s^{e-i} は電子の進行方向の運動量変化の時間であるが、進行方向に垂直の運動量変化の時間 τ_m^{e-i} も考えられるが、両者は

$$\tau_m^{e-i} \simeq \tau_s^{e-i} \quad (4.31)$$

と全く同程度である。

6) 熱化プラズマ

局所熱平衡にあるプラズマを考え、その場所での電子温度を T_e とする。このようなプラズマ中での電子・イオン衝突は、静止しているイオンに電子が熱運動速度 v 、

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}T_e, \quad v = \left(\frac{3T_e}{m_e}\right)^{1/2} \quad (4.32)$$

で衝突し散乱されると考えてよい。標的となる場の粒子はイオンだから式(4.23)で $n = n_i$ 、また、 $qq' = q_e q_i = (-e)Z_i e = -Z_i e^2$ であるから衝突周波数は次の式で与えられる。

$$\nu_s^{e-i} = \frac{n_i}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{m_e^2 \left(\frac{3T_e}{m_e}\right)^{3/2}} = \frac{Z_i^2 e^4 \ln\Lambda}{4\pi 3^{3/2} \epsilon_0^2} \cdot \frac{n_i}{\sqrt{m_e T_e^{3/2}}} \quad (4.33)$$

$\ln\Lambda$ は T_e や n_e に対する依存性は弱いので本質的に衝突周波数は

$$\nu \propto \frac{n}{T^{3/2}} \quad (4.34)$$

である。 $\nu^{e-e}, \nu^{e-i}, \nu^{i-i}$ に対しても温度 T 、密度 n の熱化プラズマの衝突周波数はこのように n に比例し $T^{3/2}$ に逆比例する。

(2) 衝突時間

1) 速度空間での拡散

テスト粒子は場の粒子の中を動く間に場の多くの荷電粒子と同時に相互作用を及ぼしあう。密度が希薄であるので3体の衝突は無視できる。相互作用は微小角散乱が主たるもので、同時に起こる多くの微小角散乱は、独立な2体衝突が連続して起こるものと考えてよい。2体相関はデ바이長程度以下でのみ有効である。衝突過程は、速度空間における拡散がブラウン運動と類似であるとも考えられる。図4.4のように、 $t=0$ で多数のテスト粒子を $v_x = 0, v_z = v_0 > 0$ で出発させる。場の粒子と衝突の結果テスト粒子は z 方向に進みながら速度空間で拡散していく。

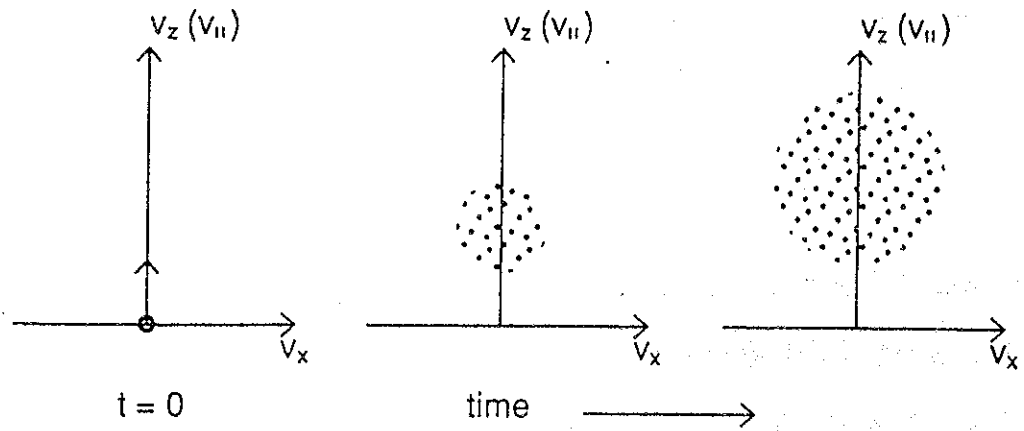


図 4.4 テスト粒子の拡散

Δv をテスト粒子の速度が衝突により変化する量とする。2体衝突が次々に起こり、微小角散乱が積み重ねられていくと考える。 N 回の微小角散乱を受けたとする。速度変化の x 成分は N 回の変化の和

$$\begin{aligned}\Delta v_x &= (\Delta v_x)_1 + (\Delta v_x)_2 + \cdots + (\Delta v_x)_N \\ &= \sum_{j=1}^N (\Delta v_x)_j\end{aligned}\quad (4.35)$$

である。ここで、次々に起こる衝突はランダムと仮定する。 $\overline{\Delta v_x}$ は多くのテスト粒子（それぞれが N 回衝突する）の平均と定義すると、場の粒子は等方的であるので $\overline{\Delta v_x} = 0$ である。しかし初期に $v_x \neq 0$ であるので $\overline{\Delta v_x} \neq 0$ である。また2乗平均は $\overline{(\Delta v_x)^2} \neq 0$ であり、さらに

$$\overline{(\Delta v_x)_1^2} = \overline{(\Delta v_x)_2^2} = \cdots = \overline{(\Delta v_x)_N^2} \neq 0 \quad (4.36)$$

と仮定できる。しかし各々の衝突は独立だから

$$\overline{(\Delta v_x)_j \cdot (\Delta v_x)_k} = 0 \quad (j \neq k) \quad (4.37)$$

が成り立つ。よって

$$\overline{(\Delta v_x)^2} = N \overline{(\Delta v_x)_j^2} \quad \left[\left(\frac{m}{s} \right)^2 / s \right] \quad (4.38)$$

とおける。 N は単位時間当たりの衝突回数と考えてよい。分散は $(\overline{(\Delta v_x)^2})^{1/2} \propto N^{1/2}$ のように N の平方根に比例する。このように衝突は速度空間での拡散を引き起こす。式(4.36)を拡散係数と定義してよい。

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle \equiv \overline{(\Delta v_x)^2} \quad (4.39)$$

一般には拡散係数は次のものが定義できる。先ずテスト粒子の進行方向に沿ってそのテスト粒子が場の粒子から摩擦を受け、粒子の進行方向の速度が変化する。その変化の平均を $\langle \Delta v_{\parallel} \rangle$ で表す。また、 $D_{\parallel}^t(v) \equiv \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle$ で粒子の進行方向に平行な方向の拡散を表すことができ、さらに $D_{\perp}^t(v) \equiv \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle$ で垂直方向の拡散を表せる。但し、 $\parallel$ は粒子の進行方向、 $\perp$ は垂直方向を表す。 t はテスト粒子を示す。場の粒子がマックスウェル分布をしている時、すなわち、場の粒子プラズマの温度を T_b 、熱速度 v_{Tb} とすると、場の粒子に対する分布関数 f_b が

$$f_b(\vec{v}) = \frac{n_b}{\pi^{3/2} v_{Tb}^3} \exp(-v^2/v_{Tb}^2) \quad , \quad v_{Tb} = \left(\frac{2T_b}{m_b}\right)^{1/2} \quad (4.40)$$

で与えられる場合を考える。このとき、詳しい計算によると [2]

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\parallel} \rangle &= -2\Gamma_t \sum_b \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_t}{m_b}\right) G(x) \\ D_{\perp}^t &= \frac{\Gamma_t}{v} \sum_b n_b Z_b^2 [\Phi(x) - G(x)] \\ D_{\parallel}^t &= \frac{2\Gamma_t}{v} \sum_b n_b Z_b^2 G(x) \end{aligned} \quad (4.41)$$

で与えられる。ただし、ここで

$$\begin{aligned} x &\equiv v/v_{Tb} \\ G(x) &\equiv [\Phi(x) - x\Phi'(x)]/2x^2 \quad , \quad \Phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \\ \Gamma_t &\equiv \frac{Z_t^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2} \ln \Lambda \end{aligned} \quad (4.42)$$

と定義された。 $\Phi(x)$ は誤差関数である。

2) 緩和時間

運動量緩和時間 τ_m は次のように定義される。

$$D_{\perp}^t \tau_m \equiv v^2 \quad \left(\left\langle \frac{dP_{\perp}^2}{dt} \right\rangle \equiv \frac{P^2}{\tau_m} \right) \quad (4.43)$$

この式は τ_m の間に微小角散乱を積み重ねた結果、粒子が初期の速度方向に対して 90° 曲げられた事を意味する。つまり τ_m は粒子の軌道がおおよそ 90° 曲げられる時間でこの τ_m (あるいは τ_d とも書く) の事を運動量緩和時間、あるいは衝突偏向時間と言ひ、最も狭義の意味ではこれを普通、衝突時間と言ひ、その逆数 $\nu_m = \tau_m^{-1}$ を衝突周波数と言う。式(4.41)から τ_m は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_m &= \tau_d = \frac{v^2}{D_{\perp}^t} = \frac{v^3}{\Gamma_t \sum_b n_b Z_b^2 [\Phi(x) - G(x)]} \\ \nu_m &= \nu_d = \frac{1}{\tau_m} \end{aligned}$$

減衰時間 τ_s は次のように定義される。

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle \tau_s \equiv -v \quad \left(\left\langle \frac{dP_{\parallel}}{dt} \right\rangle = -\frac{P}{\tau_s} \right) \quad (4.44)$$

これはテスト粒子がその初期の速さを初期の進行方向に失う時間と解釈できる。式(4.41)から τ_s は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{v}{2\Gamma_t} \frac{1}{\sum_b \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_t}{m_b}\right) G(x_b)} \\ \nu_s &= \tau_s^{-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

エネルギー緩和時間 τ_E は

$$\langle \Delta E \rangle \tau_E \equiv E \quad (4.46)$$

として定義される。衝突前後のエネルギー変化は

$$\begin{aligned} \langle \Delta E \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} m \{ (v + \Delta v_{\parallel})^2 + \Delta v_{\perp}^2 - v^2 \} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} m \{ 2v \Delta v_{\parallel} + (\Delta v_{\parallel})^2 + (\Delta v_{\perp})^2 \} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ 2P \left\langle \frac{dP_{\parallel}}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dP_{\parallel}^2}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dP_{\perp}^2}{dt} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

と計算できるから

$$\begin{aligned}\nu_E &= \frac{2\Gamma_t m_t}{v^3} \sum_b \frac{n_b Z_b^2}{m_b} [\Phi(x) - (1 + \frac{m_b}{m_t}) x \Phi'(x)] \\ \tau_E &= \nu_E^{-1}\end{aligned}\quad (4.48)$$

となる。

以上の結果は、テスト粒子の速さは任意で成立する。もし、 $v \gg v_{T_b}$ ($x \gg 1$) の場合、すなわちテスト粒子が高エネルギー粒子であるとき、あるいは $v \sim v_{T_b}$ ($x \sim 1$) のとき、すなわち熱化粒子のときや、 $v \ll v_{T_b}$ ($x \ll 1$) のような遅い粒子の場合はそれぞれの極限で τ_m, τ_s, τ_E が求められる。

3) 熱化粒子の衝突時間

テスト粒子が熱化プラズマの粒子の一つの場合は衝突時間の式で $v = v_{T_b} = \sqrt{3T_b/m_b}$ とおけばよい。前節の結果を用いると電子の電子に対する衝突時間、電子のイオンに対する衝突時間は容易に計算でき、それぞれの間に次の関係があることがわかる。

$$\begin{aligned}\tau_e &\equiv \tau_s^{e-e} = \tau_m^{e-e} = \frac{Z_i}{2} \tau_s^{e-i} = Z_i \tau_m^{e-i} \\ &= \frac{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{n_e e^4 \ln \Lambda} \propto \frac{T_e^{3/2}}{n_e}\end{aligned}\quad (4.49)$$

また、イオンのイオンに対する衝突、イオンの電子に対する衝突時間も計算でき、電子・電子間、イオン・イオン間、イオン・電子間のエネルギー緩和時間もすぐ計算でき、これらは次のようになる。

$$\begin{aligned}\tau_i &\equiv \tau_m^{i-i} = \frac{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{Z_i^4 e^4 n_i \ln \Lambda} \propto \frac{T_i^{3/2}}{n_i} \\ \tau_{ie} &\equiv \tau_s^{i-e} = \tau_m^{i-e} = \frac{\sqrt{2}\pi\epsilon_0^2 m_e^{-1/2} m_i T_e^{3/2}}{Z_i^2 n_e e^4 \ln \Lambda} \\ \tau_E^{e-e} &= \frac{\sqrt{2}\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{n_e e^4 \ln \Lambda} \sim \tau_e \\ \tau_E^{i-i} &= \frac{\sqrt{2}\pi\epsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{Z_i^4 n_i e^4 \ln \Lambda} \sim \tau_i\end{aligned}$$

$$\tau_E^{i-e} = \frac{\sqrt{2\pi}3\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} m_i T_e^{3/2}}{Z_i^2 n_i e^4 \ln \Lambda} \sim \tau_{ie} \quad (4.50)$$

以上より、熱化プラズマ中の粒子の衝突には次の比例関係があることがわかる。

$$\tau_e : \tau_i : \tau_{ie} \simeq 1 : \frac{1}{Z_i^3} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} : \frac{1}{Z_i^2} \frac{m_i}{m_e} \quad (4.51)$$

もし $Z_i = 1, T_e = T_i$ なら

$$\tau_e : \tau_i : \tau_{ie} = 1 : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} : \frac{m_i}{m_e} \quad (4.52)$$

である。すなわちイオン・イオン、イオン・電子の衝突時間は、電子の衝突時間に比べて質量比の平方根倍及び質量比だけ長い。 $\tau_E^{e-e}, \tau_E^{i-i}, \tau_E^{i-e}$ も同様である。つまり、先ず電子が緩和してマックスウェル分布になり、次にイオンが緩和し、最後に電子、イオン全て含めて緩和して全体としてマックスウェル分布になる。

コンパクトヘリカル装置 (CHS[3]) を例にとって衝突時間の大きさを見積もってみよう。CHS はプラズマ主半径 $R_0 \simeq 1\text{m}$, プラズマ小半径 $a_p \simeq 0.2\text{m}$ で水素プラズマ ($Z_i = 1, A_i = 1$) を考える。電子衝突時間は

$$\tau_e \sim \tau_{ei} = 1.6 \times 10^{-10} \frac{1}{Z_i} T_e^{3/2} \left(\frac{n_e}{10^{20}}\right)^{-1} \quad [\text{s}]$$

で与えられる。ただし T_e は eV 単位である。例として電子温度、イオン温度が $T_e = T_i = 500\text{eV}$ で電子密度・イオン密度が $n_e = n_i = 3 \times 10^{19} [\text{m}^{-3}]$ のプラズマを考える。この時

$$\tau_e = 1.6 \times 10^{-10} (500)^{3/2} \left(\frac{10}{3}\right) = 5.96 \times 10^{-6} \sim 6\mu\text{s}$$

$$\tau_i \sim \sqrt{m_i/m_e} \tau_e = 43 \times 6\mu\text{s} = 0.26\text{ms}$$

$$\tau_{i-e} \sim (m_i/m_e) \tau_e = 1830 \times 6\mu\text{s} = 10\text{ms}$$

電子の熱速度は、 $v_{Te} \simeq 6 \times 10^5 \sqrt{T_e} = 1.34 \times 10^7 \text{m/s}$ でトーラスを1周する時間は $2\pi R/v_{Te} \sim 0.5\mu\text{s}$ 程度である。イオンの方は $v_{Ti} \simeq 1.38 \times 10^4 \sqrt{T_i} = 3.0 \times 10^5 \text{m/s}$ であり、 $2\pi R/v_{Ti} \sim 20\mu\text{s}$ 程度である。電子やイオンがトーラス1周する時間と比べると衝突時間はずい分と長い。エネルギー閉じ込め時間を今 $\tau_E = 1 \sim 5\text{ms}$ 程度とすると、

$\tau_E < \tau_{i-e}$ であるので $T_e \neq T_i$ 、すなわち、電子とイオンとは充分緩和せずそれぞれの温度は異なるであろう。

(3) 衝突積分

§ 3 の (1) で述べたようにボルツマンの式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a = \frac{\delta f_a}{\delta t}$$

右辺の $\delta f_a / \delta t$ は衝突及び粒子の発生・消滅を含む項である。ここでは粒子の発生・消滅は考えないことにする。衝突項を $(\delta f_a / \delta t)_c$ と書く。 $(\delta f_a / \delta t)_c$ は衝突積分と呼ばれ正確な表式が与えられている。プラズマ粒子の衝突時間、エネルギー緩和時間、高エネルギー粒子の減衰過程、2 体衝突に基づく輸送係数（例えば電気抵抗 η ）などは全て衝突積分から求める事ができる。

ランダウは 2 体衝突に基づいて衝突積分を求めた [4]。ここではこれを簡単に紹介する。ボルツマンの 2 体衝突積分は次のように与えられる。

$$\left(\frac{\delta f(\vec{p})}{\delta t} \right)_c = \int d\vec{p}_1 \int d\tau W(\vec{p}\vec{p}_1 - \vec{p}'\vec{p}'_1) \{ f(\vec{p})f_1(\vec{p}_1) - f(\vec{p}')f_1(\vec{p}'_1) \} \quad (4.53)$$

ここでは運動量 $\vec{p}$ を持つ粒子が運動量 $\vec{p}_1$ を持つ粒子と衝突してそれぞれが $\vec{p}'$, $\vec{p}'_1$ になったとしている。 $W(\vec{p}\vec{p}_1 - \vec{p}'\vec{p}'_1)$ は単位時間当たりの遷移確率である。衝突の前後において運動量保存の式 $\vec{p} + \vec{p}_1 = \vec{p}' + \vec{p}'_1$ が成立する。運動量の差を

$$\vec{\Delta} \equiv \vec{p}' - \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 \quad (4.54)$$

と定義すると、微小角散乱が支配的であるとして

$$|\vec{\Delta}| \ll |\vec{p}|, |\vec{p}_1| \quad (4.55)$$

とする。この小さな量によりボルツマンの式の展開が可能となる。展開の結果

$$\left(\frac{\delta f(\vec{p})}{\delta t} \right)_c = \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \cdot \left\{ \vec{D}(\vec{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} f(\vec{p}) + \vec{A}(\vec{p}) f(\vec{p}) \right\}$$

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{p}) &= \int d\vec{p}_1 \frac{\langle \vec{\Delta} \vec{\Delta} \rangle}{2} f_1(\vec{p}) \\ \vec{A}(\vec{p}) &= \int d\vec{p}_1 \frac{\langle \vec{\Delta} \vec{\Delta} \rangle}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} f_1(\vec{p}_1)\end{aligned}\quad (4.56)$$

のようにフォッカー・プランク型の式を得る。ここで

$$\langle \vec{\Delta} \vec{\Delta} \rangle = \int_0^\infty db \int_0^{2\pi} d\phi g b \cdot \frac{4\pi q^2 q_1^2 \vec{b} \vec{b}}{g^2 b^4} \quad (4.57)$$

である。 b は衝突パラメータで g は2つの衝突する粒子の速度差である。積分(4.57)は

$$\langle \vec{\Delta} \vec{\Delta} \rangle \propto \int_0^\infty \frac{\vec{I}}{b} \quad (4.58)$$

のように b に逆比例することがわかり積分は対数発散する。この困難をなくすため、積分の下限は微小角散乱が支配的と仮定しているので0を b_0 でおきかえ、上限はクーロン力は遠達力であるがデバイ遮蔽のためデバイ長 λ_D より遠くまでクーロン力は及ばないと考えて ∞ を λ_D でおきかえることにする。このように積分の上限、下限を有限量に置き換えるとランダウの衝突積分は

$$\left(\frac{\delta f_a}{\delta t}\right)_c = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \sum_b \frac{c_{ab}}{m_a} \int d^3 v' \left(\frac{\vec{I}}{u} - \frac{\vec{u} \vec{u}}{u^3} \right) \cdot \left[\frac{1}{m_a} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} f_b(\vec{v}') - \frac{1}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial \vec{v}'} f_a(\vec{v}) \right] \quad (4.59)$$

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$$

$$c_{ab} = 2\pi e_a^2 e_b^2 \ln \Lambda \quad (\text{cgs-unit})$$

のように与えられる。

ランダウの式には磁場 $\vec{B}$ が全く含まれていない。衝突は λ_D より小さいスケールでの出来事であるので $\lambda_D \ll \rho_e$ (あるいは $\lambda_D \sim \rho_e$ でも) ならランダウの式は $\vec{B} \neq 0$ でもそのまま成立する。 $\lambda_D \gg \rho_e$ の場合クーロン積分の上限を λ_D のかわりに ρ_e で置き換える必要がある。しかし $\ln \Lambda$ は対数依存でその影響は小さい。衝突積分に $\vec{B}$ が影響するのは極端に磁場が大きい時だけで普通 $\vec{B} \neq 0$ でもランダウの式はそのまま適用できる。

Rosenbluth 等はフォッカー・プランク型の衝突積分を求めたが[5]、これはランダウの衝突積分の式(4.59)と完全に同等である。

(4) 高エネルギー粒子の衝突

1) 高エネルギー・イオンの衝突減衰

中性粒子入射加熱 (NBI 加熱) でプラズマ中に発生する高エネルギー・イオンや核反応



で発生する α 粒子は、磁場にとらえられプラズマ中を運動し、プラズマのイオンや電子と衝突しながらエネルギーを失って減速していく。高エネルギー・イオンが失ったエネルギーはプラズマの電子とイオンに与えられプラズマは加熱される。NBI 加熱やアルファ粒子加熱、ICRF 少数イオン加熱は、このように高エネルギー・イオンを利用したものである。

高エネルギー・イオンの減速過程を考える。高エネルギーイオンの質量を m_i , 速さを v とする。プロトンでは $m_i = m_p$, $A_H = 1$, $Z_H = 1$, 重水素では $m_i = 2m_p$, $A_D = 2$, $Z_D = 1$, アルファ粒子では $m_i = 4m_p$, $A_\alpha = 4$, $Z_\alpha = 2$ である。

減速時間 (減衰時間) は次の式で定義される。

$$\frac{d}{dt} m_i v = -m_i v \nu_s^t \quad (4.61)$$

これは運動量を失う時間であるが

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i v^2 = -m_i v^2 \nu_s^t \quad (4.62)$$

も成立するのでエネルギーを失う時間でもある。ただし、 $D_\perp^t$, $D_\parallel^t$ は今は考えない。NBI や核反応で発生する高速粒子は

$$v_{Ti} \ll v \ll v_{Te} \quad (4.63)$$

を満たす。 $v_{Ti} = (2T_i/m_i)^{1/2}$, $v_{Te} = (2T_e/m_e)^{1/2}$ はイオン、電子の熱速度である。従って、 $x_e = v/v_{Te} \ll 1$, $x_i = v/v_i \gg 1$ である。任意の v に対しては

$$\begin{aligned} \nu_s^t &= \frac{2\Gamma_i}{v} \sum_{b=e,i} \frac{n_b Z_b^2}{v_b^2} \left(1 + \frac{m_i}{m_b}\right) G(x_b) \\ G(x) &= [\Phi(x) - x\Phi'(x)]/2x^2 \\ \Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \end{aligned} \quad (4.64)$$

が成立する。添字 t は NBI 加熱で生成される高エネルギー・イオンやアルファ粒子を示す。 $x_e \ll 1$ であるので $\Phi(x_e)$ を展開、 $x_i \gg 1$ であるので $\Phi(x_i)$ の漸近形を使うことができる。 $v_{Ti} \ll v \ll v_{Te}$ を満たす高エネルギー・イオンに対して

$$\nu_s^t \simeq n_e \Gamma_t \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{m_t}{m_e}\right) \frac{1}{v_{Te}^3} + Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{v^3} \right] \quad (4.65)$$

となる。第1項は電子との衝突、第2項はプラズマ・イオンとの衝突によるものである。 $m_t/m_e \gg 1$, $m_t \simeq m_i$ であるので電子との衝突項はイオンとの衝突項より大きく、 ν_s^t は第1項のみで近似できる。 ν_s^t の逆数は Spitzer の減速時間と呼ばれ次の式で与えられる。

$$\tau_s \equiv \left(n_e \Gamma_t \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{m_t}{m_e} \frac{1}{v_{Te}^3} \right)^{-1} \quad (4.66)$$

定数を計算すると

$$\tau_s = 6.33 \times 10^{14} \frac{A_t T_e^{3/2}}{Z_t n_e \ln \Lambda} \quad [\text{s}] \quad (4.67)$$

で与えられる。ただし、 T_e は eV 単位 n_e は m^{-3} 単位である。

高速イオンの運動エネルギーを $W \equiv \frac{1}{2} m_t v^2$ とおく。 W と ν_s^t の表示を使うと式 (4.65) は次のように書けることが簡単に示せる。

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -m_t v^2 \frac{1}{\tau_s} - m_t v^2 \cdot n_e \Gamma_t Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{v^3} \\ &= -\frac{2}{\tau_s} W - \frac{(m_t)^{3/2}}{\sqrt{2}} n_e \Gamma_t Z_i \left(1 + \frac{m_t}{m_i}\right) \frac{1}{W^{1/2}} \\ &= -\frac{2}{\tau_s} W - \frac{m_t^{3/2} v_c^3}{\sqrt{2} \tau_s} \frac{1}{W^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

あるいは高速イオンの走る方向 x に沿って

$$\frac{dW}{dx} = \sqrt{\frac{m_t}{2W}} \frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau_s} \sqrt{\frac{m_t}{2}} W^{1/2} - \sqrt{\frac{m_t}{2}} \frac{m_t^{3/2} v_c^3}{\sqrt{2} \tau_s} \frac{1}{W} \quad (4.69)$$

と書ける。この式は粒子が走る方向に沿うエネルギー変化を示す。 dW/dx は次のように書ける。

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{\alpha}{W} - \beta W^{1/2} \quad (4.70)$$

これを Stix の式という。

ただし、

$$\alpha = \frac{m_i^2 v_c^3}{2 \tau_s}, \quad \beta = \frac{1}{\tau_s} \sqrt{2m_i} \quad (4.71)$$

であり、 v_c は次式で定義される。

$$v_c^3 = n_e \Gamma_i Z_i \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \tau_s \quad (4.72)$$

Stix の式では α の項はプラズマ・イオンとの衝突、 β の項はプラズマ・電子との衝突を表している。 $\alpha/W = \beta W^{1/2}$ となる $W = W_c m_i v_c^2/2$ は臨界エネルギーといい、 v_c を臨界速度という。 $v \gg v_c$ の時、 $dW/dx \sim -\beta W^{1/2}$ であり高速イオンは電子との衝突で減衰する。 $v \ll v_c$ の時、 $dW/dx \sim -\alpha W$ でプラズマ・イオンとの衝突で減衰する。高エネルギー・イオンが軽水素の場合、 $W_c \sim 15T_e$ で、アルファ粒子の場合 $W_c \sim 33T_e$ となる。

高エネルギー・イオンがプラズマと衝突し減衰してプラズマ・イオンと同程度のエネルギーになるまでの時間、すなわち熱化時間を考えよう。 W のエネルギーを持って入射したイオンが熱エネルギーまでに減衰する平均的な時間 τ_{th} は

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau_s} W - \frac{2}{\tau_s} \frac{W_c^{3/2}}{W^{1/2}} \quad (4.73)$$

の式を用いると簡単に計算できる。すなわち

$$\tau_{th} \equiv -\int_0^W \frac{dW}{dW/dt} = \frac{\tau_s}{3} \ln \left[1 + \left(\frac{W}{W_c}\right)^{3/2}\right] \quad (4.74)$$

が得られる。もし $W \gg W_c$ であれば $\tau_{th} = \tau_s \ln(W/W_c)/2$ と近似できる。

高エネルギー・イオンが減速する過程で、イオン及び電子へどのような割合でエネルギーが分配されるのか考える。エネルギー W の入射高速イオンが熱化されるまでにプラズマ・イオンに与えるエネルギーの比率 G_i は

$$G_i = \frac{1}{W} \int_0^W \frac{(\alpha/W) dW}{\alpha/W + \beta W^{1/2}} = \frac{W_c}{W} \int_0^{W/W_c} \frac{dy}{1 + y^{3/2}} \quad (4.75)$$

電子へは

$$G_e = \frac{1}{W} \int_0^W \frac{\beta W^{1/2}}{\alpha/W + \beta W^{1/2}} = \frac{W_c}{W} \int_0^{W/W_c} \frac{y^{3/2} dy}{1 + y^{3/2}} \quad (4.76)$$

であり、当然

$$G_i + G_e = 1 \quad (4.77)$$

である。

例として α 粒子の場合を考える。 $W = 3.5\text{MeV} = 3.5 \times 10^6\text{eV}$ であり、 $T_e \sim 10\text{keV}$ なら $W_c = 33T_e = 3.3 \times 10^5\text{eV}$ であるので $W/W_c \sim 10$ 程度となり、エネルギー分配率は

$$G_e \simeq 0.8, \quad G_i \simeq 0.2 \quad (4.78)$$

となり、殆どのアルファ粒子のエネルギーは電子に与えられる。つまり、アルファ粒子加熱は電子加熱である。図 4.5 に高速イオンのエネルギーに対するエネルギー分配率を示す。 τ_{cx} は荷電交換損失時間である。

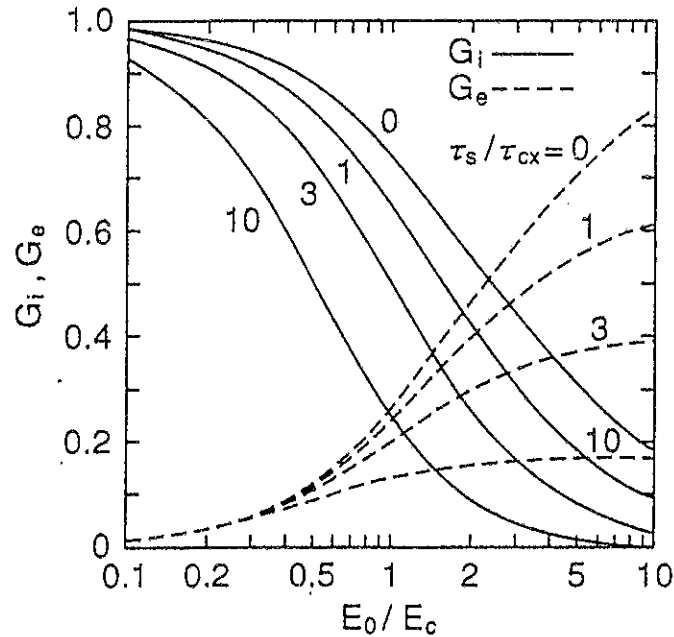


図 4.5

実際には $v \simeq v_c$ からイオンによるピッチ角散乱が効き始め $v < v_c$ では速度空間で広がりながら減速していく。ピッチ角散乱はエネルギー変化に関係ない。

参考文献

- [1] ランダウ・リフシッツ、「力学」 東京図書、1967 年 (広重徹・水戸巖共訳)
- [2] F.L.Hinton, "*Collisional Transport in Plasma*", Handbook of Plasma Physics
(ed. M.N.Rosenbluth and R.Z.Sagdeev), Vol.1, North-Holland Publishing Company,
1983.
- [3] K.Nishimura et al., Fusion Technology Vol.17, No.1 (1990) 86 - 100.
- [4] L.Landau, Physik.Z.Sowjetunion 10 (1936) 154.
- [5] M.N.Rosenbluth, W.M.MacDonald, D.L.Judd, Phys. Rev. Vol.107, No.1 (1957) 1 - 6.

§5 流体近似と電磁流体力学

プラズマ中で起こる物理現象は多種多様であり、時として、流体的な性質も呈する。本節では流体として振る舞うプラズマに対する流体近似の方程式を導き、さらに簡単化した1流体方程式つまり電磁流体方程式を導き、その成立条件や、基本的性質を述べる。

(1) 流体近似

1) 流体方程式系

プラズマの物理現象を記述する最も基本的な方程式は、§3で述べたようにボルツマンの式とマクスウェル方程式系である。すなわち、

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \frac{\delta f_a}{\delta t} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (5.5)$$

f_a はa種粒子 ($a = e$: 電子、 $a = i$: 主プラズマイオン、 $a = I$: 不純物イオン、...) に対する分布関数で $\vec{v}, \vec{r}, t$ の関数である。式(5.4)と(5.5)におけるプラズマの電流密度 $\vec{J}$ と電荷密度 ρ_e は

$$\vec{J} \equiv \sum_a e_a \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f_a d^3v \quad (5.6)$$

$$\rho_e = \sum_a e_a \int_{-\infty}^{\infty} f_a d^3v \quad (5.7)$$

で定義される。 $\vec{J}$ と ρ_e が与えられるとマクスウェルの式(5.2)~(5.5)から $\vec{E}$ と $\vec{B}$ が決まり、 $\vec{E}$ と $\vec{B}$ が決まるとボルツマンの式(5.1)から f_a が求められる。式(5.1)の右辺の $\delta f_a / \delta t$

に衝突や粒子の発生源・消滅項が含まれている場合には、これらを与えねばならないが、式(5.1)～(5.5)は閉じた方程式系を形成している。しかしこれを解く事は非常に難しく、特殊な場合にしか答は得られていない。ここでは分布関数 f_a の速度モーメントに対する方程式をボルツマンの式から導く。

今、 $\delta f_a / \delta t$ は、粒子の発生や消滅はないとし、衝突のみ考える。

$$\frac{\delta f_a}{\delta t} = \left(\frac{\delta f_a}{\delta t} \right)_c = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b) \quad (5.8)$$

C_{ab} は a 種粒子と b 種粒子とのクーロン 2 体衝突を表す衝突積分でその表式は § 4 で示した。ここに $\sum$ の b は a 自身も含む。

C_{ab} は次のような粒子数、運動量、及びエネルギーの保存則を満たす。

$$\int C_{ab} d^3v = 0 \quad (5.9)$$

$$\int m_a \vec{v} C_{ab} d^3v + \int m_b \vec{v} C_{ba} d^3v = 0 \quad (5.10)$$

$$\int \frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} d^3v + \int \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} d^3v = 0 \quad (5.11)$$

次に流体力学的変数 $n_a(\vec{r}, t)$, $\vec{v}_a(\vec{r}, t)$, $T_a(\vec{r}, t)$ を定義する

$$n_a(\vec{r}, t) = \int f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (5.12)$$

$$\vec{v}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \vec{v} f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \equiv \langle \vec{v} \rangle_a \quad (5.13)$$

$$T_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \frac{m_a}{3} (\vec{v} - \vec{v}_a)^2 f_a(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (5.14)$$

$$\equiv \langle \frac{m_a}{3} (\vec{v} - \vec{v}_a)^2 \rangle$$

n_a は点 $\vec{r}$, 時刻 t における a 種粒子の密度、 $\vec{v}_a$ は a 種粒子の平均速度（流体としての流れ）、 T_a は a 種粒子の温度である。

$$\vec{v}' \equiv \vec{v} - \vec{v}_a, \quad \langle \vec{v}' \rangle = 0 \quad (5.15)$$

とおくと、 $\vec{v}'$ は平均からずれた粒子のランダムな速度を示し

$$\frac{3}{2} T_a = \frac{m}{2} \langle (v')^2 \rangle_a \quad (5.16)$$

で、熱運動エネルギーは $3T_a/2$ になっている。但し、式 (5.14) は熱平衡状態でのみ定義できる真の意味での温度ではなく、あくまで定義であり、一般に熱平衡状態になっていないプラズマでは式 (5.14) の定義を温度と呼ぶ。

ボルツマンの式 (5.1) の 0 次、1 次、2 次のモーメントを取る。すなわち、式 (5.1) の両辺に $1, m\vec{v}, mv^2/2$ を掛けて速度空間で積分すると、式 (5.9)、(5.10)、(5.11) を考慮して $n_a, \vec{v}_a, T_a$ に対する流体の式が得られる。

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \vec{v}_a = 0 \quad (5.17)$$

$$m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\nabla \cdot \vec{P}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (5.18)$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{d_a T_a}{dt} + \vec{P}_a : \nabla \vec{v}_a = -\nabla \cdot \vec{q}_a + Q_a \quad (5.19)$$

ここで微分 d_a/dt は

$$\frac{d_a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla \quad (5.20)$$

で定義され、流れに沿う時間微分で対流微分と呼ばれる事がある。また式 (5.18) と (5.19) の中の $\vec{P}_a, \vec{q}_a, \vec{R}_a, Q_a$ はそれぞれ

$$\vec{P}_a \equiv n_a m_a \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle = p_a \vec{I} + \vec{\pi}_a \quad (5.21)$$

$$\vec{q}_a \equiv n_a m_a \langle \frac{1}{2} (v')^2 \vec{v}' \rangle \quad (5.22)$$

$$\vec{R}_a \equiv \sum_b \int_{-\infty}^{\infty} m_a \vec{v}' C_{ab} d^3 v = \sum_{b \neq a} \int_{-\infty}^{\infty} m_a \vec{v}' C_{ab} d^3 v \quad (5.23)$$

$$Q_a \equiv \sum_b \frac{m_a}{2} \langle (v')^2 \rangle C_{ab} d^3 v = \sum_{b \neq a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 C_{ab} d^3 v - \vec{R}_a \cdot \vec{v}_a \quad (5.24)$$

で定義される量である。 $\vec{P}_a$ は圧力テンソルと呼ばれ

$$p_a = n_a m_a \langle (v')^2 \rangle / 3 = n_a T_a \quad (5.25)$$

は (スカラー) 圧力である。もし速度分布 ($\vec{v}$ に対するもの) が等方的であると

$$\begin{aligned} \langle v_x'^2 \rangle &= \langle v_y'^2 \rangle = \langle v_z'^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \\ \langle v_x' v_y' \rangle &= \langle v_y' v_z' \rangle = \langle v_z' v_x' \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

であるので $\vec{P}_a = p_a \vec{I}$, $\vec{\pi}_a = 0$ となる。従って $\vec{\pi}$ は分布関数の球対称からのずれを表し、圧力テンソルと呼ばれる。 $\vec{q}_a$ はランダムな速度による熱流束であり、 $\vec{R}_a$ は他の粒子との衝突による摩擦力、すなわち、異種粒子間の衝突による運動量伝達率である。

$$\begin{aligned} \int m_a \vec{v} C_{aa} d^3v &= 0 \\ \int \frac{1}{2} m_a v^2 C_{aa} d^3v &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

であるので

$$\sum_a \vec{R}_a = 0 \quad (5.28)$$

を満たす。すなわち、電子と一種のイオンからなる2流体では

$$\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (5.29)$$

である。式(5.24)の Q_a は異種粒子 $b (\neq a)$ との衝突により発生する熱を表している。

上に示した2流体方程式は、ボルツマン方程式から厳密に導かれたものであるが、圧力テンソルの非等方成分 π_a や熱流束 q_a 等が現れるため、未知変数の数が方程式の数より多い。それ故、方程式を解くことができる様にするためには、低次のモーメント（即ち流体力学的変数）により高次のモーメントの消去を行う必要がある。衝突周波数の大きな場合の π_a , q_a , R_a , Q_a 等の流体力学的変数 n_a , $\vec{v}_a$, T_a による表式（古典輸送理論）は、Braginskii によって与えられている。

2) 古典的輸送係数

Braginskii は衝突頻度が大きく、かつ $\omega_{ce} \tau_e \gg 1$, $\omega_{ci} \tau_i \gg 1$ の場合の輸送係数に対して以下の表示を得ている [1]。以下必要のない時は添字 a を省略する。

圧力テンソルは

$$P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (5.30)$$

で与えられる。 P はスカラー圧力で $\pi_{\alpha\beta}$ は圧力テンソルである。例えば $\pi_{yx} \sim -\varepsilon \partial v_y / \partial x$ はモーメントの y 成分の x 方向の流れを表す。ここで ε は粘性係数で $\varepsilon \sim mnD$ 程度であ

る。ただし $D \sim \rho_e^2 / \tau_e$ は粒子の拡散係数である。

摩擦力は

$$\vec{R} = \vec{R}_u + \vec{R}_T \quad (\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_u &= en_e \vec{\eta} \vec{J}, \quad \eta_{\perp} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} \\ \vec{R}_T &= -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \end{aligned}$$

で与えられる。 η は電気(比)抵抗で一般にはテンソルである。 $\vec{R}_T$ は熱起電力で第2項は金属中の Nernst 効果に相当する [2]。

熱流束は、電子、イオンそれぞれに対して

$$\begin{aligned} \vec{q}_e &= \vec{q}_u + \vec{q}_T \\ \vec{q}_u &= 0.71 n_e T_e \vec{u}_{\parallel} + \frac{3}{2} \frac{n_e T_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \vec{u} \quad (\vec{u} = \vec{v}_e - \vec{u}_i) \\ \vec{q}_T &= -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{n_e T_e}{e B} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \\ \vec{q}_i &= -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{n_i T_i}{e B} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_i \end{aligned} \quad (5.32)$$

と与えられる。 $\kappa_{\perp} \sim nD$ は磁場 $\vec{B}$ に垂直な方向の熱拡散係数である。

熱発生は

$$\begin{aligned} Q_e &= \eta J^2 + \frac{1}{en_e} \vec{J} \times \vec{R}_T - \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \\ Q_i &= \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (5.33)$$

で与えられる。 Q_e の右辺第1項はジュール熱で、第3項はイオンとのエネルギー緩和による熱発生(又は損失)で Q_i とつり合っている。

輸送係数は、粒子拡散、熱拡散、電気抵抗、粘性に対してそれぞれ

$$D \sim \nu_e \varrho_e^2 = \varrho_e^2 / \tau_e = \varrho_i^2 / \tau_i \quad \text{粒子拡散係数}$$

$$\kappa_{\perp} \sim nD \quad \text{熱拡散係数}$$

$$\eta \sim \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} \quad \text{電気抵抗}$$

$$\varepsilon \sim mnD \quad \text{粘性係数}$$

の程度である。これらは衝突時間程度の現象を引き起こす。例として、 $B = 3T$, $T_e \sim T_i \sim 500\text{eV}$, $n \sim 5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$, $a \sim 0.2\text{m}$ のプラズマを考える。 a はプラズマの半径である。このとき、電子の衝突時間 τ_e , イオンの衝突時間 τ_i , イオンのラーモア半径 ϱ_i , 粒子の拡散係数はそれぞれ次のような程度の量になる。

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{1}{\nu_e} \sim 5 \times 10^{-6}\text{s} \\ \tau_i &\sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau_e \sim 2 \times 10^{-4}\text{s} \\ \varrho_i &= 1.02 \times 10^2 \sqrt{A} \frac{1}{Z_i} \frac{\sqrt{T_i}}{B} \sim 0.075\text{cm} \\ D &\sim \varrho_i^2 / \tau_i \sim 30\text{cm}^2/\text{s} \end{aligned} \quad (5.34)$$

トカマクやヘリカル系装置のプラズマで観測される粒子拡散係数はこの D の値よりはるかに大きく大雑把に言って観測される量 D_{an} は $D_{an} \gtrsim 10^4\text{cm}^2/\text{s} = 1\text{m}^2/\text{s}$ 位である。衝突による拡散よりずっと大きな拡散をすべて一般的に異常拡散といい、それに伴う輸送過程を異常輸送という。

輸送の時間尺度は、衝突過程でのみ決まる (古典的輸送) とすると今の場合、 $\tau_c \sim a^2/D \sim 13\text{s}$ で実際に観測される量 (閉じ込め時間等) よりはるかに長い。又、後述の (理想) MHD の時間尺度は $\tau_{MHD} \sim \tau_A \sim a/v_A$ ($v_A = B/\sqrt{\mu_0 m_i n_i}$: アルベン速度) であり、今の例では $v_A \sim 10^9\text{cm/s}$ で、 $\tau_{MHD} \sim 2 \times 10^{-8}\text{s}$ 程度になり τ_{MHD} は τ_e や τ_c のような衝突過程の時間尺度よりはるかに短い。

(2) 電磁流体力学

1) 1 流体方程式

2 流体方程式系からある近似のもとに 1 流体方程式系を導こう。イオンの運動方程式と電子の運動方程式とを加えることにより 1 流体方程式の運動方程式が得られる。またイオンの運動方程式と電子の運動方程式の差をとることによりオームの式が得られる。

先ず、質量密度 ρ 、流体の速度 $\vec{V}$ 、電流密度 $\vec{J}$ を定義する。また 1 種のイオン (電荷 $Z_i = 1$) から成るプラズマの場合についてその表現を書くと、

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_a m_a n_a = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n_i \\ \vec{V} &= \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \vec{v}_a \cong \vec{v}_i \\ \vec{J} &= \sum_a Z_a e n_a \vec{v}_a = -e n_e \vec{v}_e + e n_i \vec{v}_i\end{aligned}\quad (5.35)$$

密度保存の式は粒子種 a に対する粒子密度保存の式

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (5.36)$$

を全ての粒子種で足し合わせ ρ と $\vec{V}$ の定義を用いると次のように得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.37)$$

a 種に対する運動方程式

$$m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\nabla p_a - \nabla \cdot \vec{\pi}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (5.38)$$

を全ての粒子種について加え合わせると 1 流体運動方程式が得られるが、その時次の仮定をおく。

1. 電子の慣性は無視する ($m_e \rightarrow 0$)。

$$\begin{aligned}\sum_a m_a n_a \frac{d_a \vec{v}_a}{dt} &= m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + m_i n_i \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i \\ &+ m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + m_e n_e \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e \simeq \rho \frac{d\vec{V}}{dt}\end{aligned}\quad (5.39)$$

ここで $\rho \simeq m_i n_i$, $\vec{V} \simeq \vec{v}_i$ と近似した。

2. 衝突が充分大きく圧力は等方的であると仮定する。すなわち

$$\sum_a \nabla \cdot \vec{\pi}_a \rightarrow 0 \quad (5.40)$$

3. 準中性条件 ($n_e = Z_i n_i$) を仮定する。

$$\sum_a e_a n_a \vec{E} = (Z_i e n_i - e n_e) \vec{E} = 0 \quad (5.41)$$

電流密度 $\vec{J}$ の定義より

$$\sum_a e_a n_a \vec{v}_a \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.42)$$

であり、また衝突における運動量保存

$$\sum_a \vec{R}_a = \vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (5.43)$$

を考慮すると運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.44)$$

となる。ただし全圧力 P は

$$P = \sum_a p_a = p_e + p_i \quad (5.45)$$

と定義した。

ここで運動方程式の $\vec{J} \times \vec{B}$ の項について考える。ローレンツ力 $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$ は $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を使うと

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \vec{B} \times \vec{B} \quad (5.46)$$

$$\begin{cases} F_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{2\mu_o} + \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (B_x B_\beta) \\ F_y &= \dots \\ F_z &= \dots \end{cases}$$

であるから $\vec{F}$ の成分 F_α は

$$F_\alpha = (\nabla \cdot T_{\alpha\beta}^B) = \frac{\partial T_{\alpha\beta}^B}{\partial x_\beta} \quad (5.47)$$

と書ける。ここで

$$T_{\alpha\beta}^B = \frac{1}{\mu_0} (B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (5.48)$$

を磁気圧力テンソルと言う。一方、 $\vec{F}$ をベクトル形式で書き改めていくと

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{b} \cdot \nabla \vec{b} + \frac{1}{\mu_0} B \vec{b} (\vec{b} \cdot \nabla) B \\ &= -\nabla_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\vec{n}}{R} \end{aligned} \quad (5.49)$$

と書ける。ただし、 $\vec{b} = \vec{B}/B$, $\vec{b} \cdot \nabla = \partial/\partial s$ で $\vec{b}$ は磁場方向の単位ベクトル、 s は磁力線に沿う線素である。微分幾何学によると

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = -\kappa \vec{n} \equiv -\frac{1}{R} \vec{n} \quad (5.50)$$

である。 κ を曲率、 R を曲率半径という。式 (5.49) の右辺第 1 項は磁場の圧力の垂直方向の勾配、第 2 項は $\vec{b}$ 方向の $\vec{b}$ の変化による力 ($\vec{B}$ に垂直方向)、すなわち張力 (テンション) である。

電磁場の持つエネルギーを考える。電場の持つエネルギーは $E = 5\text{kV/m}$ の時

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (5\text{kV/m})^2}{2} = 10^{-4} = \frac{10^{-4}}{g} \text{kg/m}^2 \quad (5.51)$$

であり非常に小さい。一方磁場の持つエネルギー密度は $B = 1$ の時

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{2\mu_0} &= \frac{1}{8\pi \times 10^{-7}} \\ &= 0.4 \times 10^5 g = 4 \times 10^4 \text{kg/m}^2 = 40 \text{Ton/m}^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

で非常に大きい。一般に電場による圧力は磁場の圧力と比較して充分無視できる。

準中性条件を仮定したがこれについて考える。電荷密度は1種類のイオン（電荷数 Z_i ）から成るプラズマでは

$$\rho_e \equiv Z_i e n_i - e n_e \quad (5.53)$$

と定義される。電子とイオンに対する連続の式に電荷を掛けて両者の差をとると

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.54)$$

が成立する。後でわかるようにオームの式は $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ であり、大きさとして $E \sim VB$ であり、また運動方程式から大きさとして $\omega \rho_e \sim P/L \sim JB$ である。ただし、 ω は特徴的振動数である。式 (5.54) の第1項と第2項の大きさを比較すると、

$$\left| \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \right| \sim \frac{\omega \rho_e}{J/L} \sim \frac{\omega}{J} L \frac{\epsilon_0 E}{L} = \epsilon_0 \frac{\omega}{J} V B = \epsilon_0 \frac{\omega}{J} \frac{J B^2}{\omega \rho_e} = \frac{C_A^2}{c^2} \quad (5.55)$$

ここで $\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0^{-1} \rho_e$ から $\rho_e \sim \epsilon_0 E/L$ と考えた。また $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ であり、 C_A は

$$C_A^2 = \frac{B^2}{\mu_0 \rho_e} \quad (5.56)$$

で定義され C_A はアルベン速度と呼ばれる。もし $C_A^2/c^2 \ll 1$ なら $|\nabla \cdot \vec{J}| \gg |\partial \rho_e / \partial t|$ であり

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.57)$$

と考えてよい。

また運動方程式に $\rho_e \vec{E}$ を残したとする。すなわち、

$$\rho_e \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \rho_e \vec{E} - \nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.58)$$

先ず ∇P と $\vec{J} \times \vec{B}$ の大きさを比較する

$$\left| \frac{\nabla P}{\vec{J} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{P}{L} \frac{1}{JB} \sim \frac{P}{L} \cdot \frac{\mu_0}{B^2/L} = \frac{P}{B^2/\mu_0} \quad (5.59)$$

プラズマ圧力と磁場の圧力の比、すなわち

$$\beta = \frac{P}{B^2/(2\mu_0)} \quad (5.60)$$

はプラズマ・ベータ値とよばれ、核融合プラズマの閉じ込めにとって重要な量である。通常この値は1より小さい。さて $\rho_e \vec{E}$ の大きさは

$$\left| \frac{\partial \rho_e / \partial t}{\nabla \cdot \vec{J}} \right| \sim \frac{\omega \rho_e}{J/L} \sim \frac{C_A^2}{c^2} \ll 1 \quad (5.61)$$

であることを使うと

$$\left| \frac{\rho_e \vec{E}}{\vec{J} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{\rho_e E}{JB} \sim \frac{\rho_e VB}{JB} = \frac{\rho_e V}{J} \ll \frac{1}{\omega} \frac{JV}{LJ} = \frac{1}{\omega} \frac{V}{L} \sim 1 \quad (5.62)$$

となり $\vec{J} \times \vec{B}$ と比較すると充分小さく $\rho_e \vec{E}$ の項は無視できる。方程式系では事実上 $\rho_e = 0$ と置いてよいことがわかり、式(5.44)で与えられる運動方程式が正当化される。

2) オームの式

電子の運動方程式とイオンの運動方程式の差を取るとオームの式が得られるが、ここでは電子の運動方程式

$$m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\nabla p_e - \nabla \cdot \vec{\pi}_e - en_e(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \vec{R}_e \quad (5.63)$$

から直接オームの式を導くことにする。そのため次の仮定をおく。

1. 慣性項を無視する ($m_e \rightarrow 0$)。即ち、慣性項の大きさは

$$\left| \frac{m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt}}{en_e \vec{v}_e \times \vec{B}} \right| \simeq \frac{\omega m_e n_e v_e}{en_e v_e \beta} = \frac{\omega}{eB/m_e} = \frac{\omega}{\omega_{ce}} \ll 1 \quad (5.64)$$

と評価できる。考えている時間尺度は ω_{ce}^{-1} よりはるかに小さいと仮定する。

2. 衝突頻度が充分大きく圧力はスカラーと仮定する ($\nabla \cdot \vec{\pi}_e \rightarrow 0$)。

3. 熱起電力の式

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \quad (5.65)$$

において磁力線に沿って電子温度は一定、即ち、 $\nabla_{\parallel} T_e = 0$ と仮定し、また $\nu_e \ll \omega_{ce}$ と仮定すると

$$\left| \frac{\nabla P_e}{\frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e} \right| \sim \frac{\frac{n_e T_e}{L}}{\frac{n_e T_e}{\omega_{ce} \tau_e L}} = \omega_{ce} \tau_e = \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \gg 1 \quad (5.66)$$

であるので $\vec{R}_T \rightarrow 0$ としてよい。この様な仮定のもとでは電子の運動方程式 (5.63) は次のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{\pi}_e \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{en_e} \nabla p_e + \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.67)$$

この式を $\vec{v}_e$ を消去して書きかえる。 $\vec{J} = -en_e \vec{v}_e + en_i \vec{v}_i$ であるから

$$\vec{v}_e = \frac{1}{en_e} (en_i \vec{v}_i - \vec{J}) \simeq \vec{V} - \frac{1}{en_e} \vec{J} \quad (5.68)$$

$$\vec{v}_i \simeq \vec{V}$$

で、これを式 (5.67) に代入するとオームの式の別の形が得られる。

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{1}{en_e} \vec{J} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.69)$$

ここで $\vec{J} \times \vec{B}$ の項はホール効果を表し $\vec{B}$ を横切る $\vec{J}$ は $\vec{E}$ を生成することを意味している。運動方程式を使って式 (5.69) をさらに書きかえる。 $\vec{V} \simeq \vec{v}_i$, $P = p_e + p_i$ であるので運動方程式は

$$e_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla p_e - \nabla p_i + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.70)$$

と書け、これを用いるとオームの式は次のようにも書ける。

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i - \frac{m_i}{Z_i e} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \eta \vec{J} \quad (5.71)$$

仮定 4 として $\omega \ll \omega_{ci}$ を仮定する。イオンの慣性項の大きさは

$$\left| \frac{\frac{m_i}{Z_i e} \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\vec{V} \times \vec{B}} \right| \sim \frac{m_i}{Z_i e} \omega v_i \frac{1}{v_i B} = \frac{\omega}{\omega_{ci}} \ll 1 \quad (5.72)$$

であり小さくイオンの慣性項は式 (5.71) において無視できる。従ってオームの式は

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} \nabla p_i = \eta \vec{J} \quad (5.73)$$

となる。 ∇p_i の項の大きさを考えてみよう。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{V} \times \vec{B}}{\frac{1}{en_e} \nabla P_i} \right| &\simeq \frac{V B en_e}{n_i T_i / L} = \frac{m_i V Z_i e B}{m_i T_i} L \\ &= \frac{\omega_{ci}}{T_i / m_i} V L = \frac{\omega_{ci}}{v_{Ti}^2} V L = \frac{V}{v_{Ti}} \frac{1}{\varrho_i} L \\ &\quad (\varrho_i = v_{Ti} / \omega_{ci}) \end{aligned} \quad (5.74)$$

∇p_i の項が無視できるためには

$$\frac{V}{v_{Ti}} \frac{1}{\varrho_i} L \gg 1, \quad \frac{V}{v_{Ti}} \gg \frac{\varrho_i}{L} \quad (5.75)$$

でなければならない。 $T_i \simeq T_e$ なら $v_{Ti} \sim C_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\varrho}}$ (音速) で流体の速度は一般に音速より遅いので

$$1 \gg \frac{V}{C_s} \gg \frac{\varrho_i}{L} \quad (5.76)$$

でなければ ∇p_i の項は無視できない。例えば $B = 2T$, $T_i = 100\text{eV}$, $L = 20\text{cm}$ の時

$$\begin{aligned} \varrho_i &= \frac{v_{Ti}}{\omega_{ci}} = 1.02 \times 10^2 A^{1/2} \frac{1}{Z_i} \frac{\sqrt{T_i(\text{eV})}}{B(\text{Gauss})} = 0.05\text{cm} \\ \frac{\varrho_i}{L} &= \frac{0.05}{20} = 2.5 \times 10^{-3} \ll 1 \end{aligned}$$

であるが条件 (5.76) は必ずしも満たされない。 ∇p_i の項が無視できないときでもファラデーの式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} \\ &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{en_e} \nabla p_i \right) + \nabla \times (\eta \vec{J}) \\ &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \nabla \times (\eta \vec{J}) + \frac{1}{en_e^2} \nabla n_e \times \nabla p_i \end{aligned} \quad (5.77)$$

であるので、もし ∇n_e と ∇p_i が同方向なら $\nabla n_e \times \nabla p_i = 0$ で ∇p_i の項はファラデーの式の中で消える。後述するように n_e や p_i が磁束関数 ψ のみの関数の時は $\nabla n_e(\psi) \times \nabla p_i(\psi) = \frac{dn_e}{d\psi} \nabla \psi \times \frac{dp_i}{d\psi} \nabla \psi = 0$ となる。

∇p_i の項が無視できるとき

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.78)$$

となり、これをオームの式（オームの法則）という。電子に対する元の方程式、又はその変形を一般化されたオームの式と言う。

3) MHD 方程式系

電磁流体力学 (MHD) の方程式系を完結させるため、1 流体エネルギーの式を導こう。 a 種粒子に対するエネルギーの式

$$\frac{3}{2} n_a \frac{d_a T_a}{dt} + P_a \nabla \cdot \vec{V}_a = -\nabla \cdot \vec{q}_a - \pi_{a\alpha\beta} \frac{\partial V_{a\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_a \quad (5.79)$$

を全ての粒子種に対して和を取ると、 $|\vec{V}| \sim |\vec{v}_i| \gg |\vec{v}_e - \vec{v}_i|$ の近似の元に

$$\frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} P \vec{V} \right) + P \nabla \cdot \vec{V} = -\nabla \cdot \vec{q} + \sum Q \quad (5.80)$$

を得る。ただし

$$\left. \begin{aligned} P &= p_e + p_i = n_e T_e + n_i T_i \\ \vec{q} &= \vec{q}_e + \vec{q}_i \\ \sum Q &= -\vec{R} \cdot \vec{u} + Q_{vis} = \eta J^2 - \vec{u} \cdot \vec{R}_T - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

である。1 流体エネルギーの式 (5.80) の左辺は

$$\frac{3}{2} \frac{\partial \dot{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} P \vec{V} \right) + P \nabla \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} P \right) + \frac{5}{2} P \nabla \cdot \vec{V} = P \frac{dS}{dt} \quad (5.82)$$

と書ける。 S は

$$S = \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n} \right) \propto \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) \quad (5.83)$$

で定義されるエントロピーで $\gamma = 5/3$ である。1 流体エネルギーの式 (5.80) の右辺は熱源や散逸の項で衝突拡散の時間スケール τ_D で変化する。今考えている時間スケールが $\tau \ll \tau_D$

なら右辺は無視でき、エネルギーの式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0 \quad (5.84)$$

と断熱不変の式として書ける。

電磁流体力学に対する1流体方程式は、密度保存の式(5.73)、運動方程式(5.44)、オームの式(5.79)、エネルギーの式(5.85)とマックスウェルの式からなる。アンペールの式

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (c^2 = \frac{1}{\mu_o \epsilon_o}) \quad (5.85)$$

の右辺第2項は次のように評価できる。

$$\left| \frac{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\mu_o \vec{J}} \right| \simeq \frac{\omega E}{c^2 \mu_o J} \sim \frac{\omega V B}{c^2 \mu_o \omega \rho V / B} = \frac{C_A^2}{c^2} \ll 1 \quad (5.86)$$

アルベン速度 C_A は

$$C_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_o \rho}} = 2.18 \times 10^9 \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{B(\text{Gauss})}{n_i^{1/2}(\text{cm}^{-3})} \text{ m/s} \quad (5.87)$$

であり、 $B = 2T$, $n = 10^{13} \text{cm}^{-3}$ の時、 $C_A = 1.38 \times 10^7 \text{m/s}$ で、 $B = 4T$, $n = 10^{14} \text{cm}^{-3}$ の時、 $C_A = 8 \times 10^6 \text{m/s}$ の大きさと光速と比べ充分小さい。従ってアンペールの式(5.85)において変位電流の項は無視してよい。

マックスウェルの式は電磁流体力学の近似では次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \vec{J} \end{aligned} \quad (5.88)$$

結局電磁流体力学(MHD)方程式系は次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.89)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.90)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.91)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho_\gamma} \right) = 0 \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (5.93)$$

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (5.94)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.95)$$

以上で方程式は 15ヶあり、未知数は 14ヶ($\rho, P, \vec{v}, \vec{J}, \vec{B}, \vec{E}$) である。しかし、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ は $t = 0$ で満足させておくと以後自動的に成立する。すなわち、

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (5.96)$$

である。 $\eta \neq 0$ の時は η に対する式も与えねばならないことはいうまでもない。簡単には $\eta = \text{const.}$ として与えられる事がある。また次の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (5.97)$$

で与えられる事もある。

上記の式 (5.89) から (5.95) は $\eta = 0$ の場合を理想 MHD 方程式系、 $\eta \neq 0$ なら抵抗性 MHD 方程式系という。

4) 凍り付きの定理

理想 MHD ($\eta = 0$) の場合は、ファラデーの式とオームの式から

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (5.98)$$

が得られる。この式から次の定理が得られる。即ち、流体中に流体と共に動く任意の閉曲線を考えると、この曲線と鎖交する磁束は時間的に一定である。この定理は、完全流体の Kelvin Helmholtz の渦の定理

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\omega}), \quad \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (5.99)$$

と同じである。温度 ω と磁場 $\vec{B}$ が対応している。図 5.1 の様に L によりふちどられた曲面を通過する磁束 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ を考える。 Φ は閉曲線 L だけで決まり、 L により張られる曲面の形には依存しない ($\vec{V} \cdot \vec{B} = 0$)。

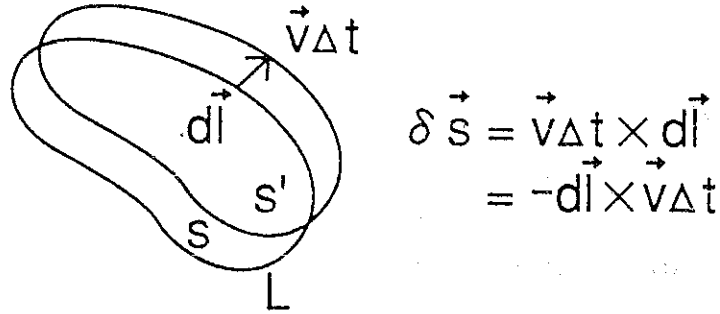


図 5.1 凍りつきの定理

Δt の間の変化 $\Delta\Phi$ を考える。閉曲線内の $\vec{B}$ の変化と閉曲線の運動を考慮すると

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= \int_{S'} \vec{B}' \cdot d\vec{S}' - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \int_{S'} (\vec{B} + \Delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot (d\vec{S} + \delta \vec{S}) - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_{\delta S} \vec{B} \cdot \delta \vec{S} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \Delta t \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \times \vec{V} \\
 &= \Delta t \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \Delta t \int_S \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

となる。

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.101)$$

となり定理が証明された。この定理は磁力線は流体に凍りついていると言って良い。

この定理を一般化オームの式の場合について考える。式 (5.67) は

$$\frac{1}{en_e} \nabla p_e + \vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (5.102)$$

で与えられる。この式は $m_e \rightarrow 0$ とした電子の運動方程式そのものである。 $\eta = 0$ の時、ファラデーの式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} \\ &= \nabla \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{\nabla p_e}{en_e} \right)\end{aligned}\quad (5.103)$$

となる。右辺第2項は

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p_e}{en_e} \right) = -\frac{1}{en_e} \nabla n_e \times \nabla p_e \quad (5.104)$$

となる。ここで $\text{rot}(\text{grad}) = 0$ を使った。今、電子の密度 n_e と電子の圧力 p_e が磁力面上で一定、即ち、磁束密度を ψ とし、 $n_e = n_e(\psi)$, $p_e = p_e(\psi)$ なら $\nabla \times (\nabla p_e / en_e) = 0$ となり

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_e \times \vec{B}) \quad (5.105)$$

が成立する。つまりより一般的には磁力線は電子に凍りついていると言える。1 流体モデル (MHD 方程式) と 2 流体モデルの差は $\vec{v}_e$ と $\vec{v}_i$ の差が大きくなったとき顕著に現れる。MHD 方程式系では $\vec{v}_e \simeq \vec{v}_i$ であり、電子の流体速度とイオンの流体速度の差は電流を生ずるが、凍りつきは電子にでもイオンにでもどちらでも同じである [3]。

(3) 磁気流体波

MHD 方程式から導かれる微小振動 (線形振動) を考える。一様プラズマ ($\nabla \varrho_0 = 0$, $\nabla P_0 = 0$), 一様磁場 $\vec{B}_0$ の場合を考える。この時磁気流体波は3つの基本波に分離できる。理想 MHD 方程式は

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = 0 \quad (5.106)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.107)$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (5.108)$$

$$\frac{d}{dt}(p\varrho^{-\gamma}) = 0 \quad (5.109)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (5.110)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.111)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.112)$$

で与えられる。これらの式を線形化する。各量を平衡量と1次の摂動量に分ける。

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 + \varrho' \\ \vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{V}' \\ P &= P_0 + P' \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}' \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

添字0のついたものが平衡量で'のついたものが1次の摂動量である。但し、 $\vec{V}_0 = 0$ と仮定する。断熱の条件式から

$$\begin{aligned} P = P_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma &= P_0 + \frac{\gamma P_0}{\varrho_0} \varrho' + \frac{P_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} \left(\frac{\varrho'}{\varrho_0} \right)^2 + \dots \\ &= P_0 + C_s^2 \varrho' + \frac{\gamma - 1}{2 \varrho_0} C_s^2 \varrho'^2 \end{aligned} \quad (5.114)$$

となる。ここで

$$C_s = \left(\frac{\gamma P_0}{\varrho_0} \right)^{1/2} \quad (5.115)$$

は音速である。線形化した式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \varrho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -C_s^2 \nabla \varrho' - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times \nabla \times \vec{B}' \\ \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \\ \nabla \cdot \vec{B}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

摂動は $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ に比例するとすると式(5.116)は

$$\left. \begin{aligned} -\omega \frac{\rho'}{\rho} + \vec{k} \cdot \vec{V} &= 0 \\ -\omega \vec{V} &= -\vec{k} C_s^2 \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{B}') \\ -\omega \vec{B}' &= \vec{k} \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

となる。 $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) は自動的に満たされているが、これは、磁場の摂動は常に波の進行方向に垂直であることを意味する。また式 (5.117) から $\rho', \vec{V}', \vec{B}'$ はすべて同位相である事が分かる。今、 $\vec{B}_0$ は z 方向を向いており、 $\vec{B}_0$ に垂直な $\vec{k}$ の方向を x 軸にとる。即ち、 $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ で $k_\perp = k_x, k_\parallel = k_z$ であるとする (図 5.2)。

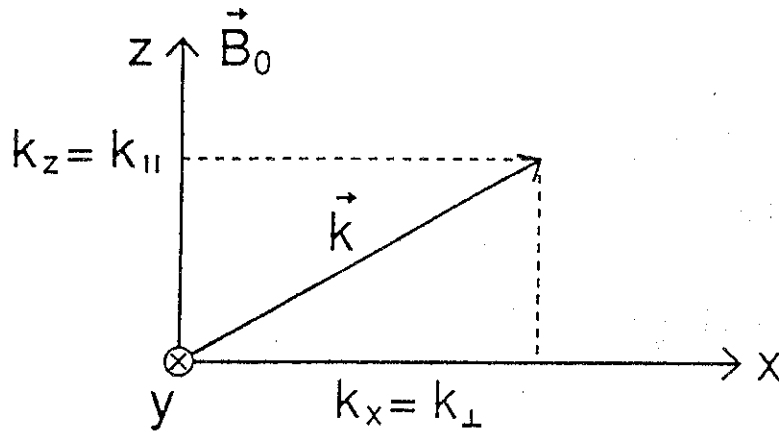


図 5.2

式 (5.117) の x, y, z 成分を取る。 y 成分は (x, z) 成分と独立で

$$\left. \begin{aligned} -\omega V_y &= k_z B'_y B_0 / \mu_0 \rho_0 \\ -\omega B'_y &= k_z V_y B_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

が得られる。 $k_\parallel = k_z$ であり、アルベン速度を

$$C_A \equiv \left(\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \right)^{1/2} \quad (5.119)$$

で定義すると、式 (5.120) から

$$\omega^2 = k_\parallel^2 C_A^2 \quad (5.120)$$

となる。式 (5.117) で、非圧縮性 ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$, 即ち、 $\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$) とするとこの波のみが存在しう。この波は、シアー・アルベン波 (あるいは単にアルベン波) と呼ばれる。

式 (5.117) の x, z 成分は

$$\omega \frac{\rho'}{\rho_0} = k V_z + k_x V_x \quad (5.121)$$

$$\omega B' \frac{1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = C_A k V_x \quad (5.122)$$

$$\omega V_x = C_S^2 k_x \frac{\rho'}{\rho_0} + C_A k B' \frac{1}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} \quad (5.123)$$

$$\omega V_z = C_S^2 k_{\parallel} \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (5.124)$$

となり、これから

$$\omega^4 - k^2 (C_A^2 + C_S^2) \omega^2 + k_{\parallel}^2 k^2 C_A^2 C_S^2 = 0 \quad (5.125)$$

が得られ、これを満たす波を磁気音波という。磁気音波には次の2つのブランチがある。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (C_A^2 + C_S^2) \pm \left[\frac{1}{4} (C_A^2 + C_S^2)^2 - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} C_A^2 C_S^2 \right]^{1/2} \quad (5.126)$$

プラスの符号のものを速い磁気音波 (あるいは単に速波) と言ひ、マイナス符号のものを遅い磁気音波 (あるいは単に遅波) と言う。(シアー) アルベン波、速い磁気音波、遅い磁気音波を MHD 3 基本波という。一様磁場中の一様プラズマに対してのみ3つの基本波は完全に分離されるが、一般には基本波は結合し単純に分離できない。図 5.3 にアルベン波と磁気音波の電磁場等の分極の様子を示す。

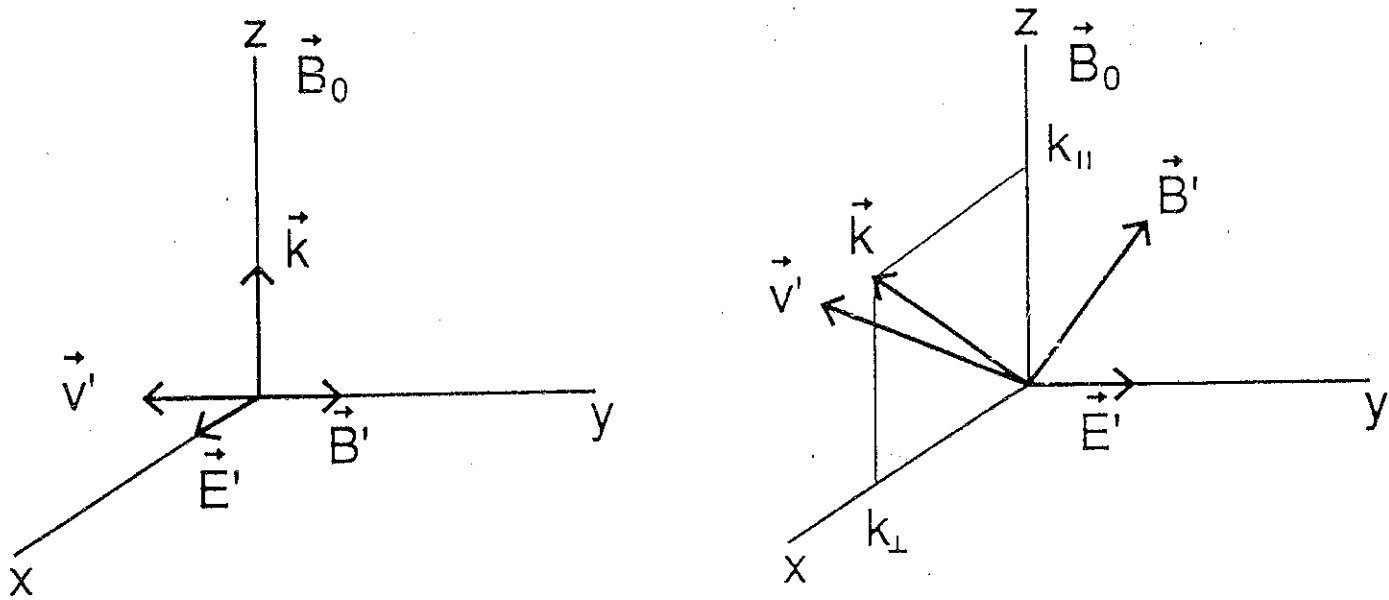


図 5.3 アルベン波と磁気音波

音速とアルベン速度の比の 2 乗は

$$\left(\frac{C_S}{C_A}\right)^2 = \frac{\gamma P_0 \mu_0 \varrho_0}{\varrho_0 B_0^2} = \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{B_0^2 / 2\mu_0} = \frac{\gamma}{2} \beta \quad (5.127)$$

$$\beta \equiv \frac{P_0}{B_0^2 / 2\mu_0} \quad (5.128)$$

である。 β はプラズマの圧力と磁場の圧力の比で、閉じ込めにとって重要な量である。図 5.4 に $\beta < 1$ の場合と $\beta > 1$ の場合について分散式を描く。

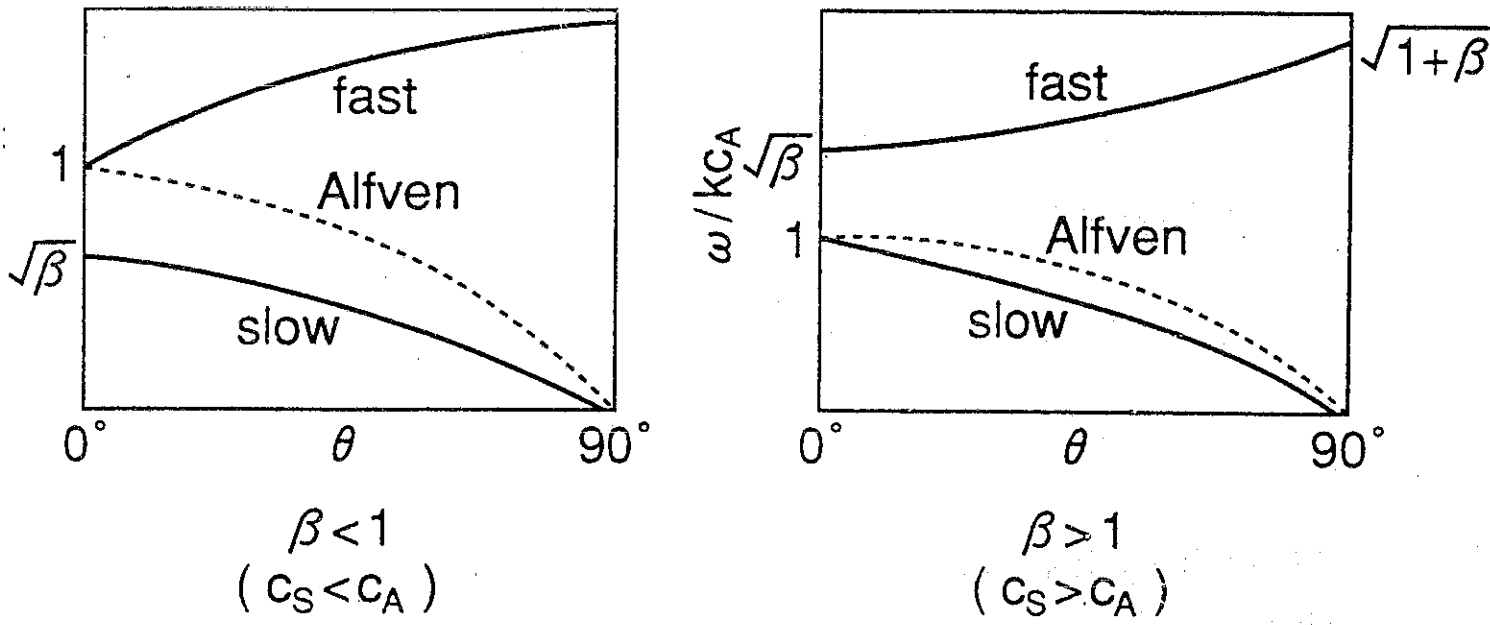


図 5.4 MHD 基本波の分散式

$C_A \ll C_S$ の時 ($\beta \gg 1$) を考える。この時の極限では $\omega = kC_S$ と $\omega = k_{\parallel}C_A$ が得られる。 $\omega = kC_S$ は式 (5.121)~(5.124) で $B' = 0, C_A = 0$ とおいた時に得られるので、これは普通の (静電的な) 音波である。 $\omega = k_{\parallel}C_A$ は式 (5.120) とは極性の異なるシアー・アルベン波である。

$C_S \ll C_A$ の場合 ($\beta \ll 1$) は、トカマクやヘリカル系装置のプラズマは低ベータで多くの場合これに相当する。速いモードは

$$\omega = kC_A \quad (5.129)$$

となりこれは圧縮性アルベン波、あるいは単に速波と呼ばれる。群速度と位相速度は等しく、 $v_g = \omega/k = C_A$ である。このモードに対しては式 (5.121)~(5.124) より

$$V_x = \frac{B'}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = C_A \frac{B'}{B_0} \quad (5.130)$$

$$V_z = \frac{C_S^2 k_{\parallel} k_{\perp}}{C_A^2 k^2} V_x \quad (5.131)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{V_x}{C_A} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{1}{C_A} C_A \frac{B'}{B_0} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{B'}{B_0} \quad (5.132)$$

であり波としての流体の運動は主として x 方向におこる ($|V_z| \ll |V_x|$)。遅いモードは

$$\omega = k_{\parallel} C_S \quad (5.133)$$

となる。 $C_S \ll C_A$ であるため磁力線方向にしか音波は伝搬できない事を示している。式 (5.121)~(5.124) より

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V_z}{C_S} \quad (5.134)$$

$$V_x = -\frac{C_S^2}{C_A^2} \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^2} V_z \quad (5.135)$$

$$\frac{B'}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} = -\frac{C_S}{C_A} \frac{k_{\perp}}{k} V_z \quad (5.136)$$

これより $|V_x| \ll |V_z|$ 、 $|B'/B_0| \ll |\rho'/\rho|$ であるのでこの波は殆ど縦波（静電波）である事が分かる。

MHD 基本波を平衡の位置からのずれ $\vec{\xi}$ を使って考えてみよう。速度は

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \quad (5.137)$$

で与えられ、線形化した方程式

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla P' + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}' \times \vec{B}_0 \quad (5.138)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.139)$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}_0) \quad (5.140)$$

$$P' = \gamma \frac{\rho'}{\rho_0} P_0 \quad (5.141)$$

より

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = C_S^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{\xi}) + C_A^2 \nabla_{\perp} (\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp}) + C_A^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_{\perp}}{\partial z^2} \quad (5.142)$$

が成立する。 $\xi_z = 0$, $\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} = 0$, つまり $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ の非圧縮性プラズマを考えると $\vec{\xi}_{\perp}$ のみの式となる。

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}_{\perp}}{\partial t^2} = C_A^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_{\perp}}{\partial z^2} \quad (5.143)$$

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 C_A^2 \quad (5.144)$$

この方程式は弦の微小振動の式と全く同じである。磁力線を弦とみたとこれを弾いたときに生ずる振動とみてよい。 $\xi_z \neq 0, \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \neq 0$ の場合は、式 (5.142) の z 成分から

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = C_A^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} + C_S^2 \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) \quad (5.145)$$

を得、式 (5.142) の垂直成分の発散をとると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = C_A^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + C_S^2 \nabla_\perp^2 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + C_S^2 \nabla_\perp^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad (5.146)$$

を得る。 $\beta \sim C_S^2/C_A^2 \ll 1$ の時 $\psi \equiv \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp$ とおくとこの式より

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = C_A^2 \nabla^2 \psi \quad (5.147)$$

となる。これが磁気音波 (速波、圧縮性アルベン波) である。このモードに対しては媒質の弾性は磁場の圧力から生まれ、アルベン速度 $C_A = (B_0^2/\mu_0 \varrho_0)^{1/2}$ は圧力が $B_0^2/2\mu_0$ で $\gamma = 2$ ($\gamma = f + 2/f, f = 2$ の自由度) の音波とみなせる。 $\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp = 0$ を満たす振動は

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = C_S^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} \quad (5.148)$$

で通常の音波である。 β が一般の場合は式 (5.126) で与えられるとおりである。

ローレンツ力 $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$ を考える。

$$\vec{F} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (5.149)$$

一方 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ として線形化すると

$$B^2 = B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}' \quad (5.150)$$

$$\varrho' = -\varrho_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (5.151)$$

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) = -\vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + B_0 \frac{\partial \vec{\xi}_\perp}{\partial z} \quad (5.152)$$

となる。 $\vec{F}$ の B_0 に対する平行成分はないから

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\nabla_{\perp} \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}') + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}'_{\perp} \\ &= B_0^2 \nabla_{\perp} (\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp}) + B_0^2 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_{\perp}}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (5.153)$$

となる。この式の右辺第1項は圧縮性による復原力を示しており、圧縮性アルベン波を発生させ、第2項は張力による復原力を示しており（シアー）アルベン波をつくる。 $F_{\parallel} = 0$ 、即ちローレンツ力からは磁場に平行の力は生じず、 ∇P の項が音波の駆動力である。図5.5に磁気音波、シアーアルベン波、音波の ($\beta \ll 1$ の時の) 基本波の摂動変位の様子を描いた。

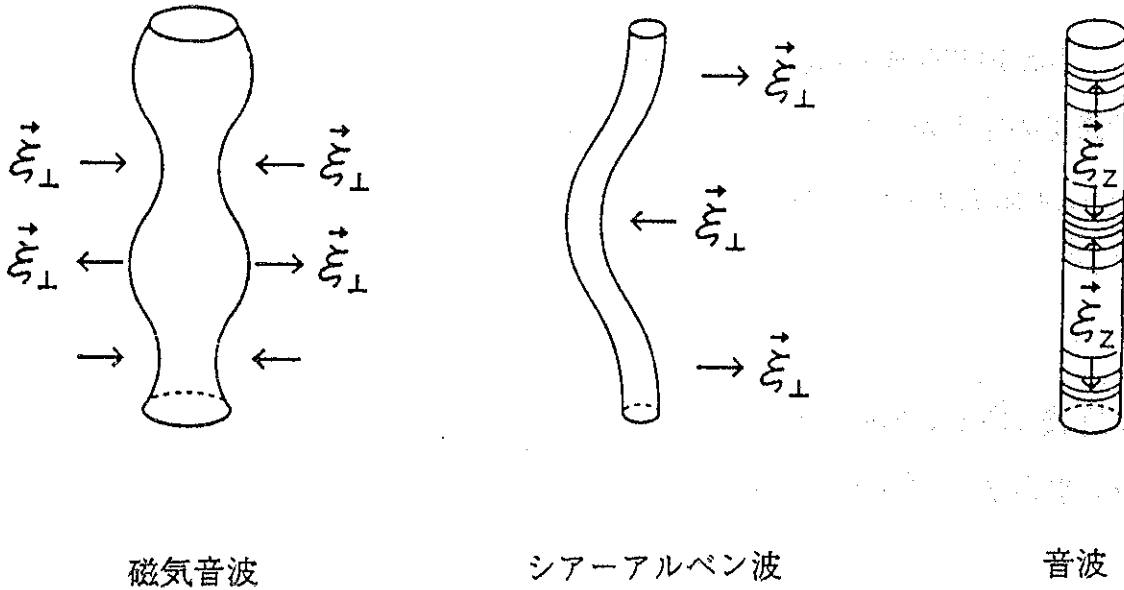


図 5.5 基本波 ($\beta \ll 1$) の摂動変位

参考文献

- [1] S.I.Braginskii, "*Transport Processes in a Plasma*", Review of Plasma Physics
(ed. M.A.Leontovich), Vol.1
- [2] ランダウ・リフシッツ、「電磁気学」 東京図書、1962 年 (井上健男他共訳)
- [3] B.B. ガドムツェフ、「プラズマ中の集団現象」 岩波書店、1979 年
(難波忠清・水野幸雄共訳)

§6 プラズマ波動

(1) 波動の基本的性質

1) 波の表現

プラズマ中の波動(微小振動、線形振動)は零次(あるいは平衡)のプラズマ諸量(n_0 , $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, ...)に重畳された微小振動と考え、それを例えば密度 n , 静電ポテンシャル ϕ を

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \text{Re}\{n' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + \delta_1]\} \\ \phi &= \phi_0 + \text{Re}\{\phi' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + \delta_2]\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

で表す。 n' , ϕ' を複素数とし、位相差 e^{δ_1} , e^{δ_2} をそれに含ませると摂動部分は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n} &= n' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \\ \tilde{\phi} &= \phi' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

と書ける。線形理論を論ずるので常に $\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ が式の両辺に現れ、このように(実数部をとらなくても)表現しておくだけでよい。 ω は波の角周波数、 $\vec{k}$ は波数ベクトルで $k = |\vec{k}|$ と波の波長 λ との間には

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.3)$$

の関係がある。線形理論では重ね合わせの原理が成立するので種々の単色波を重ね合わせて、波動は一般的に

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k A(\vec{k}, \omega) \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega(\vec{k})] \quad (6.4)$$

と表せる。

2) 位相速度

単色波 $A(\vec{k}, \omega) \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ を考えたとき、位相が一定の点は

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const} \quad (6.5)$$

である。 t で微分すると

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega &= 0 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\omega}{k} \hat{k} \quad (\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

であり、これは位相 = const の点の動く速度を表し、位相速度 (phase velocity) という。

3) 群速度

波の振幅 $A(\vec{k}, \omega)$ が $\vec{k}$ のゆるやかな関数とする。最大の A を与える $\vec{k}$ を $\vec{k}_0$ とし、 $\omega(\vec{k})$ を $\vec{k}_0$ の周りに展開すると

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) + \dots \quad (6.7)$$

波束 Ψ は

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \Psi_0 \exp[i\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - i\omega(\vec{k}_0)t] \\ \Psi_0 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k A(\vec{k}) \exp[-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot (\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}_0} t - \vec{r})] \end{aligned} \quad (6.8)$$

と書ける。振幅一定は

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}_0} t - \vec{r} = \text{const.} \quad (6.9)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \quad (6.10)$$

の速度で進む。これを群速度 (group velocity) という。群速度は直角座標、及び球座標で書くと

$$\begin{aligned} \vec{v}_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} &= \hat{k}_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + \hat{k}_y \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \hat{k}_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \\ &= \hat{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \hat{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (6.11)$$

と表せる。

4) 屈折率

屈折率 (refractive index) を

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega} = \hat{k} \frac{c}{\omega/k} \quad (\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}) \quad (6.12)$$

で定義する。 $\vec{n}$ は伝搬の方向で大きさは光速と位相速度の比になっている。

5) 分散式

屈折率 $\vec{n}$ は一般に ω の関数で、 $\vec{n}$ (あるいは $\vec{k}$) と ω との関係式を分散式あるいは分散関係 (dispersion relation) という。分散式は媒質の性質により決まる。

6) 遮断と共鳴

今外部から波を励起したとする (RF 加熱の場合など)。この時 ω は実で一定値である。媒質が空間的にゆるやかに変化しているとし、その変化の特徴的長さを L とする。即ち、

$$L \cong \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1}, \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)^{-1}, \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right)^{-1} \quad (6.13)$$

などである。もし $\lambda \ll L$ であると、波からみると各点各点において媒質は一様にみえ、一様プラズマの場合に求めた $\vec{n}$ を位置 $\vec{r}$ の関数とみなせる。例えばプラズマ中の ($\vec{B}_0 = 0$ の時) 電磁波の分散式は

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2(x) \quad (6.14)$$

で与えられる。ここで ω はプラズマ外から入射した電磁波の角周波数で実で一定ある。プラズマ中で密度が波の伝搬方向に変化しているとすると ω_{pe} は x の関数となる。

$$\lambda \ll \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1} \quad \text{即ち} \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \ll k \quad (6.15)$$

ならプラズマ中の電磁波の分散式は各点 x において上のように書ける。 $\omega^2 > \omega_{pe}^2(x)$ なら $k^2 > 0$ で波は伝搬できる。密度 n が大きくなる所まで波が進むと $\omega^2 \leq \omega_{pe}^2(x)$ となる領域に達し、 $k^2 \leq 0$ となり、波は伝搬しなくなる。

$k = 0$ 即ち屈折率 $n = 0$ を遮断 (cut off)、 $k = \infty (n = \infty)$ となれば共鳴 (resonance) という。遮断の起こる近傍では ($k \simeq 0$ なので) 一様プラズマに対する分散式は成立しない。共鳴点近くでは k が大きく、従って $k^2 \lambda_D^2$ や $k^2 \varrho_L^2$ は大きくなり温度効果が重要になってくる。一般に伝搬してきた波は遮断の点で反射され、共鳴点でプラズマに吸収される。

(2) 冷たいプラズマ近似

プラズマ中の線形波動を考える。一次の量はすべて $\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ に比例すると仮定する。ここに $\vec{k}$ は伝搬の波動ベクトル、 ω は振動数とする。今、考えている波の波長 ($\lambda = 2\pi/k$) がデバイ半径 λ_D やラーモア半径 ϱ_L よりずっと長いとする。即ち、

$$\begin{aligned} k\lambda_D &\ll 1, & \lambda_D &= \left(\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}\right)^{1/2} \\ k\varrho_L &\ll 1, & \varrho_L &= v_T/\Omega \\ v_T &= \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2} \\ \Omega &= \frac{eB}{m} \end{aligned} \quad (6.16)$$

の時を考えると、波動の振る舞いに与える温度の効果は小さい。 $T \rightarrow 0 (\lambda_D \rightarrow 0, \varrho_L \rightarrow 0)$ の極限で線形波動の分散式を考える事にする。このような近似を冷たいプラズマ近似という。

1) 誘電率テンソル

電気変位 (electric displacement) $\vec{D}$ は

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.17)$$

で与えられる。 $\vec{P}$ は分極で分極電流を $\vec{J}$ とすると $\vec{J} = \partial \vec{P} / \partial t = -i\omega \vec{P}$ となるので

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{J} \quad (6.18)$$

と書ける。 $\vec{J}$ は

$$\vec{J} = \sum_a n_a Z_a e_a \vec{v}_a \quad (6.19)$$

と表せる。ここに n_a は a 種粒子の密度、 $Z_a e_a$ は電荷（イオンなら $Z_i e$ 、電子なら $-e$ となる）、 $\vec{v}_a$ は a 種粒子のミクロな速度で運動方程式

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = Z_a e_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) \quad (6.20)$$

に従う。零次では $\vec{v}_{a0} = 0, \vec{E}_0 = 0, \vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const.}$ とする。式 (6.20) は

$$-i\omega m_a \vec{v}_a = Z_a e_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}_0) \quad (6.21)$$

と書ける。ここで

$$\begin{aligned} v^\pm &\equiv v_x \pm i\varepsilon v_y \\ E^\pm &\equiv E_x \pm i\varepsilon E_y \end{aligned} \quad (6.22)$$

とおく。但し ε はイオンに対して $\varepsilon = 1$ 、電子に対して $\varepsilon = -1$ とする。運動方程式 (6.21) の解は

$$v_a^\pm = \frac{i}{B_0} \frac{\varepsilon_a \Omega_a}{\omega \mp \Omega_a} E^\pm \quad (6.23)$$

$$v_{a,z} = \frac{i}{B_0} \frac{\varepsilon_a \Omega_a}{\omega} E_z \quad (6.24)$$

である。これらより (v_{ax}, v_{ay}, v_{az}) は (E_x, E_y, E_z) の関数で表す事ができる。即ち $\vec{J}$ は $\vec{E}$ で表す事ができるので式 (6.18) は

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{J} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{\chi}_e \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \vec{\chi}_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{K} \vec{E} \end{aligned} \quad (6.25)$$

と表せる。 $\vec{\chi}_e$ はテンソルで受電率 (susceptibility) と言う。 $\vec{K}$ を誘電率テンソル (dielectric tensor) と言う。簡単な計算から $\vec{K}$ は次のようになる。

$$\vec{K} \vec{E} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(R+L), & D &= \frac{1}{2}(R-L) \\ R &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega + \epsilon_a \Omega_a} \right) \\ L &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega - \epsilon_a \Omega_a} \right) \\ P &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

ここに ω_{pa} はプラズマ振動数、 Ω_a はサイクロトン振動数で

$$\begin{aligned} \omega_{pa}^2 &= \frac{n_a e^2}{\epsilon_0 m_a} \\ \Omega_a &= \frac{|Z_a e_a| B_0}{m_a} \end{aligned} \quad (6.28)$$

と与えられる。 ϵ_a はイオンで1、電子で-1とする。

2) 分散式

マックスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} &= \vec{\epsilon} \vec{E} = \epsilon_0 \vec{K} \vec{E} \end{aligned} \quad (6.29)$$

であるので $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることに注意すると

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{K} \vec{E} = 0 \quad (6.30)$$

の関係式が得られる。屈折率は

$$\bar{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega} = \frac{\vec{k}}{k} \frac{c}{(\omega/k)} \quad (6.31)$$

で与えられる。 $\bar{n}$ は $\vec{k}$ の方向の光速と位相速度の比を表している。式(6.30)は

$$\bar{n} \times (\bar{n} \times \vec{E}) + \vec{K} \vec{E} = 0 \quad (6.32)$$

と書ける。 $\bar{n}$ (あるいは $\vec{k}$)は $x-z$ 平面内にあるとしても一般性は失わない。 $\vec{B}_0$ と $\bar{n}$ のなす角を θ とすると式(6.32)は

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.33)$$

となる。

$$\begin{aligned} n_{\perp} &= n_x = n \sin \theta \\ n_{\parallel} &= n_z = n \cos \theta \end{aligned} \quad (6.34)$$

だから

$$\begin{pmatrix} S - n_{\parallel}^2 & -iD & n_{\parallel} n_{\perp} \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n_{\parallel} n_{\perp} & 0 & P - n_{\perp}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.35)$$

とも書ける。

式(6.33)が $E_x = E_y = E_z = 0$ でない意味のある解を持つ条件は

$$\begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

である。これより

$$An^4 - Bn^2 + C = 0 \quad (6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta \\ B &= RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \\ C &= PRL \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

が成立する。これが分散式 ($\vec{n}$ と ω の関係) を与える。式 (6.36) の解は

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{B \pm F}{2A}, \\ F^2 &= (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (6.38)$$

あるいは

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)} \quad (6.39)$$

と書ける。

$\vec{B}_0$ に平行方向に伝搬するモードは ($\theta = 0$)、

$$P = 0, \quad n^2 = R, \quad n^2 = L \quad (6.40)$$

$\vec{B}_0$ に垂直方向に伝搬するモードは ($\theta = \pi/2$)、

$$n^2 = \frac{RL}{S}, \quad n^2 = P \quad (6.41)$$

の関係を満たす。 $R = 0, L = 0, P = 0$ で遮断が、 $S = 0$ で共鳴が起こる。

3) 偏光性

電場 $\vec{E}$ が円偏光している場合を考える。図 6.1 のように $\vec{B}_0$ を見た時電子は右回り、イオンは左回りをしている。

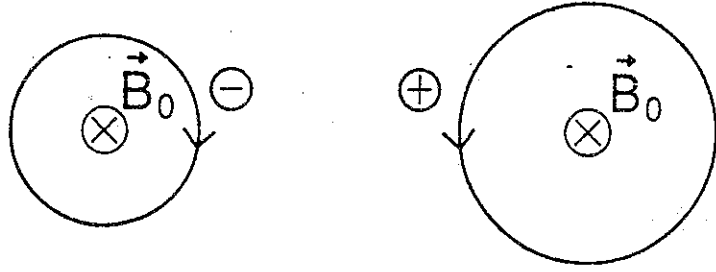


図 6.1 右回りと左回りの定義

右回り、左回りはこのように定義する。 $\vec{E}$ が右回りの円偏光している時は

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos \omega t = a \operatorname{Re}(e^{-i\omega t}) \\ E_y &= a \sin \omega t = a \operatorname{Re}(ie^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

であるので

$$\frac{iE_x}{E_y} = 1 \quad (6.43)$$

が成り立つ。同様に左回りの円偏光は

$$\frac{iE_x}{E_y} = -1 \quad (6.44)$$

となる。一般には式 (6.33) の y 成分を取る事により E_x と E_y の比は

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{n^2 - S}{D} \quad (6.45)$$

で与えられる。粒子の運動は式 (6.23) から求める事ができる

$$\begin{aligned} v_a^\pm &= v_{ax} \pm i\varepsilon_a v_{ay} \\ &= \frac{i}{B_0} \frac{\epsilon_a \Omega_a}{\omega \mp \Omega_a} E^\pm = C_{ak}^\pm E^\pm \\ E^\pm &= E_x \pm i\varepsilon_a E_y \end{aligned} \quad (6.46)$$

これより粒子運動の偏極は

$$\frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = -\varepsilon_a \left[\frac{C_a^+ \left(\frac{iE_x}{E_y} - \varepsilon_a \right) + C_a^- \left(\frac{iE_x}{E_y} + \varepsilon_a \right)}{C_a^+ \left(\frac{iE_x}{E_y} - \varepsilon_a \right) - C_a^- \left(\frac{iE_x}{E_y} + \varepsilon_a \right)} \right] \quad (6.47)$$

で与えられる。 $iE_x/E_y = (n^2 - S)/D$ を代入すると

$$\frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = \frac{(\epsilon_a\omega - \Omega_a)(n^2 - L) + (\epsilon_a\omega + \Omega_a)(n^2 - R)}{(\epsilon_a\omega - \Omega_a)(n^2 - L) - (\epsilon_a\omega + \Omega_a)(n^2 - R)} \quad (6.48)$$

となる。

$\theta = 0$ で $n^2 = R$ を満たす波は右まわり円偏光で

$$\frac{iE_x}{E_y} = 1, \quad \frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = 1 \quad (6.49)$$

$\theta = 0$ で $n^2 = L$ を満たす波は左まわり円偏光で

$$\frac{iE_x}{E_y} = -1, \quad \frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = -1 \quad (6.50)$$

の条件を満たす。 $\theta \rightarrow 0$ で $n^2 = R$ となる波を R 波、 $\theta \rightarrow 0$ で $n^2 = L$ となる波を L 波という。

$\theta = \pi/2$ の時の偏光性は

$$\begin{cases} n^2 = P & \text{の波} & E_x = E_y = 0, E_z \neq 0 \\ n^2 = \frac{RL}{S} & \text{の波} & \frac{iE_x}{E_y} = -\frac{R-L}{R+L}, E_z = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

となる。 $\theta \rightarrow \pi/2$ の時 $n^2 = P$ になる波を正常波 (ordinary wave)、 $\theta \rightarrow \pi/2$ の時 $n^2 = RL/S$ になる波を異常波 (extraordinary wave) と言う。 $\theta = \pi/2$ の時の正常波 (O 波) は E_z のみ、即ち $\vec{E} // \vec{B}_0$ で、 $\theta = \pi/2$ の時の異常波 (X 波) は E_x, E_y のみ、即ち $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ である。

このように波の分類は R 波又は L 波、O 波又は X 波、とあるが、この他に $\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ の間の位相速度の大小により速波 (fast wave) と遅波 (slow wave) に分類したりする。

4) 平行伝搬

平行伝搬 ($\theta = 0$) は

$$P = 0, \quad n^2 = R, \quad n^2 = L$$

で与えられ、 m_e/m_i は小さいとしこのオーダーを無視すると分散式は

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2$$

$$n_z^2 = \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 \mp \omega \Omega_e - \Omega_e \Omega_i - \omega_{pe}^2}{(\omega \pm \Omega_i)(\omega \mp \Omega_e)} \quad (6.52)$$

(上の符号は $n^2 = R$, 下の符号は $n^2 = L$ に相当)

となる。今、 $B_0 = 0$ の時を考える ($\Omega_e = \Omega_i = 0$)。この時分散式は

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k_z^2 c^2 \quad (6.53)$$

と簡単になる。上の分散式は静電的な縦波のプラズマ振動で温度効果をいれると

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{Te}^2 \quad (6.54)$$

になる。後者はプラズマ中を伝わる横波の電磁波である。プラズマ波と電磁波の分散式を図 6.2 に示す。

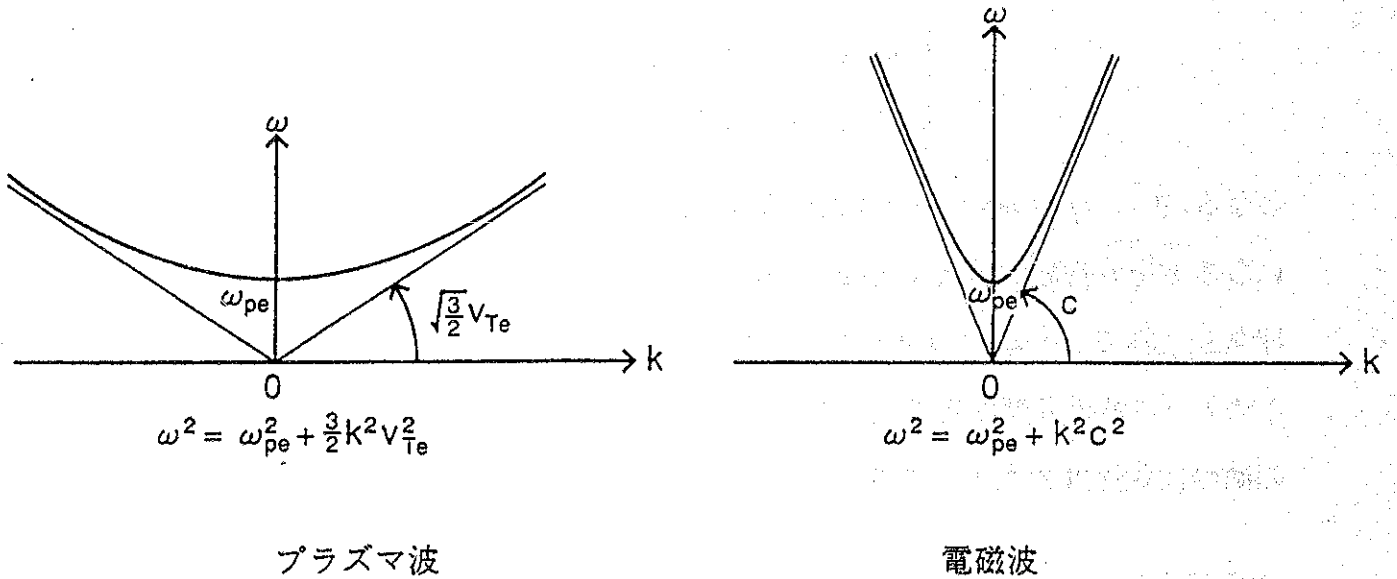


図 6.2 プラズマ波と電磁波の分散式

プラズマの密度が x 方向に変化するとする。即ち ω_{pe} が x の関数とすると電磁波の分散式は

$$k_z^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2(x) \quad (6.55)$$

となる。与えられた電磁波の角周波数 ω が $\omega > \omega_{pe}(x)$ なら ($k_z^2 > 0$ で) 波は伝搬できる。
もし $\omega \leq \omega_{pe}(x)$ なら ($k_z^2 \leq 0$) となり波は伝搬できず反射される。

$B_0 \neq 0$ の時は

$$n_z^2 = \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega \mp \omega_R)(\omega \pm \omega_L)}{(\omega \pm \Omega_i)(\omega \mp \Omega_e)} \begin{cases} \text{上の符号 } n^2 = R \text{ (R波)} \\ \text{下の符号 } n^2 = L \text{ (L波)} \end{cases} \quad (6.56)$$

である。ただし ω_R, ω_L は

$$\omega^2 \mp \omega \Omega_e - \Omega_e \Omega_i - \omega_{pe}^2 = 0 \quad (6.57)$$

の解で

$$\left. \begin{matrix} \omega_R \\ \omega_L \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \Omega_e + \sqrt{\Omega_e^2 + 4\Omega_e \Omega_i + 4\omega_{pe}^2} \right\} \quad (6.58)$$

で与えられる。共鳴は $n^2 = R$ の時 $\omega = \Omega_e$ で、 $n^2 = L$ の時は $\omega = \Omega_i$ で起こる。前者が電子サイクロトロン共鳴で後者はイオンサイクロトロン共鳴と呼ばれる。

5) 垂直伝搬

垂直伝搬は $\theta = \pi/2$ の時で

$$n^2 = P(\text{正常波、O波}), \quad n^2 = \frac{RL}{S}(\text{異常波、X波})$$

で与えられる。遮断は $R = 0, L = 0, P = 0$ でおこり、 $S = 0$ の時共鳴となる。 $m_e/m_i \ll 1$ のオーダーは無視する。 $n^2 = P$ より

$$k_x^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2 \quad (6.59)$$

の分散式が得られ、 $n^2 = RL/S$ から

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)} \quad (6.60)$$

を得る。ここに ω_{UH} は高域混成共鳴周波数 (upper hybrid resonance frequency)、 ω_{LH} は低域混成周波数 (lower hybrid resonance frequency) と呼ばれ次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\omega_{UH}^2 &= \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 \\ \frac{1}{\omega_{LH}^2} &= \frac{1}{\Omega_i^2 + \omega_{pi}^2} + \frac{1}{\Omega_i \Omega_e}\end{aligned}\quad (6.61)$$

遮断や共鳴の起こる条件は明かである。

6) 電磁流体波

$\omega \ll \Omega_i$ の場合を考えると、分散式 (6.36) は著しく簡単になる。 $m_e/m_i \ll 1$ とすると、

$$\begin{aligned}R &\simeq L \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \\ S &= \frac{1}{2}(R + L) \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \\ D &\simeq 0\end{aligned}\quad (6.62)$$

となる。次の量

$$\begin{aligned}K_{\perp} &\equiv 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = 1 + \frac{c^2}{C_A^2} \\ (C_A &= \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} : \text{アルベン速度})\end{aligned}\quad (6.63)$$

はしばしば実効的垂直誘電率、あるいは (狭い意味で) 単に誘電率という。一般に $K_{\perp} \gg 1$ ($\omega_{pi}^2 \gg \Omega_i^2, C^2 \gg C_A^2$) である事に注意しておく。 $\vec{K}$ はこの時

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}\quad (6.64)$$

となる。 $K_{\perp}$ と P の比は

$$\left| \frac{K_{\perp}}{P} \right| = \left| \frac{1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2}}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \right| \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \simeq \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \ll 1\quad (6.65)$$

であり、 P は $K_{\perp}$ よりずっと大きい。即ち $R, L, S \ll P$ である。式 (6.37) の A, B, C は $\theta = \pi/2$ のごく近くを除いて

$$\begin{aligned} A &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \\ B &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta) \\ C &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} K_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (6.66)$$

と近似でき分散式は次の解を持つ

$$\begin{aligned} n^2 &= K_{\perp}, & \omega^2 &= k^2 C_A^2 \\ n^2 \cos^2 \theta &= K_{\perp}, & \omega^2 &= k_z^2 C_A^2 \end{aligned} \quad (6.67)$$

それぞれは、圧縮性アルベン波、シアーアルベン波で既に§ 5 で論じた。

7) イオンサイクロトロン波

$\omega \simeq \Omega_i \ll \Omega_e \sim \omega_{pe}$ の周波数帯を考える。 $\theta = \pi/2$ のごく近傍を除いて、 $\omega \ll \Omega_e$ の近似で

$$\left. \begin{aligned} A &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \\ B &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} (R + L)(1 + \cos^2 \theta) \\ C &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} RL \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

となり分散式は

$$n^4 \cos^2 \theta - n^2 \frac{\gamma \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\gamma^2 \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} = 0 \quad (6.69)$$

$$\gamma \equiv \frac{c^2}{C_A^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \quad (6.70)$$

$$k_{\perp}^2 c^2 = \frac{\omega^4 \gamma^2 \Omega_i^2 - \omega^2 (2\gamma \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\parallel}^2 c^4) + \Omega_i^2 k_{\parallel}^4 c^4}{\omega^2 (\gamma \Omega_i^2 + k_{\parallel}^2 c^2) - \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2} \quad (6.71)$$

$$(k_{\parallel} = k \cos \theta, k_{\perp} = k \sin \theta)$$

となる。次の条件を満たすと共鳴が起こる。

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \gamma \Omega_i^2} = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \omega_{pi}^2} \quad (6.72)$$

$\omega \simeq \Omega_i$ の時は

$$n^2 \simeq \frac{c^2/C_A^2}{1 + \cos^2 \theta} \quad (6.73)$$

$$n^2 \cos^2 \theta = n_{\parallel}^2 = \frac{c^2}{C_A^2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \quad (6.74)$$

となる。式(6.73)は $\omega \ll \Omega_i$ のMHD流体波の圧縮性アルベン波につながるもので、 $\omega \sim \Omega_i$ での圧縮性アルベン波と言ってよい。共鳴はない。式(6.74)はイオンサイクロトン波と呼ばれ $\omega = \Omega_i$ で共鳴する。イオンサイクロトン波は次のようにも書ける。

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k_{\parallel}^2 c^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2} \right)^{-1} \quad (6.75)$$

$k_{\parallel}^2 \rightarrow \infty$ で $\omega \rightarrow \Omega_i$ となるので共鳴は $\theta = 0$ で起こる。

8) 電子サイクロトン波

$\omega_{pi} \ll \omega, \Omega_i \ll \omega$ の場合を考える。 $\omega_{pi} \rightarrow 0, \Omega_i \rightarrow 0$ の極限で

$$\begin{aligned} R &\simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_e} \\ L &\simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_e} \\ P &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (6.76)$$

と近似できて、分散式は

$$n^2 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)}{2\omega^2(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2) - \Omega_e^2 \sin^2 \theta \pm \Omega_e \Delta} \quad (6.77)$$

$$\Delta = [\Omega_e^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \quad (6.78)$$

で与えられる。 Δ の前の $\pm$ の符号は正の時正常波(ordinary wave)、負の時異常波(extraordinary wave)を表している。 $[\]$ の中の2つの項の大小により

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega_e^2 \sin^4 \theta \gg 4\omega^2(1-\alpha)^2 \cos^2 \theta & (\text{Quasi transverse : } QT \text{ 波}) \\ \theta \simeq \pi/2 \\ \Omega_e^2 \sin^4 \theta \ll 4\omega^2(1-\alpha)^2 \cos^2 \theta & (\text{Quasi longitudinal : } QL \text{ 波}) \\ \theta \simeq 0 \end{array} \right. \quad (6.79)$$

の2つの場合を考える。

QT波に対して

$$\left\{ \begin{array}{ll} n^2 \simeq \frac{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta} & (O \text{ 波, } QT-O \text{ 波}) \\ n^2 \simeq \frac{(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta} & (X \text{ 波, } QT-X \text{ 波}) \end{array} \right. \quad (6.80)$$

QT-O波で $\theta = \pi/2$ とすると

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (6.81)$$

となり磁場を横切る電磁波の分散式となる。 $\theta \simeq \pi/2$ のQT-O波は B_0 に独立である。この波はマイクロ波干渉計で用い密度測定に使われる。

QL波はさらに

$$\Omega_e^2 \sin^2 \theta \ll |2(\omega^2 - \omega_{pe}^2)| \quad (6.82)$$

と言う条件をつけて簡単化する。この時

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega \pm \Omega_e \cos \theta)\omega} \quad QL - \left\{ \begin{array}{l} L \\ R \end{array} \right. \quad (6.83)$$

となるが、±の符号のうち正はL波で、負はR波である。R波は $\omega \sim \Omega_e$ で共鳴を起こし、電子サイクロトロン波 (electron cyclotron wave) と呼ばれる。この波は $\omega^2 \simeq \omega_{pe}^2$ では満たされない。また電子サイクロトロン波の事をホイッスラー波 (whistler wave) とも言う。ホ

イッスラー波は雷により発生した電磁波が地球磁気圏のプラズマ中をほぼ磁力線に沿って伝搬する波と特定された。この場合は周波数は可聴領域にあり、また群速度が $v_g \propto \sqrt{\omega}$ (確かめよ) であるので、 ω の大きい波が先に耳に入り、しり下がりの口笛を吹くような音として聞こえるこのため whistler (口笛) 波と呼ばれている。

波動理論では様々な用語が用いられ人によっては使い方も異なる。本稿では例えば parallel とは $\vec{k} // \vec{B}_0$, の事を意味し、longitudinal は $\vec{k} // \vec{E}$, perpendicular は $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, transverse は $\vec{k} \perp \vec{E}$ の事である。

(3) プラズマ振動とイオン音波

温度効果の一例として、静電的なプラズマ振動とイオン音波を考える。これらは既に論じたが、運動論的な取扱いでは主プラズマが分散式あるいはプラズマ振動を決め、わずかな共鳴粒子が波の減衰（あるいは増巾）を決める。イオン音波でも同様である。ここでは流体的に2つのモードの分散式を求める。

1) 2流体モデルと分散式

振動周期の間プラズマ粒子の2体衝突は無視できるとすると静電近似の場合 a 種粒子 ($a = e$: 電子、 $a = i$: イオン) に対して

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (6.84)$$

$$m_a n_a \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla \vec{v}_a \right) = -\nabla p_a + n_a e_a \vec{E} \quad (6.85)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_a}{\rho_a^\gamma} \right) = 0 \quad (6.86)$$

$$p_a = n_a T_a, \quad \rho_a = m_a n_a \quad (6.87)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (6.88)$$

と書ける。各変数を一様な部分と摂動量に分ける。

$$\left. \begin{aligned} n_a &= n_{a0} + \tilde{n}_a \\ \vec{v}_a &= \vec{v}_{a0} + \vec{\tilde{v}}_a \\ p_a &= p_{a0} + \gamma \frac{p_{a0}}{\varrho_{a0}} \tilde{\varrho}_a \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

$n_{a0}, p_{a0} = n_{a0} T_{a0}$ は一様で定数とする。式 (6.89) の第 3 式から

$$\nabla p_a = \gamma_a T_{a0} \nabla \tilde{n}_a \quad (6.90)$$

である。ここで γ_a は比熱比であるが等温変化の場合 $\nabla p_a = \nabla(n_a T_a) = T_a \nabla n_a$ であるので $\gamma_a = 1$ である。断熱変化の場合は、一様プラズマ中の静電的摂動は一次元的であるので $\gamma_a = (f+2)/f$ (f は自由度) は $\gamma_a = 3$ を与える。

線形化した式は $\vec{E} = -\nabla\varphi$ を使うと

$$\frac{\partial \tilde{n}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{a0} \vec{\tilde{v}}_a) = 0 \quad (6.91)$$

$$m_a \tilde{n}_a \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} = -\gamma_a T_{a0} \nabla \tilde{n}_a - e_a n_{a0} \nabla \varphi \quad (6.92)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} (Z_i \tilde{n}_i - e \tilde{n}_e) \quad (6.93)$$

となる。但し $n_{e0} = Z_i n_{i0}$ である。 $\tilde{n}_a, \vec{\tilde{v}}_a, \varphi$ は $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ に比例するとする。一様プラズマを取り扱っているので $\vec{k}$ の方向を x 軸にとり $\vec{k} = (k, 0, 0), \vec{\tilde{v}}_a = (u_a, 0, 0)$ としても一般性は失わない。線形化した式は

$$-i\omega \tilde{n}_a + i n_{a0} k u_a = 0 \quad (6.94)$$

$$-i\omega m_a n_{a0} u_a = -i\gamma_a T_{a0} k \tilde{n}_a - i e n_{a0} k \varphi \quad (6.95)$$

$$k^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} (Z_i e \tilde{n}_i - e \tilde{n}_e) \quad (6.96)$$

となる。これから次の式の分散式が求まる。

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \gamma_e \frac{k^2 v_{Te}^2}{2})(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - \gamma_i \frac{k^2 v_{Ti}^2}{2}) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned}
v_{Te} &= \sqrt{2T_e/m_e} \\
v_{Ti} &= \sqrt{2T_i/m_i} \\
\omega_{pe} &= \sqrt{n_{e0}e^2/\epsilon_0 m_e} \\
\omega_{pi} &= \sqrt{n_{i0}Z_i^2 e^2/\epsilon_0 m_i}
\end{aligned} \tag{6.98}$$

2) プラズマ振動

$\omega \sim \omega_{pe} \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}$ の場合を考える。摂動の位相速度 ω/k は電子の熱速度より速く、断熱的であるので $\gamma_e = 3$ である。分散式は

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \frac{3}{2}k^2 v_{Te}^2 = 0 \tag{6.99}$$

となりこれから

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_{pe}^2 + 3k^2 \frac{T_e}{m_e} \\
&= \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)
\end{aligned} \tag{6.100}$$

$$\omega = \omega_{pe} (1 + \frac{3}{2}k^2 \lambda_{De}^2) \tag{6.101}$$

を得、既に求めた結果と一致する。冷たいプラズマ近似の場合 (ω_{pi}^2 も残すと)

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \tag{6.102}$$

$$\omega^4 - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)\omega^2 = 0 \tag{6.103}$$

すなわち

$$P \equiv 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} = 0 \tag{6.104}$$

である。有限温度の場合は P のかわりに K_{zz} と書くと

$$K_{zz} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} - 3k^2 \lambda_{De}^2 \tag{6.105}$$

となる。

3) イオン音波

$\omega \ll \omega_{pe}$ かつ $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$ の場合を考える。この時電子の摂動は等温的、イオンは断熱的振る舞いとなる。 $\gamma_e = 1, \gamma_i = 3$ としてよい。分散式は

$$(\omega_{pe}^2 + \frac{\gamma_e}{2} k^2 v_{Te}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - \frac{\gamma_i}{2} k^2 v_{Ti}^2) + \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0 \quad (6.106)$$

となり、 $\gamma_e = 1, \gamma_i = 3$ とすると

$$\omega^2 = k^2 \frac{3T_i}{m_i} + \frac{\omega_{pi}^2 (k\lambda_{De})^2}{1 + (k\lambda_{De})^2} \quad (6.107)$$

を得、もし、 $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ なら

$$\omega = k \sqrt{\frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i}} \quad (6.108)$$

となり、 $T_e \gg T_i \rightarrow 0$ の極限では次のようになる。

$$\omega = \frac{k C_s}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (6.109)$$

$$C_s \equiv \left(\frac{Z_i T_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (6.110)$$

C_s は音速である。一般に

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 \frac{3T_i}{m_i} + \omega_{pi}^2 \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \\ &= \omega_{pi}^2 \left(3k^2 \lambda_{Di}^2 + \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.111)$$

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_{e0} e^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_{Di} = \left(\frac{\epsilon_0 T_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \right)^{1/2}$$

であり、 $T_e \gg T_i$ の時は図 6.3 のようになる。

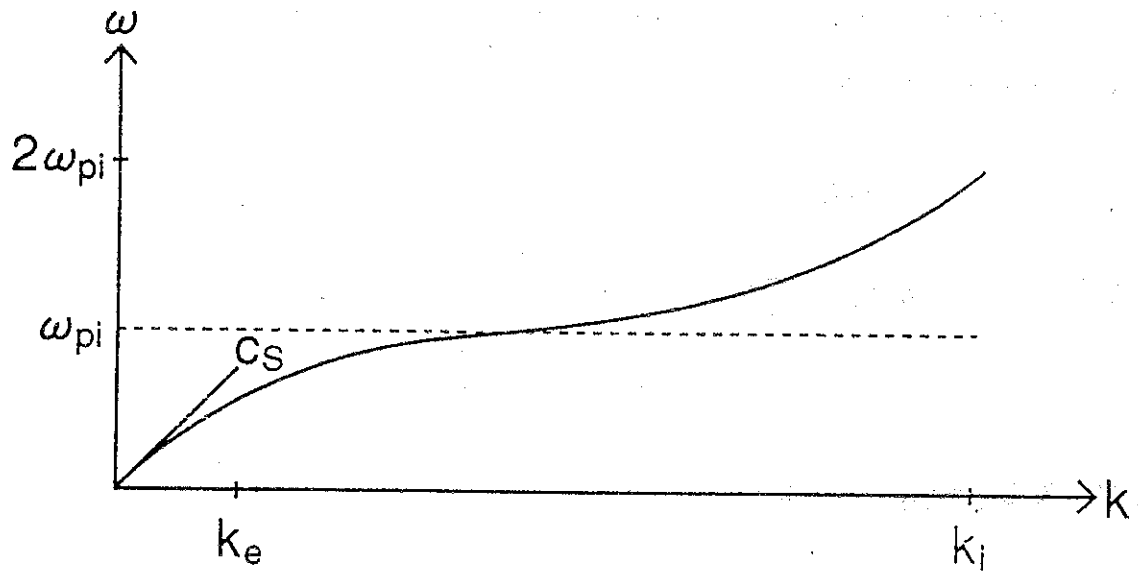


図 6.3 静電的イオン波の分散式

$T_e \approx T_i$ の場合は非常に強いランダウ減衰が働く。音波領域では $\omega = kC_S$ であり、位相速度と群速度は等しい事に注意する事、即ち

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = C_S \quad (6.112)$$

である。

(4) 有限温度の効果

1) 波動方程式と分散式

有限温度の効果を考えると波動方程式は一般に次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} K_{xx} - n_z^2 & K_{xy} & K_{xz} + n_x n_z \\ K_{yx} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} + n_x n_z & K_{zy} & K_{zz} - n_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (6.113)$$

K_{ij} はブラソフの式とマックスウェルの式から計算できる。一様プラズマ、一様磁場の場合、零次の分布をマックスウェル分布として計算すると K_{ij} にはベッセル関数やプラズマ

分散関数が含まれる [1]。温度効果は $k_{\perp}^2 \rho_L^2, (\omega - l\Omega_a)/k_z v_{Ta}$ (l はサイクロトロン高調) などの形でこれらの関数の変数として入ってくる。 K_{ij} の表示は省略するが冷たいプラズマ近似では

$$\begin{aligned} K_{xx} &\rightarrow S \\ K_{xy} &= -K_{yx} \rightarrow -iD \\ K_{xz} &= K_{zx}, \quad K_{yz} = -K_{zy} \rightarrow 0 \\ K_{zz} &\rightarrow P \end{aligned} \tag{6.114}$$

となる。プラズマ分散関数を含むので当然波のランダウ減衰やサイクロトロン減衰は考慮されている。

2) 静電近似

プラズマ中の波の電場 $\vec{E}$ が静電ポテンシャルのみで表せるとき、即ち摂動が

$$\vec{E}_1 = -\nabla\psi = -ik\varphi \tag{6.115}$$

でのみ近似できる波を静電波 (electrostatic wave) と言う。この時 $\vec{E}_1$ は伝搬方向 $\vec{k}$ に平行で $\vec{k} \times \vec{E}_1 = 0$ である。従って

$$\frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}_1 \rightarrow \vec{B}_1 = \vec{k} \times \vec{E}_1 / \omega = 0 \tag{6.116}$$

であり摂動磁場はない。このような近似が成立する条件を考える。分散関係は

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \vec{K} \vec{E} = 0 \tag{6.117}$$

である。 $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$ と分解して書くと分散式は

$$(n^2 - \vec{K}) \vec{E}_{\perp} = \vec{K} \cdot \vec{E}_{\parallel} \tag{6.118}$$

と書ける。また分散式の $\vec{n}$ との内積をとると

$$\vec{n} \cdot \vec{K} \vec{E} = \vec{n} \cdot \vec{K} (\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}) = 0 \tag{6.119}$$

となり、 $|\vec{E}_{\parallel}| \gg |\vec{E}_{\perp}|$ であるためには

$$\vec{n} \cdot \vec{K} \vec{E}_{\parallel} = 0 \quad (6.120)$$

でなければならない。もし

$$|n^2| \gg |K_{ij}| \quad (\text{静電波近似の条件})$$

なら分散式は $n^2 \vec{E}_{\perp} = \vec{K} \vec{E}_{\parallel}$ となり $\vec{n} \cdot \vec{K} \vec{E}_{\parallel} = 0$ を満たす事ができる。静電近似の場合 $\vec{B}_1 = 0$ である。 $\vec{B}_1$ はアルベン速度 C_A で伝わるが、 $\omega/k \ll C_A$ であれば、(静電) 波の特徴的時間の間に $\vec{B}$ の擾乱はおさまって $\vec{B}_1 = 0$ と考えてよいようになる。もし $\omega/k \sim v_{Te} < C_A$ だとすると

$$\begin{aligned} \frac{C_A^2}{v_{Te}^2} &= \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \frac{m_e}{2T_e} = \frac{B_0^2}{2\mu_0 n_{i0} T_e} \frac{1}{m_i} \\ &= \frac{1}{\beta_e} \frac{m_e}{m_i} > 1 \quad (6.121) \\ \beta_e &\equiv \frac{P_e}{B_0^2/2\mu_0} > \frac{m_e}{m_i} \end{aligned}$$

であり、この条件は静電近似の目安を与える。共鳴条件を満たす時は屈折率 $n \rightarrow \infty$ である。高域混成共鳴や低域混成共鳴では K_{ij} は有限に留まるので、共鳴近傍で静電波近似は良い近似となる。イオンサイクロトロン共鳴や電子サイクロトロン共鳴では必ずしもこうはならない。

参考文献

- [1] T.H.Stix, "Theory of Plasma Waves", MacGraw-Hill Co., 1962.

§7 MHD 平衡と安定性

(1) MHD 平衡

MHD 方程式系で $\eta = 0$ としたものを理想 MHD と言う。先ず理想 MHD 的平衡を考え、平衡にとって重要な概念を与える。

1) 理想 MHD の平衡

理想 MHD 方程式系で

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{v} = 0 \quad (7.1)$$

とおくと次の平衡方程式が得られる。

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.2)$$

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.4)$$

これより直ちに

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0, \quad \vec{J} \cdot \nabla P = 0 \quad (7.5)$$

が得られる。これは、磁力線、電流線は等圧面上 ($P = \text{const.}$) に接している事を意味する。今の場合等圧面は磁気面 (magnetic surface) と一致する。 $\nabla P \neq 0$ である等圧面 (磁気面) 上ではいたる所 $\vec{B} \neq 0$ である。このような条件では磁気面は位相学的にトーラス面である事が知られている。トーラス面は互いに層状をなす。 P が最大となる点はすべての磁気面の内部に含まれ、閉じた閉曲線を作り、一つの磁力線に一致する。これを磁気軸という。図 7.1 に磁気面の概念図を示す。

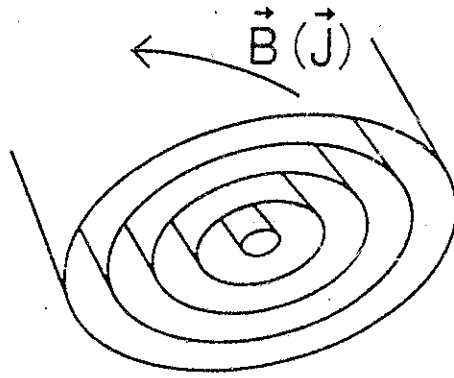


図 7.1 磁気面

2) 磁束

トロイダル磁束とポロイダル磁束をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Psi_t &= \int_{s_t} \vec{B} \cdot d\vec{S}_t \quad (\text{トロイダル磁束}) \\ \Psi_p &= \int_{s_p} \vec{B} \cdot d\vec{S}_p \quad (\text{ポロイダル磁束})\end{aligned}\tag{7.6}$$

図 7.2 に示すように $\vec{S}_t$ はトロイダル切断面、 $\vec{S}_p$ はポロイダル切断面である。切断面 S_t, S_p を (トポロジーは変えずに) どのように選んでも Ψ_t, Ψ_p は一定である。このような量を磁気面量、あるいは磁気面関数という。電流 $\vec{J}$ についても同様に J_t, J_p が定義できる。 Ψ_p は磁気面量であり、また P も磁気面量であるので $P = P(\psi)$ と書ける。但し $\psi = \Psi_p$ とおいた。すると

$$\vec{B} \cdot \nabla P = \vec{B} \cdot \nabla \psi \frac{dP}{d\psi} = 0\tag{7.7}$$

であるので

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0\tag{7.8}$$

となり、同様に

$$\vec{J} \cdot \nabla \psi = 0\tag{7.9}$$

となり、 $\vec{B}, \vec{J}$ とも $\psi = \text{const}$ 面上に接している事が分かる。

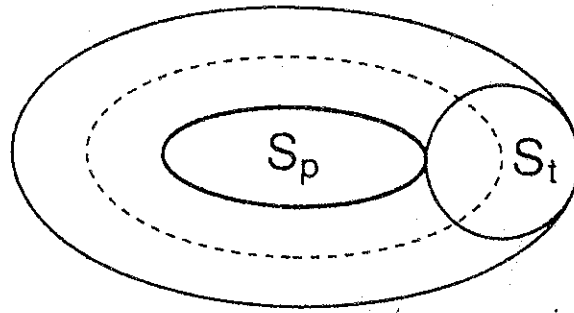


図 7.2 トロイダル・ポロイダル切断面

3) 回転変換と安全係数

切断面 S_t の縁上の任意の点 Q から出発した磁力線がトーラスに沿って n 周する間に磁気軸のまわりを角度 α_n だけ回転したとする (図 7.3 参照)。回転変換角を

$$\iota \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \quad (7.10)$$

で定義する。回転変換 (比) を

$$t \equiv \frac{\iota}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2\pi n} \quad (7.11)$$

で定義する。 $\alpha_n/2\pi$ はトーラスを n 回周る間にポロイダル方向に周回する回数である。

$$m_n \equiv \frac{\alpha_n}{2\pi} \quad (7.12)$$

この値は磁力線同志が交わる事はないので出発点 Q の位置を変えても高々 ± 1 より変動する事はない。従って、

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = \text{一定} \quad (7.13)$$

であり t は磁気面量である。即ち、 t は Q の位置に依らず $t = t(\psi)$ で磁気面量である。

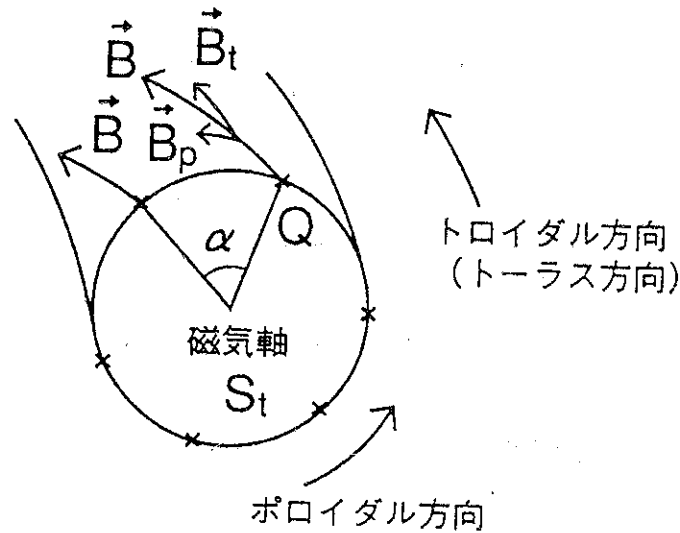


図 7.3 回転変換

回転変換の逆数

$$q = \frac{1}{t} \quad (7.14)$$

を安全係数といい、これも磁気面量である。 q (あるいは t) は安定性にとって非常に重要な量である。

4) 有理面

ある磁気面で $t = m/n$ (m, n は整数) であると、その磁気面を有理面という。この面上では点 Q から出発した磁力線はトロイダル方向に n 回、ポロイダル方向に m 回周ってもとの点 Q にもどる。 t が有理数でない面は、無理面、あるいは非有理面と呼ばれる。当然、有理面は可付番無限個しかない。

トーラスの主半径を R 、小半径を a としたとき R/a をアスペクト比という。アスペクト比 (R/a) の大きなトーラスを円筒におきかえる事がある。(円筒プラズマ近似)。円筒座標を (r, θ, z) とする。磁場の θ 成分を B_p (トーラスではポロイダル磁場という)、 z 成分を B_t (トーラスではトロイダル磁場) とする。 B_p, B_t とも一般に r の関数である。磁力線の方

程式

$$\frac{rd\theta}{B_p} = \frac{dz}{B_t}, \quad d\theta = \frac{B_p}{rB_t} dz \quad (7.15)$$

から z 方向に $2\pi R$ 進んだときの (トーラス一周したときの) ピッチ角は

$$\iota = 2\pi \frac{RB_p}{rB_t} \quad (7.16)$$

で与えられる。即ち回転変換角である。安全係数は円筒近似トーラスでは

$$q = \frac{rB_t}{RB_p} \quad (7.17)$$

で与えられる。

5) 磁気シアー

$dq/d\psi \neq 0$ のとき磁気シアーがあるという。一般に磁気シアーはプラズマを安定化するように働く。シアーがあるという事は、ある磁気上の磁場の向きと隣の磁気面上の磁場の向きが異なるという事である。

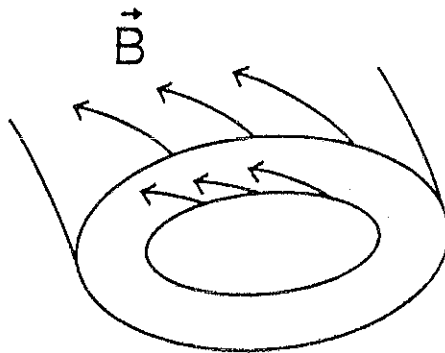


図 7.4 磁気シアー

6) 磁気井戸

ある磁気面を磁束 Ψ_t で表し、その磁気面内の体積を V とする。 V は Ψ_t のみの関数で磁気面量になる。次の量

$$U \equiv \frac{dV}{d\Psi_t} \quad (7.18)$$

を比体積（磁気面量）という。 U が V とともに減少する時 ($dU/dV < 0$) 磁気井戸 (magnetic well) があるという、逆に $dU/dV > 0$ の時は磁気丘 (magnetic hill) という。

磁気シアー、磁気井戸とも安定性にとって重要な磁気面量である。トカマクやRFP（逆磁場ピンチ）のような軸対称系トーラスでは、トロイダル方向にプラズマ電流を流してポロイダル磁場 B_p を生成し回転変換を作る。トカマクではほどほどのシアーがあり、又プラズマ全領域で磁気井戸（平均極小磁場）がある。トロイダル磁場 B_t はポロイダル磁場よりずっと大きい ($B_t \gg B_p$) のが特徴である。RFP は強いシアーを持つが磁気井戸はない。また $B_p \simeq B_t$ である。

非軸対称系では外部コイルの電流で回転変換を作る。ヘリオトロン/トルサトロン型のヘリカル系装置では、アスペクト比 A の大小により磁場配位が異なってくる。ヘリオトロン E(H-E) は $A \sim 10$ で強いシアーを持つが磁気井戸の領域は非常にせまい（大部分が磁気丘）。大型ヘリカル装置 (LHD) [1] ($A \sim 7$) やコンパクト・ヘリカル装置 (CHS) [2] ($A \sim 5$) はほどほどのシアーを持ち、磁気井戸もある。しかしプラズマ周辺部は必ず磁気丘になっている。W7-A, W7-AS のようなステラレータは磁気シアーが非常に弱いが全領域が磁気井戸になっている。

7) 軸対称系での平衡の式

図 2.5 のような円筒座標 (R, ϕ, Z) を用いる。軸対称トーラスを考えるので $\partial/\partial\phi = 0$ である。磁場 $\vec{B}$ は次のようにトロイダル成分とポロイダル成分に分けて表す事ができる。

$$\vec{B} = B_\phi \vec{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \vec{e}_\phi \quad (7.19)$$

この式はもちろん $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を満たす。 $\vec{B}$ の各成分は次のように書ける。

$$\begin{cases} B_t = B_\phi \\ B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} \\ B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\phi) \end{cases} \quad (7.20)$$

$\psi = RA_\phi = \Psi_p/2\pi$ はポロイダル磁束を 2π で割ったものである事がわかる。即ちベクトル・ポテンシャルの ϕ 成分の A_ϕ とポロイダル磁束 Ψ_p と

$$\Psi_p = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_p = \int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}_p = \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi RA_\phi \quad (7.21)$$

の関係があるからである。

アンペアの式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ から電流密度 $\vec{J}$ は次のように書ける。

$$\mu_0 \vec{J} = -\frac{1}{R} \Delta^* \psi \vec{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla(RB_\phi) \times \vec{e}_\phi \quad (7.22)$$

$$\Delta^* \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (7.23)$$

$\vec{B} \cdot \nabla P = 0$ の式から $P = P(\psi)$ と表せる事が明らかで、又 $\vec{J} \cdot \nabla P = 0$ と式 (7.22) から RB_ϕ は ψ の関数、即ち $RB_\phi = F(\psi)$ と書ける事がわかる。式 (7.22) と (7.23) を用いると平衡の式 (7.2) は次のように表す事ができる。

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (7.24)$$

軸対称系に対するこの平衡の式を Grad-Shafranov の式という。 Δ^* は式 (7.21) で定義され普通のラプラシアン

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (7.25)$$

と若干異なる事に注意する必要がある。 $P(\psi)$ と $F(\psi)$ は任意の関数であるので、これらと境界条件を与えて Grad-Shafranov の式 (2 階非線形偏微分方程式) を解き ψ を得る。 $\vec{B}$ と $\vec{J}$ は式 (7.19)、及び式 (7.22) から得られる。

(2) エネルギー原理

(3) 交換型不安定性

交換型不安定性 (interchange instability) は、フルート不安定性 (flute instability) とかレイリー・テイラ不安定性 (Rayleigh-Taylor instability) とか呼ばれることもあるが、全

て同一のものである。レイリー・テイラ不安定性は流体力学での不安定性の一つで、その類似性から、プラズマでもしばしばレイリー・テイラ不安定性という言葉を使う。一般に $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 (k_{\parallel} = 0)$ となるような摂動が成長する時フルート不安定性という。全ての摂動 $\vec{\xi}$ に対してポテンシャル・エネルギーの変動 δW の符号を調べるのは難しい。しかし、あるクラスの、あるいはある特定の $\vec{\xi}$ に対して $\delta W > 0$ となるか $\delta W < 0$ となるか判定する事ができる事がある。一般に $\vec{B}$ を変化させる摂動 $\vec{\xi}$ に対しては、 $\vec{B}$ が曲げられると磁気張力 (magnetic tension) が働き、磁場のエネルギーが増加する。 B^2 の増加は δW を増加させる。即ち $\vec{B}$ を歪める摂動は必ず磁場エネルギーを増加させ (δW を増加させ)、系を不安定にさせるにいく。従って $\vec{B}$ を変化させない摂動が最も不安定になりやすい。

1) 磁場の湾曲

磁場に湾曲があると曲率ドリフトが生じ、粒子の案内中心 (guiding center) は磁場を横切ってドリフトする。湾曲があると必ず ∇B が生じ、 ∇B ドリフトも同時に考慮せねばならない。§2 で示したように曲率ドリフト速度 $\vec{v}_R$ は

$$\vec{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2 B^2} (mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2) \quad (7.26)$$

で与えられる。これは

$$\begin{aligned} \vec{v}_R &= \frac{m\vec{g}_{eff} \times \vec{B}}{qB^2} \\ m\vec{g}_{eff} &= (mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2) \frac{\vec{R}}{R^2} \end{aligned} \quad (7.27)$$

と書け、実効的に重力ドリフトとみなせる。

2) 重力不安定性

重い流体が軽い流体によって支えられている平衡配位は不安定である (Rayleigh-Taylor 不安定)。今、プラズマが重力に抗して磁場 $\vec{B}$ で支えられている場合を考える。重力 g が $-x$ 方向に加わっているとする。平衡では $x \geq 0$ の領域にのみプラズマがあり、 $x \leq 0$ の

真空領域にのみ磁場 $\vec{B}$ が z 方向に一様にあるとする。平衡では

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g \quad (\text{プラズマ中}) \quad (7.28)$$

であり、プラズマ・真空境界で

$$P = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (7.29)$$

の関係にある。このプラズマが図7.5のような摂動を受けたとする。ここでは P' にあったプラズマと P にあった磁場が入れ替わった事になっていると考える。 P' の面積と P の面積は同じとする。このような摂動は明らかに磁力線を曲げないので磁場エネルギーは不変のままである。 P において圧力は $\delta P = -\rho g(-\delta x) = \rho g|\delta x|$ だけ増加する。 $|\delta x|$ は増加し続け不安定となる。

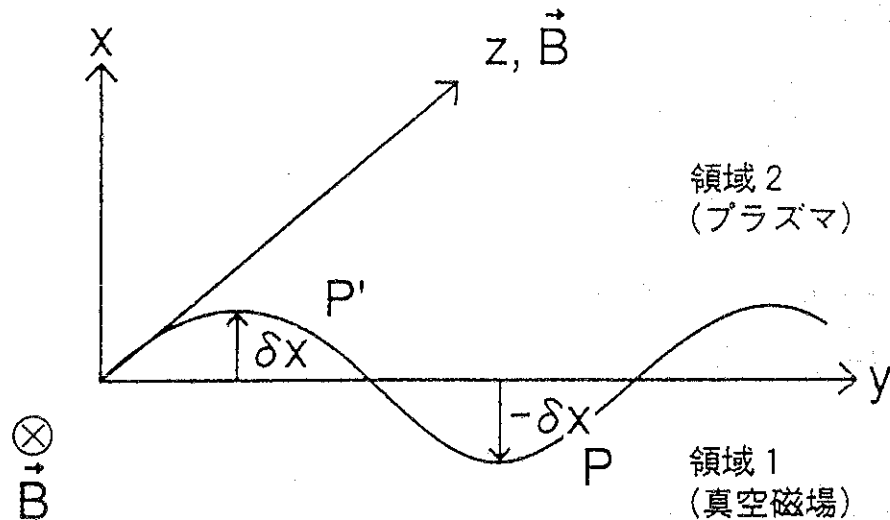


図 7.5 重力不安定性

摂動 $\vec{\xi}$ に対する運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla \delta P \quad (7.30)$$

である。 $\nabla \delta P = (\rho_1 - \rho_2)g = -\langle \rho \rangle g$ で $\langle \rho \rangle = \rho_2 - \rho_1$ とした。隣接する流体1と流体2の境界面では $\vec{\xi} \sim e^{i\omega t}$ として

$$-\omega^2 \bar{\rho} \vec{\xi} \simeq \langle \rho \rangle g \quad (7.31)$$

が成立し $\omega^2 < 0$ で不安定となる。 $\bar{\rho}$ は平均値である。 $\xi \sim 1/k$ とすると成長率 ω は

$$|\omega^2| \simeq gk \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} \quad (7.32)$$

となる。領域 1 が真空であると $\langle \rho \rangle = \bar{\rho}$ で

$$|\omega^2| \simeq gk \quad (7.33)$$

となる。摂動は z に沿って一定であり（即ち $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ）、縦溝（あるいはフルート）的になっているのでフルート不安定性とも呼ばれる。明らかに g が x の正の方向にあると安定である。

プラズマ中に $\vec{B}$ があっても真空中の $\vec{B}$ と同方向で一様なら以上の結果は変わらない。なぜなら $\vec{v} = \partial \vec{\xi} / \partial t$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \end{aligned} \quad (7.34)$$

であり、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 、また非圧縮性の摂動を考えると $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ であり、 $\vec{\xi}$ は $\vec{B}$ に垂直であるので $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$ であり

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{B} = 0 \quad (7.35)$$

が成立する。即ち、 $\vec{B}$ は流体要素により不変のまま運ばれ、磁場エネルギーは変化せず結局 $\vec{B}$ は不変のままである。

3) 安定化効果

摂動 $\vec{\xi}$ あるいは $\vec{v}$ は $\vec{B}$ に垂直方向であるが z の関数であるとする。この時

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{B} &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} \\ &= B \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}(z) = ik_z B \vec{v} \end{aligned} \quad (7.36)$$

となり、もはや $\vec{B}$ は不変ではなく y 方向のみならず z 方向にも摂動を受け($k_y \neq 0, k_z \neq 0$)、 $\vec{B}$ は曲げられ張力が働き、これが復元力 (restoring force) となり安定化に効く。復元力は R が小、即ち曲率の大きい方が強く、 z 方向に短波長 (k_z 大) がより効果的である。

成長率を評価してみよう。摂動の運動方程式に張力 $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}/\mu_0 = B^2/\mu_0 R$ が復元力として加わる。 R は

$$\left(\frac{\pi}{2k_z}\right)^2 = |\delta x|(2R - |\delta x|) \simeq 2R|\delta x|$$

$$R \simeq \frac{1}{k_z^2 |\delta x|} \quad (7.37)$$

と評価できるので運動方程式は

$$-\omega^2 \bar{\rho} |\delta x| \simeq \langle \rho \rangle g - B^2 k_z^2 |\delta x| / \mu_0 \quad (7.38)$$

となる。右辺第2項が復元力である。 $\delta x \sim 1/k$ とおくと

$$-\omega^2 \simeq gk \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} - \frac{B^2 k_z^2}{\mu_0 \bar{\rho} g k} \right) \quad (7.39)$$

となり、流体と真空の境界では

$$\omega^2 \simeq -gk + \omega_A^2 \quad (7.40)$$

$$\omega_A^2 = k_z^2 C_A^2, \quad C_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \bar{\rho}}}$$

となる。 $k_z \neq 0$ の時(シア) アルベン波が伝わり安定化に効く。 $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ($k_{\parallel} = 0$, 今の場合 $k_{\parallel} = k_z$) を満たす摂動をフルートモードと呼ぶ事はすでに述べた。この時重力不安定、あるいは交換型不安定が生ずるが、何らかの方法で $k_{\parallel} \neq 0$ とすると、安定化が可能になる。例えば、導体で $\vec{B}$ を固定すると $\vec{B}$ は必ず曲げられ $k_{\parallel} \neq 0$ となり安定化に効く。これを短絡効果あるいは磁力線結合 (line tying) 効果という。

磁気シアのある場合を考えよう。図 7.6 のように $\vec{B}$ がねじれ (shear) を持っているとする。

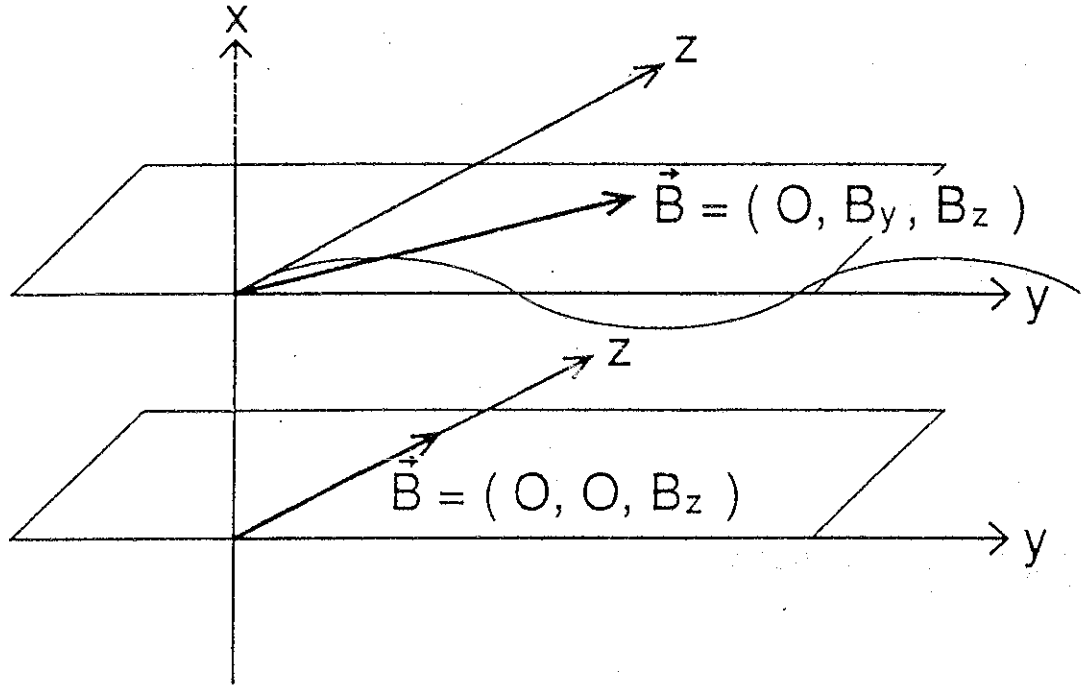


図 7.6 磁気シアー

このようにプラズマの内と外で $\vec{B}$ の方向が異なると $\vec{B}$ の交換はできない。表面のいかなる変形も $\vec{B}$ を曲げ磁場エネルギーを増加させる。図 7.6 のような摂動は必ず B_y を曲げる。 $k_y \neq 0, B_y \neq 0$ なので

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = k_y B_y + k_z B_z \neq 0 \quad (7.41)$$

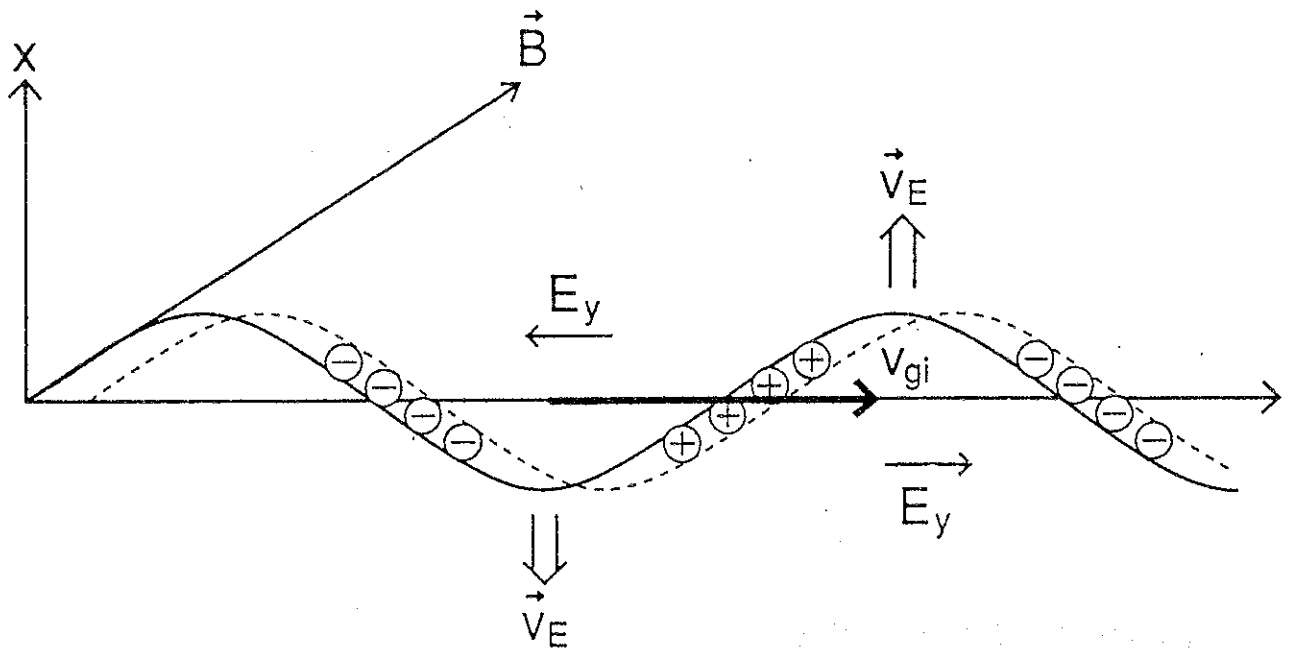
であり、即ち $k_{\parallel} \neq 0$ となりシアーは安定化に効く。

4) 重力不安定性の粒子的描象

重力 $\vec{g}$ が働くと粒子の案内中心は§2 で示したように a 種粒子は

$$\vec{v}_{ga} = \frac{m_a}{q_a} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (7.42)$$

でドリフトする。イオンと電子とではドリフトの方向は逆で、また $m_i \gg m_e$ のため $|v_{gi}| \gg |v_{ge}|$ である。図 7.7 のように重力ドリフトにより荷電分離が生じ E_y が生成される。次に $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトでイオンも電子も摂動を増加させる方向に動き系は不安定となる。



$$v_{gi} = \frac{m_i}{e} \frac{g}{B} > 0, \quad \vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$$

図 7.7 重力不安定性の粒子的描象

5) 交換型不安定性の条件

プラズマ中に磁場 $\vec{B}$ があるとする。ただしシアーはないとする。また、 $\beta = 2\mu_0 p / B^2 \ll 1$ の低ベータプラズマを考える。また磁場エネルギーを不変とする摂動を考える。断面積 A 、長さ L で一つの磁束管を考える。 L は $\vec{B}$ に沿っているので磁束 Φ は

$$\Phi = B A \quad (B = |\vec{B}|) \quad (7.43)$$

であり、磁束管の磁場エネルギーは

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \sim \frac{1}{2\mu_0} B^2 A L = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\Phi^2 L}{A} \quad (7.44)$$

である。2つのとなり合った磁束管 I と II を考える。

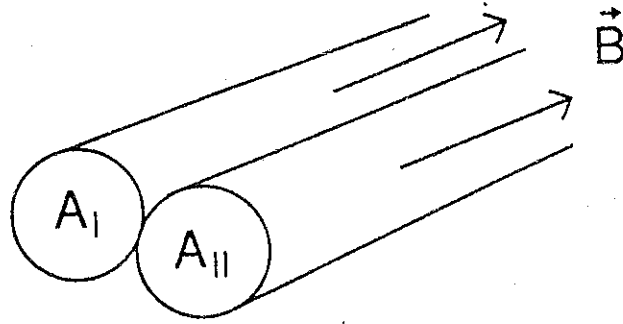


図 7.8 磁束管

I を占めているプラズマが II へ、II を占めているプラズマが I へ移動し、I と II が交換されたとする。磁束はプラズマの運動とともに運ばれるから、交換後 I の磁束は交換前の II の磁束になっている。交換前後の磁場エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{\Phi_I^2 L_{II}}{A_{II}} + \frac{\Phi_{II}^2 L_I}{A_I} \right\} - \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{\Phi_{II}^2 L_{II}}{A_{II}} + \frac{\Phi_I^2 L_I}{A_I} \right\} \quad (7.45)$$

であり、 $\Phi_I = \Phi_{II}$ であれば磁場エネルギーは変化しない。このような時、エネルギー原理におけるポテンシャルエネルギー δW は内部エネルギーの変化のみになる。交換後の I の圧力を P'_I 、II の圧力を P'_{II} (交換前はそれぞれ P_I, P_{II}) とすると

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1} \{ (P'_I V_I + P'_{II} V_{II}) - (P_I V_I + P_{II} V_{II}) \} \quad (7.46)$$

となる。ただし V_I, V_{II} はそれぞれの体積である。断熱変化の式 $PV^\gamma = \text{const}$ より

$$\begin{aligned} P'_I &= (P_{II} V_{II}^\gamma) / V_I^\gamma \\ P'_{II} &= (P_I V_I^\gamma) / V_{II}^\gamma \end{aligned} \quad (7.47)$$

が成立する。2つの磁束管はとなり合っているので、 $\Delta P, \Delta V$ を微小量として $P_{II} = P_I + \Delta P, V_{II} = V_I + \Delta V$ と書ける。従って

$$\delta W = \Delta V \left\{ \Delta P + \frac{\gamma P}{V} \Delta V \right\} < 0 \quad (7.48)$$

が不安定の条件となる。 $\Phi = BA$ であるので V は

$$V = \int dl A = \Phi \int \frac{dl}{B} \quad (7.49)$$

で与えられる。 Φ は $\Phi = \text{const}$ なので積分の外に出した。 dl は磁束管に沿う ($\vec{B}$ に沿う) 線要素である。

ここで次の量 U を定義する。

$$U \equiv - \int \frac{dl}{B} \quad (7.50)$$

体積 V は $V = -\Phi U$ で表せ $U = -dV/d\Phi$ とも書ける。不安定の条件は ΔU を使うと

$$\Delta U \Delta P < \gamma P \frac{(\Delta U)^2}{|U|} \quad (7.51)$$

となる。プラズマの境界小近では $P \simeq 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \Delta U \Delta P &< 0 \\ \frac{\Delta U \Delta P}{\Delta \Phi \Delta \Phi} &< 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

が不安定の条件である。ふつうは $\Delta P / \Delta \Phi < 0$ ($\Phi \sim r^2$) であるので不安定の条件は

$$\frac{dU}{d\Phi} = -\frac{d^2V}{d\Phi^2} = -\frac{d}{d\Phi} \int \frac{dl}{B} > 0 \quad (7.53)$$

である。

交換型不安定性に対する安定条件は

$$V'' = \frac{d}{d\Phi} \int \frac{dl}{B} < 0 \quad (7.54)$$

である。但し V の微分は Φ について行う。即ちプラズマから真空領域へ向かって $\int dl/B$ が減少すれば安定で逆は不安定となる。

(4) キンク不安定性

プラズマ電流 $\vec{j}$ が自由エネルギー源となって引き起こされる不安定性を一般にキンク不安定性という。

1) ソーセージ不安定性

円柱プラズマの表面に表皮電流が z 方向に流れているとする。図 7.8 のようにプラズマ内に $\vec{B}$ はなく外の真空領域に $\vec{B} = B_\theta \hat{e}_\theta$ ができる。

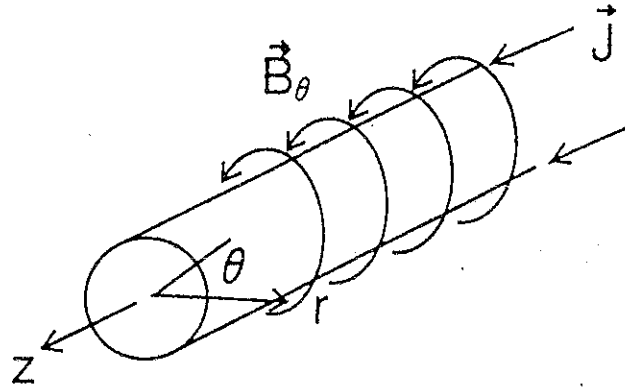


図 7.9 表面電流のつくる磁場

$B_\theta \propto 1/r$ ($r > a$) で r とともに B は減少し、また、磁力線の長さも r とともに増加する ($\oint dl = 2\pi r$)。 $\oint dl/B$ はプラズマの外に向かって増加するので不安定である。成長率は

$$\omega^2 \simeq -gk \quad (7.55)$$

$$g \simeq \frac{2P}{\rho a}, \quad k \simeq \frac{1}{a}$$

から評価すると

$$|\omega| \simeq \sqrt{\frac{2P}{\rho}}/a \sim X_S/a \quad (7.56)$$

程度になる。 a は円筒プラズマの半径、 C_S は音速である。

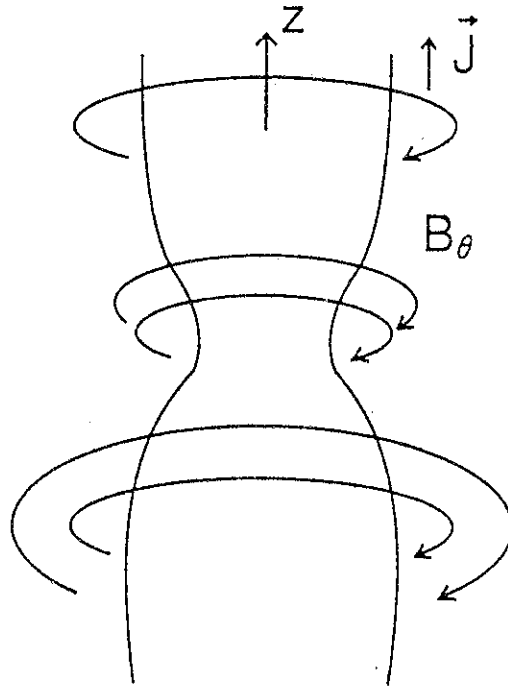


図 7.10 ソーセージ不安定性 ($m = 0$)

ソーセージ不安定性はくびれた所で $\vec{J}$ が大きくなり $\vec{B}_\theta$ が大きくなり、 $B_\theta^2/2\mu_0$ が大きくなり、ますますくびれていく。ふくれたところは逆に $\vec{J}$ が小さくなり $\vec{B}_\theta$ が小さくなり $B_\theta^2/2\mu_0$ が減少してますますふくれていくとも解釈できる。 θ 方向の摂動のモード数を m とするとソーセージ不安定性は $m = 0$ のモードであるといえる。

縦磁場 B_z がプラズマ中にあると安定化に働く。成長率は

$$\omega^2 = -\left(\frac{2P}{\rho}\right)/a + C_A^2/a \quad (C_A = \frac{B_z}{\sqrt{\mu_0 \rho}}) \quad (7.57)$$

程度になる。プラズマ表面で圧力バランス

$$P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (7.58)$$

が成立するので、安定化 ($\omega^2 > 0$) のためには

$$B_z^2 > \frac{1}{2} B_\theta^2 \quad (7.59)$$

が必要となる。

2) キンク不安定性

$z = \text{const.}$ の $(r - \theta)$ 面上でプラズマ断面をシフトさせるような摂動 ($m = 1$) を (狭い意味での) キンク・モード (kink mode) という。

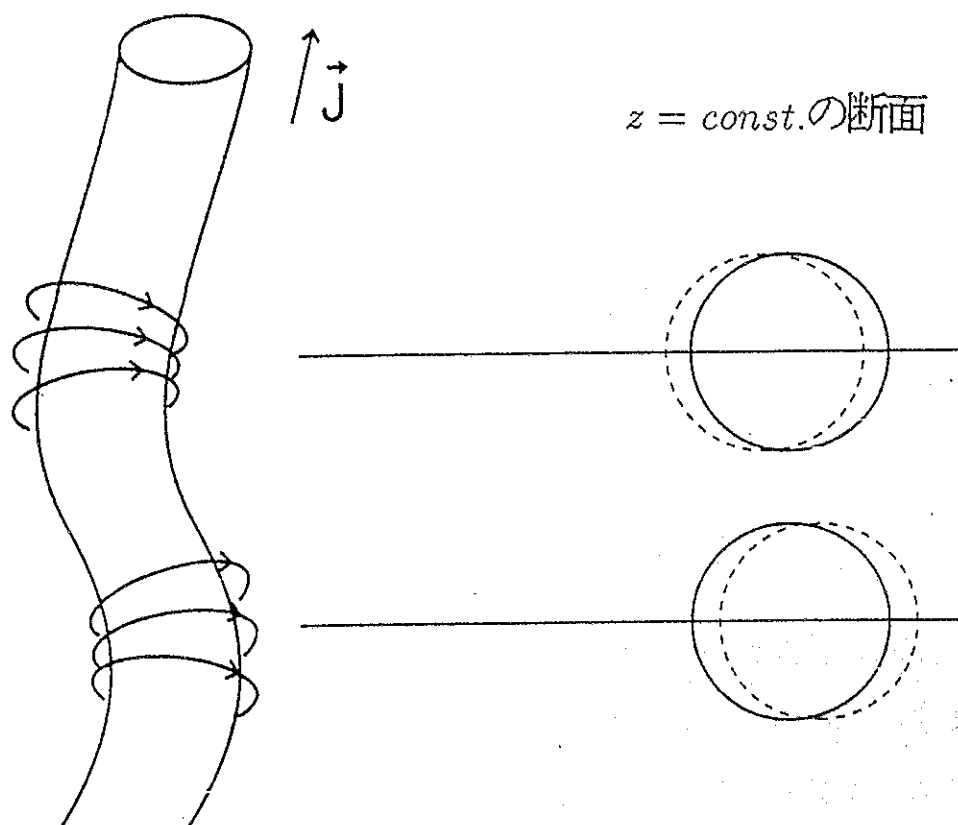


図 7.11 キンク不安定性 ($m = 1$)

キンク不安定性は、図 7.10 のようにプラズマ柱がくびれるような摂動モードである。くびれた個所では凸側より凹側の方が $B_\theta^2/2\mu_0$ が大きく、左右アンバランスとなり、ますますくびれていく。プラズマ中の B_z が張力により安定化に効くが、長波長モードに対しては完全に安定化できない。即ちプラズマ表面で

$$P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (7.60)$$

であるが、この時は $B_\theta^2 > B_z^2$ で安定化磁場 B_z が足りないからである。キンク不安定を安定化するには

i) 外部の B_z を加えること

ii) 同軸の完全導体でプラズマを囲むこと

が必要となる。

3) Kruskal-Shafranov 限界

外部磁場 B_z も印加してキンク・モードを安定化する条件を考える。

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{B} &= k_\theta B_\theta + k_z B_z \\ &= \frac{m}{r} B_\theta + n \frac{2\pi}{L} B_z \\ &= \frac{B_\theta}{r} \left(m + n \frac{2\pi r B_z}{L B_\theta} \right)\end{aligned}\quad (7.61)$$

である。但し m は θ 方向、 n は z 方向のモード数で L は z 方向のプラズマ柱の長さとした。
キンク・モードは $m = 1$ で、 z 方向のモード数 $n = -1$ に対して

$$\frac{2\pi r B_z}{L B_\theta} = 1 \quad (7.62)$$

なら $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ となる。磁力線のピッチは

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{r B_z} \quad (7.63)$$

で θ 方向に 2π 進むとき磁力線に沿って l だけ z 方向に進むとすると l は

$$l = 2\pi \frac{r B_z}{B_\theta} \quad (7.64)$$

で与えられる。これをピッチ長と呼ぶと、摂動のピッチ長は L を越えられない。外部磁場の磁力線のピッチ長と摂動のピッチ長が一致したとき $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ となる。従って磁力線のピッチ長が L より大きいと安定できる。キンク・モードの安定化の条件は

$$L < \frac{2\pi r B_z}{B_\theta} \quad (7.65)$$

で与えられる。プラズマ電流を I とすると

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.66)$$

だからこの安定化条件は

$$I < 4\pi^2 r^2 B_z / (\mu_0 L) \quad (7.67)$$

となる。これが Kruskal-Shafranov 限界 (K-S limit) である。

今、軸対称トーラス (トカマク) を考えアスペクト比 R/a が $R/a \gg 1$ とすると、トーラスを近似的に円筒と考えてよい。この時 $L = 2\pi R, r = a$ になるから安定化条件は

$$1 < \frac{r B_z}{R B_\theta} = q \quad (7.68)$$

即ち $q > 1$ がキンク・モードの安定化条件となる。 q が安全係数と呼ばれるゆえんはここにある。

参考文献

- [1] A.Iiyoshi, et al., Fusion Technology, Vol.17, No.1, pp.169-187.
- [2] K.Nishimura, et al., Fusion Technology, Vol.17, No.1, pp.86-100.
- MHD の平衡や安定性に関しては以下のようなテキストがある。
- [3] A.Jeffrey and T.Taniuti, "*Magnetohydrodynamic Stability and Thermonuclear Containment*", Academic Press, New York and London, 1966.
- [4] G.Bateman, "*MHD Instabilities*", The MIT Press, 1980.
- [5] J.Wesson, "*Tokamaks*", Oxford Science Publications, Clarendon Press. Oxford, 1987.
- [6] R.B.White, "*Theory of Tokamak Plasmas*", North-Holland, Amsterdam. Oxford. New York. Tokyo, 1989.
- [7] 浜田繁雄, 「MHD 平衡の安定性」 第 18 回プラズマ若手夏の学校テキスト

[8] 岡本正雄、「MHD 理論と磁場閉じ込め核融合」 第 31 回プラズマ若手夏の学校
テキスト

[9] J.P.Freidberg, "*Ideal Magnetohydrodynamics*", Plenum Press, New York, 1987.

§8 プラズマの輸送

磁場によりプラズマを閉じ込めようとした時、先ず、プラズマの大域的不安定性（マクロなスケール長の不安定性）を抑える必要がある。マクロな不安定性を抑えたとしてもプラズマは磁場を横切り閉じ込め領域から逃げていく。これがプラズマの拡散現象で、プラズマ粒子や熱が輸送される。粒子や熱の補給がなければ充分時間がたつとプラズマは全て拡散により閉じ込め領域から逃げてしまう。実際は粒子や熱が外部から補給されて、この補給と拡散がつり合うと定常な密度とその分布、あるいは熱（温度）とその分布が一定に保たれる。このような時は閉じ込め領域内のプラズマ粒子や熱は閉じ込め時間の間に入れ替わっている事になる。

粒子閉じ込め時間とは、もし（仮想的に）外部からの粒子源をたち切ったとした時の全粒子数の減衰時間の事で、エネルギー閉じ込め時間とは、もし（仮想的に）外部からの熱源（ α 加熱の熱源もこれに相当する）を切ったとした時プラズマ全エネルギーの減衰時間として定義されるものである。

一般に、あるいは全てのトーラス装置（トカマク、ヘリカル系、...）のプラズマの拡散は比較的短波長のミクロなプラズマ集団運動に起因しており、これを普通「異常拡散」とか「異常輸送」という。これに対して2体衝突による拡散、あるいは輸送を古典的拡散とか古典的輸送という。トーラス効果を考えた古典的輸送を新古典輸送という。

古典拡散より新古典拡散の方が大きく、（余程新古典拡散が大きい限り）異常拡散は新古典拡散よりずっと大きく、トーラスでは閉じ込め時間は異常拡散で決まっている。仮に何らかの手段で異常輸送を完全に抑制したとすると、閉じ込め時間は新古典輸送で決まり、従って新古典輸送は最小の輸送過程を与えるものといえる。

輸送理論は粒子拡散や熱拡散のみならず、電気抵抗（あるいは電気伝導度）、ブートストラップ電流、粘性、プラズマ回転などを論ずる。プラズマ閉じ込めの立場からは輸送理論では粒子閉じ込め、エネルギー閉じ込め、運動量閉じ込め等を論ずる。トカマクやヘリカ

ルでは、電気抵抗やブートストラップ電流は最近の研究では新古典的であると考えられている。本節では輸送理論の基礎として古典的拡散と新古典的輸送について述べる。

(1) 古典的拡散

クーロン2体衝突に基づくプラズマの磁場を横切る拡散を考える。プラズマ中で生ずる多用な現象の中でこの拡散現象は衝突時間程度の最もゆっくりした現象である。もちろん $\Omega \gg \nu_c$ が仮定される。(Ω はサイクロトロン周波数で ν_c は衝突周波数である。)

1) プラズマの流れ

2 流体の運動方程式において圧力のストレス・テンソル $\vec{\pi}$ は小さいとして無視する。また時間的にゆっくり変化する現象を考えるので $m_e \rightarrow 0$ 、 $m_i \rightarrow 0$ とする。即ち、 $\Omega \gg \nu_c$ であり、またプラズマの流れ $\vec{V}_a$ の大きさは音速、アルベン速と比較して充分小さいので

$$m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_a + \vec{V}_a \cdot \nabla \vec{V}_a \right) \rightarrow 0$$

とする。流れ $\vec{V}_a$ が大きいと (例えばプラズマ回転速度が充分大きいと) $\vec{V}_a \cdot \nabla \vec{V}_a$ が無視できない時もある。運動方程式は a 種粒子に対して

$$-\nabla p_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{V}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a = 0 \quad (8.1)$$

となる。式 (8.1) の $\vec{B}$ の外積をとると

$$\begin{aligned} \vec{B} \times (\vec{V} \times \vec{B}) &= \vec{V} B^2 - \vec{B} (\vec{V} \cdot \vec{B}) \\ &= B^2 (\vec{V} - V_{\parallel} \vec{b}) \\ &= B^2 \vec{V}_{\perp} \end{aligned}$$

となるので

$$\vec{V}_{\perp a} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_a}{e_a n_a B^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \quad (8.2)$$

が得られる。右辺第1項は反磁性流れであり、第2項は $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れで、第3項は衝突による流れ、即ち拡散を表す。反磁性流れは電子 ($a = e$) と1種のイオン ($a = i$) それぞれに対して

$$\vec{V}_e^{dia} = -\frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{en_e B^2} \quad (8.3)$$

$$\vec{V}_i^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i en_i B^2} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{en_e B^2} \quad (8.4)$$

である。但し、1種のイオンと電子とから成るプラズマを考えたので $n_e = Z_i n_i$ である。式(8.3)、(8.4)のそれぞれの流れが作る電流密度は

$$\vec{J}_e^{dia} = -en_e \vec{V}_e^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{B^2} \quad (8.5)$$

$$\vec{J}_i^{dia} = Z_i en_i \vec{V}_i^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{B^2} \quad (8.6)$$

であり、全電流密度は

$$\vec{J} = \frac{\vec{B} \times \nabla P}{B^2} \quad (P = p_e + p_i) \quad (8.7)$$

で、これは普通反磁性電流密度 (diamagnetic current density) と呼ばれる。この電流はMHD平衡の式 $\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}$ から直接得られるものである。式(8.2)の第2項は $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れである。

$$\vec{V}_a^{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (8.8)$$

単一粒子の $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトと同様、流体要素の $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れはイオン、電子とも大きさも向きも同じである。この流れは理想MHD流体のオームの式 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ から生ずるものである。このように反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れは流体としての基本的な流れである。反磁性流れは、プラズマ荷電粒子のラーモア運動に起因している。

2) 拡散

式(8.2)の右辺第3項は電子、イオン間の衝突(摩擦、friction)による流れで $\vec{R}_a$ は異種粒子との衝突によるa種粒子のモーメントの変化を表し、電子と1種のみイオンに対

して

$$\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (8.9)$$

が成立する。 $\vec{R}_e$ は

$$\vec{R}_e = \vec{R}_u + \vec{R}_T \quad (8.10)$$

の2つの部分から成り、 $\vec{R}_u$ は電子とイオンの流れの差 $\vec{u} = \vec{V}_e - \vec{V}_i$ を緩和する過程における電子のモーメント変化率で

$$\begin{aligned} \vec{R}_u &= -\nu_{ei} m_e n_e (\alpha_o \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}) \\ &= en_e (\eta_{\parallel} \vec{J}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{J}_{\perp}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

で表せる。ここで $\eta_{\parallel}, \eta_{\perp}$ は電気抵抗で

$$\eta_{\perp} = \frac{1}{\sigma_{\perp}} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_{ei}}, \quad \eta_{\parallel} = \alpha_o \eta_{\perp} \quad (8.12)$$

で与えられる。 α_o は Z_i の関数で $Z_i = 1$ の時 $\alpha_o = 0.51$ である事が分かっている。式(8.12)において $\tau_{ei} \propto T_e^{3/2}/n_e$ であるので、電気抵抗 $\eta_{\perp}, \eta_{\parallel}$ は電子温度 T_e のみの関数であり n_e には関係しない。式(8.10)の $\vec{R}_T$ は熱的な力 (thermal force) に起因するもので Braginskii によれば [1]

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\Omega_e \tau_{ei}} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \quad (8.13)$$

で与えられる。右辺第2項は金属中の熱起電力である Nernst 効果に類似のものである。磁力線方向の熱伝導度は非常に大きく速やかに T_e は磁力線に沿って一定となるから $\nabla_{\parallel} T_e = 0$ ($\vec{B} \cdot \nabla T_e = 0$) と仮定する。式(8.2)の第3項を $\vec{V}_{Da}$ と書く。即ち

$$\vec{V}_{Da} \equiv -\frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \quad (8.14)$$

この式の $\vec{R}_a$ に $\vec{R}_u$ と $\vec{R}_T$ の表式 (式(8.11)と式(8.13)) を代入すると

$$\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} (\nabla_{\perp} P - \frac{3}{2} n_e \nabla_{\perp} T_e) \quad (8.15)$$

が得られる。 $\nabla_{\perp} P$ に比例する項は流れの異なる2つの流体要素間の摩擦 (friction) から、 $\nabla_{\perp} T_e$ に比例する項は熱的な力 (thermal force) から生じたものである。

式 (8.15) は電子とイオンの衝突による流れで粒子拡散を表している。式 (8.15) は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} &= -\nu_{ei} \varrho_e^2 \left\{ \left(1 + \frac{T_i}{Z_i T_e}\right) \frac{\nabla_{\perp} n_e}{n_e} - \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\perp} T_e}{T_e} + \frac{T_i}{Z_i T_e} \frac{\nabla_{\perp} T_i}{T_i} \right\} \\ &= -\nu_{ie} \varrho_i^2 \left\{ \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i}\right) \frac{\nabla_{\perp} n_e}{n_e} - \frac{1}{2} \frac{Z_i T_e}{T_i} \frac{\nabla_{\perp} T_e}{T_e} + \frac{\nabla_{\perp} T_i}{T_i} \right\}\end{aligned}\quad (8.16)$$

3) 古典的拡散の物理機構

磁場を横切る流体的流れを与える式 (8.2) は、反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れ、衝突による拡散の流れからなるが、このうち反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れは理想 MHD 平衡において常に存在するものである。反磁性流 $\vec{V}^{dia}$ と拡散の流れ $\vec{V}_D$ の大きさの比は

$$\begin{aligned}\left| \frac{\vec{V}_{Da}}{\vec{V}_a^{dia}} \right| &= \left| \frac{e_a n_a B^2}{\vec{B} \times \nabla p_a} \right| \cdot \left| \frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \right| \\ &\simeq \left| \frac{en_e \eta_{\perp} J_{\perp}}{|\vec{J} \times \vec{B}|} - \frac{1}{\nabla p_a} \frac{3}{2} \frac{n_e}{\Omega_e \tau_e} \nabla p_e \right| \simeq \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e} \ll 1\end{aligned}\quad (8.17)$$

で、 $|\vec{V}_{Da}|$ は $|\vec{V}_a^{dia}|$ に比べて ν_{ei}/Ω_e だけ高次の量である。 $\nu_{ei}/\Omega_e \rightarrow 0$ の零次では流れは $\vec{V}_a^{dia}$ と $\vec{V}_a^{\vec{E} \times \vec{B}}$ であるが、 $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れはイオン、電子とも大きさも向きも同じであるが、 $\vec{V}_e^{dia}$ と $\vec{V}_i^{dia}$ は向きが逆のため、イオン流と電子流との間は衝突による摩擦力が働く。今 $T_e = const$ とするとこの力は

$$\begin{aligned}\vec{F}_e = -\vec{F}_i &= -m_e \nu_{ei} (\vec{V}_e^{dia} - \vec{V}_i^{dia}) \\ &= -\nu_{ei} m_e \left(-\frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{en_e B^2} - \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i en_i B^2} \right) \\ &= \nu_{ei} m_e \frac{\vec{B} \times \nabla P}{en_e B^2} = \frac{1}{n_e} \vec{R}_u\end{aligned}\quad (8.18)$$

である。この力により $\vec{F} \times \vec{B}$ ドリフト

$$\vec{V}_{Da} = \frac{\vec{R}_a \times \vec{B}}{e_a B^2}\quad (8.19)$$

を受けるが、 $\vec{R}_e = -\vec{R}_i$ かつ $e_e = -e < 0, e_i = Z_i e > 0$ であるため

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} &= -\frac{\vec{R}_e \times \vec{B}}{eB^2} \\
 &= -\frac{1}{eB^2} \nu_{ei} \frac{\vec{B} \times \nabla P}{en_e B^2} \times \vec{B} \\
 &= -\frac{n_e \nu_{ei}}{e^2 n_e B^2} \nabla_{\perp} P = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla_{\perp} P
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

となる。

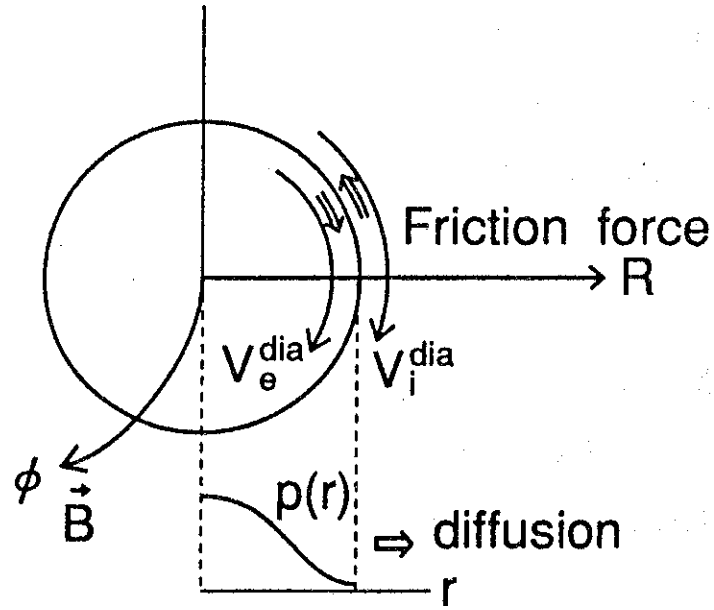


図 8.1 古典的拡散

式 (8.16) で $T_e = T_i = \text{const}, Z_i = 1$ とすると

$$n_e \vec{V}_{De} = -D \nabla_{\perp} n_e$$

の形に書ける。 D は粒子の拡散係数である。拡散係数は相関時間を t_c 、ステップ長を Δl とすると

$$D \sim \frac{(\Delta l)^2}{t_c}$$

で与えられる。電子の場合 $t_c \sim \nu_{ei}^{-1}$ 、 $\Delta l = \varrho_e$ でイオンに対しては $t_c \sim \nu_{ie}^{-1}$ 、 $\Delta l \sim \varrho_i$ であるので

$$D_e = \nu_{ei} \varrho_e^2, \quad D_i = \nu_{ie} \varrho_i^2$$

$$D_e = D_i$$

となる。

4) 不純物イオンの古典的拡散

今までは1種類のイオンと電子からなるプラズマを考えてきたが種類の異なるイオン(例えば不純物イオン)が混入しているプラズマを考える。第1種のイオンは電荷 Z_i 、質量 m_i 、密度 n_i 、温度 T_i とし、第2種のイオンはそれぞれ Z_I, m_I, n_I, T_I とする。a種 ($a=e, i, I$) の粒子の流れは、 $\nu_a/\Omega_a \ll 1$ の近似の第0次では、

$$\vec{V}_{\perp a}^{(0)} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_a}{e_a n_a B^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

で与えられる。第1種イオン ($a=i$) と第2種イオン ($a=I$) の間の衝突の時間スケールを考える。 $\tau_{Ii} \ll \tau_{Ie} \sim \tau_{ie}$ であるので電子との衝突は考えなくてもよい。第2種イオンが第1種イオンとの衝突により受ける摩擦力は単位体積当たり

$$\begin{aligned} \vec{R}_I &= -\nu_{Ii} m_I n_I (\vec{V}_{\perp I}^{(0)} - \vec{V}_{\perp i}^{(0)}) \\ &= -\nu_{Ii} m_I n_I \left(\frac{\vec{B} \times \nabla p_I}{Z_I e n_I B^2} - \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i e n_i B^2} \right) \end{aligned}$$

である。この力により第2種イオンは拡散し、その粒子束は

$$\begin{aligned} n_I \vec{V}_{DI} &= \frac{\vec{R}_I \times \vec{B}}{Z_I e B^2} \\ &= -\frac{\nu_{Ii} m_I n_I}{Z_I e B^2} \left(\frac{\nabla_{\perp} p_I}{Z_I e n_I} - \frac{\nabla_{\perp} p_i}{Z_i e n_i} \right) \end{aligned}$$

となる。イオン・イオン衝突の時間スケールの間にほぼ定常に達したとすると $n_I \vec{V}_{DI} \simeq 0$ であり、その時

$$\frac{\nabla_{\perp} p_I}{Z_I n_I} - \frac{\nabla_{\perp} p_i}{Z_i n_i} \simeq 0$$

となる。イオン・イオン衝突の時間の間にイオン温度は緩和し $T_I \simeq T_i$ となる。 $T_I = T_i = \text{const.}$ と仮定すると

$$\frac{\nabla_{\perp} n_I}{Z_I n_I} - \frac{\nabla_{\perp} n_i}{Z_i n_i} \simeq 0$$

となる。スラブ・プラズマを考え z 方向に一様磁場があり n_I, n_i は半径 r のみの関数とすると $\nabla_{\perp} = \partial/\partial r$ であるので

$$n_I(r) = n_{I0} \left(\frac{n_i(r)}{n_i(0)} \right)^{Z_I/Z_i}$$

という分布が得られる。第2種イオンが Z_I の大きい不純物だとすると $Z_I/Z_i \gg 1$ のため $n_I(r)$ は $n_i(r)$ と比較して中心部 ($r = 0$) に局在した鋭い分布となる。これが古典論における不純物集中である。

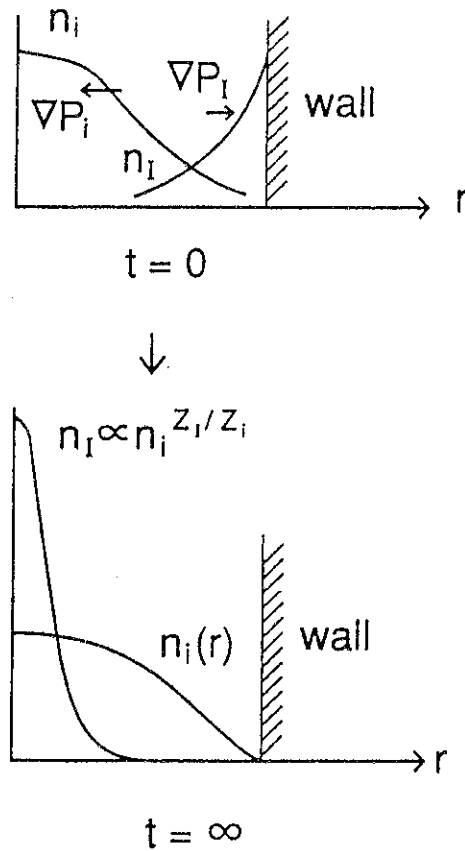


図 8.2 古典論における不純物集中

参考文献

- [1] S.I.Braginskii, "*Transport Processes in a Plasma*", Review of Plasma Physics
(ed. M.A.Leontovich), Vol.1.

おわりに

講義録をまとめたが、基礎講座としては多くの重要な事が欠けている。説明も簡単すぎたり、難しすぎたりしてバランスが取れていない。また文献の引用が十分なされていない。しかし核融合科学研究所大学院教育協力委員会委員の百田弘教授の熱心な進めにより、今後修正・加筆をする事として、とりあえず印刷物にする事にした。同教授の教育に対する情熱と御努力に敬意を表するとともに、本稿が学生諸君の研究に少しでも役立てばと願う次第である。

本稿作成にあたり、タイプや図の作成は全て榎寿恵子嬢にお願いした。榎嬢には大変な負担をかけたが心良く協力していただき、最後に心から感謝したい。

Publication List of NIFS-PROC Series

- | | |
|--------------|--|
| NIFS-PROC-1 | <i>U.S.-Japan on Comparison of Theoretical and Experimental Transport in Toroidal Systems</i> Oct. 23-27, 1989
Mar. 1990 |
| NIFS-PROC-2 | <i>Structures in Confined Plasmas –Proceedings of Workshop of US-Japan Joint Institute for Fusion Theory Program–</i> ; Mar. 1990 |
| NIFS-PROC-3 | <i>Proceedings of the First International Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion –Next Generation Experiments in Helical Systems–</i> Dec. 4-7, 1989
Mar. 1990 |
| NIFS-PROC-4 | <i>Plasma Spectroscopy and Atomic Processes –Proceedings of the Workshop at Data & Planning Center in NIFS–;</i> Sep. 1990 |
| NIFS-PROC-5 | <i>Symposium on Development of Intensified Pulsed Particle Beams and Its Applications</i> February 20 1990; Oct. 1990 |
| NIFS-PROC-6 | <i>Proceedings of the Second International TOKI Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion , Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas -Theory and Computer Simulation-;</i> Apr. 1991 |
| NIFS-PROC-7 | <i>Proceedings of Workshop on Emissions from Heavy Current Carrying High Density Plasma and Diagnostics;</i> May 1991 |
| NIFS-PROC-8 | <i>Symposium on Development and Applications of Intense Pulsed Particle Beams, December 6 - 7, 1990;</i> June 1991 |
| NIFS-PROC-9 | <i>X-ray Radiation from Hot Dense Plasmas and Atomic Processes;</i> Oct. 1991 |
| NIFS-PROC-10 | <i>U.S.-Japan Workshop on "RF Heating and Current Drive in Confinement Systems Tokamaks"</i> Nov. 18-21, 1991, Jan. 1992 |
| NIFS-PROC-11 | <i>Plasma-Based and Novel Accelerators (Proceedings of Workshop on Plasma-Based and Novel Accelerators)</i>
Nagoya, Japan, Dec. 1991; May 1992 |
| NIFS-PROC-12 | <i>Proceedings of Japan-U.S. Workshop P-196 on High Heat Flux Components and Plasma Surface Interactions for Next Devices;</i> Mar. 1993 |

- NIFS-PROC-13 『NIFS シンポジウム
「核燃焼プラズマの研究を考えるー現状と今後の取り組み方」
1992年 7月 15日、核融合科学研究所』
1993年 7月
NIFS Symposium
*"Toward the Research of Fusion Burning Plasmas -
Present status and Future strategy-", 1992 July 15,
National Institute for Fusion Science; July 1993*
(in Japanese)
- NIFS-PROC-14 *Physics and Application of High Density Z-pinches,*
July 1993
- NIFS-PROC-15 岡本正雄、講義「プラズマ物理の基礎」
平成5年度 総合大学院大学
1994年 2月
M. Okamoto,
"Lecture Note on the Bases of Plasma Physics"
Graduate University for Advanced Studies
Feb. 1994