

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

プラズマ中のカオス現象
平成5年度 核融合科学研究所共同研究
研究会報告書

Report of the Meeting on Chaotic Phenomena in Plasma Interdisciplinary
Graduate School of Engineering Sciences

(Received - Mar. 25, 1994)

NIFS-PROC-16

Apr. 1994

RESEARCH REPORT NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Nagoya 464-01, Japan.

平成5年度
核融合科学研究所共同研究
研究会報告書

プラズマ中のカオス現象

代表者 河合 良信
(九州大学総合理工)

Report of the meeting on Chaotic Phenomena in Plasma

Y.Kawai

Interdisciplinary Graduate School of
Engineering Sciences, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka 816, Japan

Abstract

This is a report on the meeting on chaotic phenomena in plasma, held at NIFS on December 1, 1993.

Keyword: Chaos, gas discharge, chaotic magnetic field line, Alfvén wave, $1/f$ noise, fractal dimension, electron cyclotron resonance, divertor plasma

文部省核融合科学研究所の平成5年度共同研究として、研究会「プラズマ中のカオス現象」が、平成5年12月1日、核融合科学研究所8階大会議室にて行われた。ここにその全ての講演の内容を報告する。

河合 良信 (代表者：九州大学大学院総合理工学研究科)

羽鳥 尹承 (世話人：核融合科学研究所)

プラズマ中のカオス現象

目次

- 1) 放電プラズマの非線形現象の解析 1
松永 康、加藤 鞆一 (早大理工)
- 2) 磁気面破壊と磁力線の拡散係数 8
杉本久也、倉澤 孝*、芦田久男 (電総研、*東工大理)
- 3) 真空ヘリカルトーラス磁力線のハミルトニアン理論 31
Giovanni Gnudi、羽鳥尹承 (核融合科学研究所)
- 4) 閉じこめ磁場のマッピング 51
山岸留次郎 (福井工大)
- 5) Quasi-Periodic Perturbation for the Alfvén Wave 61
Y. Yamakosi, K. Muto and Z. Yoshida (東大工システム量子)
- 6) ニューロン・マグネトロン・小宇宙の $1/f^\alpha$ ノイズ 73
谷塚 昇、岡田年明、高野雅大 (大阪府大総合科学)
- 7) Fractal Dimensionality Analysis of Edge Magnetic Fluctuations in Reverse Field
Pinches 82
S. Masamune, D. Ishijima, A. Tanaka, K. Ohta, M. Iida,
H. Oshima (京都工繊大), Y. Hirano, Y. Yagi and T. Shimada (電総研)
- 8) 電子サイクロトロン波と相互作用する電子のカオス過程 90
田中雅慶、庄山裕章、河合良信 (九大総理工)、河野光雄 (中央大総合政策)
- 9) Nonlinear Dynamic Behavior of an Emissive Divertor Plate and Divertor Plasma ... 96
N. Ohno, Ye Minyou*, S. Masuzaki*, K. Shiraishi* and S. Takakumura
(名大工学エネルギー理工、*名大工)

放電プラズマの非線形現象の解析 Analysis of Nonlinear Phenomena in Gas Discharge

早大理工 松永 康、加藤 剛一

Y. Matsunaga and T. Kato

School of Science and Engineering Waseda University, Tokyo, 169-50

Abstract

Hysteresis and low frequency chaotic phenomena have been observed in the discharge by hot cathode in Ar gas. Supposing spatially that the ion density has constant distribution, that the beam electron density from hot cathode has exponential distribution with the damping constant σ and that the electron density has Boltzmann distribution, we analyze Poisson equation by linear approximation. The motion of an ion in the nonlinear potential are calculated. The periodic-doubling bifurcation and chaotic oscillation in some parametric region is obtained numerically. The experimentally observed low frequency phenomena are explained by our results adequately. Hysteresis phenomena are explained by filament temperature differences between anode glow mode and Langmuir mode.

1. はじめに

熱電子放出型陰極によるプラズマの放電特性はヒステリシスを描き、自励系、駆動系のいずれでもカオスを観測したと報告されている^{(1), (2), (3), (4)}。図1に我々の研究室で行った実験装置の概略を、図2に典型的なヒステリシス放電特性を示す。図2のモード遷移が起こる前の状態で低周波の正弦波 (≤ 1 [KHz]) を重畳させると、放電電流特性が低周期倍化を起こしカオティックになる(図3)。図2の遷移前のモードはアノードシースで電流が制限されるアノードグローモード(以下AGモード)、遷移後のモードはカソード近傍にイオンシースを持ち、チャイルド・ラングミュア則に従うラングミュアモード(以下LGモード)と考えられている。

我々はこの現象に対し簡単なモデルをたて、電離が少ない状態での非線形ポテンシャル中に捕まっているイオンの運動によるパラメータ励振に注目して解析を進めた。そして以下に述べるパラメータ領域においてほぼ説明できることがわかった。また同時にヒステリシスの機構についても考察を行った。

2. 非線形ポテンシャル

イオン、電子、ビーム(カソードのタングステンフィラメントより放出される熱電子をこう呼ぶことにする。)の密度分布を仮定してポアソンの式より近似解を求める。モデルは軸方向に1次元系とし、 $x=0$ がカソード、 $x=L$ がアノード、そしてカソードの電位を $\phi_0(t)$ 、アノードの電位を0とする。なおチャンバーの周りにカスプ状に永久磁石を配置しているが、径の中心部分では磁場はほとんど無視できるものとする。

$$\frac{\partial}{\partial x} E = \frac{e}{\epsilon_0} (N_i - N_e - N_b)$$

イオンは空間的に一様に分布、電子は平衡状態にあるとしてボルツマン分布、ビームはカソードからアノードに向かって減衰率 σ で指数関数的に減少するとした。即ち、 $N_i = N_{i0}$: 一様分布、 $N_e = N_{e0} \exp(e\phi/kT_e)$: ボルツマン分布、 $N_b = N_{b0} \exp(-\sigma x)$: 指数分布、とする。さらに以下の無次元化量を導入する。

$\xi = x/\lambda_D$ 、 $d = L/\lambda_D$ 、 $A_i = N_{i0}/N_0$ 、 $A_e = N_{e0}/N_0$ 、 $A_b = N_{b0}/N_0$ 、 $\beta = \sigma/\lambda_D$ 、 $\varphi = e\phi/kT_e$ 、 λ_D はデバイ長である。続いて線形近似を行い、第一種境界値問題として扱う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} \varphi(\xi, t) = -A_i + A_e \exp(\varphi) + A_b \exp(-\beta \xi) \\ \quad \approx -A_i + A_e(1 + \varphi) + A_b \exp(-\beta \xi) \\ \varphi(0, t) = \varphi_0(t), \quad \varphi(d, t) = 0 \end{array} \right.$$

カソード及びアノードの境界条件を考慮したグリーン関数を使って解き、まとめると次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= X_1(t) \cosh(\alpha\xi) + X_2(t) \sinh(\alpha\xi) + X_3 e^{-\beta\xi} + X_4 \\ &= \sqrt{X_1^2(t) - X_2^2(t)} \cosh(\alpha\xi + \theta(t)) + X_3 e^{-\beta\xi} + X_4 \\ \text{or} \\ &= \sqrt{X_2^2(t) - X_1^2(t)} \sinh(\alpha\xi + \theta(t)) + X_3 e^{-\beta\xi} + X_4 \end{aligned} \right.$$

時間依存は外部振動 $\varphi_0(t)$ を通じて導入される。ただし、各係数は以下のようにとった。

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{A_e} \\ \tanh(\theta(t)) &= X_2(t)/X_1(t) \quad (|X_1| \geq |X_2|) \\ \tanh(\theta(t)) &= X_1(t)/X_2(t) \quad (|X_2| \geq |X_1|) \\ X_1 &= 1 - A_i/A_e + A_b/(A_e - \beta^2) + \varphi_0(t) \\ X_2 &= (1 - A_i/A_e)(1 - \cosh(\alpha d)) \operatorname{cosech}(\alpha d) \\ &\quad + A_b/(A_e - \beta^2) \{ \operatorname{cosech}(\alpha d) e^{-\beta d} - \coth(\alpha d) \} - \varphi_0(t) \coth(\alpha d) \\ X_3 &= -A_b/(A_e - \beta^2) \\ X_4 &= -(1 - A_i/A_e) \end{aligned} \right.$$

非常に薄いプラズマを考える。我々の興味はイオンシースの不安定性⁽⁵⁾の問題よりも、負電荷が多量にある場合の不安定性なので、密度比および無次元量等を次のようにとった。

$$T_e = 1[eV], \quad N_0 = 1 \times 10^6 [cm^{-3}], \quad \lambda_D = 0.74 [cm^{-3}], \\ A_i = 1, \quad A_e = 0.3, \quad A_b = 6, \quad d = 35, \quad \varphi_0(t) \equiv \varphi_0 = -15[V]$$

$\varphi_0(t)$ が一定の場合に無次元化減衰率 β を変化させると図4のようになる。各々、 $\beta=0$ 、 $\beta=0.001$ 、 $\beta=0.1$ 、 $\beta=10$ である。 $\beta=0$ 、 0.001 がAGモード、 $\beta=10$ がLGモードに対応する。 β が小さいAGモードは、カソード側に電子シースを持ち、中央部分の電場は小さい。 β を大きくしていくと中央部分が持ち上がり、カソード側にイオンシースを持つLGモードとなる。実験ではAGモードからLGモードへの遷移は一瞬にして起こっている。これは電離が急速に進むためである。従って、定常状態として、 $\beta=0.1$ のような中間の状態は観測されない。このようにポテンシャルの形はビームの無次元化減衰率 β によって、電離が少ないAGモードから、通常のLGモードまで幅広くとることができる。

また、プラズマによる遮蔽の効果は、密度 A_e を通じて考慮されている。 $\varphi_0(t)$ を ω_d で駆動させても、遮蔽効果のためにポテンシャルはカソード近傍では激しく変化するが、中央部分ではほとんど変化しない。

3. 数値計算結果と考察

このポテンシャル中のイオンの運動方程式は、散逸を考慮して、

$$\ddot{\xi} = -\omega_{pi}^2 \{ \alpha X_1(t) \sinh(\alpha\xi) + \alpha X_2(t) \cosh(\alpha\xi) - \beta X_3 \exp(-\beta\xi) \} - \nu \dot{\xi} \quad (1)$$

と単純化される。 ω_{pi} はイオンプラズマ周波数であり、 $\omega_{pi} = 2\pi \times 33000$ [Hz] を1とする。散逸係数 ν はイオンと中性気体との弾性衝突、荷電交換の衝突周波数より評価して、 $\nu/\omega_{pi} \leq 0.1$ 程度となる。 $\beta=0$ 、 $\nu=0$ 、 $\varphi_0(t)$ =一定の場合の運動は楕円積分を使って厳密に解ける。その際の振動数は、初期点と X_1 、 X_2 、 α に依存する。注目したいのは、電場がほとんどない領域でのイオンの往復運動と外部振動とのカップリングによる周期倍化現象である。そのためビームはほとんど減衰しないとして、非対称ポテンシャルをつくる β は0.00002と非常に小さくとった。このように小さくとった理由はもう一つあり、往復運動の周波数(バウンス周波数)を実験で観測されている数百 [Hz] に一致させるためである。また、散逸係数 ν は駆動周波数と同じオーダーにとっているがこれに関する詳しい検討は今後の課題である。

(1)の系は駆動周波数 ω_d がバウンス周波数の有理数倍近傍で、不安定性が起こる。これはよく知られたマシュー方程式(あるいはヒルの方程式)のパラメータ励振と同じ性質を示しているが、ポテンシャルが非対称であることと、駆動波形がsineだけではないこと、散逸があるために、ポテンシャルの最小値よりオーバーシュートさせてもイオンが領域内($0 \leq \xi \leq d$)に留まる点が異なる。

図5に典型的な解析結果を示す。なおすべて同じ初期点から始め、ルンゲ・クッタ・ジル法で(1)式の積分を行った。各々パワースペクトル、速度の時間変化及び相図である。 $\varphi_0(t) = V_d + V_a \sin \omega_d t$ として、放電電圧 V_d を固定し、振幅 V_a をオーバーシュートさせると、カオティックな状態から1/3周期、1/2周期、1周期となり、イオンは完全に補足される。さらに同じ ω_d で V_a を固定し、放電電圧 V_d だけを変化させると1周期、1/2周期、1/4周期からカオティックな状態になる。またこの条件の場合、散逸をかなり増化させても ($\nu = 0.15$)、カオティックな振る舞いを示した。別の条件でも、振幅 V_a を増化させると、駆動周波数の低調波側にもスペクトルのピークが現れる。ただしこの場合は、高調波側のスペクトルの方がかなり大きく、実験で観測されている周期倍化現象とは異なっている。むしろ波形を見るとスパイク電流の不安定性に近い⁽⁶⁾。これは、イオンが領域外へ飛び出す寸前の条件の時に、イオンの運動がビートによる変調を受け、低調波側のスペクトルを生ずるためと考えている。

4. ヒステリシス

ここでは実験による現象論的な考察にとどめる。まずヒステリシス曲線はArのイオン化エネルギー15.76 [eV] 付近で観測され、遷移前後では、ポテンシャルの空間分布がAGモードから通常のLGモードに遷移していると考えられる⁽⁷⁾。そして我々の実験ではヒステリシスの遷移の前後でタングステンフィラメントに流れる電流が変化していることが測定された。またタングステンフィラメントの電圧はほとんど変化していないので、単純な抵抗の変化によるフィラメントの温度変化を見積もるとその差は約100 [K] となった。この温度差はポテンシャルのモードが変化し、カソードシースからのタングステンフィラメントへのイオンのボンバードが活発になったこと、プラズマの密度が増加したことによると考えられる。リチャードソン・ダッシュマンの熱電子放出の式より各々のモードの飽和電流値を見積もると、AGモードでは34 [mA]、LGモードでは112 [mA] となる。飽和電流値までの電流電圧特性はチャイルド・ラングミュアの3/2則に従うと近似すれば、AGモードではアノードのエレクトロシースから引き出される電流で近似して、

$$I = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{V^{3/2}}{\epsilon_0 d_a^2} S \quad : S \text{ は電極面積。}$$

逆にLGモードではカソードのイオンシースからひきだされる電流で近似して、

$$I = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{M}} \frac{V^{3/2}}{\epsilon_0 d_c^2} S$$

カソードのイオンシースは十分薄いと考えられるので、図6のようなヒステリシスが得られる。

また、この他にモード間のガスの温度、あるいは電子温度の差によるヒステリシスの機構についても考察した。しかし、本来ならば、粒子密度変化と温度変化を同時に考慮に入れた直接的説明が必要である。粒子密度は電離による生成と、再結合及び拡散による消滅が釣り合った所で定常となる。これがLGモードである。問題は、どうやって、ヒステリシスに至る二つの経路を導入するかということと、粒子密度変化の放電電圧依存性を考慮するかということである。放電電圧は中心部分のプラズマにはほとんどかからず、イオン化エネルギー以上のエネルギーを持った電子は、ごく一部で、しかも局在化しているはずである。遷移がどこで起こるかを定式化するため、実効的なイオン化エネルギーと粒子数密度変化の関係について現在検討している。

5. まとめと今後の課題

電離が十分進んでいないAGモードポテンシャル中のイオンの運動にのみ注目した。放電電流の不安定性はイオンの運動が平均化されたものではあるが、これだけでもかなり低周波の現象を説明できると考えている。減衰率 β の物理的定式化は今後の課題である。

本来なら、荷電粒子の運動による多体の問題としての自己場と、電離、再結合、拡散による粒子数の変化を考えに入れなければならない。自己場を考慮するためPIC法^{(8), (9)}によるシミュレーションが用いられることが多い。今のところ、原因が明確なイオンプラズマ周波数で特徴づけられる(10 [Kz]より大) 2流体不安定性(イオン音波)の解析がわかっている。電離等の粒子数変化及び境界条件まで含めたPIC法によるシミュレーションは現在検討中である。

粒子密度変化を特徴づける周波数は電離、再結合によるものである。最近、AGモードでの電子エネルギー分布の測定から、高温電子の割合がかなり高いことが実験的にわかってきた。最初に考えていた電離周波数は電子温度の見積もりを1eVと低くとっていたため数Hzから数10Hzのオーダーであった。しかし実際にはもっと大きいことがわかってきたので、以前検討した生成消滅(ルトカボルテラ型)による粒子密度変化を記述する基礎方程式⁽¹⁰⁾に基づいた、低周波不安定性及びヒステリシス現象の説明を考察中である。

また実際の実験装置に存在する電極周辺部磁場のプラズマへの影響も課題である。

参考文献

- (1) P. Y. Cheung and A. Y. Wong, *Phy. Rev. Lett.* 59, 511 (1987)
- (2) P. Y. Cheung, S. Donovan and A. Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* 61, 1360 (1988)
- (3) D. Weixing, H. Wei, W. Xiaodong, and C. X. Yu, *Phy. Rev. Lett.* 70, 170 (1993)
- (4) J. Qin, L. Wang, D. P. Yuan, P. Gao, and B. Z. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* 63, 163 (1989)
- (5) M. Kono, H. Nakashima and A. Komori, *J. Phy. Soc. Jpn.* 61, 407 (1992)
- (6) 池内公、早稲田大学修士論文
- (7) R. Timm and A. Piel, *Contrib. Plasma Phys.* 32, 599 (1992)
- (8) F. Bauer and H. Schamel, *Physica D*, 54, 235 (1992)
- (9) F. Greiner, T. Klinger, H. Klostermann, and A. Piel, *Phy. Rev. Lett.* 70, 3071 (1993)
- (10) 松永康、加藤頼一、日本物理学会1992秋の分科会予稿集、同第48回年会予稿集、同1993秋の分科会予稿集

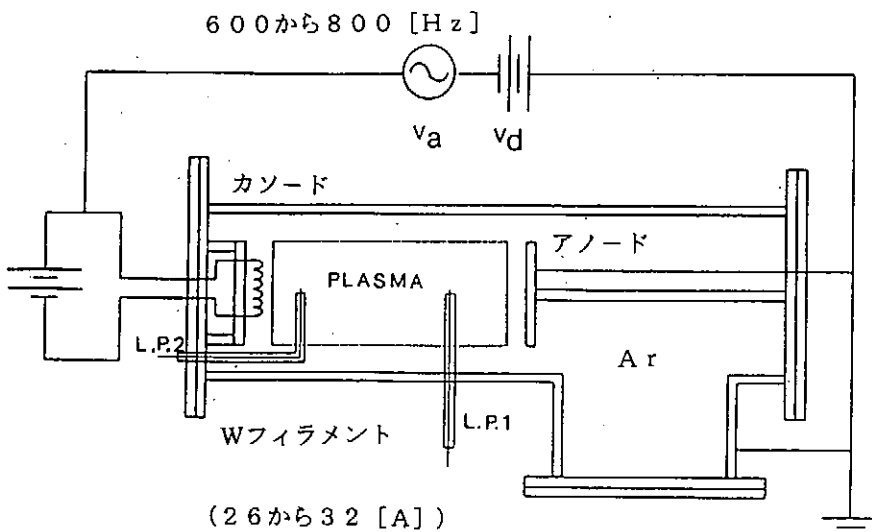


図1 実験装置の概略

電子密度 10^8 から 10^9 [cm^3]

電子温度 1 から 2 [eV]

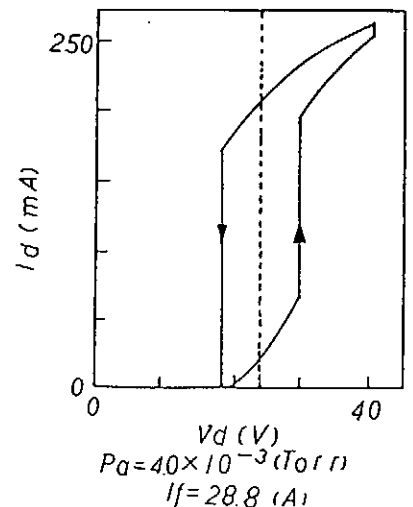


図2 ヒステリシス曲線

$P_a = 40 \times 10^{-3}$ (Torr), $I_f = 28.8$ (A)
 $f_0 = 600$ (Hz), $V_{dc} = 24.0$ (V)

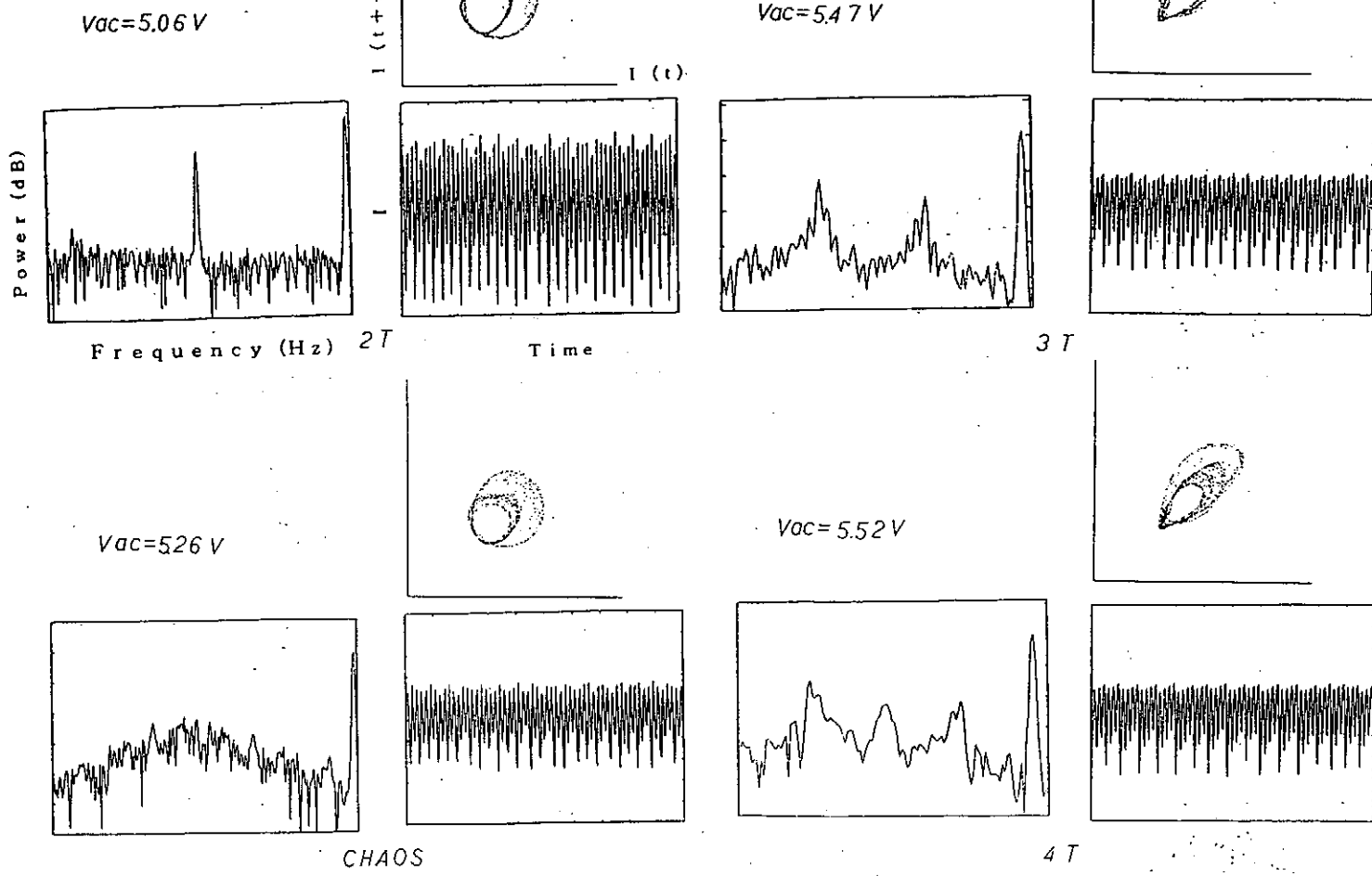


図3 駆動電圧を変化させたときの電流特性

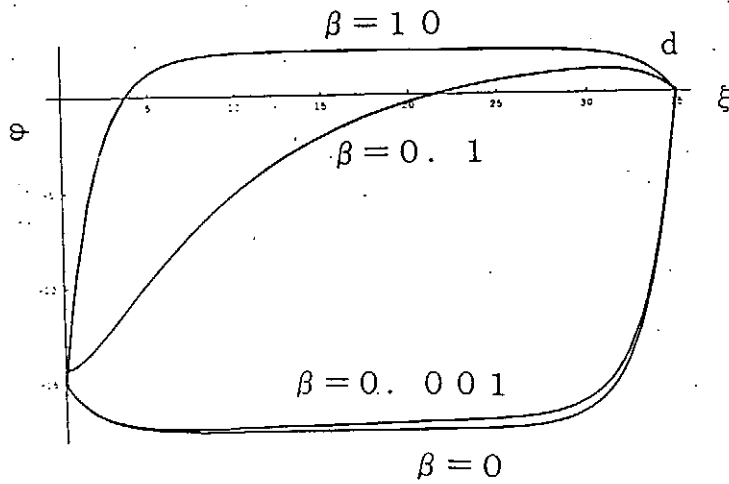


図4 減衰率 β を変えたときの非線形ポテンシャル

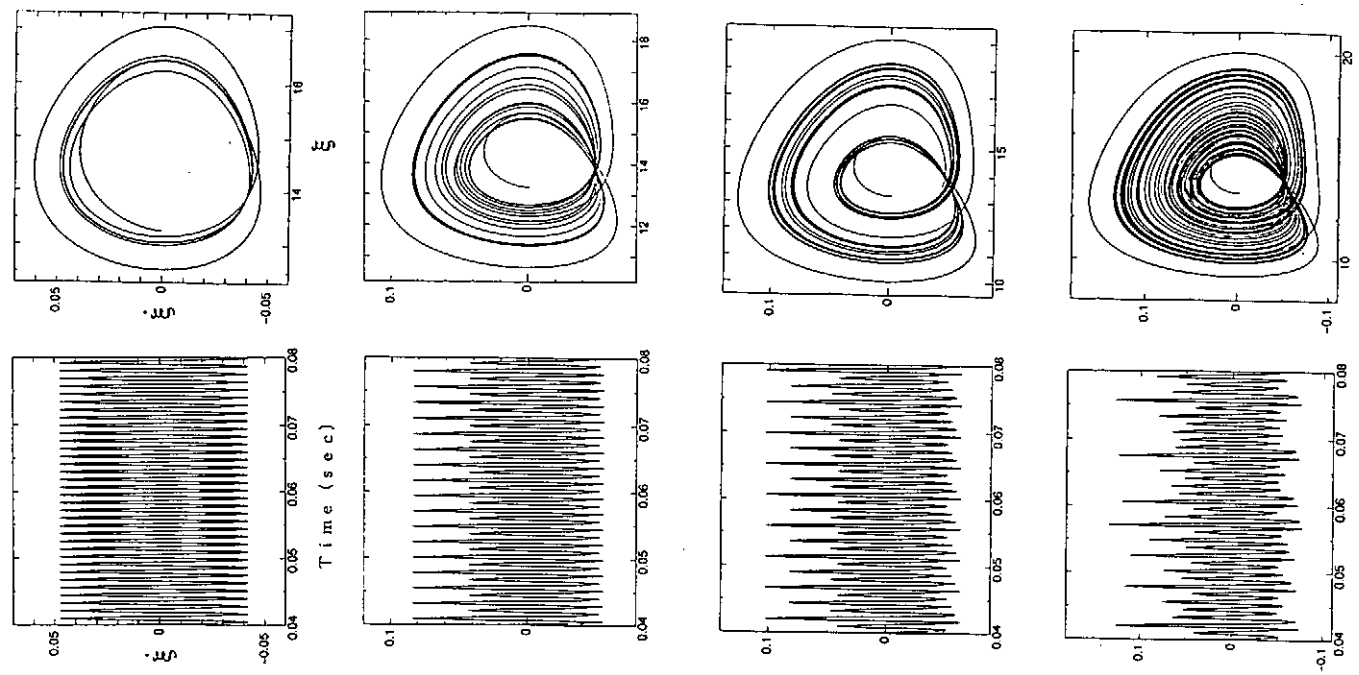


图 5 (1)

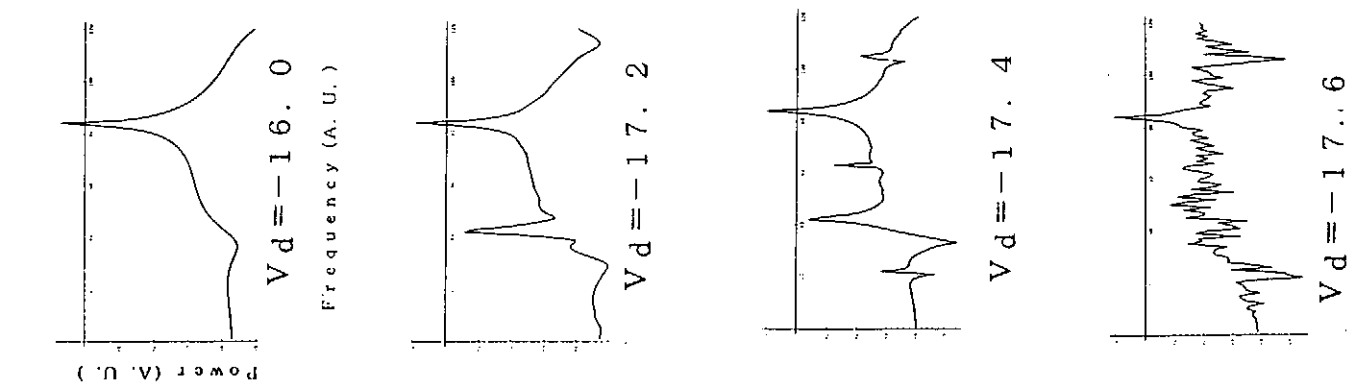


图 5 (2)

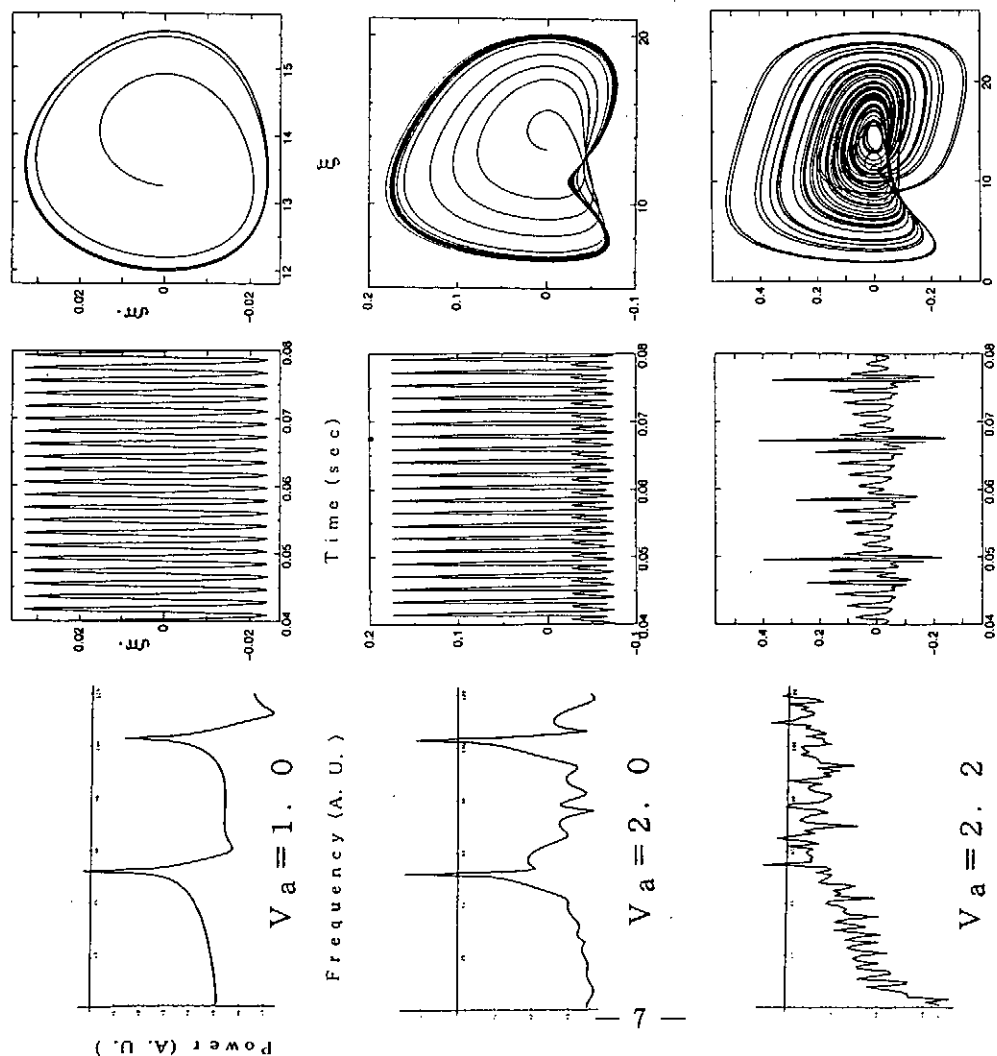


図5 (3)

図5 数値計算結果. $\beta = 0.0002$, $\omega_c/2\pi = 0.01$ に固定.

各々、パワースペクトル、 ξ の時間変化及び相図。

- (1) 振幅 V_a を変化. $V_d = -17.5$ (V), $\omega_d/2\pi = 0.026$
- (2) 放電電圧 V_d を変化. $V_a = 4.0$ (V), $\omega_d/2\pi = 0.026$
- (3) 振幅 V_a を変化. $V_d = -16.0$ (V), $\omega_d/2\pi = 0.016$

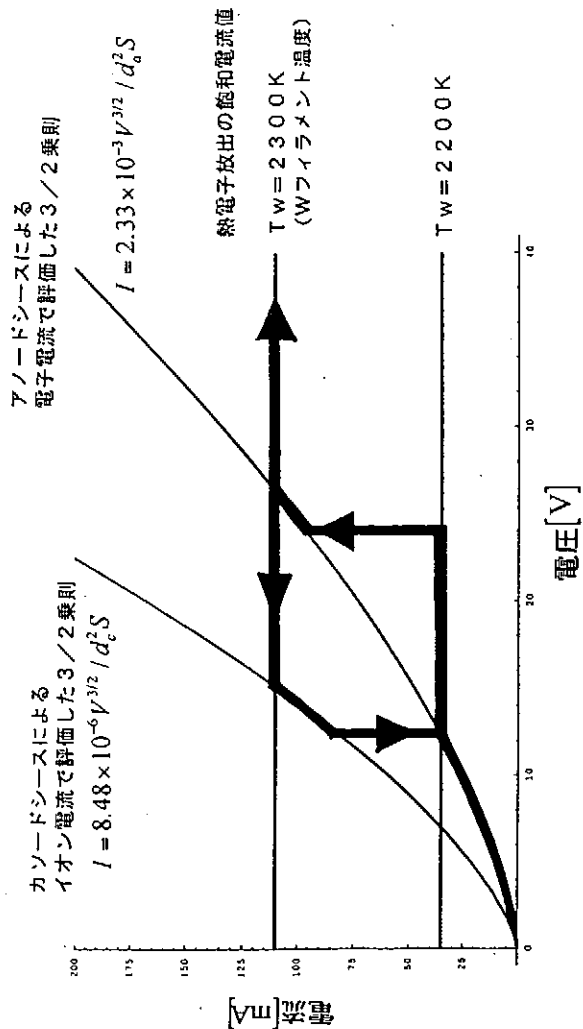


図6 ファイラメント温度の違いによるヒステリシス曲線

磁気面破壊と磁力線の拡散係数

杉本久也, †倉澤 孝, 芦田久男
電総研、†東工大理
茨城県つくば市梅園 1-1-4
†東京都目黒区大岡山

Destruction of Magnetic surfaces

and the Diffusion Coefficients of Magnetic Field Lines

Hisaya SUGIMOTO, †Tahasi Kurasawa and Hisao ASHIDA

Electrotechnical Laboratory, 1-1-4 Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305, JAPAN

†Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Ōokayama, Meguro, Tokyo
152, JAPAN

1 はじめに

プラズマ電流のあるトカマク、RFPなどのプラズマ中ではテアリングなどの不安定性が存在する。これらが磁力線をストキャスティック（カオス状態）にし、そのため磁気面が破壊されることが知られている。この現象も電子による異常輸送現象の原因の一つとして考えられている。本稿では磁力線がストキャスティックな状態にある場合の磁力線の拡散係数の表式を求めようとするものである。すでに Rosenbluth 等 (1966) が拡散係数の表式を提出しているが、 δ 関数タイプの発散のためその値を評価するのが難しい。ここではくりこまれた弱い乱流理論の方法を使ってその表式を発散のない形で求めた。

Escande と Doveil (1981) は二つの波の中における一個の粒子の軌道がカオス状態になる波の大きさの閾値ををもとめた（一つの波ではカオス状態にならない）。その閾値はくりこみ群を使った意欲的な方法で求められたものである。本稿で取り扱う二つのテアリング不安定性がある場合の磁力線の軌道は、ちょうど彼等の調べた二つの波の中の粒子の軌道と同じものに相当している。本稿の目的は彼等の求めたカオス状態になる閾値近傍（従って KAM トーラスがない）に於いて、Rosenbluth 等 (1966) の用いた方法を拡張して、磁力線の拡散係数を求めることである。

2 磁力線のハミルトニアンと LIOUVILLE 方程式

円筒座標 (r, θ, z) において磁力線の方程式は次の様に表せる (参照 Sugimoto et al.(1991)) : .

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{Rd\phi}{B_\phi}, \quad (2-1)$$

ここで $R\phi = z$ であり、 $2\pi R$ は z に沿った距離である。何か対称性があれば、流れ関数, Ψ , を導入することができる。(たとえば Solov'ev et al.(1970) を参照):

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0. \quad (2-2)$$

方程式 (2-2) の積分は磁気面, $\Psi = \text{const.}$, を定義していて、磁力線はその上を走っている。

ここで二つ以上の摂動 (たとえばテアリング) がその各々の共鳴磁気面で起こるとする。摂動の大きさが小さいと元の磁気面はほとんどこわれないが、摂動が大きくなるに従って、その磁気島は重なり合い、元の磁気面は破壊される。この時磁力線はストキャスティックな状態になっている。この様な状態の一本の磁力線を考えると、その磁力線に沿って磁力線の本数密度は一定になり、次の様な f を導入することができる ;

$$\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0, \quad (2-3)$$

円筒座標において (2-3) 式は

$$\frac{df}{d\phi} \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{RB_\theta}{rB_\phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{RB_r}{B_\phi} \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (2-4)$$

となる。(2-4) 式は ϕ を "時間" t と考えるならば Liouville 方程式とよく似た式になっていることがわかる。ここでは、この式を磁力線にたいする Liouville 方程式と呼ぼう。Rosenbluth 等 (1966) はこの式を拡散方程式になる様に整理しなおし、磁力線の拡散係数を求めたのである。

(2-4) 式をもう少し扱いやすい形にするために、変数 (r, θ) を作用、角度変数 (J, θ) に書き直し、更に次の様なハミルトニアン, H , を導入する。

$$J = \int_0^r r B_\phi dr, \quad (2-5)$$

$$H = \int_0^r R B_\theta dr, \quad (2-6)$$

$$t = \phi. \quad (2-7)$$

ここで回転変換角, ω :

$$\omega = \frac{RB_\theta}{rB_\phi}, \quad (2-8)$$

を使うと、ハミルトニアン (2-6) は次の様に簡単になる。

$$H = \int_0^J \omega dJ, \quad (2-9)$$

又ハミルトン方程式は次の様に表せる。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (2-10)$$

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_0^J \frac{\partial \omega}{\partial \theta} dJ, \quad (2-11)$$

ここで B_ϕ 一定であると仮定した。 ω が J と θ に依存していることに注意してほしい。もしそうでない時は $\theta = \omega(t - t_0)$ 、 $J = \text{const.}$ となり、磁気面が精確に出来ている事が分かる。このことは磁気面破壊が、上述の ω の J 、 θ 依存性からくる事が分かる。

ここでテアリングモードを近似した次のような B 摂動を考える

$$B_r = -\frac{1}{rR} \sum_{m,n} b_m^n \sin(m\theta - n\phi), \quad (2-12)$$

$-b_m^n/rR$ は摂動の大きさをあらわしている。

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を考慮すると、 B_θ は次の様に表せる

$$B_\theta = B_\theta^0 - \frac{rB_\phi}{R} \sum_{m,n} \frac{1}{m} \frac{\partial b_m^n}{\partial J} \cos(m\theta - n\phi). \quad (2-13)$$

式(2-13) を式(2-9) と (2-8) に代入すると

$$H = H_0(J) - V_{m_1, n_1} \cos(m_1\theta - n_1\phi) - V_{m_2, n_2} \cos(m_2\theta - n_2\phi), \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} \omega = \omega_J - m_1 \frac{\partial V_{m_1, n_1}}{\partial J} \cos(m_1\theta - n_1\phi) \\ - m_2 \frac{\partial V_{m_2, n_2}}{\partial J} \cos(m_2\theta - n_2\phi), \end{aligned} \quad (2-15)$$

が得られる。ここで次の様な表式を使った

$$H_0 = \int_0^J \omega_J dJ, \quad (2-16)$$

$$\omega_J = \frac{RB_\theta^0}{rB_\phi}, \quad (2-17)$$

$$V_{m,n} = \frac{b_m^n}{m}. \quad (2-18)$$

更に次の量を定義しておく

$$\omega_0 = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J} \Big|_{J=J_0}, \quad s = \frac{\partial^2 H_0(J)}{\partial J^2} \Big|_{J=J_0}. \quad (2-19)$$

ここで $s \neq 0$ が磁気面破壊、つまりカオスに至る一つの条件であることを指摘したい。上のモデルでは (m_1, n_1) と (m_2, n_2) の二つの相互作用するモードを考えた。

我々は更に Escande と Doveil 等 (1981) が用いたものと同じ変換をハミルトニアン (2-14) に施し彼等が出発点としたハミルトニアンとハミルトン方程式を得ることが出来る:

$$H^*(I, \theta^*, t) = H_M(I) - P \sum_n V_{k+n}^k(I) \cos[(k+n)\theta^* - kt]. \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^*}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial I} \equiv \Omega - P \sum_n \frac{\partial V_{k+n}^k}{\partial I} \cos[(k+n)\theta^* - kt], \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial \theta^*} \equiv -P \sum_n (k+n) V_{k+n}^k(I) \sin[(k+n)\theta^* - kt]. \end{aligned} \quad (2-21)$$

このハミルトニアンに対する Liouville 方程式は次の様に表せる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \theta^*} - P \sum_n (k+n) V_{k+n}^k(I) \sin[(k+n)\theta^* - kt] \frac{\partial f}{\partial I} \\ - P \sum_n \frac{\partial V_{k+n}^k}{\partial I} \cos[(k+n)\theta^* - kt] \frac{\partial f}{\partial \theta^*} = 0, \end{aligned} \quad (2-22)$$

ここで次の様な表式を定義して使った:

$$k = \frac{m_2}{m_1}, \quad (2-23)$$

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} n_2 - n_1, \quad (2-24)$$

$$t = \gamma \phi, \quad (2-25)$$

$$M = \frac{sm_1^2}{\gamma^2} V_{m_1, n_1}, \quad (2-26)$$

$$P = \frac{sm_1^2}{\gamma^2} V_{m_2, n_2}. \quad (2-27)$$

3 磁力線の軌道と磁力線の拡散係数

ハミルトン方程式 (2-21) を解いて磁力線の軌道を求めることが出来る。図 (1-1) には $M = P = 0.0251, k = 2$ の場合の、そして図 (1-2) には $M = P = 0.0351, k = 2$ の場合のポアンカレマップがしめされている。 $I = 0$ と $I = 1$ が与えられた摂動の共鳴面である。図 (1-1) では磁力線の作る磁気面がまだ存在している。磁気島が KAM トーラスによって孤立化されていて、下の共鳴面から出発した磁力線は上の共鳴面に到達することが出来ない。しかし図 (1-2) では摂動の振幅 M, P が大きくなったために、磁気面が破壊されている様子がよくわかる。この場合下の共鳴面から出発した磁力線は彷徨をかさねながら上の共鳴面に到達してしまう。この様子を図 (1-3)、図 (1-4)、図 (1-5) に示す。次に図 (1-2) の状態における磁力線の拡散係数を求めることの進もう。そのためには Liouville 方程式 (2-22) を次の様な拡散型方程式に書き換える必要がある；

$$\frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial I}$$

まずそのために、(2-22) 式を時間に関してはラプラス変換、角度にたいしてはフーリエ変換をおこない、次の方程式を得る；

$$\begin{aligned} & -f_l(0) + (p + i\Omega)f_l^p \\ &= \frac{1}{2i}P \sum_n (k+n)V_{k+n}^k(I) \left(\frac{\partial f_{l-(k+n)}^{p+ik}}{\partial I} - \frac{\partial f_{l+(k+n)}^{p-ik}}{\partial I} \right) \\ &+ P \sum_n \frac{\partial V_{k+n}^k}{\partial I} \frac{i}{2} \left\{ [l - (k+n)]f_{l-(k+n)}^{p+ik} \right. \\ &\quad \left. + [l + (k+n)]f_{l+(k+n)}^{p-ik} \right\}, \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで次の表式をつかった：

$$f_l(t) = \int_0^{2m_1\pi} d\theta^* e^{-i\theta^*} f(t, \theta^*), \quad (3-2)$$

$$f_l^p = \int_0^\infty dt e^{-pt} f_l(t). \quad (3-3)$$

$f_{l-(k+n)}^{p+ik}$ and $f_{l+(k+n)}^{p-ik}$ に対して 逐次近似を行い、拡散型の項だけを集めて

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D_R \frac{\partial f_0(t)}{\partial I} \\ &+ \frac{1}{2i}P \sum_n (k+n)V_{k+n}^k(I_n) \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{\partial g_{l-(k+n)}^{p+ik}}{\partial I} f_{l-(k+n)}(0) - \frac{\partial g_{l+(k+n)}^{p-ik}}{\partial I} f_{l+(k+n)}(0) \right], \quad (3-4)$$

を得る。ここで

$$D_R = \frac{P^2}{2} \sum_n (k+n)^2 [V_{k+n}^k(I)]^2 \frac{\sin \tilde{\eta} t}{\eta}, \quad (3-5)$$

$$g_{l-(k+n)}^{p+ik} = \frac{1}{p+i[k+(l-k-n)\Omega]}. \quad (3-6)$$

の定義を使った。上の表式 D_R は以前 Rosenbluth 等 (1966) が導出したものと同じものであるが、ここで求められたものは、二つのテアリングが存在し、その間に発生するハーモニックス達によって記述されたものであるところが彼等のものと異なっている。さてこの表式には δ 関数タイプの発散が含まれていることがわかる。このため局所的な値を求めようとする場合には困難が生じる。

この問題を解決するのに、更に高次の項まで考慮して、それを一種の衝突項或いは共鳴巾にくりこむことにより、その発散の困難を回避しようとする方法がある。乱流現象でよく使われる弱い乱流理論と言われるものである。これを行うには煩雑な式の展開が必要であるが、ここでは結果のみを与えることにする。それは形式的には共鳴点で発散する g を繰り込まれた G (共鳴巾のため発散しない) と取り替えることにより得られるものである。

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial f_0(t)}{\partial I} + K \frac{\partial f_{-(k+n)}(0)}{\partial I}. \quad (3-7)$$

ここで次のような定義を使った (添字の R と I は実数と虚数を示す):

$$D = \frac{P^2}{2} \sum_{n=0} (k+n)^2 [V_{(k+n)}^k(I_n)]^2 H_\eta^R, \quad (3-8)$$

$$K = P \sum_{n=0} (k+n) V_{(k+n)}^k(I_n) G_\eta^I(t), \quad (3-9)$$

$$H_\eta = H_\eta^R + i H_\eta^I = \int_0^t dt' \left[G_\eta^R(t-t') + i G_\eta^I(t-t') \right], \quad (3-10)$$

$$G_\eta(t) = \int_0^\infty d\tau \exp(-\eta\tau) \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \frac{dp}{2\pi i} \exp \left[p(t-\tau) - \frac{1}{3}\tau^3 \sum_{n'=0} \frac{D_{-(k+n')}}{p-\eta_{n'}} \right], \quad (3-11)$$

$$D_{\mp(k+n)}^{p \pm ik} = \frac{P^2}{4} \sum_{n'} (k+n')^2 [(V_{(k+n')}^k(I_{n'}))]^2 \frac{1}{p \pm \eta \mp \eta_{n'}}, \quad (3-12)$$

$$\eta = i[k - (k+n)\Omega], \quad (3-13)$$

$$\eta_{n'} = i[k - (k+n')\Omega]. \quad (3-14)$$

(3-11) 式中 n と n' (η と $\eta_{n'}$ に含まれる) は次のような意味を持っている。 n 番目の共鳴ハーモニクス磁気面は n' 番目達の共鳴ハーモニクス磁気面の擾動によりカオスの状態になり、 n 番目の共鳴点における拡散係数があたえられる。 n' を一つだけに限ると (n に最も近い n' が一番強い影響を持つ) 式の見通しが良くなるので、それを記しておく (後に議論するのは n' を一つに限った場合だけである):

$$\begin{aligned} G_{\eta, n'}(t) &= \int_0^t d\tau \exp(-\eta\tau) \tilde{G}_{\eta, n'}(t-\tau) \\ &= \exp(-\eta t) \left\{ 1 - \int_0^t d\tau \exp[(\eta + \eta_{n'})(t-\tau)] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{(D_{-(k+n')}\tau^3/3)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}} J_1(2(D_{-(k+n')}\tau^3/3)^{1/2}(t-\tau)^{1/2}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\eta, n'}(t-\tau) &= \exp[\eta_{n'}(t-\tau)] \left[\delta(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(D_{-(k+n')}\tau^3/3)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}} J_1(2(D_{-(k+n')}\tau^3/3)^{1/2}(t-\tau)^{1/2}) \right]. \end{aligned} \quad (3-16)$$

ここで J_1 は第一種のベッセル関数である。(3-15) 又は (3-16) 式の左辺第一項が δ 関数を与えており、第二項は共鳴巾を与えている。又 (3-11) 式で現れる τ は Rudakov と Tsytovich が導入した人工的な時間であり、 η はこの時間に対するラプラス変換により導き出された変数と考える;

$$G_{\eta}^p = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} G^p(\tau). \quad (3-17)$$

4 結果および討論

次の二つのケースを取り上げて、拡散係数を評価してみよう。磁力線がストキャスティックになる閾値 ($M = P = 0.0351, k = 2$) 近傍における二つのケースのパラメータを示しておく。

ケース I

$$n = 0, n' = 1, t_N = [D_{-(k+n')}/3]^{-1/4} = 1.45 \times 10^1$$

$$D_{coef} = \frac{P^2}{2}(k+0)^2 \left[V_{(k+0)}^k(I_0) \right]^2 = 2.46 \times 10^{-3},$$

ケース II

$$n = 1, n' = 0, t_N = [D_{-(k+n')}/3]^{-1/4} = 4.04$$

$$D_{coef} = \frac{P^2}{2}(k+1)^2 \left[V_{(k+1)}^k(I_1) \right]^2 = 3.43 \times 10^{-5},$$

ある力学系が統計的に記述されるためには その系が十分にストキャスティックになり初期のメモリが失われてしまう時間 後でなければならない。これを τ_c と定義しよう。更に拡散現象が取り扱われるためには、拡散時間 τ_D が τ_c よりさらに大きくなる必要がある。

以下これ等の事を考慮して議論を進めてみる。まず虚数部分 $G_\eta^I(t)$ の振る舞いをしらべてみよう。これは方程式 (3-7) から分かるように $f_{-(k+n)}$ の初期値 $f_{-(k+n)}(0)$ のメモリがどの様にして変化するかを示すものである。実数部分 $G_\eta^R(t)$ の方は (3-8) 式の拡散係数を得るのに必要な量である。(3-11) 式或いは (3-15,16) 式の積分は解析的に行えないので、計算機で行うことにする。ケース I ($n = 0, I_1 = 1.00$) の場合の $G_\eta^R(T)$ と $G_\eta^I(T)$ が図 (2) と図 (3) に示されている。ケース II ($n = 0, I_1 = 1.00$) の場合は、図 (4) と図 (5) に示されている。時間 $T = t/t_N$ は $t_N = [D_{-(k+n')}/3]^{-1/4}$ で規格化されている。図 (3) と図 (5) を見ると $G_\eta^I(T)$ が速い非減衰振動することを示している。この為このままでは、(3-7) 式の第二項の初期メモリが消えないので拡散方程式となることはできない。しかし粗視化を意味する統計平均をとることによりこのメモリを消すことができる。普通 f_0 に対してランダム位相近似することが多い。ここでは位相平均の代わりに時間平均をとり、次の様な時間平均を定義する；

$$\bar{f}_0(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dT' f_0(T'). \quad (4-1)$$

これにより新しい $\bar{G}_\eta^I(t)$ を定義することができる：

$$\bar{G}_\eta^I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dT' G_\eta^I(T'). \quad (4-2)$$

ケース I の場合の $\bar{G}_\eta^I(t)$ は図 (6) に、ケース II の場合は図 (7) にしめされている。二つの図から分かるように $\bar{G}_\eta^I(T)$ は $1/T$ 減衰している。各々減衰時間 τ_c は

ケース I の場合 $\tau_c \simeq 35.0$, ケース II の場合は $\tau_c \simeq 17.0$ であると読み。上述の平均を (4-15) 式で行うと、右辺は τ_c で減衰するが、他方左辺第一項は後で分かるように τ_c に比べて非常に速く一定値に到達する。

次に $G_n^R(T)$ を積分して $H_n^R(T)$ を求めることにしよう (係数をかけると拡散係数になる)。ケース I の場合は図 (8) に、ケース II の場合は図 (9) に示されている。先に述べたように、 $H_n^R(T)$ は τ_c より非常に早い時間に一定値に到達している。従って上述の平均を (4-15) 式に施すと、拡散方程式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial I}, \quad (4-3)$$

(4-3) 式では $\bar{G}_n^I(t)$ に依る項が消えていることに注意してほしい。このようにして、拡散方程式を得ることが出来た。 H_n^R の飽和値を得ることにより、式中の拡散係数 D の値を発散の問題なしに評価することが出来る。図 (8) と図 (9) より、その飽和値は

$$H_s \simeq 1.89 (\text{ケース I}),$$

$$H_s \simeq 1.08 (\text{ケース II}),$$

であることがわかる。拡散係数の値は

$$D = D_{coef} t_N H_s,$$

で与えられるので、次のような値を得る；

$$D \simeq 6.72 \times 10^{-2} (\text{ケース I})$$

$$D \simeq 1.49 \times 10^{-4} (\text{ケース II})$$

拡散時間を $\tau_D \simeq (\Delta I)^2 / D$ ($\Delta I = I_0 - I_1 \simeq 0.331$) で評価すると
ケース II の場合

$$\tau_D \simeq 7.3 \times 10^2 > \tau_c \simeq 17.0,$$

となり条件 $\tau_D \gg \tau_c$ は満足されているが
ケース I の場合

$$\tau_D \approx 1.63, \tau_c \approx 35.0,$$

$\tau_c > \tau_D$ となり、条件は満足されていない。ケース I の場合、拡散現象だけで定義出来ないことをしめしている。

羽鳥と入江 (1987) は拡散現象だけでは記述出来ない、長時間相関の存在することを指摘している。ケース I の場合、磁気面の壊れていない最も強い磁気島が近傍に存在する。この効果を除去することが出来ないため、長時間にわたってメモリが残り、拡散現象だけで表現できないのではないかと考えている。いずれにしてもこのような方法で磁力線の拡散係数を求める事が出来ることを示している。

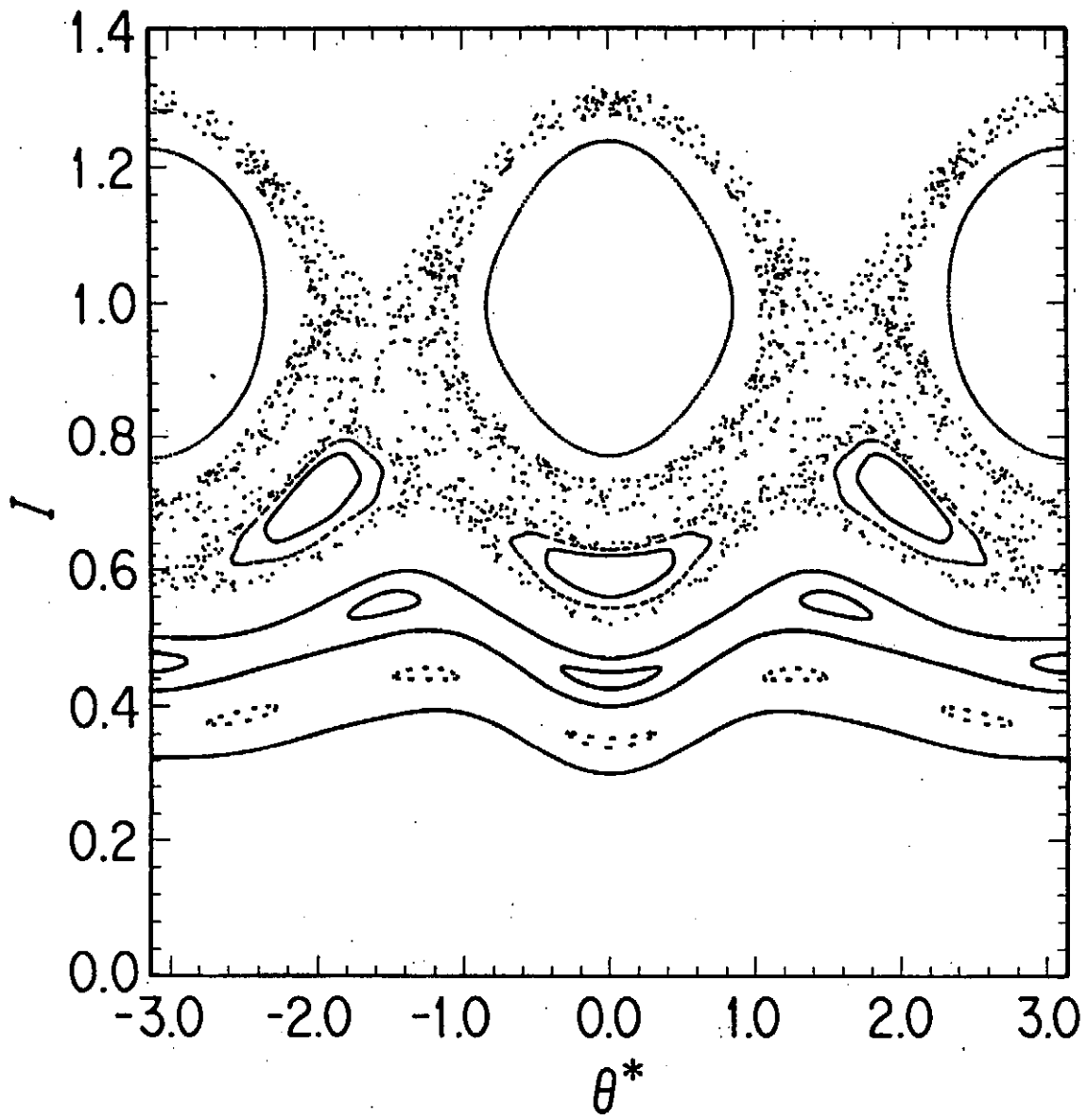


图 (1-1)

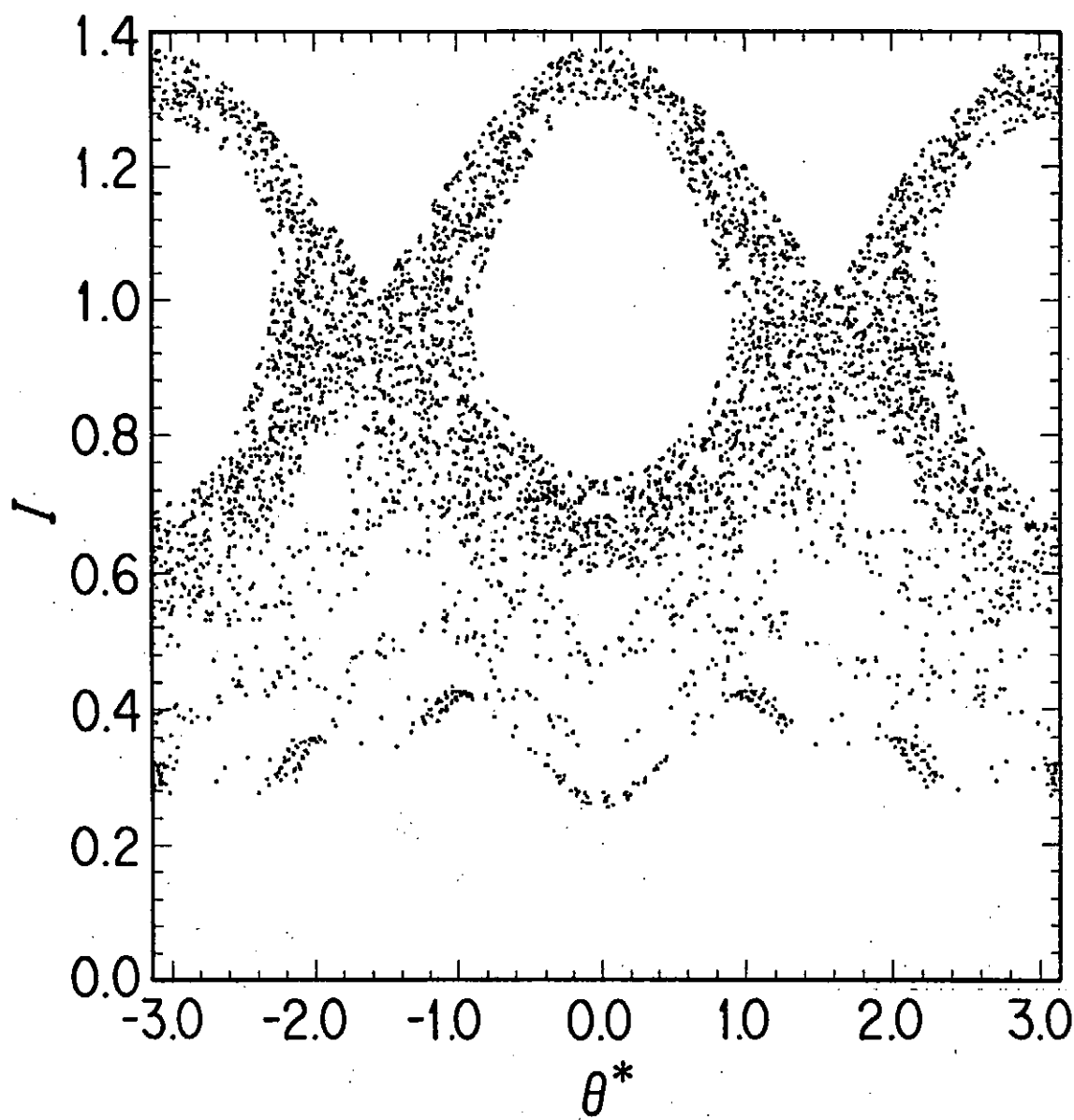
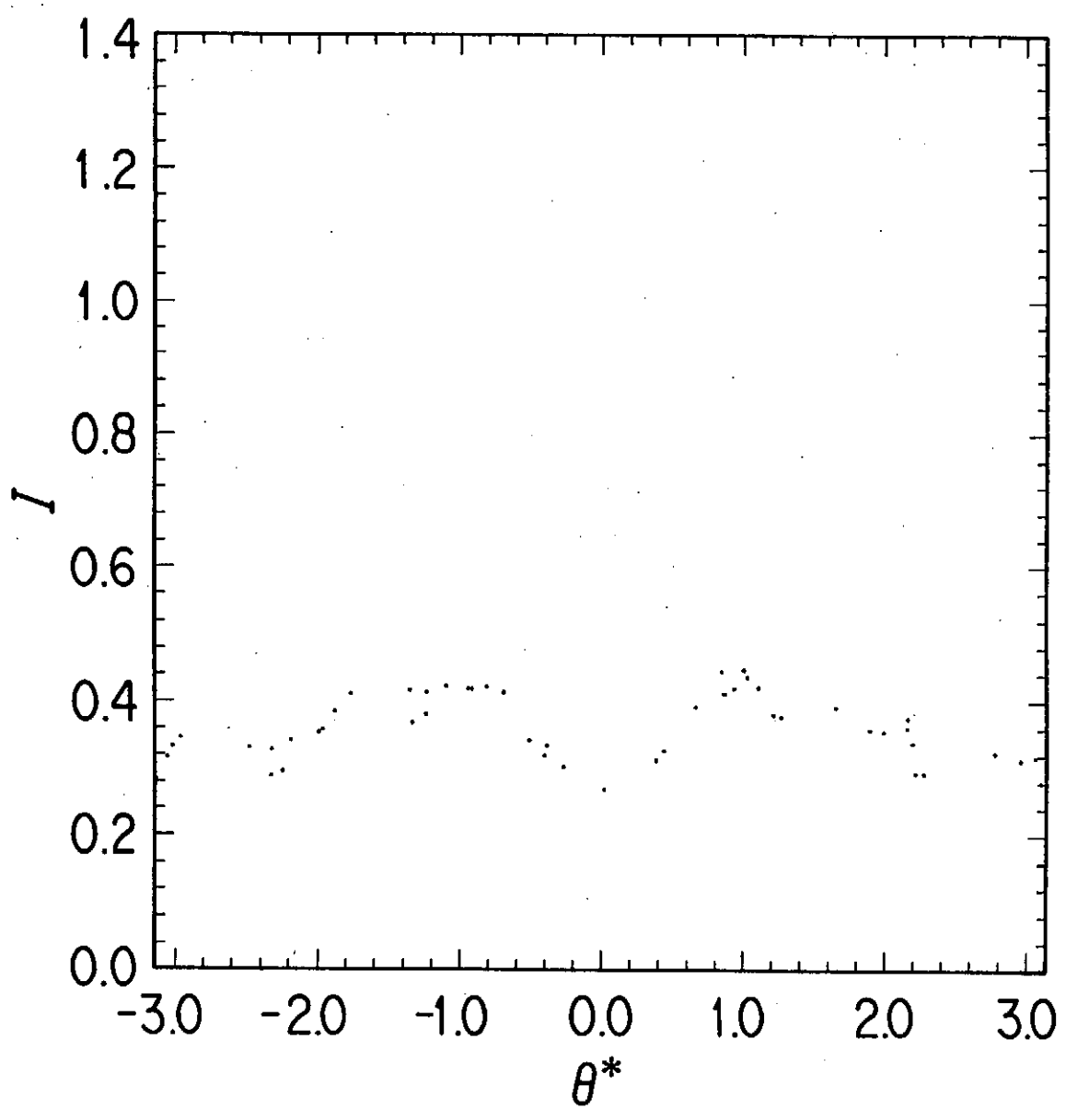


图 (1-2)



☒ (1-3)

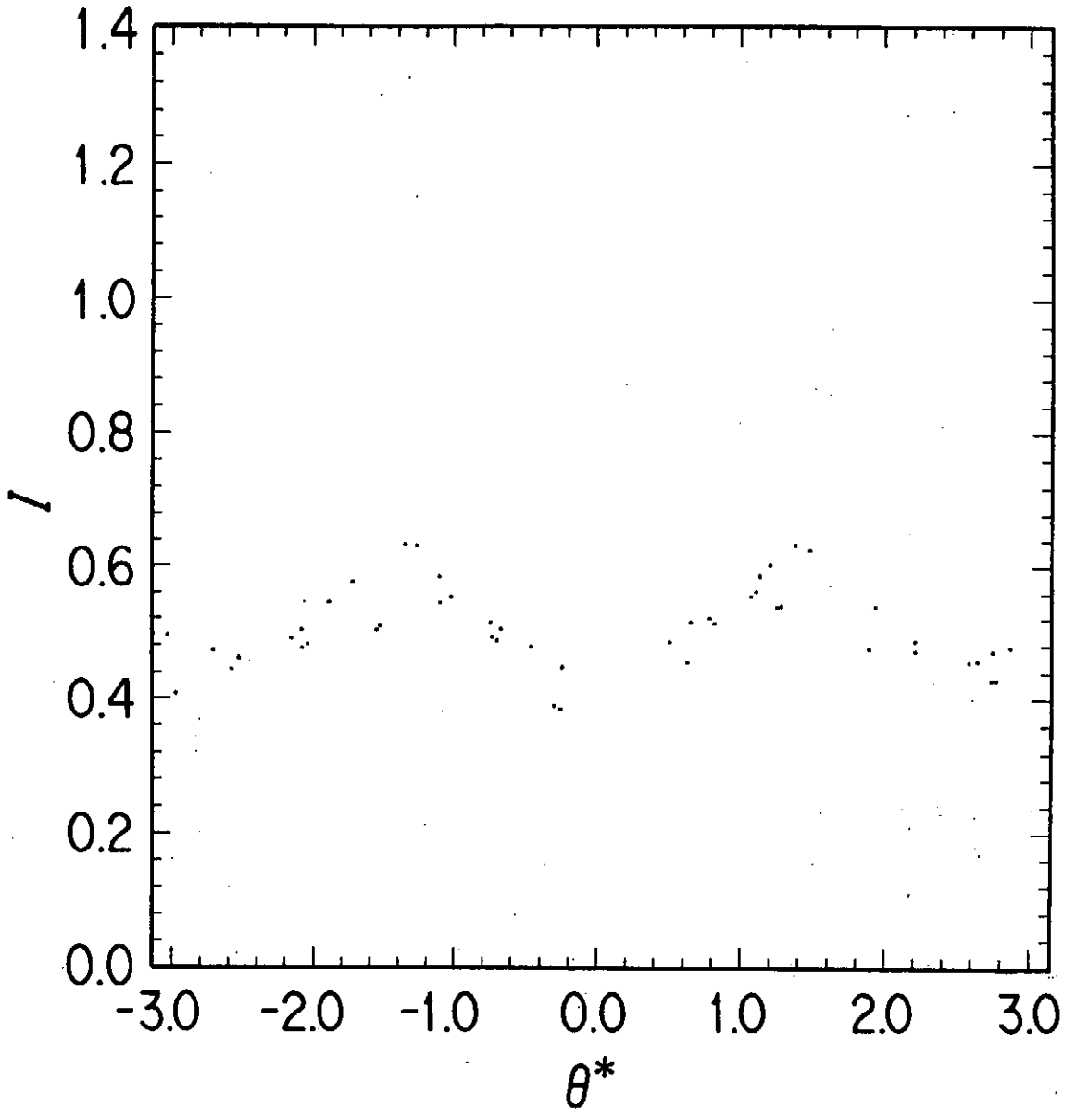


图 (1-4)

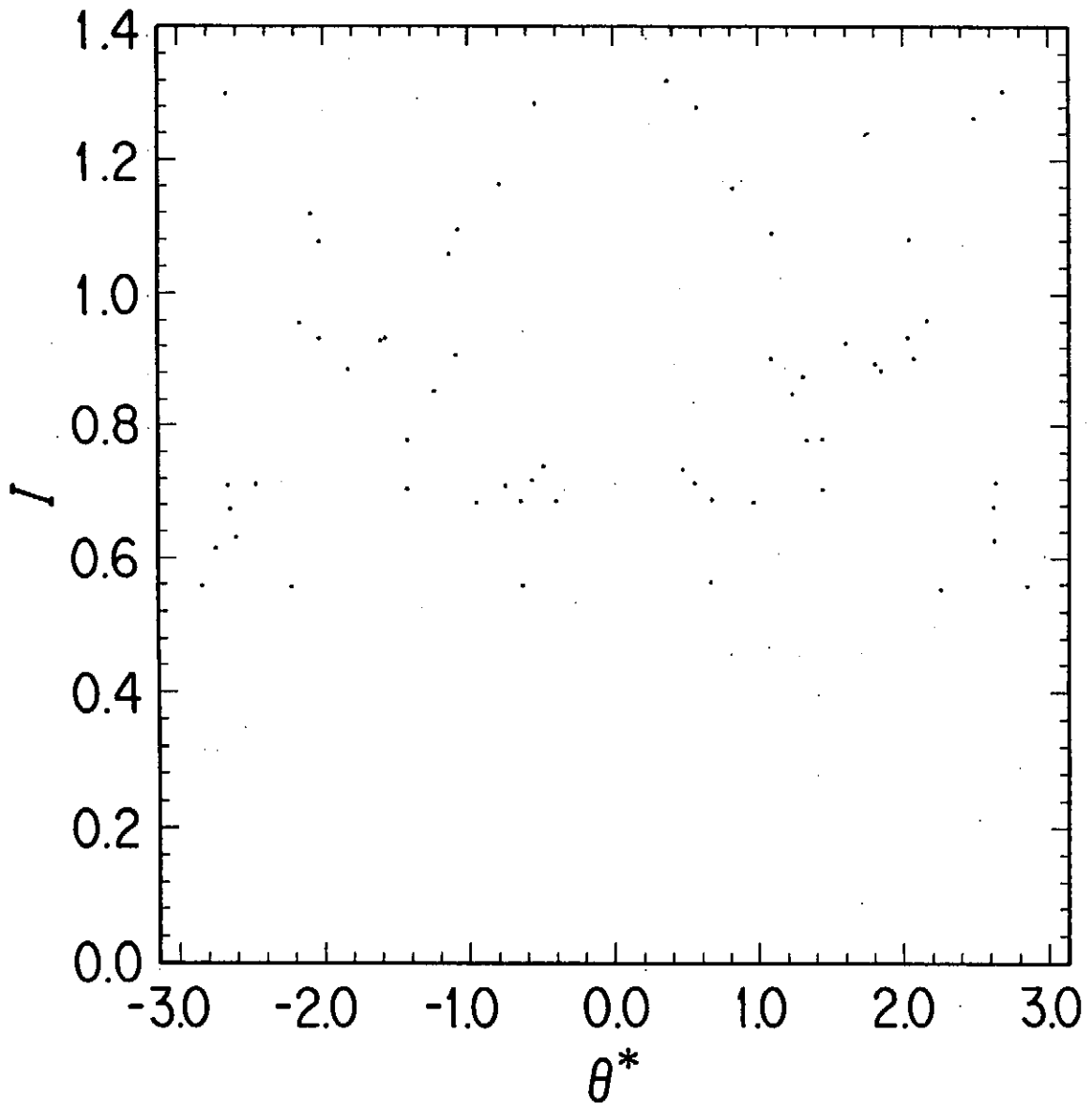
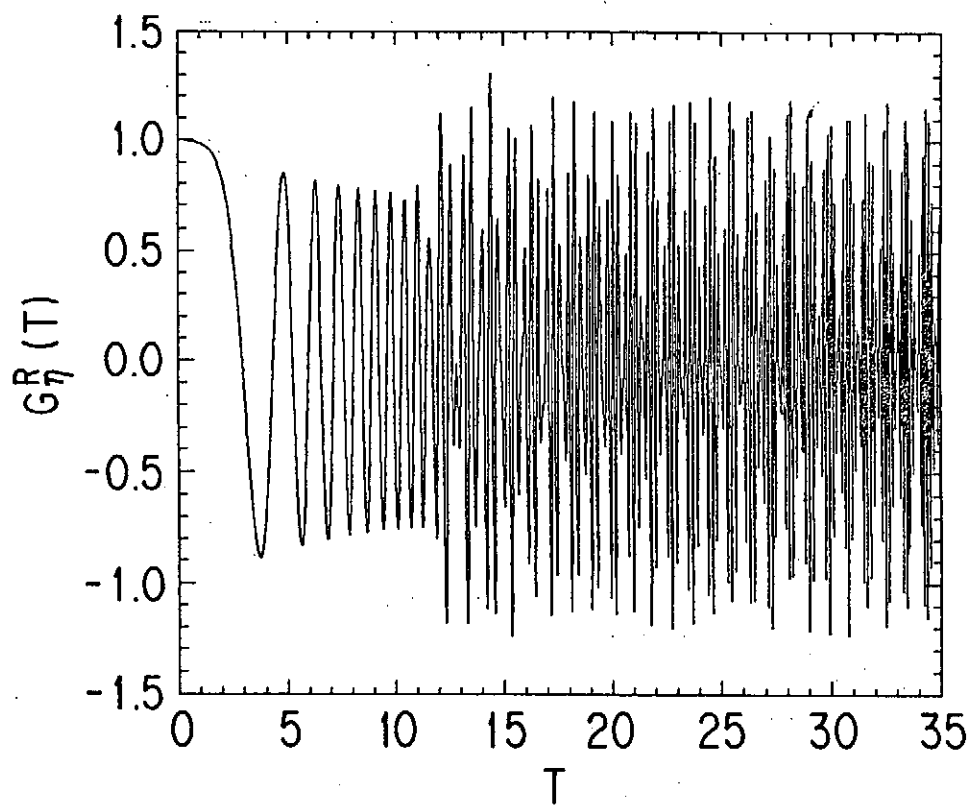
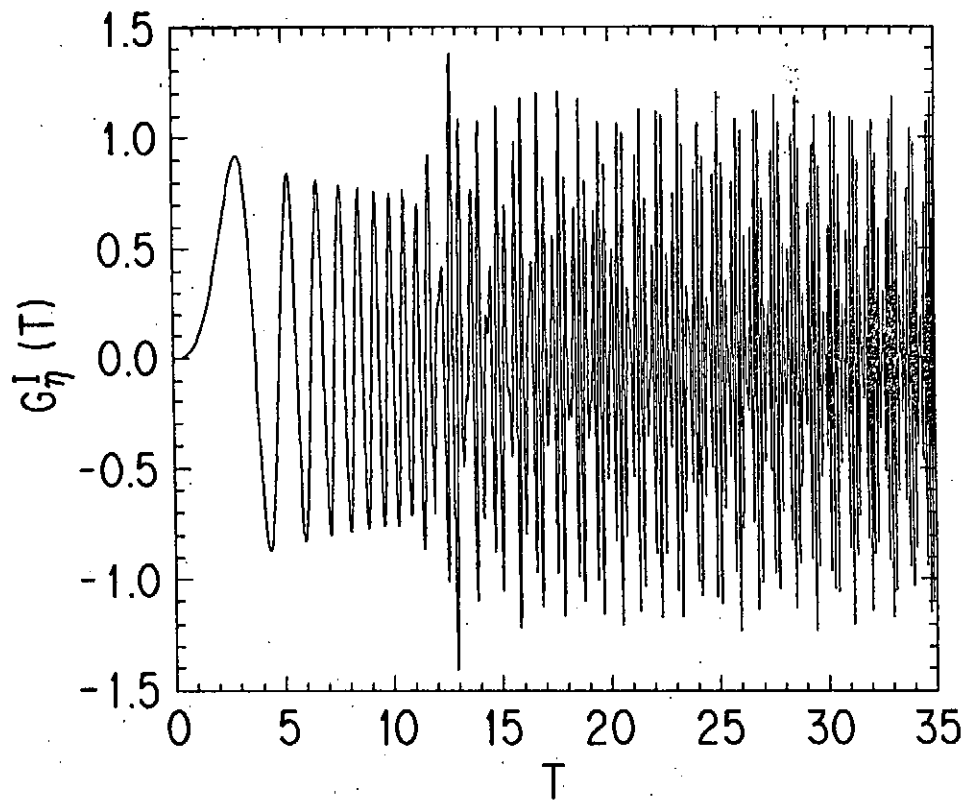


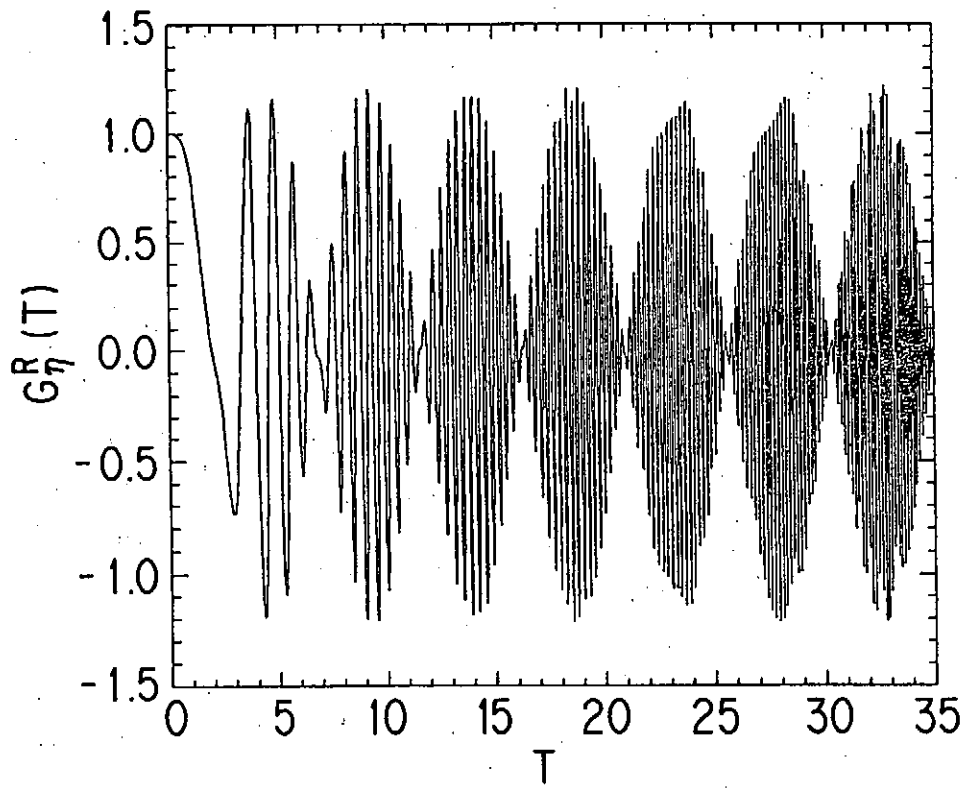
图 (1-5)



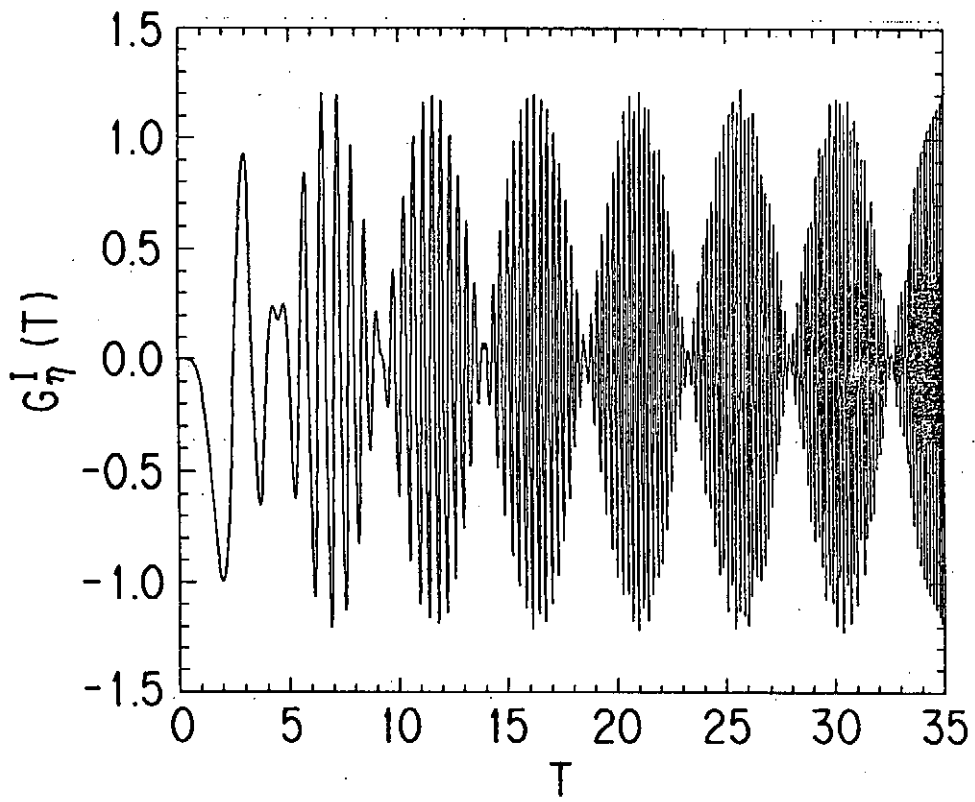
図(2) ケース I



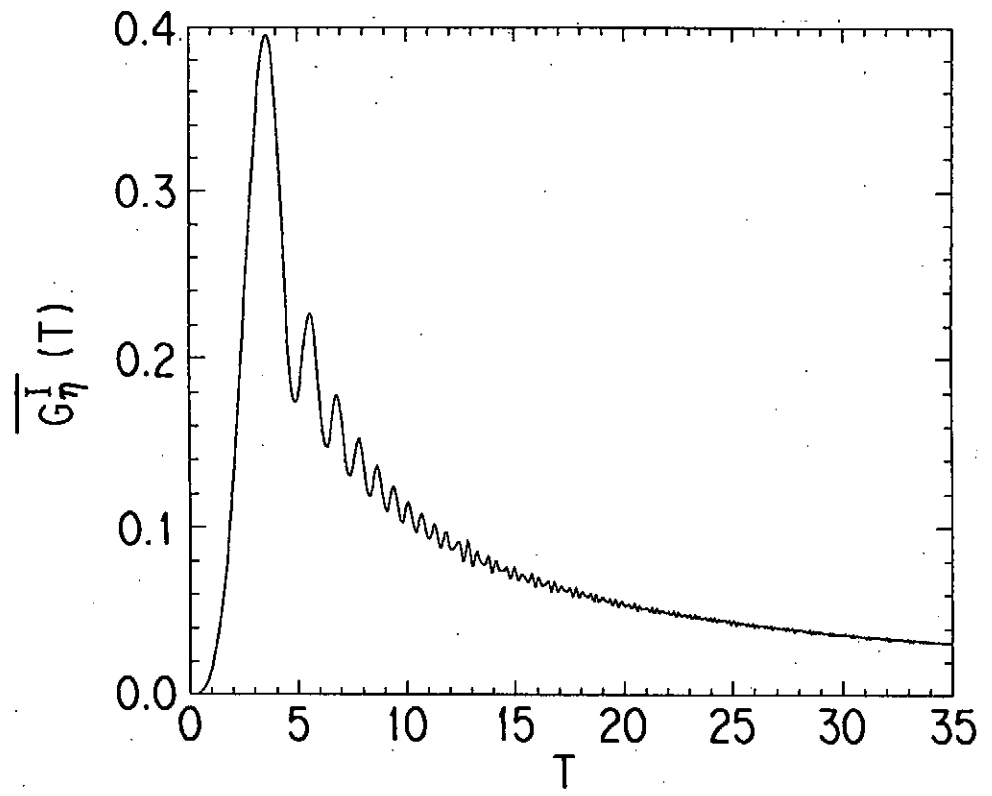
図(3) ケース I



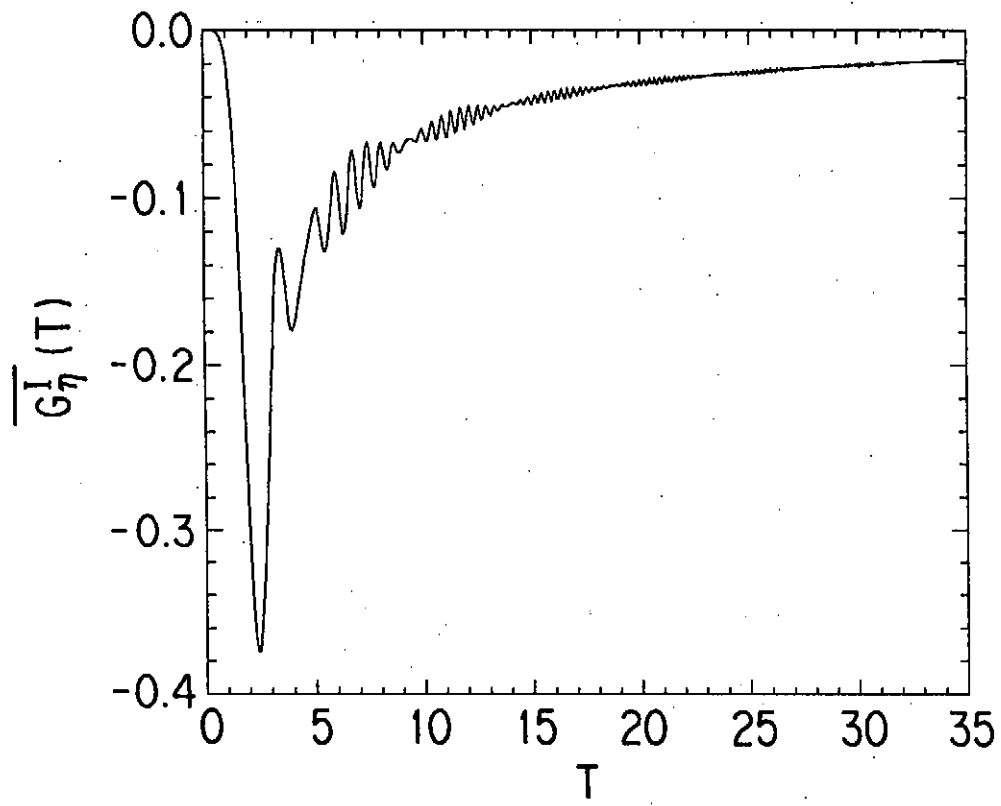
図(4) ケースII



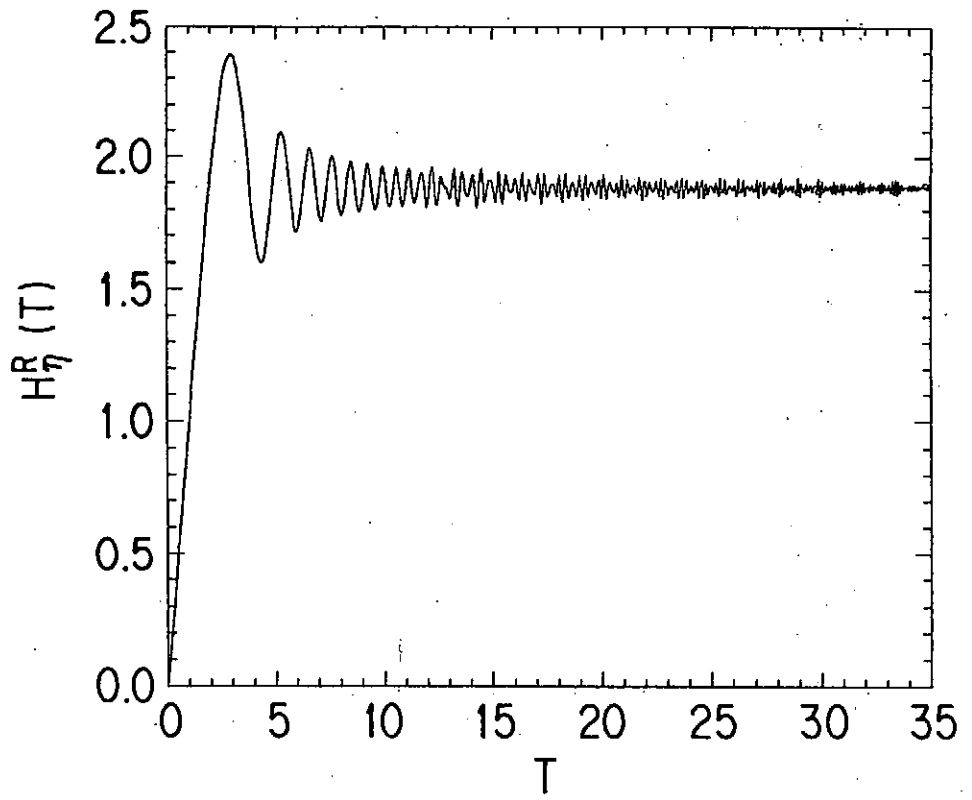
図(5) ケースII



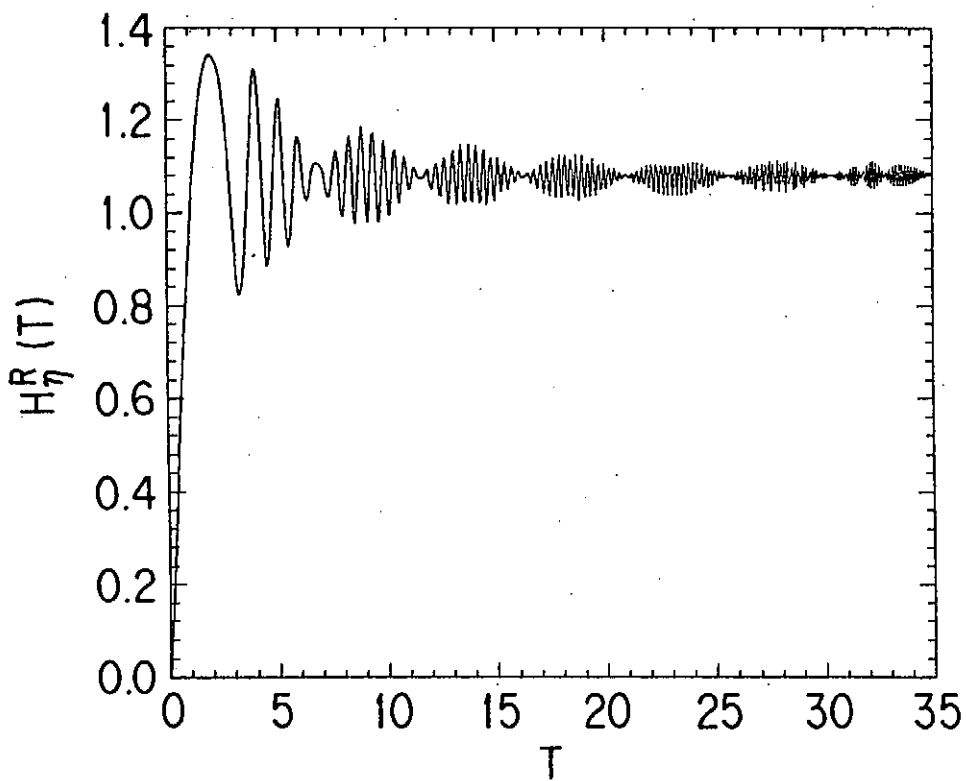
図(6) ケース I



図(7) ケース II



図(8) ケースI



図(9) ケースII

真空ヘリカルトーラス磁力線のハミルトニアン理論

Giovanni Gnudi, 羽鳥尹承
核融合科学研究所

プラズマを平衡状態にするためには磁力線は磁気面を持たねばならない。しかし、ヘリカル系では磁気面構造を持つ領域と持たない領域に空間が分割されている。従って、両者の境界がどこにあり、境界領域での磁力線の大域的構造はどのようなものであるかを調べることは、ヘリカル系プラズマ閉じこめにとって基本的で重要な研究である。

磁力線がハミルトン力学系として扱えることはよく知られている。この時、3次元空間の三つの座標は角変数、作用変数、時間変数へと変換される。磁力線のハミルトニアンは一般に一組の正準変数と時間の関数で表現できることが証明されている。しかし、ハミルトニアンを具体的に求めることは大変に困難である。実際上は非正準変数を使った方が簡単になる場合が多い。それにもかかわらず、ハミルトン形式には優れた点が多い。

第一に、ハミルトン系に関しては膨大な理論的蓄積が有り応用できる。さらにその理論は分野を超えてよく知られているため、ヘリカル系磁力線という個別の問題でも広く理解され易いと期待できる。例えば、対称性と保存則の対応関係は、空間対称な配位では磁気面が全空間で存在することを保証する。たとえ厳密な対称性が無くても対称性の破れが弱ければ、保存則が存続することを示したKAMの定理は、ヘリカル系のように厳密な空間的な連続対称性を持たない配位でも磁気面構造が十分に生き残る事実と符合している。

第二に、最近開発されつつあるシンプレクチック法を磁力線の数値的な追跡に応用できる点もハミルトン系の利点である。この方法は一般の保存力学系の中でも特にハミルトン系に対して適用できる高精度の数値計算法であり、位相空間の保存則を保証するように工夫されている。我々の目的は磁力線の大域的構造を調べることにあるため、磁力線の追跡は極めて長距離に及び、トーラス方向に例えば、 $10^5 - 10^6$ 回転追跡する必要がある。もしルンゲ・クッタ法などの伝統的な方法を適用すれば永年の誤差が蓄積し計算の信頼性を損なってしまう。その点シンプレクチック法であれば、たとえ陽解法であっても、永年誤差を発生せずにくらでも長距離の追跡が可能となる。しかし、今までに開発されている陽解法は分離型ハミルトニアンなどの特別な型にのみ適用できるものであり、磁力線のハミルトニアンには適用できない。

本研究では [1]、真空中のヘリカル系トーラス配位の磁力線を記述するハミルトニアンを具体的に求めることに成功した。次いでそのハミルトン系に適用できる新

しい線形シンプレクチック積分法の開発も行った。そのハミルトニアンは実際に磁気面領域から磁気カオス領域への遷移を記述していることを確かめた。

ハミルトニアンを求める理論における重要な柱は、Lie 変換と近軸展開である。先ず、磁力線の変分原理をベクトルポテンシャルを用いて表現する。この目的のためにある特殊な座標系 (ξ, η, φ) が有用である。ここに、 ξ は小半径方向の座標、 η はトロイダル方向の角度的な座標、 φ は厳密なトーラス角である。本研究では一貫してトーラス角 φ を時間変数として固定している。 (ξ, η) は正準変数ではないので Lie 変換で作用変数と角変数の組 (Ψ, Θ) に変換する。この Lie 変換に磁気軸のまわりの近軸展開を導入した。トーラスの小半径が大半径に比べて小さい領域を対象とした。ヘリカルトーラスの場合は、ハミルトニアンはトロイダル角 φ を陽に含む。この対称性を破る摂動は磁気軸上で値を持たないが磁気軸を離れるにつれて値が増大する。KAM 定理の示すとうり周辺部では磁気面を形成できなくなり磁気カオス領域が出現する。解析は逆アスペクト比について最大三次まで行った。なお、ハミルトニアン及び正準変数の表現は一意的には決まらないことに注意する必要がある。これは、変分原理のゲージの任意性に由来している。代表的な二種類の表現を求めた。一つはハミルトニアンが二変数の関数に帰着するものであり、磁気面のある磁気軸近傍に適用できるものである。二つめは、三変数を含む表現であり磁気カオス領域を含む周辺領域に適用できるものである。両表現の適用範囲や展開の収束性などの今後研究すべき課題が残されている。

詳しくは G. Gnudi の学位論文に記述されているが、ここでは Appendix として学位論文の第三章を添えた。

参考文献

(1) G. Gnudi, Dr. Thesis "Hamiltonian Study of the Toroidal Helical Magnetic Field Line in the Vacuum with the Symplectic Integrator" (1994).

1 The Lie Transform

In classical perturbation theory for Hamiltonian systems, in general a generating function F is used to perform a canonical transformation from the old variables q, p to the new variables Q, P . This generating function depends on both the old and the new variables, and as a consequence the transformation itself and the relation between the old Hamiltonian H and the new one K appear in a mixed form. For example, if the generating function is of the type $F(q, P, t)$, then for the coordinates we have the relations

$$Q(q, P, t) = \frac{\partial}{\partial P} F, \quad p(q, P, t) = \frac{\partial}{\partial q} F, \quad (1)$$

and for the Hamiltonians

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial t} F. \quad (2)$$

We see that (1) is in a mixed form, while what we actually need are the relations $Q(q, p, t)$ and $P(q, p, t)$, and that (2) is a relation between the functions H and K at corresponding points in phase space. When (1) and (2) are used as the basis for a perturbation analysis the result are very lengthy formulas even for very low orders. It would be preferable to have a formalism that yields directly the new variables in terms of the old one, or vice-versa, and such that the relation between H and K is a relation between functions.

This formalism has been developed by researchers working in celestial mechanics ([1], [2], [3], [4]), and has been presented in the review articles [5] and [6]. It is a formalism based on the so called Lie transform, which is a special kind of coordinate transformation. The perturbation theory based on the Lie transform has a number of advantages. It is canonically invariant and it is possible to give a direct expansion of any function of the old variables in terms of the new variables. We present in this section a brief account of the perturbation theory based on the Lie transform. The great majority of the results are not derived, and the reader is referred especially to ref. [6] for a rigorous presentation of the theory.

Let us consider the coordinate transformation

$$Z^\mu = z^\mu + \epsilon Z_1^\mu(z) + \epsilon^2 Z_2^\mu(z) + \dots, \quad (3)$$

from the variables z^1, \dots, z^n , to the variables Z^1, \dots, Z^n , where ϵ is a small parameter and Z_1^μ, Z_2^μ, \dots are functions of n variables. We will use the compact notation

$$Z^\mu = Z^\mu(z, \epsilon). \quad (4)$$

The transformation (4) is called a Lie transformation when the differential equation

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} Z^\mu = g^\mu(Z^\mu),$$

together with the initial condition $Z^\mu(z, 0) = z^\mu$, is satisfied by the functions Z^μ . The vector g^μ is called the generator of the Lie transform, and completely characterizes it.

Let us now see how coordinates and scalars transform under a Lie transform. We first introduce the operator L_g which maps scalar functions into scalar functions according to

$$L_g f = g^\mu \partial_\mu f. \quad (5)$$

Notice that this is a functional relationship, so the symbol for the independent variables is a dummy, and it could be z^μ or Z^μ or any other. It is then found that the old and the new coordinates are related by

$$z^\mu = e^{(-\epsilon L_g)} Z^\mu, \quad (6)$$

while a scalar $s(z)$ transforms in the opposite way, that is

$$S(Z) = e^{-\epsilon L_g} s(Z). \quad (7)$$

We will be particularly interested in the transformation properties of the expansion, according to a smallness parameter ϵ , of a 1-form

$$\gamma = \gamma^0 + \epsilon \gamma^1 + \epsilon^2 \gamma^2 + \dots, \quad (8)$$

which could represent, for instance, the magnetic vector potential or some other physical quantity. The superscript in the γ 's indicate the order in ϵ . The 1-form (8) is better treated by a composition of individual Lie transforms, each of them characterized by its generator g^μ . In the following the lower index will represent the perturbative order, so that we will write g_n^μ to indicate the generators of the n th Lie transform, of order ϵ^n , and L_n will now indicate the operator such that, if σ is an arbitrary 1-form, then $(L_n \sigma)_\nu = g_n^\mu (\partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu)$.¹ Notice that the convention is the opposite for the 1-form: for the 1-form the superscript represents the perturbative order. Our aim is to transform (8) into an expression of the form

$$\Gamma = \Gamma^0 + \epsilon \Gamma^1 + \epsilon^2 \Gamma^2 + \dots, \quad (9)$$

where Γ^1 is obtained by a Lie transform characterized by the generator g_1 , Γ^2 is obtained by a Lie transform characterized by the generator g_2 and so on. It is found that γ and Γ are related by

$$\Gamma = T\gamma + dS, \quad (10)$$

¹We have shortened the notation by writing L_n instead of L_{g_n} .

where

$$T = \cdots T_3 T_2 T_1, \quad (11)$$

with

$$T_n = e^{-\epsilon^n L_{g_n}}, \quad (12)$$

and dS is a total differential which represents a gauge transformation of the 1-form and therefore does not affect the equations of motion. Expanding in powers of ϵ we obtain

$$\Gamma = \cdots (1 - \epsilon^3 L_3 + \frac{1}{2} \epsilon^6 L_3^2 + \cdots) \\ (1 - \epsilon^2 L_2 + \frac{1}{2} \epsilon^4 L_2^2 + \cdots) \\ (1 - \epsilon L_1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 L_1^2 + \cdots) \gamma + dS. \quad (13)$$

Collecting the terms and using also the expansions for γ and Γ we obtain

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \gamma^0, \\ \Gamma^1 &= dS_1 - L_1 \gamma^0 + \gamma^1, \\ \Gamma^2 &= dS_2 - L_2 \gamma^0 + \gamma^2 - L_1 \gamma^1 + \frac{1}{2} L_1^2 \gamma^0, \\ \Gamma^3 &= dS_3 - L_3 \gamma^0 + \gamma^3 + L_2 L_1 \gamma^0 - \frac{1}{6} L_1^3 \gamma^0 - L_2 \gamma^1 + \frac{1}{2} L_1^2 \gamma^1 - L_1 \gamma^2, \end{aligned} \quad (14)$$

and so on. Here S represents a gauge function that will not alter the equations of motion. The coordinate transformation associated with the transformation of the 1-form is found observing that the coordinate transform contravariantly, that is

$$Z = T^{-1} z, \quad (15)$$

where

$$T^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} \cdots, \quad (16)$$

with

$$T_n^{-1} = e^{\epsilon^n L_{g_n}}. \quad (17)$$

Again, expanding and collecting the terms, we obtain

$$Z = z + \epsilon L_1 z + \epsilon^2 (\frac{1}{2} L_1^2 + L_2) z + \epsilon^3 (\frac{1}{6} L_1^3 + L_1 L_2 + L_3) z + \cdots. \quad (18)$$

To simplify the notation it is convenient to introduce the tensor ω , called Lagrange tensor, and defined by (ς is a 1-form)

$$\omega_{\mu\nu}^\varsigma = \partial_\mu \varsigma_\nu - \partial_\nu \varsigma_\mu, \quad (19)$$

so that we can write

$$(L_n \gamma^0)_\mu = g_n^\nu \omega_{\nu\mu}^{\gamma^0}. \quad (20)$$

When σ is one of the terms of (8), then we will further simplify the notation by writing $\omega_{\mu\nu}^k$ instead of $\omega_{\mu\nu}^{\gamma^k}$, so that, for example

$$\omega_{\mu\nu}^0 = \partial_\nu \gamma_\mu^0 - \partial_\mu \gamma_\nu^0. \quad (21)$$

The general form of Γ is therefore

$$\Gamma^n = dS_n - L_n \gamma^0 + C_n, \quad (22)$$

where C_n is a 1-form calculated from γ^n and the results of the preceding lower order calculations. The generator is contained in the term $L_n \gamma^0$. The expressions of C_1 , C_2 and C_3 are

$$\begin{aligned} C_1 &= \gamma^1, \\ C_2 &= \gamma^2 - L_1 \gamma^1 + \frac{1}{2} L_1^2 \gamma^0 \\ C_3 &= L_2 L_1 \gamma^0 - \frac{1}{6} L_1^3 \gamma^0 - L_2 \gamma^1 + \frac{1}{2} L_1^2 \gamma^1 - L_1 \gamma^2. \end{aligned} \quad (23)$$

It is possible to choose $g_n^0 = 0$ to all orders, and this corresponds to the fact that usually we do not want to transform also the time when we change coordinates. The $2N$ components g_n^i and the scalar S_n can be chosen as to bring the $2N + 1$ components of Γ^n , where N is the number of degrees of freedom, into some desired form. We want a form in which only the temporal component of Γ , which will be the φ -component in our case, is not zero, and this can be done choosing

$$g_n^j = (\partial_i S_n + C_{ni}) J_0^{ij}, \quad (24)$$

where J_0^{ij} is the inverse of the spatial part of the Lagrange tensor. With this choice of the generators the temporal component of the 1-form becomes

$$\Gamma_t^n = V_0^\mu \partial_\mu S_n + C_{n\mu} V_0^\mu, \quad (25)$$

where V_0^μ is the Poisson vector, defined as $V_0^i = J_0^{ij} \omega_{0j}^0$, $V_0^0 = 1$. We stress that with the choice (24) of the generators, the temporal component of the 1-form is the only one which survives after the transformation.

2 Magnetic Field Lines Hamiltonian

In this section we discuss Hamiltonian formulations for the magnetic field lines system. We first use a gauge transformation to eliminate the component ψ of the vector potential and then expand the non vanishing components in Taylor series. Then we apply perturbation theory based on the Lie transform to transform systematically to canonical variables. In section 5 we show the procedure rather in detail for the cylindrical limit approximation of the field. In section 6 we derive a Hamiltonian correct until the third perturbative order for the toroidal helical case, and in the following section we discuss a different Hamiltonian.

3 Magnetic Potential

The general scalar potential satisfying the condition $\nabla^2\Psi = 0$, regular at $\xi = 0$, and allowing for an axial current is (refs. [7], [8])

$$\Psi = I\varphi + (1 - \xi \cos \eta)^{1/2} \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{lm} U_{lm}(\xi) e^{il\eta + im\varphi}, \quad (26)$$

where

$$U_{lm}(\xi) = \xi^{-1/2} Q_{l-\frac{1}{2}}^{|m|}(1/\xi). \quad (27)$$

The coordinates ξ , η and φ are toroidal coordinates, in terms of which the Cartesian coordinates are $z = \xi \sin \eta / (1 - \xi \cos \eta)$, $x = (1 - \xi^2)^{1/2} \cos \varphi / (1 - \xi \cos \eta)$, and $y = (1 - \xi^2)^{1/2} \sin \varphi / (1 - \xi \cos \eta)$. Units are selected such that $I = 1$. The coefficients α_{lm} are arbitrary provided that $\alpha_{lm} = \alpha_{-(lm)}^*$. The function Q_{ν}^{μ} is the modified Legendre function of second kind. From the potential Ψ the component for the vector potential for the divergence-free and curl-free magnetic field are obtained as explained in ref. [8] and the vector potential can be written as

$$A = \left(\sum_{l,m} \alpha_{lm} A_{\xi}^{lm}, A_{\eta}^T + \sum_{l,m} \alpha_{lm} A_{\eta}^{lm}, \sum_l \alpha_{l0} A_{\varphi}^{l0} \right), \quad (28)$$

where

$$A_{\eta}^T = (1/2) \left[(1 - \cos \eta)^{-1} \ln \left(\frac{1 - \xi \cos \eta}{1 - \xi} \right) + (1 + \cos \eta)^{-1} \ln \left(\frac{1 - \xi \cos \eta}{1 + \xi} \right) \right], \quad (29)$$

$$A_{\xi}^{lm} = \frac{-i}{m\xi(1 - \xi \cos \eta)} U_{lm}(\xi) \partial_{\eta} (1 - \xi \cos \eta)^{1/2} e^{il\eta + im\varphi}, \quad (30)$$

$$A_{\eta}^{lm} = \frac{i}{m(1 - \xi \cos \eta)} \xi (1 - \xi^2) \partial_{\xi} (1 - \xi \cos \eta)^{1/2} U_{lm}(\xi) e^{il\eta + im\varphi}, \quad (31)$$

$$A_{\varphi}^{l0} = - \int_0^{\xi} dx [x(1 - x \cos \eta)]^{-1} U_{l0}(x) \partial_{\eta} (1 - x \cos \eta)^{1/2} e^{il\eta}. \quad (32)$$

We select the harmonics (l, m) and $(l, 0)$, that is we will consider the potential

$$A = (\epsilon A_{\xi}^{lm}, A_{\eta}^T + \epsilon A_{\eta}^{lm}, \epsilon' A_{\varphi}^{l0}), \quad (33)$$

where $\epsilon = \alpha_{lm}$, $\epsilon' = \alpha_{l0}$. Now, in order to apply the Lie transform, we consider the 1-form

$$\gamma = (\epsilon A_{\xi}^{lm} + \partial_{\xi} S) d\xi + (A_{\eta}^T + \epsilon A_{\eta}^{lm} + \partial_{\eta} S) d\eta + (\epsilon' A_{\varphi}^{l0} + \partial_{\varphi} S) d\varphi, \quad (34)$$

where S is a gauge function. Exploiting the gauge freedom, we choose the gauge function in order to make the ξ component of the 1-form to vanish, that is we choose the gauge function to be

$$S = -\epsilon \int d\xi A_{\xi}^{lm}, \quad (35)$$

and therefore the 1-form becomes

$$\gamma = (A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm} - \epsilon \int d\xi \partial_\eta A_\xi^{lm}) d\eta + (\epsilon' A_\varphi^{l0} - \epsilon \int d\xi \partial_\varphi A_\xi^{lm}) d\varphi. \quad (36)$$

We now introduce the new variable $\theta = \eta + (m/l)\varphi$, where l is the poloidal multipolarity and m is the number of field periods, so that we obtain

$$\begin{aligned} \gamma &= [A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm} - \epsilon \int d\xi \partial_\eta A_\xi^{lm}] d\theta \\ &\quad + [\epsilon' A_\varphi^{l0} - (m/l)(A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm}) \\ &\quad - \epsilon \int d\xi (\partial_\varphi A_\xi^{lm} - (m/l)\partial_\eta A_\xi^{lm})] d\varphi. \end{aligned} \quad (37)$$

The 1-form is of the type $\gamma = \gamma_\theta d\theta + \gamma_\varphi d\varphi$, where

$$\gamma_\theta = A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm} - \epsilon \int d\xi \partial_\eta A_\xi^{lm}, \quad (38)$$

and

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi &= \epsilon' A_\varphi^{l0} - (m/l)(A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm}) - \epsilon \int d\xi (\partial_\varphi A_\xi^{lm} - (m/l)\partial_\eta A_\xi^{lm}) \\ &= \epsilon' A_\varphi^{l0} - (m/l)\gamma_\theta - \epsilon \int d\xi \partial_\varphi A_\xi^{lm}. \end{aligned} \quad (39)$$

In the next section we will expand the 1-form in Taylor series in the variable ξ .

4 Taylor Expansion of the Potential

To apply the Lie transformation we need to have the 1-form written as an expansion of the type (8). We will consider ϵ, ϵ' and ξ as smallness parameters of the same order, and we will expand the 1-form in the variable ξ about the point $\xi = 0$. We proceed first to the expansion of the quantities $U_{lm}(\xi)$. The functions $U_{lm}(\xi)$ admit the integral representation (ref. [8])

$$U_{lm}(\xi) = \beta_{lm} \xi^l (1 - \xi^2)^{-m/2} \int_0^\pi dt (\sin t)^{2l} (1 + \xi \cos t)^{m-l-1/2}. \quad (40)$$

Expanding $(1 - \xi^2)^{-m/2}$ and $(1 + \xi \cos t)^{m-l-1/2}$, we can put (40) in the form

$$U_{lm}(\xi) = \xi^l (U_{lm}^0 + \xi U_{lm}^1 + \xi^2 U_{lm}^2 + \dots), \quad (41)$$

where the normalization constants β_{lm} have been incorporated into the constant quantities $U_{2m}^0, U_{2m}^1, \dots$. From now on we will set $l = 2$. For the other terms we

obtain

$$\begin{aligned}
A_\eta^T &= (1/2)\xi^2 + (1/3)\xi^3 \cos \eta + (1/4)\xi^4(1 + \cos \eta^2) + \dots, \\
A_\eta^{2m} &= (2i/m)U_{2m}^0 \xi^2 e^{2i\theta} + \\
&\quad (i/2m)\cos \eta U_{2m}^0 \xi^3 e^{2i\theta} + \\
&\quad (i/m)(2U_{2m}^2 - U_{2m}^0)\xi^4 e^{2i\theta} + \dots, \\
A_\xi^{2m} &= (2/m)U_{2m}^0 \xi e^{2i\theta} + \\
&\quad (1/2m)U_{2m}^0(2\cos \eta - \sin \eta)\xi^2 e^{2i\theta} + \dots, \\
A_\varphi^{20} &= -iU_{20}^0 \xi^2 e^{2i\eta} - \\
&\quad (1/6)U_{20}^0(\sin \eta + 2i\cos \eta)\xi^3 e^{2i\eta} + \dots.
\end{aligned} \tag{42}$$

The quantities U_{lm}^i are constant, and the only values that we will need are $U_{20}^0 = 1/2$, $U_{2m}^0 = (m^2)/8$, $U_{20}^1 = 0$, $U_{2m}^1 = 0$ and $U_{20}^2 = 35/96$. Putting all the terms together, introducing the new variable $\psi = (1/2)\xi^2$ and taking the real part of the various terms in (42) we obtain, up to the third order, the following expansion for γ_θ

$$\begin{aligned}
\gamma_\theta^0 &= \psi, \\
\gamma_\theta^1 &= (1/3)(2\psi)^{3/2} \cos((m\varphi)/2 - \theta), \\
\gamma_\theta^2 &= \psi^2(1 + \cos((m\varphi)/2 - \theta)^2), \\
\gamma_\theta^3 &= (1/5)\sqrt{2}\psi^{5/2}(7 \cos((m\varphi)/2 - \theta) + \cos((3m\varphi)/2 - 3\theta) + \\
&\quad (1/(4m))\epsilon \psi^2 (35 U_{2m}^0 - 48 U_{2m}^2) \sin(2\theta),
\end{aligned} \tag{43}$$

and for γ_φ

$$\begin{aligned}
\gamma_\varphi^0 &= -(m\psi)/2, \\
\gamma_\varphi^1 &= -(1/3)\sqrt{2}m\psi^{3/2} \cos((m\varphi)/2 - \theta) - \\
&\quad 2\epsilon' \psi U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) + 2\epsilon \psi U_{2m}^0 \sin(2\theta), \\
\gamma_\varphi^2 &= -(3/4)m\psi^2 - (1/4)m\psi^2 \cos(m\varphi - 2\theta) - \\
&\quad (3\sqrt{2})^{-1}\epsilon\psi^{3/2}U_{2m}^0 \sin((m\varphi)/2 - 3\theta) - (3\sqrt{2})^{-1}\epsilon'\psi^{3/2}U_{20}^0 \sin((3m\varphi)/2 - 3\theta) - \\
&\quad (1/\sqrt{2})\epsilon'\psi^{3/2}U_{20}^0 \sin((m\varphi)/2 - \theta) + (1/\sqrt{2})\epsilon\psi^{3/2}U_{2m}^0 \sin((m\varphi)/2 + \theta), \\
\gamma_\varphi^3 &= -(1/(5\sqrt{2}))m\psi^{5/2} \cos((3m\varphi)/2 - 3\theta) - ((7m)/(5\sqrt{2}))\psi^{5/2} \cos((m\varphi)/2 - \theta) + \\
&\quad (3/8)\epsilon \psi^2 U_{2m}^0 \sin(m\varphi) - (3/8)\epsilon' \psi^2 U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) - \\
&\quad 2\epsilon' \psi^2 U_{20}^2 \sin(m\varphi - 2\theta) - 4\epsilon \psi^2 U_{2m}^0 \sin(2\theta) + 8\epsilon \psi^2 U_{2m}^2 \sin(2\theta).
\end{aligned} \tag{44}$$

5 Cylindrical Limit Approximation

In this section we apply the Lie transform technique to the cylindrical limit approximation of the magnetic field, which is the approximation that neglects the toroidicity of the field. The field becomes therefore a straight helical field. The calculations will be carried out in great detail in order to illustrate with a simple example the use of the Lie transform. The calculation scheme described below will be used, unchanged, when we will take into account, also the toroidicity of the field. In the case of the cylindrical limit approximation we have

$$A_\eta^T = \frac{\xi^2}{2}, \quad (45)$$

$$A_\xi^{lm} = \frac{l}{m\xi} I_l(m\xi) e^{il\eta + im\varphi}, \quad (46)$$

$$A_\eta^{lm} = \frac{i\xi}{m} \partial_\xi I_l(m\xi) e^{il\eta + im\varphi}, \quad (47)$$

$$A_\varphi^{l0} = 0. \quad (48)$$

The $I_l(m\xi)$ are the modified Bessel functions, that is solutions of the equation

$$\partial_\xi(\xi \partial_\xi W) = \left(\frac{l^2}{\xi} + m^2 \xi\right) W, \quad (49)$$

and they admit the series expansion

$$\begin{aligned} I_l(m\xi) &= \left(\frac{m\xi}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\left(\frac{m\xi}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)} \\ &= \xi^2 (I_l^{(0)}) + \xi^2 I_{(l)}^2 + \xi^4 I_{(l)}^2 + \dots, \end{aligned} \quad (50)$$

and, for $l = 2$, we have for the first two terms

$$I_2^{(0)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{m}{2}\right)^2, \quad (51)$$

$$I_2^{(2)} = \frac{1}{3!} \left(\frac{m}{2}\right)^4. \quad (52)$$

For the cylindrical limit case it is convenient to use the formula

$$\begin{aligned} \gamma &= [A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm} - \epsilon \int d\xi \partial_\eta A_\eta^{lm}] d\theta \\ &\quad + [\epsilon' A_\varphi^{l0} - (m/l)(A_\eta^T + \epsilon A_\eta^{lm}) \\ &\quad - \epsilon \int d\xi (\partial_\varphi A_\xi^{lm} - (m/l) \partial_\eta A_\xi^{lm})] d\varphi, \end{aligned} \quad (53)$$

and observe that $\partial_\varphi A_\xi^{lm} - (m/l) \partial_\eta A_\xi^{lm} = 0$. Then, expanding the quantities A_η^T , A_η^{lm} , A_ξ^{lm} in Taylor series about the point $\xi = 0$, taking the real parts and introducing the variables $\psi = (1/2)\xi^2$ and $\theta = \eta + (m/l)\varphi$, we obtain

$$\begin{aligned}
\gamma_\theta^0 &= \psi, & \gamma_\varphi^0 &= -(m/2)\psi, \\
\gamma_\theta^1 &= 0, & \gamma_\varphi^1 &= \epsilon\psi(m^2/4)\sin(2\theta), \\
\gamma_\theta^2 &= -\epsilon(m^3/8)\psi^2\sin(2\theta), & \gamma_\varphi^2 &= \epsilon(m^4/12)\psi^2\sin(2\theta).
\end{aligned} \tag{54}$$

From the expansion above we see that the lowest order part of the vector potential is

$$\gamma^0 = \psi d\theta - (m/2)\psi d\varphi. \tag{55}$$

This expression is already in canonical form, θ and φ play the role of canonical conjugate variables and the unperturbed Hamiltonian is $H = (m/2)\psi$. Actually it was the introduction of the variable $\psi = (1/2)\xi^2$ that put the lowest order potential in canonical form. The lowest order of the vector potential, and the corresponding Hamiltonian $H = (m/2)\psi$ will be considered the unperturbed part of the potential.

We now recall, for convenience, the formulas for the generators of the Lie transform and for the temporal part of the transformed 1-form. We have (see eqs. (24) and (25))

$$g_n^j = (\partial_i S_n + C_{ni})J_0^{ij}, \tag{56}$$

$$\Gamma_i^n = V_0^\mu \partial_\mu S_n + C_{n\mu} V_0^\mu, \tag{57}$$

where J_0^{ij} is the inverse of the spatial part of the Lagrange tensor and V_0^μ is the Poisson vector, defined as $V_0^i = J_0^{ij}\omega_{0j}^0$, $V_0^0 = 1$. In our calculations we have three variables: φ , θ and ψ . The variable φ corresponds to the time, and therefore the temporal part of the 1-form is the one corresponding to φ . Let us now see how eqs. (56) and (57) appear in our case. First we note that the zeroth component of the transformed 1-form is equal to the unperturbed one, that is

$$\Gamma^0 = \psi d\theta - (m/2)\psi d\varphi. \tag{58}$$

We use this expression to calculate the Lagrange tensor ω^0 , the inverse of its spatial part J_0^{ij} and the Poisson vector V_0^μ . For the Lagrange tensor we obtain

$$\omega_{\varphi\theta}^0 = \partial_\varphi \gamma_\theta^0 - \partial_\theta \gamma_\varphi^0 = 0, \tag{59}$$

$$\omega_{\varphi\psi}^0 = \partial_\varphi \gamma_\psi^0 - \partial_\psi \gamma_\varphi^0 = m/2, \tag{60}$$

$$\omega_{\theta\psi}^0 = \partial_\theta \gamma_\psi^0 - \partial_\psi \gamma_\theta^0 = -1. \tag{61}$$

The Lagrange tensor is therefore the 3-dimensional matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -m/2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and its spatial part is

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

from which we obtain its inverse, the matrix J_0^{ij}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The Poisson vector is now obtained from the formula $V_0^j = J_0^{ij} \omega_{0j}^0$. Accordingly

$$V_0^\psi = 0, \quad V_0^\theta = m/2, \quad (62)$$

and we remind the reader that by definition $V_0^\varphi = 1$. Using these results, from eq. (56) we obtain

$$g_n^\theta = -\partial_\psi S_n - C_{n\psi}, \quad (63)$$

$$g_n^\psi = \partial_\theta S_n + C_{n\theta}, \quad (64)$$

and $g_n^\varphi = 0$ for every n . The expression (57) for Γ_φ^n is given by

$$\Gamma_\varphi^n = \partial_\varphi S_n + V_0^\psi \partial_\psi S_n + V_0^\theta \partial_\theta S_n + C_{n\varphi} + V_0^\psi C_{n\psi} + V_0^\theta C_{n\theta}, \quad (65)$$

and substituting the Poisson vector, we obtain

$$\Gamma_\varphi^n = \partial_\varphi S_n + (m/2) \partial_\theta S_n + C_{n\varphi} + (m/2) C_{n\theta}. \quad (66)$$

We see that, for every order n , the basic formulas (63), (64) and (66) suggest two possible strategies:

1) first we choose the generators. Then (63) and (64) give us the equations by which we determine the gauge function S . Substituting in (66) we obtain the transformed 1-form.

2) first we choose the gauge function S , then from (63), (64) and (66) we obtain the generators and the transformed 1-form.

The two strategies are completely equivalent, and using one or the other is a matter of choice. We will proceed according to 2), because choosing first the gauge function allows one to specify more directly the form of the transformed 1-form. A typical choice would be to choose S_n such that the equation

$$\langle \partial_\varphi S_n + (m/2) \partial_\theta S_n \rangle = 0, \quad (67)$$

where the brackets denote average, is satisfied. This corresponds to taking Γ^n as the average of $C_{n\varphi} + (m/2) C_{n\theta}$ over the same variables as (67).

Finally, we stress that (63), (64) and (66) are derived under the requirement that only the temporal part of Γ , that is Γ^φ , is not zero after the Lie transformation of coordinates.

We now proceed to the calculation of the first order contribution to Γ^0 . We start by taking Γ_φ^1 as the average over θ of the quantity $V_0^\mu C_{1\mu} = \gamma_\varphi^1 + (m/2) \gamma_\theta^1$, which vanishes, since

$$\gamma_\varphi^1 + (m/2) \gamma_\theta^1 = \epsilon(m^2/4) \psi \sin 2\theta. \quad (68)$$

We have now to calculate the first order gauge function and the first order Lie generators, which will be necessary in order to calculate the second order component of the transformed 1-form. To calculate the first order gauge function, we have to solve the equation

$$\partial_\varphi S_1 + (m/2)\partial_\theta S_1 = -\gamma_\varphi^1 - (m/2)\gamma_\theta^1. \quad (69)$$

A solution of this equation is a gauge function which does not depend on φ , that is

$$S_1 = (1/4)\epsilon\psi\cos 2\theta. \quad (70)$$

The generators are obtained from eqs. (63) and (64) which explicitly read

$$g_1^\theta = -\partial_\psi S_1 = -(1/4)\epsilon m \cos 2\theta, \quad (71)$$

$$g_1^\psi = \partial_\theta S_1 + \gamma_\theta^1 = -(1/2)\epsilon m \psi \sin 2\theta. \quad (72)$$

At the first order we see therefore that there is no contribution to the unperturbed Hamiltonian. Let us proceed to the second order calculations. From (66) we obtain

$$\Gamma_\varphi^2 = \partial_\varphi S_2 + (m/2)\partial_\theta S_2 + C_{2\varphi} + (m/2)C_{2\theta}, \quad (73)$$

and therefore we now have to evaluate the θ and φ components of the quantity

$$C_2 = \gamma^2 - L_1\gamma^1 + (1/2)L_1^2\gamma^0. \quad (74)$$

We have

$$\begin{aligned} (L_1\gamma^1)_\theta &= g_1^\psi \omega_{\psi\theta}^1 \\ &= g_1^\psi \partial_\psi \gamma_\theta^1 = 0, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} (L_1\gamma^1)_\varphi &= g_1^\theta \omega_{\theta\varphi}^1 + g_1^\psi \omega_{\psi\varphi}^1 \\ &= g_1^\psi \partial_\psi \gamma_\varphi^1 + g_1^\theta \partial_\theta \gamma_\varphi^1 \\ &= -(1/8)\epsilon^2 m^3 \psi. \end{aligned} \quad (76)$$

Besides, we have

$$\begin{aligned} (L_1^2\gamma^0)_\theta &= g_1^\psi \omega_{\psi\theta}^{L_1\gamma^0} \\ &= g_1^\psi [\partial_\psi (L_1\gamma^0)_\theta - \partial_\theta (L_1\gamma^0)_\psi], \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} (L_1^2\gamma^0)_\varphi &= g_1^\theta \omega_{\theta\varphi}^{L_1\gamma^0} + g_1^\psi \omega_{\psi\varphi}^{L_1\gamma^0} \\ &= g_1^\theta [\partial_\theta (L_1\gamma^0)_\varphi - \partial_\psi (L_1\gamma^0)_\theta] \\ &\quad + g_1^\psi [\partial_\psi (L_1\gamma^0)_\varphi - \partial_\varphi (L_1\gamma^0)_\psi], \end{aligned} \quad (78)$$

and therefore we have to calculate first the components of the operator $L_1\gamma^0$:
We obtain

$$(L_1\gamma^0)_\theta = g_1^\psi \omega_{\psi\theta}^0 = -(1/2)\epsilon m \psi \sin 2\theta, \quad (79)$$

$$(L_1\gamma^0)_\psi = g_1^\theta \omega_{\theta\psi}^0 = (1/4)\epsilon m \cos 2\theta, \quad (80)$$

$$(L_1\gamma^0)_\varphi = g_1^\theta \omega_{\theta\varphi}^0 + g_1^\psi \omega_{\psi\varphi}^0 = (1/4)m^2 \epsilon \psi \sin 2\theta. \quad (81)$$

Substituting these relations into (77) and (78) we obtain

$$(1/2)(L_1^2\gamma^0)_\theta = 0, \quad (82)$$

$$(1/2)(L_1^2\gamma^0)_\varphi = -(1/16)\epsilon^2 m^3 \psi. \quad (83)$$

Using these results we obtain

$$C_{2\theta} = \gamma_\theta^2 - (L_1\gamma^1)_\theta + (1/2)(L_1^2\gamma^0)_\theta = -(1/8)\epsilon m^3 \psi^2 \sin 2\theta, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} C_{2\varphi} &= \gamma_\varphi^2 - (L_1\gamma^1)_\psi + (1/2)(L_1^2\gamma^0)_\varphi \\ &= (1/12)\epsilon m^4 \psi^2 \sin 2\theta + (1/8)\epsilon^2 m^3 \psi - (1/16)\epsilon^2 m^3 \psi \\ &= (1/12)\epsilon m^4 \psi^2 \sin 2\theta + (1/16)\epsilon^2 m^3 \psi. \end{aligned} \quad (85)$$

Averaging over θ the quantity

$$C_{2\varphi} + (m/2)C_{2\theta}, \quad (86)$$

we obtain the second order contribution to the transformed 1-form

$$\Gamma_\varphi^2 = (1/16)\epsilon^2 m^3 \psi. \quad (87)$$

Accordingly, the expression of the transformed 1-form up to the second order is

$$\Gamma = \psi d\theta + [-(m/2)\psi + (1/16)\epsilon^2 m^3 \psi] d\varphi. \quad (88)$$

In this expression the magnetic potential is expressed in canonical form, with ψ and θ playing the role of action angle variables. The Hamiltonian up to the second order is

$$H = (m/2)\psi - (1/16)\epsilon^2 m^3 \psi. \quad (89)$$

The equations of the magnetic field lines flow are obtained directly from the above expression.

6 Helical Toroidal Potential

We now proceed to the calculation of the transformed 1-form in the toroidal case, along the same line followed for the cylindrical limit approximation. The starting point is again the expansion of the magnetic potential, which we report for convenience until the first order

$$\begin{aligned}\gamma_\theta^0 &= \psi, \\ \gamma_\theta^1 &= (1/3)(2\psi)^{3/2} \cos((m\varphi)/2 - \theta),\end{aligned}\tag{90}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\varphi^0 &= -(m\psi)/2, \\ \gamma_\varphi^1 &= -(1/3)\sqrt{2}m\psi^{3/2} \cos((m\varphi)/2 - \theta) - \\ &\quad 2\epsilon' \psi U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) + 2\epsilon \psi U_{2m}^0 \sin(2\theta).\end{aligned}\tag{91}$$

We note that the zeroth order term is equal to the zeroth order term of the cylindrical limit approximation. The zeroth order in the expansion is the unperturbed part of the potential

$$\gamma^0 = \psi d\theta - \frac{m}{2} \psi d\varphi,\tag{92}$$

and it is in canonical form, with θ and ψ playing the role of action angle variables and $-\gamma_\varphi^0$ playing the role of the Hamiltonian for the unperturbed system. We now proceed to the calculations of the transformed 1-form to the various perturbative orders. For the zeroth order we have that the 1-form is left unchanged, that is

$$\Gamma^0 = \gamma^0 = \psi d\theta - (m/2)\psi d\varphi.\tag{93}$$

We also note that this is the same expression that we obtained in the cylindrical limit approximation, therefore the Lagrange tensor ω^0 , the Poisson vector V^μ and the tensor J_0^{ij} are the same as for the cylindrical limit approximation of the field, that is we have

$$\omega_{\varphi\theta}^0 = 0, \quad \omega_{\varphi\psi}^0 = m/2, \quad \omega_{\theta\psi}^0 = -1,\tag{94}$$

and

$$V_0^\psi = 0, \quad V_0^\theta = m/2, \quad V_0^\varphi = 1.\tag{95}$$

This means that eqs. (66), (63) and (64) are left unchanged, and therefore for the first order transformed 1-form we have to calculate the expression

$$\Gamma_\varphi^1 = \partial_\varphi S_1 + (m/2)\partial_\theta S_1 + \gamma_\varphi^1 + (m/2)\gamma_\theta^1.\tag{96}$$

In the above equation we can choose the gauge function to be zero, so that the expression for Γ_φ^1 becomes

$$\Gamma_\varphi^1 = \gamma_\varphi^1 + (m/2)\gamma_\theta^1,\tag{97}$$

and, using the Taylor expansion for γ we obtain

$$\Gamma_\varphi^1 = -2\psi\epsilon'U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) + \epsilon U_{2m}^0 \sin(2\theta). \quad (98)$$

For the first order generators we have

$$g_1^\theta = -\partial_\psi S_1 - C_{1\psi}, \quad (99)$$

$$g_1^\psi = \partial_\theta S_1 + C_{1\theta}. \quad (100)$$

Since $S_1 = 0$ and $C_{1\psi} = 0$ we obtain

$$g_1^\theta = 0, \quad (101)$$

$$g_1^\psi = 2^{3/2}/3\psi^{3/2} \cos(m/2\varphi - \theta). \quad (102)$$

The equation for the second order contribution is

$$\Gamma_\varphi^2 = \partial_\varphi S_2 + V_0^\theta \partial_\theta S_2 + V_0^\psi \partial_\psi S_2 + C_{2\varphi} + C_{2\theta} V_0^\theta + C_{2\psi} V_0^\psi, \quad (103)$$

which becomes, after substituting the values of the Poisson vector

$$\Gamma_\varphi^2 = \partial_\psi S_2 + (m/2)\partial_\theta S_2 + C_{2\varphi} + (m/2)C_{2\theta}. \quad (104)$$

For the second order we need therefore to evaluate the quantity $C_2 = \gamma^2 - L_1\gamma^1 + (1/2)L_1^2\gamma^0$. The calculations of the explicit expression of the operators L 's are straightforward but the algebra is quite lengthy, so we give only the results

$$\begin{aligned} (L_1\gamma^1)_\varphi &= -(2^{1/2}/3)\psi^{3/2} \cos(m/2\varphi - \theta) \times \\ &\quad (2^{1/2}m\psi^{1/2} \cos(m/2\varphi - \theta) + 4\epsilon U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) - \\ &\quad 4\epsilon' U_{2m}^0 \sin(2\theta)), \end{aligned} \quad (105)$$

$$(L_1\gamma^1)_\theta = (4/3)\psi^2 \cos((m/2)\varphi - \theta)^2, \quad (106)$$

$$(1/2)(L_1^2\gamma^0)_\varphi = -(2/3)m\psi^2 \cos((m/2)\varphi - \theta)^2, \quad (107)$$

$$(1/2)(L_1^2\gamma^0)_\theta = (4/3)m\psi^2 \cos((m/2)\varphi - \theta)^2. \quad (108)$$

The equation for Γ_φ^2 is

$$\Gamma_\varphi^2 = \partial_\varphi S_2 + (m/2)\partial_\theta S_2 + C_{2\varphi} + (m/2)C_{2\theta}, \quad (109)$$

and, choosing again the second order gauge function to vanish, we obtain

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi^2 = & 2^{-1/2}\epsilon U_{2m}^0 \sin(m/2\varphi - 3\theta) + (1/(3\sqrt{2}))\epsilon\psi^{3/2}U_{20}^0 \sin(m/2\varphi - \theta) + \\ & 2^{-1/2}\epsilon'\psi^{3/2}U_{20}^0 \sin(3/2m\varphi - 3\theta) + \\ & (1/(3\sqrt{2}))\epsilon\psi^{3/2}U_{2m}^0 \sin(m/2\varphi + \theta). \end{aligned} \quad (110)$$

For the second order generators we obtain from eq. (24)

$$g_2^\theta = -\partial_\psi S_2 - C_{2\psi}, \quad (111)$$

$$g_2^\psi = \partial_\theta S_2 + C_{2\theta}. \quad (112)$$

Since $S_2 = 0$ and $C_{2\psi} = 0$ we obtain

$$g_2^\theta = 0, \quad (113)$$

$$g_2^\psi = (1/6)\psi^2(7 + \cos(m\varphi - 2\theta)). \quad (114)$$

To proceed to the calculations of the third order we have to calculate now the quantity

$$C_3 = L_2 L_1 \gamma^0 - (1/6)L_1^3 \gamma^0 - L_2 \gamma^1 + (1/2)L_1^2 \gamma^1 - L_1 \gamma^2. \quad (115)$$

Calculating the above expression and choosing again the gauge function to vanish, we find for Γ^3 the following expression

$$\begin{aligned} \Gamma^3 = & (1/24)\epsilon\psi^2 U_{2m}^0 \sin(m\varphi) + (47/24)\epsilon'\psi^2 U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) - \\ & (47/24)\epsilon\psi^2 U_{2m}^0 \sin(2\theta) - 2\epsilon'\psi^2 U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) + \\ & 2\epsilon\psi^2 U_{2m}^0 \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (116)$$

Up to the third order the Hamiltonian is given by

$$H = -\Gamma_\varphi = -\Gamma_\varphi^0 - \Gamma_\varphi^1 - \Gamma_\varphi^2 - \Gamma_\varphi^3. \quad (117)$$

For convenience we collect below the various contributions.

$$H_0 = \frac{m\psi}{2}, \quad (118)$$

$$H_1 = 2\epsilon'\psi U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) - 2\epsilon\psi U_{2m}^0 \sin(2\theta), \quad (119)$$

$$H_2 = \frac{\epsilon\psi^{3/2} U_{2m}^0 \sin(\frac{m\varphi}{2} - 3\theta)}{\sqrt{2}} - \frac{\epsilon'\psi^{3/2} U_{20}^0 \sin(\frac{3m\varphi}{2} - 3\theta)}{\sqrt{2}} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon' \psi^{\frac{3}{2}} U_{20}^0 \sin(\frac{m\varphi}{2} - \theta)}{3\sqrt{2}} + \frac{\epsilon \psi^{\frac{3}{2}} U_{2m}^0 \sin(\frac{m\varphi}{2} + \theta)}{3\sqrt{2}}, \quad (120) \\
H_3 = & \frac{-(\epsilon \psi^2 U_{2m}^0 \sin(m\varphi))}{24} - \frac{47 \epsilon' \psi^2 U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta)}{24} + \\
& 2 \epsilon' \psi^2 U_{20}^0 \sin(m\varphi - 2\theta) + \frac{47 \epsilon \psi^2 U_{2m}^0 \sin(2\theta)}{24} - 2 \epsilon \psi^2 U_{2m}^0 \sin(2\theta).
\end{aligned}$$

7 Integrable Model

In this section we discuss a different Hamiltonian for the toroidal helical magnetic field. We observe that the perturbation theory based on the Lie transform allows a certain freedom of choice in selecting the transformed variables. In fact it can be noticed from eq. (66) that choosing a different gauge function would lead to different Hamiltonians. However there is no contradiction in this fact, since the different Hamiltonians are expressed in terms of different variables. In the same sense, when we perform a canonical transformation we are free to select arbitrarily the generating function,² leading to different Hamiltonians expressed in terms of different canonical variables. For the same physical system, depending on the choice of the canonical variables, we can have completely different Hamiltonians, one being time-dependent and one being time-independent, or one being the energy of the system and one being not, and so on. All these different Hamiltonians describe the same physical system.

Let us consider now eq. (66) for $n = 1$ and let us choose the gauge function such that the equation

$$(m/2)\partial_\theta S_1 = -2\psi\epsilon U_{2m}^0 \sin 2\theta, \quad (122)$$

is satisfied. We then obtain

$$S_1 = U_{2m}^0 \frac{2\psi\epsilon}{m} \cos 2\theta, \quad (123)$$

and, consequently, introducing the variable $\eta = \theta - (m/2)\varphi$, we obtain

$$\Gamma_\varphi^1 = 2\epsilon' U_{20}^0 \psi \sin 2\eta. \quad (124)$$

For the first order generators we obtain

$$g_1^\theta = -U_{2m}^0 \frac{2\epsilon}{m} \cos 2\theta, \quad (125)$$

$$g_1^\varphi = -U_{2m}^0 \frac{4\epsilon\psi}{m} \sin 2\theta + (2\psi)^{3/2} \frac{\cos \eta}{3}. \quad (126)$$

²The choice of the gauge function is, however, subject to the restriction that it must be bounded in the variable φ .

For the second order we need therefore to evaluate the quantity $C_2 = \gamma^2 - L_1 \gamma^1 + (1/2)L_1^2 \gamma^0$. After some lengthy algebra we arrive at the result ³

$$\Gamma_\varphi^2 = \epsilon'(2\psi)^{3/2}(1/6)U_{20}^0[-2\sin 2\eta \cos \eta - \cos 2\eta \sin \eta] + \frac{4\psi\epsilon^2}{m}U_{2m}^0{}^2. \quad (127)$$

Therefore, up to the second order, we have the following expression for the Hamiltonian

$$-H = \Gamma_\varphi = \Gamma_\varphi^0 + \Gamma_\varphi^1 + \Gamma_\varphi^2, \quad (128)$$

that is

$$\begin{aligned} H = & +(m/2)\psi - \epsilon'U_{20}^0 2\psi \sin 2\eta \\ & - \epsilon'(2\psi)^{3/2}(1/6)U_{20}^0[-2\sin 2\eta \cos \eta - \cos 2\eta \sin \eta] \\ & - \frac{4\psi\epsilon^2}{m}U_{2m}^0{}^2. \end{aligned} \quad (129)$$

It can be seen that this Hamiltonian is time-independent, and therefore is integrable and cannot exhibit chaotic behavior. For another discussion on this problem, see ref. [10], pag. 130

8 Conclusion

We have derived in this section an expression for the Hamiltonian for the toroidal helical magnetic field lines system up to the second perturbative order for the cylindrical limit approximation of the field and up to the third perturbative order in the toroidal case. Going to higher orders will be a straightforward application of the same procedure used in this work, and the only difficulty to be expected is algebraic complication. The particular Hamiltonian we have derived is not the only possible choice, since we can manipulate the Lie transformation in order to get different Hamiltonians, and we have discussed this point in section 7, where a different Hamiltonian has been given up to the second order. Different expressions for the Hamiltonian could be of interest when analyzing particular problems, or for the application of symplectic integration schemes to the solution of Hamilton's equations.

References

- [1] G. Hori, Publ. Astr. Soc. Jpn. 18, (1966) 287
- [2] A. Deprit, Cel. Mech. 1, (1969) 12
- [3] A. Kamel, Cel. Mech. 1, (1969) 190

³We develop these calculations in ref. [9].

- [4] J. Henrard, *Cel. Mech.* 3, (1970) 107
- [5] J.R. Cary, *Phys. Rep.* 79 No. 2, (1981) 129
- [6] J.R. Cary and R.G. Littlejohn, *Ann. Phys.* 151 (1983) 1
- [7] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York 1953
- [8] J. R. Cary, *Phys. Fluids* 27(1984) 119
- [9] G. Gnudi and T. Hatori *J. Phys. Soc. Jpn.* 62 No. 6, (1993) 2030
- [10] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)

閉じ込め磁場のマッピング

福井工大 山岸留次郎

1. はじめに

現在主要高温プラズマ磁場閉じ込め装置はトーラスからなっている。その代表的なトカマクは基本的には軸対称性をもつが、装置の誤差とかMHD不安定性など様々な原因により対称性がこわされる。ステラレータはヘリカル磁場をトーラスに曲げることによりヘリカル対称性がこわされる。このような非対称性磁場では磁力線は非線形性のために共鳴磁気面附近で局所的にカオスの様相を呈する。このカオスの様子を調べるには、磁力線の連立微分方程式を解きポアンカレマップを数千回以上の繰り返しが必要で、スーパーコンピュータを必要とする。ここではヘリカルトーラス磁場に対し、2重フーリエ展開法により、スカラーポテンシャル及びフラックス関数（ハミルトニアン）を近似的に導出する方法を提案し、応用例を示す。このハミルトニアンにより装置設計に必要な情報も得られ又カオスの様子も調べることが出来る。この展開法では、モード数と摂動の次数を対応させているため、少ない展開項で比較的正確に表現することが可能である。この近似ハミルトニアンに対しセパラトリックス附近で軌道がストキャステイックになる様子をセパラトリックスマッピングにより調べる。

2. トロイダルヘリカル磁場の導出

磁場 \mathbf{B} に対し、スカラーポテンシャルを $\mathbf{B} = \nabla \Phi$ により定義する。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 Φ はラプラースの方程式をみたす。空間曲線座標系 (r, θ, s) でこれは

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r h \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0 \quad (1)$$

のように表されている[1]。ここで $h = 1 + kr \cos \theta$ 、 $k = 1/R_0$ は曲率である。れい率が0で曲率が定数の場合この座標系は普通のトロイダル座標系 (r, θ, ϕ) となる、ただし $s = R_0 \phi$ 、 $R_0 \rightarrow \infty$ の直円柱のラプラースを L とすると

$$L\Phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \quad (2)$$

(1)式で h に含まれるトロイダル効果 kr を右辺にまとめると、次のようにかける：

$$L\Phi = -kr \left\{ \left(2L\Phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right) \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\} \\ + (kr)^2 \left\{ \left(L\Phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right) \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\} \quad (3)$$

(3) 式は、 $(kr)^3$ 以上を切り捨てたものではなく、(1) 式と同等で厳密である。 Φ を 2 重フーリエ展開する：

$$\Phi(r, \theta, s) = \Phi_0 - i \sum_{m,n} \phi_{mn}(r) \exp i(m\theta - nks) \quad (4)$$

$k=0$ の直円柱で、 $m=n=0$ の場合、(4) 式を (3) 式へ代入して、0 次のポテンシャルは、

$$\Phi_0 = rB_{\theta 0} \theta + B_{s 0} s$$

のように求まる。ここで 0 次の磁場 $B_0 = (0, B_{\theta 0}, B_{s 0})$ は外部から与えられているものとする。ポロイダル磁場 $B_{\theta 0}$ はプラズマ電流で与えられるが、ステラレーター（ヘリオロン）のようにプラズマ電流がない場合はヘリカル磁場を平均したものである。この $B_{\theta 0}$ は軸方向磁場 $B_{s 0}$ と共に磁気面上での磁力線の回転 (rotational transform) を与えるもので、重要な量である。

次にトロイダル 1 次 (kr) を考慮すると、(3) 式から許されるモード数は、 $m=\pm 1, n=0$ のように決る。それに対応して次の 2 階微分方程式が得られる：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_{\pm 1 0}}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \phi_{\pm 1 0} = \mp \frac{k}{2} B_{\theta 0} \quad (5)$$

この微分方程式は境界条件を考慮して解析的に解ける [2]。

直円柱系でのヘリカル 1 次のポテンシャルは、(3) 式の右辺を 0 として、 $Z=krn$ として

$$L_{mn} \phi_{mn} \equiv \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} \left(Z \frac{d\phi_{mn}}{dZ} \right) - \left[\left(\frac{m}{Z} \right)^2 + 1 \right] \phi_{mn} = 0 \quad (6)$$

をみだす。このベッセルの微分方程式の一般解は $\Phi_l = c_l I_l(z) + d_l K_l(z)$ のように求まる。ここで l はヘリカルコイルのポロイダルモード数である。係数 c_l, d_l はヘリカルコイルでの境界条件から決められる [2]。

次にヘリカルコイルをトーラス状に曲げた場合、ヘリカルとトロイダル効果を同時に導入すると、(3) 式から許されるモード数は $m=l\pm 1, n$ となり、これはヘリカルモード l のサイドバンドを表している。このとき (3) 式から

$$L_{l\pm 1} \phi_{l\pm 1}(z) = S_l^{\pm}(z) = -\frac{1}{2n} \left[\frac{d\phi_l}{dz} + \left(2z \mp \frac{l}{Z} \right) \phi_l(z) \right] \quad (7)$$

が導かれる。直円柱でのラプラス方程式 $L_l \Phi_l = 0$ のグリーン関数は

$$G_m(z, z_1) = - \begin{cases} z_1 K_m(z_1) I_m(z) & \text{for } z < z_1 \\ z_1 I_m(z_1) K_m(z) & \text{for } z > z_1 \end{cases} \quad (8)$$

のように与えられる。このグリーン関数を使うと、(8) 式の解は、次のように与えられる

$$\phi_{\ell \pm 1}(z) = \int_0^{\infty} dz_1 G_{\ell \pm 1}(z, z_1) S_{\ell}^{\pm}(z_1) \quad (9)$$

以上各オーダーごとに求めたポテンシャルを用いて、求めるポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_0(r) + \phi_{10}(r) \sin \theta + \phi_{\ell}(r) \sin [2\theta - n\phi] + \phi_{\ell-1}(r) \sin [(\ell-1)\theta - n\phi] \\ & + \phi_{\ell+1}(r) \sin [(\ell+1)\theta - n\phi] \quad (10) \end{aligned}$$

のように表すことが出来る。(12)式の第2項はトロイダル1次であり、第3項はヘリカル1次であり、第4、5項はトロイダルヘリカルカップリングによるものであり、オーダーは e_1, e_1 である。これらはモード的にはサイドバンドになる。同様な方法で、トロイダル2次を入れる時は、 $\sin 2\theta$ の項が現れる。又ヘリカル2次を考慮すると、 $\sin 2(\theta - n\phi)$ のモードと丁度打ち消し合う0次の項が現れる。この実質的にヘリカル2次でモード的には0次の成分がプラズマ電流がない場合0次に繰り込まれて平均として $B_{\theta 0}$ つまり磁力線の回転を与える。トロイダル2次、ヘリカル1次を考慮すると、 $\sin(\theta(1 \pm 2) - n\phi)$ のように第2のサイドバンドが現れる。

上の手法を $l=3$ のヘリカルピンチプラズマへ応用した例を示す。ビオサバールの法則によりヘリカルコイルから正確に計算したトロイダル磁場(実線)と(3)式によりサイドバンドまで考慮して計算したもの(点線)を図1に示す。図1から明かなように、セパラトリックス附近($r \approx 20m$)まで、(3)式の近似計算は充分正確であることがわかる。

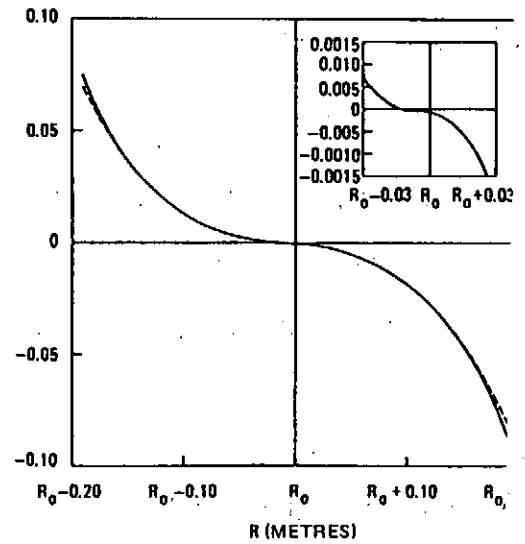


図1

3. トロイダルヘリカルフラックス関数

磁場 $B = \nabla \Phi$ が求めたとき、磁力線の方程式は $R = R_0(1 + kr \cos \theta)$ として、

$$\frac{dl}{B} = \frac{r d\theta}{B_{\theta}} = \frac{R d\phi}{B_{\phi}} = \frac{dr}{B_r} \quad (11)$$

のように表せるが、この磁力線に沿って、不変量であるフラックス関数 F は

$$\vec{b} \cdot \nabla F = 0 \quad (12)$$

をみたすものとして定義されている[1]。この F はハミルトニアンと等価[3]である。

(14)式は、又次のようにもかける；

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial s} = -kr \cos \theta (2+kr \cos \theta) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (13)$$

この式も近似展開は入っておらず、(14)と同じく厳密な式である。Φの場合と同様にFについてもフーリエ展開しオーダー毎に解いていくと、オーダー毎にモード数が自動的に決定される。

トロイダル1次に対しては、 $m=\pm 1, n=0$ となり

$$F_{10} = \pm \frac{d\phi_{\pm 10}}{dr} \frac{dF_0}{dr} \quad (14)$$

のように決められる。ヘリカル1次に対しては $A_1 = 1B_0 - nrB_{s0}/R_0$ として

$$F_{\ell} = \frac{r}{A_{\ell}} \frac{d\phi_{\ell}}{dr} \cdot \frac{dF_0}{dr} \quad (15)$$

のように求まる。トロイダルヘリカルカップリングに対しては

$$F_{\ell \pm 1}(r) = \frac{r}{A_{\ell \pm 1}} \left[\phi'_{\ell \pm 1} F'_0 + (\phi'_{\pm 10} F_{\ell} + \phi'_{\ell} F_{10}) \frac{\ell}{r^2} + kr \left(\phi'_{\ell} F'_0 - \frac{\ell}{r} B_{\theta 0} F_{\ell} \right) + \phi'_{\pm 10} F'_{\ell} + \phi'_{\ell} F'_{10} \right] \quad (16)$$

のように求められる。これらを用いて、ポテンシャルΦの場合と同じようにフラックス関数Fも次のように展開される：

$$F(r, \theta, \phi) = F_0(r) + 2 \left\{ F_{10}(r) \cos \theta + F_{\ell}(r) \cos(\ell\theta - n\phi) + F_{\ell+1}(r) \cos[(\ell+1)\theta - n\phi] + F_{\ell-1}(r) \cos[(\ell-1)\theta - n\phi] \right\} \quad (17)$$

(19)式で第1項Fは直円柱系のフラックス関数である。第2項はトロイダル1次を表わし磁気面のトロイダルシフトを与える。第3項はヘリカル1次を表わし、第4、5項がトロイダルヘリカルカップリングのサイドバンドモードであることはΦの場合と同様である。0次のF₀にはいろいろな選び方があるが、 $F'_0 = A_1$ のようにすると、第1項と第3項を考えると、ヘリカル対称の厳密なフラックスを与える。同様に、第1項と第2項をとると、軸対称系のフラックスであり、この場合も可積分系で厳密な磁気面が求まる。もしトロイダル2次を考慮すると、 $\cos 2\theta$ というモードが現われる。つまりトロイダル2次は磁気面を楕円形に変形することがわかる。同様にトロイダル3次を考慮すると ϵ_1^3 のオーダーで磁気面を三角形に変形する。

(19)式を $l=3$ のヘリカルピンチプラズマへ応用した例を示す。 $k=0$ としトロイダル効果をなくし、ヘリカル対称の場合は $F=\text{const.}$ から得られる磁気面は図2に示す如く、セパラトリックスは3角形に閉じている。トロイダルの影響を考慮に入れると、ヘリカル対称性がこわされて、磁気面は3次元的となり、トロイダル角 ϕ に依存して変化する。(19)式によって計算した $l=3$ ヘリカルピンチプラズマの例を図3, a, b, cで示すように、トロイダル角 ϕ の位置により磁気面は変化する。特にセパラトリックスはせまい範囲で閉じたり開いたり微妙に変化している。このセパラトリックスの挙動により、セパラトリックスの近くで内側にあった磁力線がトーラスを1周する間にセパラトリックスの外側に移るようなことが起こりうる。従ってこのセパラトリックスが閉じたり開いたりするせまい領域がいわゆる磁力線のストキャステイクな領域と考えられる。

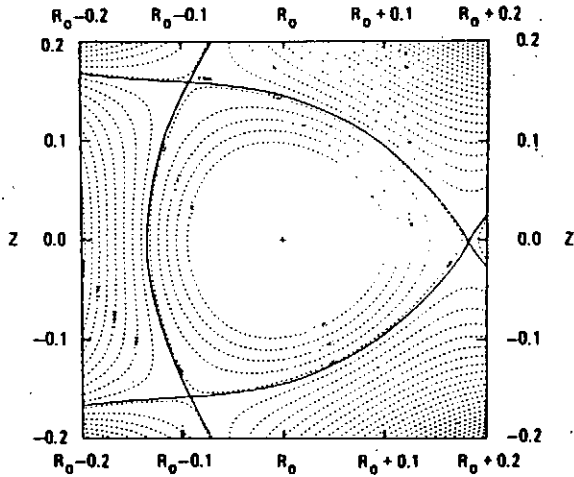


図2 $l=3$ ヘリカル対称の場合

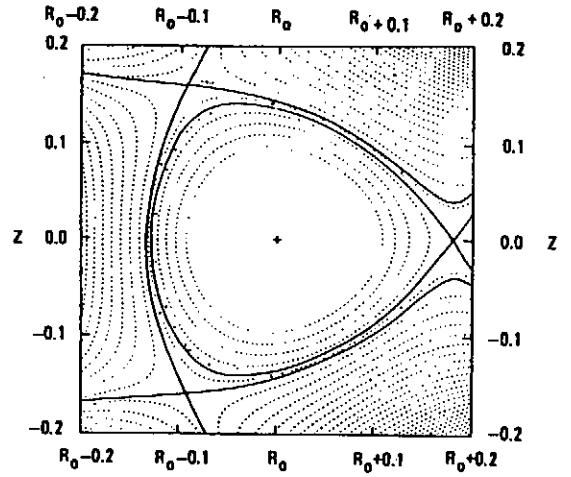


図3 a ヘリカルトーラスの場合 ($\phi=0$)

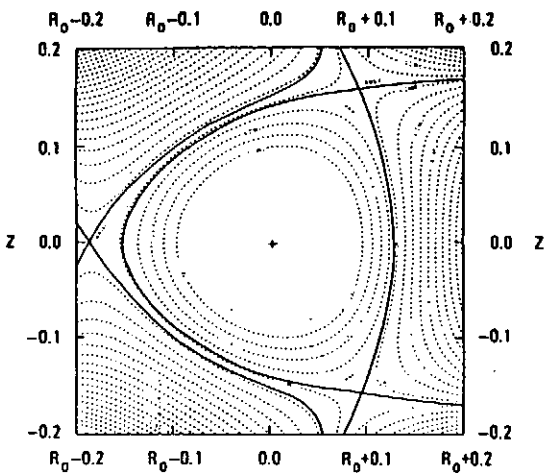


図3 b ($\phi=5.625^\circ$)

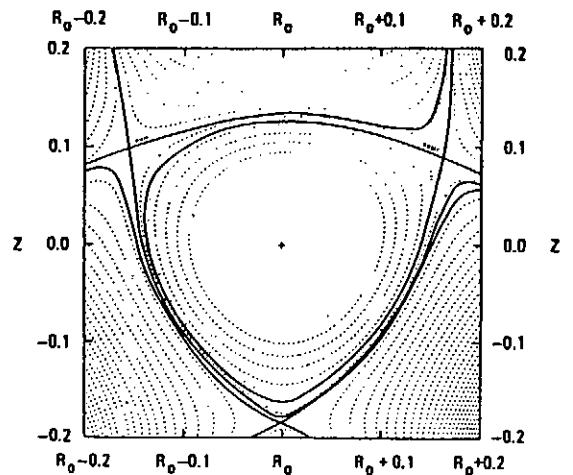


図3 c ($\phi=11.25^\circ$)

4. セパラトリックスマッピング

前節(17)式で、高次項 $F_{1\pm 1}$ を省略しても、トロイダル1次とヘリカル1次の両方を含んでおり、ヘリカルトラス系を近似することができるものと考えられる。この場合でも2つの異なったモードの重ね合わせのため可積分でなくなり、セパラトリックス附近では軌道は局所的にストキャステックになると考えられる。このように近似したハミルトニアンは Escandeらが扱っている Two Wave Hamiltonian と等価であり、その軌道の様子はよく調べられている[4]。この近似したハミルトニアンによる軌道のセパラトリックス附近の様子をセパラトリックスマッピングにより調べよう。このトロイダル1次、ヘリカル1次からなるハミルトニアンは

$$H(r, \theta, \phi) = \frac{g}{2}r^2 - f \cos\theta - h \cos(1\theta - n\phi) \quad (18)$$

のように書ける。このハミルトニアンを使い、(11)式を考慮して"時間 t "を $dt = dl/B$ のように導入すると磁力線の方程式は半径 r の代わりに $r^2/2$ を変数として

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = -\frac{\partial H}{\partial \theta}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r^2/2} \quad (19)$$

のようにかける。この表式が普通磁力線の挙動の研究には用いられている[5]。ここでは Chirikov[6][7]らのセパラトリックスマッピングを利用するため、 r の変数を用いる。この場合同じ時間変数 t を使うと、(18)式のハミルトニアンでは dimensionが合わなくなるので新しいハミルトニアンを $\bar{H} = H/a$ のようにしておく。ここで a はプラズマ半径である。このとき磁力線の方程式は次のようにかける：

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} \quad (20)$$

(18)式で第1と2項のみをとると、これは振り子の運動を表はすハミルトニアンと同じであり可積分である。これを

$$H_0(r, \theta) = \frac{g}{2}r^2 - f \cos\theta \quad (21)$$

と表すと、(20)の第2式を積分して軌道の振動数 ω は $\omega = \pi \omega_0 / 2K(k)$ のように表される。ここで $\omega_0 = (fg)^{1/3}$, $k^2 = (e+f)/2f$, K は第1種完全楕円関数である。 H_0 は時間 t に対して不変であるから、(20)式から H の変化はヘリカル摂動項により次ぎのように与えられる

$$\Delta H = -\int \frac{\partial}{\partial t} h \cos(1\theta - n\phi) dt \quad (22)$$

トロイダル角変数を $n\phi = \tau = \tau_0 + \Omega t$ のように置き換えると (24) 式はアーノルド積分を使って次のように表される：

$$\Delta H = h \lambda A_{21}(\lambda) \sin \tau \quad (23)$$

ここで、 $\lambda = \Omega / \omega_0$ であり、アーノルド積分はセパラトリックス上の時間依存の軌道 $\theta_{sx}(t) = 4 \tan^{-1} \exp(\omega_0 t) - \pi$ を用いて次のように定義されている。

$$A_m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos\left(\frac{m}{2} \theta_{sx}(t) - zt\right) \quad (24)$$

セパラトリックス附近 $k=1$ での ω の近似表現を用いると、次のようなセパラトリックスマッピングが導かれる：

$$w' = w - W_0 \sin \tau; \quad \tau' = \tau + \lambda \ln \frac{32}{|w'|} \quad (25)$$

ここで $w = (e-f)/f$ 、 $W_0 = h \lambda A_{22}(\lambda)$ である。(25) の第 2 式で w' とすることで変換のヤコビアン $J = \partial(w', \tau') / \partial(w, \tau) = 1$ とすることが出来、面積保存性を満たすことが出来る。

この (25) 式のマッピングの不動点は、 $\sin \tau = 0$ と $w_r = 32 \exp(-\pi n / \lambda)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のように与えられる。この式からこの不動点は $n \gg 1$ に対してセパラトリックス附近に密集していることがわかる。これら不動点の安定性は、変換 (27) を線形近似した線形変換行列 A の性質により調べられる。いまの場合、 $\text{Tr}(A) = 2 + W_0 \lambda \cos \tau / w_r$ のように与えられ、 $|\text{Tr} A| < 2$ のとき、不動点は安定である。従って、 $\cos \tau = -1$ ($\tau = \pi$) のとき $w_r > \lambda W_0 / 4$ 、 $\cos \tau = 1$ ($\tau = 0, 2\pi$) のとき $w_r < \lambda W_0 / 4$ で安定である。この性質は数値計算の結果と良く合っている。

次に変換 (25) からスタンダードマッピングを導く。マッピング (25) のストキャステイックな領域との境界値を w_s とするとき、その点からの変化を Δw として、 $\Delta w \ll w_s$ のとき (25) の第 2 式から $\tau = \tau + G - \lambda \Delta w / w_s$ となる、ここで $G = \lambda \ln 32 / w_s$ 。従って $I' = G - \lambda \Delta w / w_s$ 、 $\tau = \theta$ とおくと、よく知られたスタンダードマッピングが得られる；

$$I' = I + K \sin \theta; \quad \theta' = \theta + I' \quad (26)$$

ここで $K = -\lambda W_0 / w_s$ である。スタンダードマッピングが大域的にストキャステイックになる境界は $K_s = 0.9716$ である [8] からそれに対応するセパラトリックスマッピングがストキャステイックとなる境界値としては $w_s = \lambda |W_0|$ のように与えられる。とくに $h/f = 1$ とし $Q=1$ の場合は、次のように表される。

$$w_s = 8\pi\lambda^3 \exp\left(-\frac{\pi}{2}\lambda\right) \quad (27)$$

$Q=1$ の場合、いろいろな λ の値に対して、(25)式のセパラトリックスマッピングを 10000 回行った結果を図 4 a,b,c に示す。これらの結果から明らかのようにストキャステック領域の境界ははっきりしており、大きなアイランドにより曲線になるが平均したストキャステック領域の厚さ w_s を図5 に△印でプロットし (27) 式で与えられる理論値と比較している。図5に見られるように、10000 回のマッピングで求めたカオス領域の厚さ w_s と(27)式とは良く合っている。これらの数値計算を実行したMathematica [9] のプログラムも下にあげておく。

```
imax=10000 ;wo=0.01;tho=2.;lm=6.;
wi=16. 3.14 lm^4 Exp[-3.14 lm/2]/3.;ws=lm wi;Print[wi,ws];
points=Table[{0,0},{imax}];points[[1]]={tho,wo};
Do[w=wo-wi Sin[tho];th=tho+lm Log[Abs[32./w]];
th=Mod[th,6.283];
points[[i]]={th,w};wo=w;tho=th,{i,2,imax});
Show[Graphics[{PointSize[0.001],Map[Point,points]}],
Axes->Automatic,AspectRatio->1]]
```

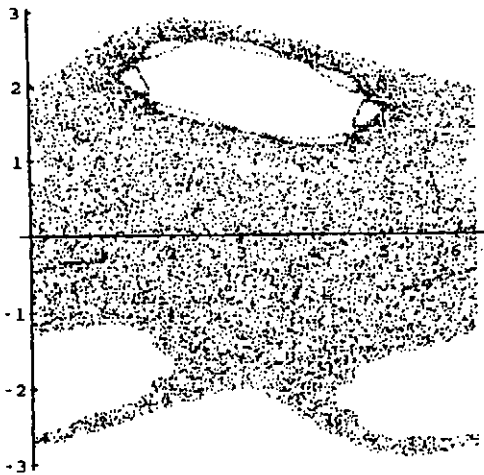


図 4 a ($\lambda = 4.44$)

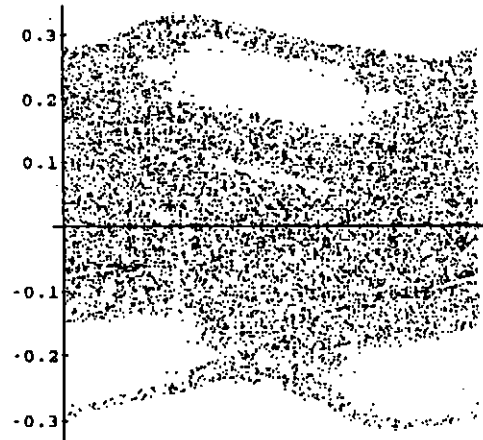


図 4 b ($\lambda = 6.28$)

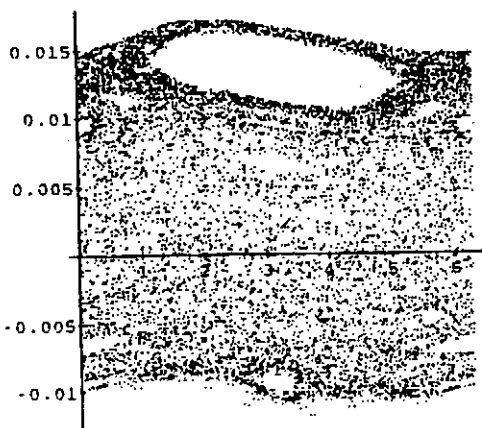


図 4 c ($\lambda = 8.88$)

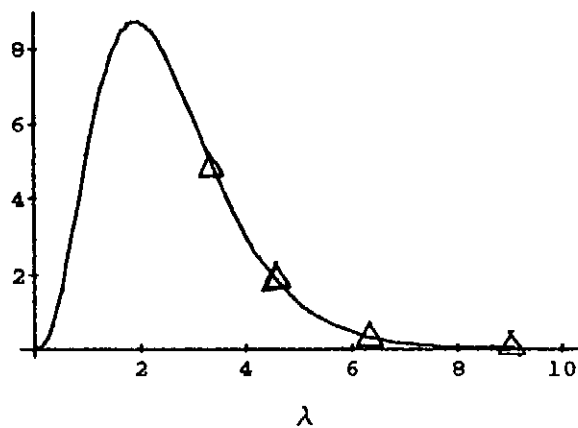


図 5 $l=1$ カオス領域の厚さ w_s

$Q=2$ の場合は厚さは $w_s = (16 \pi / 3) \lambda^5 \exp(-\pi \lambda / 2)$ のようになる。この場合も $Q=1$ の場合と大体同じで、いろいろな λ の値に対するマッピングの様子を図 6 a, b, c に示してある。またマッピングから得られた w_s を Δ 印で示し図 7 で理論値と比較している。この場合も両者の一致は比較的良い。以上のすべてのマッピングの初期値 $w_0=0.01$, $\tau=2$ は同一である。

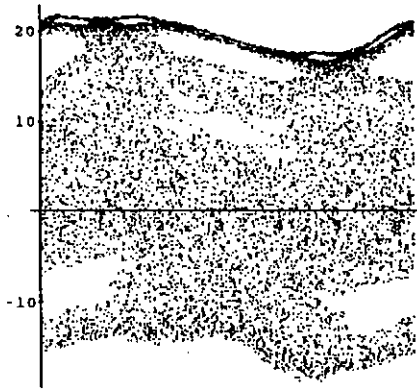


図 6 a ($\lambda=5$)

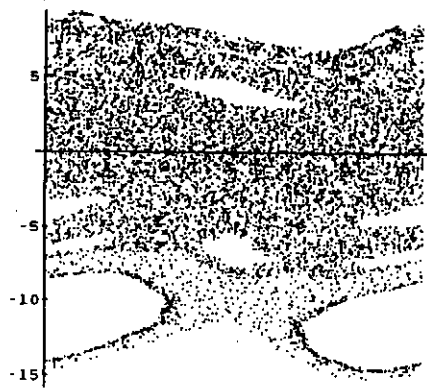


図 6 b ($\lambda=6$)

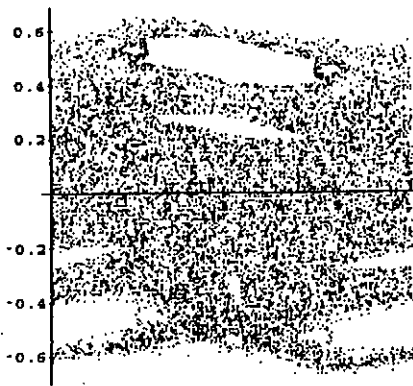


図 6 c ($\lambda=9$)

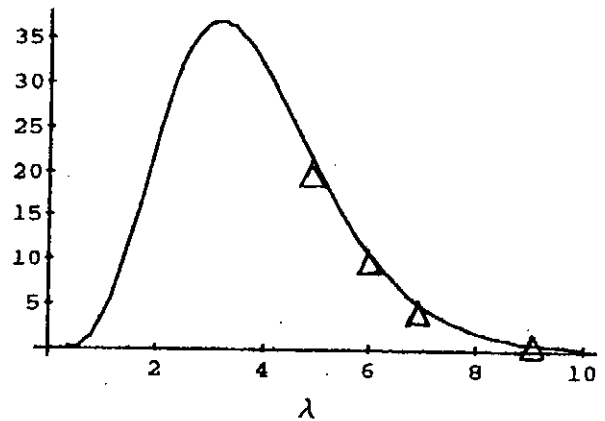


図 7 $Q=2$ カオス領域の厚さ w_s

6. まとめ

ヘリカルトーラス系における磁場を 2 重フーリエ展開法でトロイダル e_t , ヘリカル e_h について各オーダー毎に方程式を解いて、スカラーポテンシャル及びフラックス関数 (ハミルトニアン) を求め、応用した。この方法ではオーダーを指定するとそれに対応したフーリエモード数が自動的に決るので、各オーダーでどのように磁気面を变形するか判り易い。逆にフーリエ展開した場合、少ない展開項で比較的正確に近似することが出来る。この方法は $Q=3$ のヘリカルピンチに適用され $e_h > e_t = 1/6$ の場合トロイダルヘリカルカップリングの e_h, e_t のオーダーまで考慮するとかなり正確に磁気面を計算するこ

とが出来た。この低次のオーダーから順次高次オーダーへ解いていく方法はヘリカルトラス系でのMHD平衡の計算にも応用されている[10]。

フラックス関数でヘリカル1次トロイダル1次まで考慮に入れ、それ以上の高次オーダーを省略ても、異なったモードの重ね合わせであり、Two Waves Hamiltonian と等価であり軌道がストキャステイクになる様子を研究することが可能である。この単純化されたハミルトニアンにたいしてセパラトリックスマッピングの変換式を導き、Mathematica のプログラムにより実験を行ない、 $l=1$ と2の場合にセパラトリックス附近のストキャステイク領域の厚さをしらべた。その結果スタンダードマッピングがストキャステイクになる臨界条件 $K=1$ から導いた理論値と良く合うことが分かった。

単純化したハミルトニアンを使い、他にもいろいろなマッピングの式を導き実験を行なった。最も重要なことは、面積保存条件つまり、ヤコービアン $J=1$ を厳密に満たさなければならぬことである。この条件は近似が許されず、少しでもこの条件が満たされず $J < 1$ となると、散逸系にかわってしまう。この時軌道のストキャステイクな様相が全く変わりストレンジアトラクターとなる。保存系のマッピングを改良する場合、この $J=1$ の条件を厳密に満たす変換式を導くことが困難な点である。

参考文献

- [1] L. S. Solovév and V. D. Shafranov, Reviews of Plasma Physics, Vol. 5, Consultant Bureau, New York, 1970.
- [2] R. J. La Haye, T. Yamagishi, M. S. Chu, et al., Nucl. Fusion, 21(1981)1235.
- [3] T. Hatori, H. Irie, Y. Abe, and K. Urata, Progress of Theoretical Phys. Supplement No. 98(1989)83.
- [4] D. F. Escande, Physics Report, 121(1985)167.
- [5] F. M. Hamzeh, Nuclear Fusion, 14(1974)523.
- [6] B. V. Chirikov, Physics Reports, 52(1979)263.
- [7] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] J. M. Greene, J. Math. Phys., 20(1979)1183.
- [9] S. Wolfram, Mathematica, A system for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesely Publishing Co., New York, 1988.
- [10] T. Yamagishi, M. S. Chu, W. Bard, Nuclear Fusion, 22(1982)527.

Quasi-Periodic Perturbation for the Alfvén Wave

Y. Yamakoshi, K. Muto and Z. Yoshida

Department of Quantum Engineering and Systems Science,
Faculty of Engineering, The University of Tokyo
Hongo, Tokyo 113, Japan

Abstract

Two-dimensional periodic modulation of the ambient magnetic field causes field lines to be chaotic and yields a quasi-periodic potential for the Alfvén wave. The wave equation derived here is similar to the one-dimensional Schrödinger equation in a quasi-crystal. For the quasi-periodic potential, the Alfvén continuum changes into point spectra and solutions of the wave equation are localized in a finite region.

1 Analogy with Solid-State Physics

Before discussing the localization of Alfvén waves, we make comments on the similarity between the spectrum of Alfvén waves in a magnetized plasma and that of valence electrons in a crystal lattice [1]. This similarity is very suggestive to understand the spectral study of Alfvén waves in nonuniform magnetic field.

The properties of solid, such as the state of electrons, are characterized by the potential in the Schrödinger equation. In the free-electron model, the one-dimensional Schrödinger equation is written by

$$\mathcal{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi = E\psi. \quad (1)$$

When the wave function ψ satisfies the periodic boundary condition $\psi(x) = \psi(x + L)$, ψ takes the form

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx), \quad (2)$$

where $k = k_n \equiv 2\pi n/L$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). The energy spectrum is $E_k = \hbar^2 k^2/2m$ for the wavenumber k . Though the wavenumber and the energy spectrum are discrete numbers because n is any integer, they can be treated as continuous numbers for large L . Thus the spectrum in free-electron model has arbitrary energy level. The Schrödinger equation for free electron model corresponds to the eigenvalue problem of the operator $-\nabla^2$.

Electrons in a crystal lattice, however, cannot have arbitrary energy, so the gaps yield between continuous spectra. The reason for this phenomenon originates from Bragg reflection of electron wave by the crystal lattice. When the potential $V(x)$ is periodic, for example, $V(x) = \epsilon \cos(2\pi x/a)$, the solution of the Schrödinger equation

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \epsilon \cos(2\pi x/a) \right] \psi = E\psi, \quad (3)$$

results in Mathieu function, which has been extensively studied. If we assume the small perturbation, i.e., $\epsilon \ll 1$, wave functions are approximated by those of free-electron model. However, when the wavenumber k satisfies the Bragg condition $k = k_n \equiv n\pi/a$, the degeneracy in the unperturbed state is removed and two standing waves $\psi_{\pm} \sim e^{ik_n x} \pm e^{-ik_n x}$ are produced for each n . The energy gap between those states are calculated by

$$\Delta E \sim \langle \psi_{k_n} | V(x) | \psi_{k_n} \rangle \sim \epsilon. \quad (4)$$

Next we discuss the similarity between Alfvén waves in magnetized plasma and valence electrons in a crystal lattice mentioned above. Alfvén waves in nonuniform plasma have continuous spectra with forbidden bands, as

well as the electron waves in a periodic potential have. The formal analogy is shown below [1]; the curvature of the field lines corresponds to the potential of crystal lattice, the poloidal angle to the length between ions in the lattice, the Alfvén wave function to the electron wave function, and the spectrum of Alfvén wave to the energy of electrons.

There is another remarkable analogy between them; either Alfvén waves or electron waves are localized in disordered media, which is known as Anderson localization [2]. While in a periodic potential the wave function of electrons spreads over the whole region, in a random potential they do not extend but are localized in a finite area and point spectra for it appear in the forbidden band. The study on localization in random media originates in the study on materials with random potential, such as amorphous or crystal with impurities. Recently, it has been applied to other wave equations, such as light and Alfvén wave propagation or heat transport.

The simplest model of localization is one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. The property of this equation is fully investigated [3, 4]. The wave equation we will consider for Alfvén wave is given by

$$-(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \nabla)^2 \psi = \frac{\omega^2}{V_A^2} \psi \equiv E \psi, \quad (5)$$

where $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ is a normalized magnetic field, ω is a frequency and V_A is Alfvén speed. Though the Alfvén wave equation is formally different from the Schrödinger equation

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi = E \psi, \quad (6)$$

one can easily find that the solution of equation (5) is strongly dependent on the magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

In this paper we assume that the magnetic field is the ABC flow [5] which can cause chaos. This chaotic magnetic field corresponds to a higher dimensional periodic perturbation, which is reduced to a quasi-periodic potential for Alfvén wave. The Alfvén wave equation derived here resembles one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. Under the condition that the modulation is relatively large, localized eigen modes appear and the Alfvén continuum changes into point spectra.

2 MHD Spectrum

In this section we derive linearized ideal MHD equations for the nonuniform plasma [6, 7], and we discuss the Alfvén wave equation. The linearized MHD equation is very important in the field not only of spectral analysis but of MHD equilibrium or stability.

First we consider the MHD equilibrium. All of physical quantities are divided into two parts: $Q(\mathbf{x}, t) = Q_0(\mathbf{x}) + Q_1(\mathbf{x}, t)$. Substituting these quantities to the set of MHD equations, we find the equilibrium condition is given by

$$\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = \nabla p_0, \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad v_0 = 0. \quad (7)$$

Next we introduce a vector ξ which is defined by $v_1 \equiv \partial \xi / \partial t$ and derive the linearized equation for ξ . The vector ξ indicates the displacement from the plasma equilibrium. The other perturbed quantities are represented by ξ and equilibrium components, i.e.,

$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0), \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0). \quad (10)$$

Substituting these quantities into the linearized momentum equation

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_1, \quad (11)$$

then we obtain second order derivative equation of ξ

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathcal{K} \xi, \quad (12)$$

where \mathcal{K} is a linear operator defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \xi = & \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times (\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)) \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0))) \times \mathbf{B}_0 + \nabla (\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Solving the initial value problem of equation (12) is equivalent to solving the eigenvalue problem of the operator \mathcal{K} and the latter is often efficient for spectral analysis. Assuming the dependence of perturbed quantities $Q_1(\mathbf{x}, t) = \bar{Q}_1(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$, equation (12) is then written by

$$-\omega^2 \rho_0 \bar{\xi} = \mathcal{K} \bar{\xi}. \quad (14)$$

This eigenvalue problem is generalized by spectral analysis (see e.g. [6]). The property of a linear operator \mathcal{A} is characterized by its resolvent operator $R_\lambda = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, where λ is any complex number and I is the identity. The set of complex λ such that R_λ exists and that the domain of R_λ is dense and continuous, corresponds to the resolvent set $\rho(\mathcal{A})$. Spectrum $\sigma(\mathcal{A})$ is a complementary set of $\rho(\mathcal{A})$, i.e., $\sigma(\mathcal{A}) = C \setminus \rho(\mathcal{A})$. Furthermore, $\sigma(\mathcal{A})$ is divided into point spectrum $\sigma_P(\mathcal{A})$, continuous spectrum $\sigma_C(\mathcal{A})$ and residual spectrum $\sigma_R(\mathcal{A})$. The definitions of these three spectra are as follows; $\sigma_P(\mathcal{A}) = \{\lambda | R_f \text{ does not exist}\}$, $\sigma_C(\mathcal{A}) = \{\lambda | R_f \text{ exists and the domain of } R_f \text{ is dense but is not continuous}\}$ and $\sigma_R(\mathcal{A}) = \{\lambda | R_f \text{ exists and the domain of } R_f \text{ is not dense}\}$. In order to advance more, one has to consider special MHD equilibria [8].

Equation (12) is very complicated but under the condition $\nabla \cdot \xi = 0$, (12) is reduced to

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)^2 \xi - \nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right). \quad (15)$$

Operating with $\nabla x \cdot \nabla \times$ on both side of equation (15), we obtain Alfvén wave equation

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)^2 \psi, \quad (16)$$

where $\psi = \nabla x \cdot \nabla \times \xi$. Under the condition $\nabla \cdot \xi = 0$, there are two modes that can propagate in the inhomogeneous plasma. One is the component of the vorticity that propagate one dimensionally along the field lines and the other is coupled to the velocity component along the direction in which the magnetic field varies. The latter mode is obtained by solving more complicated three-dimensional equation [9].

3 ABC Flow

As mentioned in the previous section, the structure of magnetic field is related to the wave that propagates along field lines one-dimensionally. In this section we discuss magnetic chaos and take the ABC flow as an example of it.

The magnetic field line, the stream line of magnetic field, is not compressible because $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. This suggests that the equation of magnetic field line can be written by the Hamiltonian form. Generally solenoidal vector fields are represented by stream functions (Clebsch representation) and this representation is very useful for the Hamiltonian form.

The Beltrami function, the eigen function of curl operator, is often investigated for the study of chaotic magnetic field lines. Beltrami functions satisfy

$$\nabla \times \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (17)$$

where λ is a constant parameter. In the fluid dynamics, this equation (17) means that the vorticity parallels to the flow. In plasma physics, the magnetic field that satisfies equation (17) is called force-free field because the vorticity of the magnetic field is proportional to the current density, thus the force added into the plasma is zero. The eigenvalue problem of curl operator is discussed minutely in [10, 11].

The ABC flow is one of the Beltrami functions and is a very simple vector function composed only of trigonometric functions;

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A \sin \lambda z + C \cos \lambda y \\ B \sin \lambda x + A \cos \lambda z \\ C \sin \lambda y + B \cos \lambda x \end{pmatrix}, \quad (18)$$

where A, B, C and λ are real constants. One finds that this vector function is a solution of equation (17) and that λ is an eigenvalue of the operator $\nabla \times$. Though whether the field without symmetry has an equilibrium or not has not been proven, the ABC flow is an exact equilibrium field.

The ABC flow is also described by the Hamiltonian form. Clebsch representation on \mathbf{B} is

$$\mathbf{B} = \nabla \chi \times \nabla y + \nabla \Psi \times \nabla z, \quad (19)$$

where

$$\chi = \lambda^{-1}(B \sin \lambda x + A \cos \lambda z) + Cx \sin \lambda y \quad (20)$$

$$\Psi = \lambda^{-1}(C \sin \lambda y + B \cos \lambda x) - Ax \cos \lambda y. \quad (21)$$

The equation of magnetic field line is then written by

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}. \end{aligned} \quad (22)$$

When none of A, B and C is zero, field lines no longer lie on the magnetic surfaces but move in the three-dimensional space because Ψ depends not only on angle or action variables but on time variable z .

Though Ψ cannot be explicitly written as a function of χ, y and z , we can solve the equation of field lines $dx/ds = \mathbf{B}(x)$, where $x = (x, y, z)$. Figures 1, 2 and 3 show the Poincaré plots of the ABC flow. There exist magnetic surfaces in the whole area when at least one coordinate is neglected. On the other hand, magnetic surfaces are destroyed when there are no negligible coordinates.

4 1D Alfvén Wave Equation

In this section we show the higher dimensional modulation is reduced to a quasi-periodic potential for Alfvén wave and derive one-dimensional wave equation along magnetic field lines. For this purpose we assume that the equilibrium field is divided into two parts: $\mathbf{B}^{(0)}(x) = (0, B \sin \lambda x, B \cos \lambda x)$ and $\mathbf{B}^{(1)}(y, z) = (A \sin \lambda z + C \cos \lambda y, A \cos \lambda z, C \sin \lambda y)$ and that the perturbed term is sufficiently small: $|A|, |C| \ll |B|$.

First we consider the unperturbed magnetic field $\mathbf{B}^{(0)}(x)$. In this case, constant x gives magnetic surfaces and the wave propagating on each surface is characterized by mode number m and n , where wave function $\psi(y, z)$ is assumed to be expanded as the form $\psi(y, z) = \sum_{m,n} a_{m,n} \exp(i\lambda m y + i\lambda n z)$ for constant x . Substituting the unperturbed magnetic field $\mathbf{B}^{(0)}(x)$ into (16), we obtain partial differential equation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = V_A^2 \left(\sin \lambda x \frac{\partial}{\partial y} + \cos \lambda x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \psi, \quad (23)$$

where $V_A = B/\sqrt{\rho_0 \mu_0}$ is Alfvén velocity. Since x can be treated as a parameter, independent variables y, z of equation (23) are reduced to s that satisfies $\nabla s = \mathbf{B}^{(0)}/|\mathbf{B}^{(0)}|$. Transforming the Cartesian coordinates (y, z) into

($s, \lambda x$), i.e., $y = s \cos \lambda x, z = s \sin \lambda x$, we obtain

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi. \quad (24)$$

Assuming the wave function ψ with an exponential time dependence $\exp(-i\omega t)$, (24) results in the eigenvalue problem of Laplacian:

$$-\frac{d^2}{ds^2} \psi = E\psi, \quad (25)$$

where $E = \omega^2/V_A^2$.

When the perturbed term for $B^{(0)}$ is considered, the wave function is no longer characterized by mode number. In this case, however, there still exist local solutions along single field lines [12]. The higher dimensional modulation $B^{(1)}$ whose amplitudes are sufficiently small is reduced to a quasi-periodic potential for Alfvén wave because of the property of Alfvén wave to propagate one-dimensionally [13]. If the wavelength $\sim 1/k$ is much smaller than the characteristic length of media $\sim 1/\lambda$, then Alfvén wave is decoupled from other modes and we obtain

$$-E\psi = \left[\frac{\partial}{\partial s} + (a_1 \sin \lambda z + a_2 \cos \lambda y) \frac{\partial}{\partial x} + a_1 \cos \lambda z \frac{\partial}{\partial y} + a_2 \sin \lambda y \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \psi + \mathcal{O}(\lambda), \quad (26)$$

where $a_1 = A/B$ and $a_2 = C/B$. Assuming that $\partial_x \psi = 0$ at $x = x_0$ for simplicity, the wave propagates on a magnetic surface of $B^{(0)}$. Let the angle between the wave vector k and $B^{(0)}$ be $\tan^{-1} \kappa$, where $\kappa = k_{\perp}/k_{\parallel}$. The value κ is relatively large because the wave has a shorter wavelength across field lines than along them. For the fixed κ , ψ is written as $\psi(s)$ and we get one-dimensional Alfvén wave equation [13]

$$-\frac{d}{ds}(1+V(s))^2 \frac{d}{ds} \psi = E\psi, \quad (27)$$

where $V(s)$ is a potential for the Alfvén wave generated by the perturbed term. The potential $V(s)$ is of the form

$$V(s) = \nu_1 \cos(\lambda \mu_1 s) + \nu_2 \sin(\lambda \mu_2 s + \theta_0), \quad (28)$$

where $\nu_1 = a_1(\sin \lambda x_0 + \kappa \cos \lambda x_0)$, $\nu_2 = a_2(\cos \lambda x_0 - \kappa \sin \lambda x_0)$, $\mu_1 = \cos \lambda x_0$, $\mu_2 = \sin \lambda x_0$ and x_0 and θ_0 are fixed numbers.

When either A or C is zero, or the ratio $\sigma = \mu_2/\mu_1$ is a rational number, $V(s)$ is a periodic function. On the other hand, when neither A nor C is zero and σ is irrational, $V(s)$ is a quasi-periodic potential, and it is expected that the behavior of solutions for the latter potential is completely different from that for former one. The waveform of potential $V(s)$ with irrational $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2$ is shown in Fig.4.

5 Results

In this section we calculate the one-dimensional Alfvén wave equation derived in the previous section numerically and show that the localized modes and point spectra appear when the modulation is two-dimensional, i.e., the magnetic field lines are chaotic.

Spectral study on Schrödinger operators with quasi-periodic potential has been investigated theoretically [3] or numerically [4, 12]. According to those papers, when the eigen value parameter E is relatively small and the amplitude of the potential is greater than a critical value, localized solution of Schrödinger equation can exist which decay to zero exponentially at both side of the domain. Similar results are shown for the one-dimensional Alfvén wave operator $-d/ds(1+V(s))^2 d/ds$ in the following.

We treat the eigenvalue problem (27) both as an initial value problem and as a boundary value problem. These two methods compensate each other.

The eigenvalue problem (27) is written in a recursive form as

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{E}{(1+V(s))^2} & -\frac{2\dot{V}(s)}{1+V(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (29)$$

where f indicates the derivative of function f . The equation (29) can be solved if initial value $\psi(0) = (\psi(0), \dot{\psi}(0))$ is given. Here eigenvalue parameter E is not an eigen value but takes an arbitrary value. In order to solve the spectra of equation (27), a set of one order differential equations (29) must be investigated for all E , which requires iterative calculations. When the eigenvalue E belongs to point spectra, the corresponding solution ψ decays to zero at both endpoints. However, it may diverges at large s because of the slight error of E . These defects are overcome by treating equation (27) as a boundary value problem. As for the instability in the initial value problem, shooting is also useful as discussed later. The solution by shooting is a kind of that of initial value problem. However, there are advantages in the initial value problem; we can easily find whether the eigenvalue parameter E belongs to continuous spectra or to point spectra.

Since equation (29) is a linear system, Lyapunov exponents of this system are easily calculated by multiplying discrete matrices in (29). Generally, property of a system described as ordinary differential equations like (29) is characterized by their Lyapunov exponents. The numerical methods for calculating Lyapunov exponents are summarized in [14].

Here, however, we do not solve equation (29) directly but introduce the phase angle $\phi(s) (= \tan^{-1} \sqrt{E} \psi(s) / \dot{\psi}(s))$ so that the numerical instability could be avoided. The evolution of $\phi(s)$ is then described as a nonlinear differential equation

$$\frac{d\phi}{ds} = \sqrt{E} \cos^2 \phi + \sqrt{E} (1 + V(s))^{-2} \sin^2 \phi, \quad (30)$$

where we neglect the first-order derivative of $V(s)$ in equation (29). From the evolution of $\phi(s)$ we can calculate winding number [4, 12, 15] defined by

$$w(E) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi(s)}{s}. \quad (31)$$

The winding number corresponds to the final value of angular velocity in the phase space and is a nondecreasing continuous function of E with plateaus where $w(E)$ has a constant value $(m\mu_1 + n\mu_2)/2$, ($m, n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$). According to theoretical studies, gaps between spectra appear in the constant $w(E)$. In other words, the resolvent of equation (27) or (29) consists of such values E as are in the plateaus. Thus the winding number $w(E)$ is a function that classifies the domain of resolvent operator into two groups—resolvent and spectrum.

Furthermore, spectrum is divided into three groups—point spectrum, continuous spectrum and residual spectrum. We are now considering only a self-adjoint operator, so the residual spectrum does not exist. Lyapunov exponent of wave function or of phase angle is a strong tool for distinguishing continuous spectra from point spectra. The linearized equation of (30) is given by

$$\frac{d\delta\phi}{ds} = \sqrt{E} \sin 2\phi [(1 + V(s))^{-2} - 1] \delta\phi, \quad (32)$$

where $\delta\phi(s)$ is a small perturbation of $\phi(s)$. Lyapunov exponent, defined as

$$\Lambda_\phi(E) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln(\delta\phi(s)/\delta\phi(0))}{s}, \quad (33)$$

is obtained without reorthonormalization since (32) is one-dimensional equation. When $\Lambda_\phi(E) = 0$, the wave function $\psi(s)$ does neither diverge nor decay to zero. In this case, corresponding eigenfunction belongs to continuous spectrum. On the other hand, when $\Lambda_\phi(E) < 0$, the solution of wave equation is either unstable or localized. More precisely, unstable solution and localized solution belong to resolvent and to point spectrum, respectively. Thus Lyapunov exponent $\Lambda_\phi(E)$ distinguishes continuous spectrum from others. Calculating both $w(E)$ and $\Lambda_\phi(E)$, we find which group the eigenvalue parameter E consists in. The relation between them is summarized in Table 1.

The eigenfunction solved directly from equation (29) is numerically unstable. This difficulty can be avoided by using the method called shooting. The way of calculation by shooting is following; after imposing initial conditions on both end points, the eigenvalue parameter E and its eigenfunction are determined so that the logarithmic derivations take the same value at the center of the domain. Whether E is spectrum or not depends on a discriminant defined as

$$F(E) = \dot{\psi}_+ \psi_- - \dot{\psi}_- \psi_+, \quad (34)$$

where ψ_+ (ψ_-) indicates a solution solved toward plus (minus) direction. The distribution of spectra is found out as an assemblage of a point over which the sign of the discriminant $F(E)$ changes. More accurate spectra and corresponding eigenfunctions, however, should be determined from so called regula falsi method.

Next we treat the equation (27) as a boundary value problem. Because localized solutions require the boundary conditions $\lim_{a-\infty} \psi(a) = 0, \lim_{b-\infty} \psi(b) = 0$, it is proper to give such a condition from the beginning. The eigenvalue problem of differential operator in (27) results in an eigenvalue problem of matrix. Under given boundary conditions the discrete equation for (27) takes the form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-1} & \gamma_{N-1} & \\ 0 & & & & \beta_{N-1} & \alpha_N & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad (35)$$

where diagonal and off-diagonal elements α_j and $\beta_j = \gamma_j$ are given by

$$\alpha_j = \frac{(1 + V_{j-\frac{1}{2}})^2}{h^2} + \frac{(1 + V_{j+\frac{1}{2}})^2}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

$$\beta_j = \gamma_j = -\frac{(1 + V_{j+\frac{1}{2}})^2}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (37)$$

and $h = (b - a)/(N + 1)$. This formula requires the assumption that the step width h is much smaller than the characteristic length of the potential $V(s)$ and that $|b - a|$ is sufficiently large. The matrix of the eigenvalue problem (35) is symmetric tridiagonal one, hence the procedure of calculation from it is remarkably easier than that for general matrices. The characteristic equation of matrix A :

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (38)$$

provides eigenvalues. Simple regula falsi method is used for solving the characteristic equation in [4]. Here, however, we adopt another method based on Sturm's theorem [16]. Corresponding eigenvectors are computed by inverse iteration method [16].

The essence of calculation from boundary value problem is that we find the value of E instead of using E as a parameter, therefore it does not take much time to compute the spectra from boundary value problem compared with initial value problem.

We show an overview of the continuous spectrum of equation (27) in Fig.5. The continuous spectrum, which corresponds to $\Lambda_\phi(E) = 0$, is plotted for various E and ν_1 , with σ and ν_2 fixed. We find that the band structure varies as the amplitude ν_1 increases; the region where continuous spectra exist is separated or even disappears for large ν_1 . In the case of a periodic potential, E that belongs to σ_C still exists for large amplitudes, even though the region of such E becomes narrow. On the other hand, a quasi-periodic potential transforms the continuum to point spectra as we will see in the following. In Fig.6, Lyapunov exponent $\Lambda_\phi(E)$, winding number $w(E)$, and spectra from several methods are plotted for $\nu_1 = \nu_2 = 0.4$ and $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2$. As pointed out in the above, $\Lambda_\phi(E) = 0$ corresponds to σ_C and $dw(E)/dE = 0$ to ρ . For small or large E , the complementary set of $\{E | \Lambda_\phi(E) = 0\}$ is equal to the set of $\{E | dw(E)/dE = 0\}$. In the region of moderate E , however, there is such an eigenvalue parameter E that satisfies $\Lambda_\phi(E) < 0$ and $dw(E)/dE = 0$, which suggests the existence of point spectra. Here we choose the wavenumber of the magnetic field λ as $\lambda = 2\pi$. Though $E(\sim k_\parallel^2)$ is smaller than λ^2 in the present case, the condition $|k/\lambda| \gg 1$ is still valid because $\kappa = k_\perp/k_\parallel$ is sufficiently large. Eigenfunctions are found from the boundary value problem and shooting method. Figure 7 shows the eigenfunctions from boundary value problem and the quasi-periodic potential for the waves. The eigenfunctions that belongs to σ_C are extended solutions. On the other hand, point spectra yield localized solutions that decay into zero at both endpoints. In addition to them, unstable solutions that grow exponentially at the endpoints were found because numerical errors allow their spectra to appear in the gap.

References

- [1] D.A.D'Ippolito and J.P.Goedbloed, *Plasma Phys.* **22**, 1091 (1980).
- [2] P.W.Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [3] B.Simon, *Adv. Appl. Math.* **3**, 463 (1980).
- [4] A.Salat, *Phys. Rev. A* **45**, 1116 (1991).
- [5] T.Dombre, U.Frisch, J.M.Greene, H.Hénon, A.Mehr and A.M.Soward, *J.Fluid Mech.* **167**, 353 (1986).
- [6] J.P.Freidberg, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 801 (1982).
- [7] G.Bateman, *MHD Instabilities* (The MIT Press, Cambridge, 1978).
- [8] J.P.Goedbloed, *Phys. Fluids* **18**, 1258 (1975).
- [9] A.Hasegawa and C.Uberoi, *The Alfvén Wave*, DOE Critical Review Series DOE/TIC-11197 (Technical Information Center, U.S. Department of Energy, Springfield, VA, 1982).
- [10] Z.Yoshida and Y.Giga, *Math. Z.* **204**, 235 (1990).
- [11] Z.Yoshida, *J. Math. Phys.* **33**, 1252 (1992).
- [12] A.Salat, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **34**, 1339 (1991).
- [13] Z.Yoshida, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3168 (1992).
- [14] A.Crisanti, G.Paladin and A.Vulpiani, *Products of Random Matrices* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [15] R.Johnson and J.Moser, *Commun. Math. Phys.* **84**, 403 (1982).
- [16] M.Mori, *Programming for Mathematical Computations* (The Iwanami Computer Science Series, 1988), in Japanese.

Table 1: The classification of E , ρ , σ_C and σ_P correspond to the resolvent set, continuous spectrum and point spectrum, respectively.

	$\{E dw(E)/dE = 0\}$ $= \rho$	$\{E dw(E)/dE \neq 0\}$ $= \sigma_C \cup \sigma_P$
$\{E \Lambda_\phi(E) = 0\}$ $= \sigma_C$	$\sigma_C \cap \rho$ $= \emptyset$	$\sigma_C \cap (\sigma_C \cup \sigma_P)$ $= \sigma_C$
$\{E \Lambda_\phi(E) \neq 0\}$ $= \rho \cup \sigma_P$	$(\rho \cup \sigma_P) \cap \rho$ $= \rho$	$(\rho \cup \sigma_P) \cap (\sigma_C \cup \sigma_P)$ $= \sigma_P$

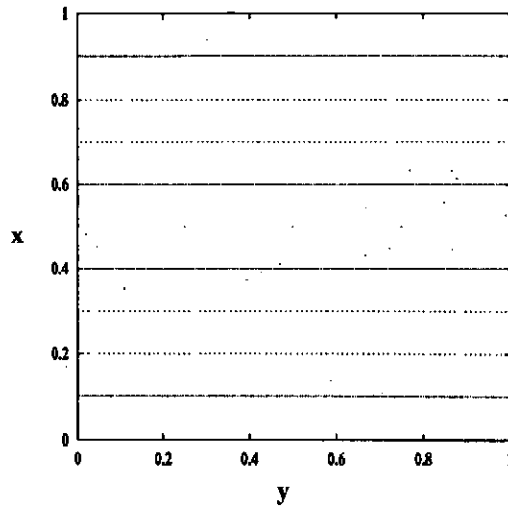


Figure 1: Poincaré plot of ABC flow for $B = 1$ and $A = C = 0$.

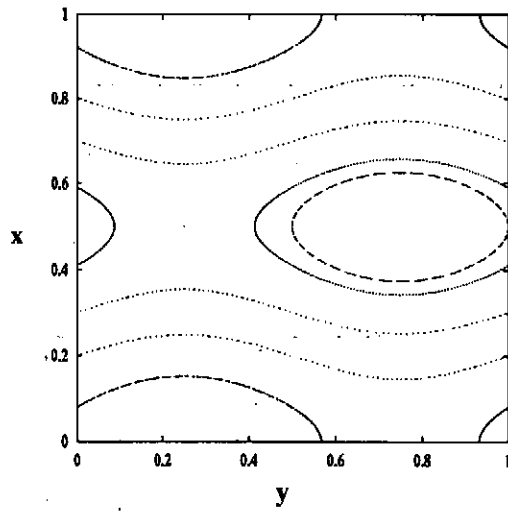


Figure 2: Poincaré plot of ABC flow for $B = 1$, $C = 0.3$ and $A = 0$.

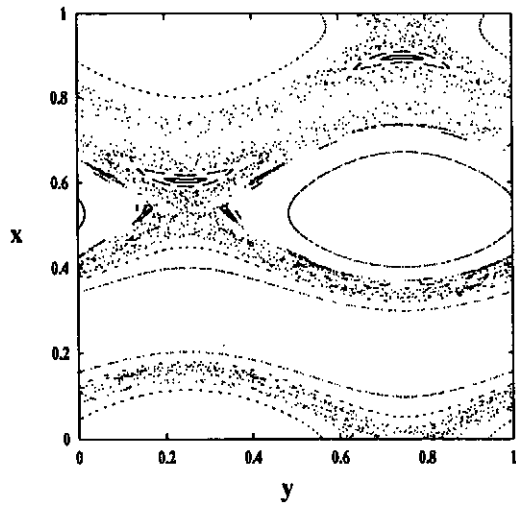


Figure 3: Poincaré plot of ABC flow for $B = 1$, $C = 0.3$ and $A = 0.2$.

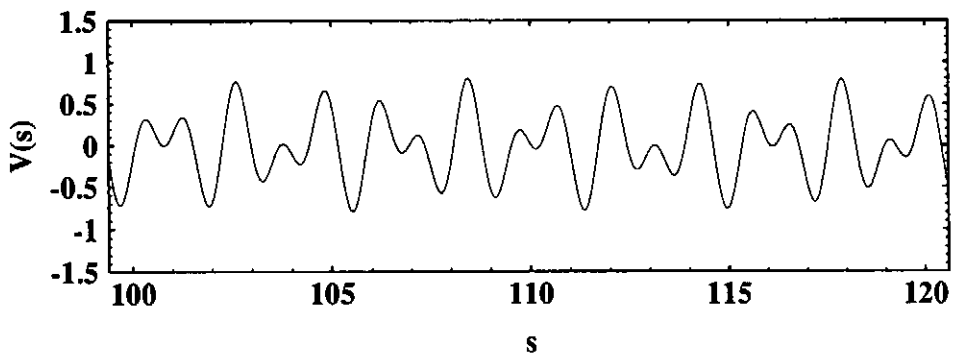


Figure 4: Quasi-periodic potential for $\nu_1 = \nu_2 = 0.4$ and $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2$.

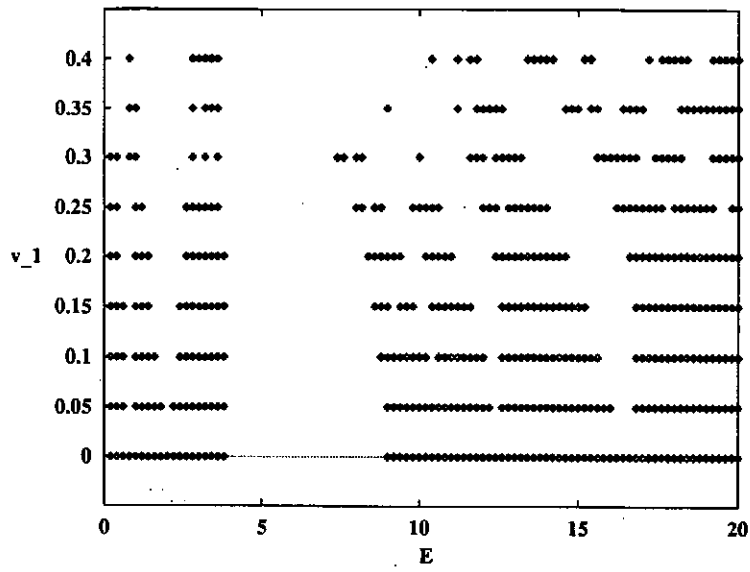


Figure 5: Overview of continuous spectrum for constant $\nu_2 = 0.4$.

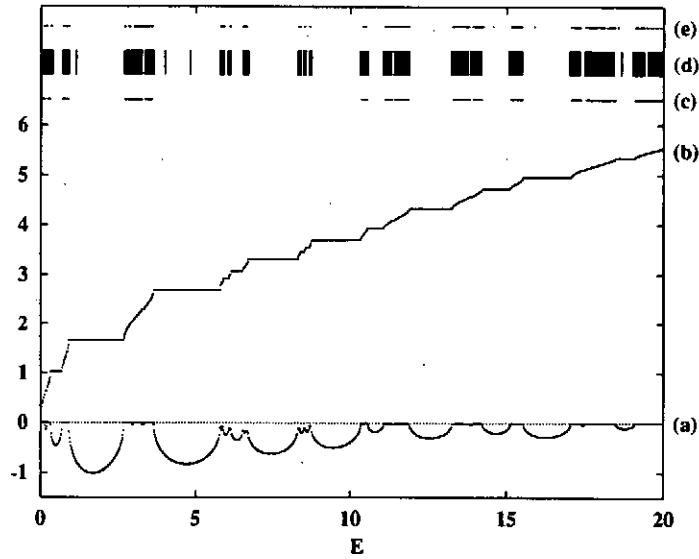


Figure 6: (a) Lyapunov number. (b) Winding number. (c) Continuous spectra. (d) Spectra obtained from boundary value problem. (e) Spectra obtained from shooting method. $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2$.

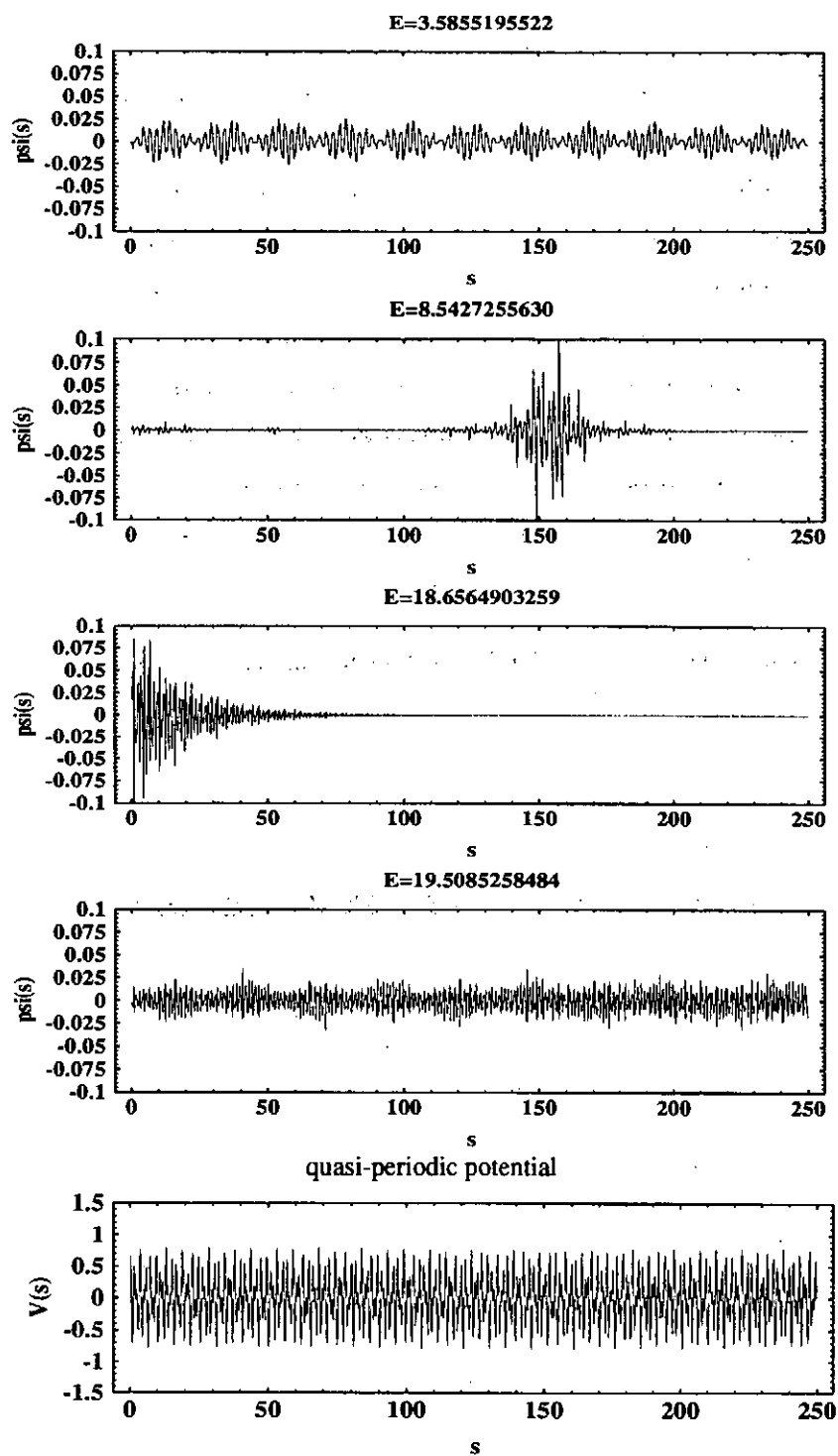


Figure 7: Eigenfunctions from boundary value problem and quasi-periodic potential along s .

ニューロン・マグネトロン・小宇宙の $1/f^{**\alpha}$ ノイズ

谷塚 昇, 岡田年明, 高野雅大

大阪府立大学総合科学部

$1/f^{**\alpha}$ Noise from Neuron, Magnetron and Galaxy

N.Tanizuka, T.Okada, M.Takano

Integrated Arts & Sciences, University of Osaka Prefecture

Abstract

Noise in laboratory plasmas, biological plasmas and cosmic plasmas is a chaos, which evolves to a cosmos in the process of self-organization.

Experimental and observational discussions of these noise are given and the question which algorithm is included in the noise system is still an open problem.

Keywords:neural networks,magnetron noise,galactic noise,self-organization, algorithm.

1. カオスとコスモス

カオスは、未分化の混沌状態を意味し、意味においてその反対の位置にあるものがコスモス（宇宙）である。カオスからコスモスへは、秩序を与える作用があって変化する。コスモスのギリシャ語の本来の意味は、秩序である/1/。カオスの言葉には、秩序の意味が内蔵されていると考えられる。

秩序とは、あるシステムの規則立った関係、と定義されている。例えば、経済システムに秩序＝規則立った関係が必要である。規則立った関係を維持するものは通貨である。通貨は経済法則に従う価値の情報を運び、システムの秩序を維持する。もしシステムの一部に不均衡が生じ、不安定が発生すると、不安定をを安定化させる方向に通貨の価値がゆらぎ、システムの維持が行われる。もしディスラプションを起こし、今までのシステムが維持不可能となると、秩序が維持できるような新システムの再構築が行われる。経済に物理、通貨に物質・エネルギー、通貨の価値に物理変数を置き換えると、経済システムが物理システムに、秩序は構造に置き換わる。カオスとコスモスの間には、システムを維持するためのアルゴリズム、情報伝達・処理、自己組織、ゆらぎのキーワードで結べる概念が存在することが解る。

上の記述から、ゆらぎはシステムの秩序や構造の生成に深い関わりがあることが解る。ゆらぎが観測される所には、秩序・構造をもつシステムが存在する。全く情報が含まれていないゆらぎの信号 $s(t)$ を周波数解析すると白色雑音 $w(t)$ となる。純粋な混沌状態は、信号に過去の記憶情報が全く含まれていない。 $s(t)$ の自己相関関数は $C(\tau) = \langle s(t)s(t+\tau) \rangle$ ($\langle \rangle$:平均)である。 $w(t)$ の自己相関関数は $C(\tau) = k\delta(\tau)$ (k :定数, $\delta(\tau)$:デルタ関数)で、ラグ τ に関する信号自身の記憶情報はない。ウィナー・ヒンチンの定理から、 $s(t)$ のパワー・スペクトル密度 $P(f)$ (f :周波数)と $C(\tau)$ は、一方が解れば他方が計算できる関係にある。周波数領域 $f' < f < f'$ での密度関数を

$$P(f, \alpha, f', f') = k' f^{-\alpha} \quad (k': \text{正定数}, \alpha: \text{定数}) \quad (1)$$

と定義する。信号が $w(t)$ の時 $P(f) = P(f, 0, 0, \infty) = k'$ である/2/。

秩序・構造に関する情報の量はエントロピー H で表現される。 $H = - \int p(X) \cdot \log p(X) dX$ ($X = x_1, x_2, \dots$) は情報理論でシンボル当りの平均情報量、無秩序さの度合いを示す。アルファベットをランダムまたは出現確率に従って並べると、そのアルファベットの並びは、単語散布確率の割当て方法が言語の法則（秩序）への束縛のされ方がきついで、その言語の構造が良く現れると共に、エントロピーの値が小さく出てくる/3/。

X が時系列信号 $s(t)$ の場合、エントロピーとパワー・スペクトル密度 $P(f)$ の間に $H = c \int \log P(f) df$ の関係があり/4/、(1)式の $P(f, \alpha, f', f'')$ を使うと $H = -c \alpha \int \log f df$ を得る。 ck' を改めて $c(>0)$ と置いた。積分区間などの細部は本質に影響しない時は無視する。

白色雑音 $P(f) = \text{const.}$ ($\alpha = 0$)の時、 $H = 0$ である。 $\alpha (>0)$ が増えるに従って、 $H (<0)$ が減少する。従って、 α が0以外の値をとる時、信号源に秩序・構造が現れて来る。この時、 $C(\tau)$ は $\delta(\tau)$ 関数以外のものとなっており、ラグ τ と共に減衰するが、信号 $s(t)$ に記憶情報は存在する。 α が高いほど、 H は低く秩序・構造の明確度は高い。

白色雑音とは対極の信号、正弦波 $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ の時(A, f_0 は定数)、自己相関関数は余弦波 $C(\tau) = (A^2/2) \cos(2\pi f_0 \tau)$ 、パワー・スペクトル密度は δ 関数 $P(f) = (A^2/4) \delta(f - f_0)$ である。 $P_1 = P(f, -\infty, f_0 - \epsilon, f_0)$, $P_2 = P(f, +\infty, f_0, f_0 + \epsilon)$ とし、 δ 関数を $P_1 + P_2$ で近似すると(但し $\epsilon \rightarrow 0$)、 $P_1 = c' f^{**}(-\alpha)$, $P_2 = c' \{f_0^{**}(-2\alpha)\} f^{**}(-\alpha)$ と置くことができる(c' は定数, $\alpha \rightarrow \infty$)/5/。 $H = c \int \log P(f) df$ の積分を実行すると最終的に $H = c(2\alpha \epsilon \log f_0 - 2\alpha \epsilon \log f_0) = 0$ となった。ここで対数関数の性質から、 $f_0 - \epsilon < f < f_0 + \epsilon$ で $\log f = \log f_0$ と置いた。正弦波信号 $s(t)$ は、時間的追跡が確実であるから確率 $p=1$ で、情報の発生・伝達および構造の発生は無いと解釈できる。観測者が定常正弦波信号 $s(t)$ の環境の中においても、 $s(t)$ から受け取る情報は何も無い。振幅 A や周波数 f の値ががらぐと、観測者は信号 $s(t)$ から情報を受け取る。信号源は受信情報に対応する秩序・構造を持つ。

現実の秩序・構造を持つ信号 $s(t)$ のパワー・スペクトル密度は、 $\alpha = 0$ のものでも δ 関数でもなく様々なスペクトル $P(f, \alpha, f', f'')$ の組み合わせである。

2. ゆらぎと自己組織化

マグネトロン放電装置で放電を励起し、放電管端に置いたラングミュア・プローブ LP で放電場に現れるゆらぎ雑音の実験観測をした。LPから高抵抗(1M Ω)を通してスペクトラム・アナライザ SAに接続した。陽極回路に放電電流が流れると、SAのCRTディスプレイ上にゆらぎ雑音が現れることを観測した/2/。その結果、放電の電位構造が新たに形成されると共に、パワー法則に従う(1)式型のパワー・スペクトルの雑音ゆらぎが生じるのを確認した/6/。スペクトル指数 α は、実験の範囲では2.5から5.5の値で、周波数領域は $f' \approx 2$ MHz, $f'' \approx 0.1f'$ であった。 α は放電電流 i の関数であり

$$\alpha \approx (1/2.9) \log_2 i + k' \quad (k': \text{定数}) \quad (2)$$

が経験的に得られた/6/。放電電流 i は陽極電流から熱電子流を引いた値とした。

マグネトロン磁界電流が放電条件の境界付近で電流 i が小さく/6/、電位構造が通常の

マグネトロンの電位構造のままである場合は、発生したイオンの軌道運動に関係する単色スペクトル(高調波を伴う)が観測されるが、電流 i がある程度の値になり電位構造が新しいフェイズに再構成されると、スペクトルは連続スペクトルのゆらぎ雑音に変化する/7/。ゆらぎ雑音は電位構造の自己組織に関係する。

生物の脳は、入力情報の種類や差異を識別し認識する情報処理システムである。莫大な数の素子(神経細胞, ニューロン)が相互結合しニューラルネットワークシステムを構成する。微妙な差異の入力情報がネットワークを通過する間に、識別された情報に変換出力される。ニューラルネットワークの分野では、入力情報を最適に処理するネットワーク間結合の形成過程を自己組織化と呼ぶ/8/。具体的には素子 i から素子 j に伝播する信号の大きさに掛かる重み係数 w_{ij} (j 番目のニューロンの樹状突起上や細胞体上の1000から10000のシナプス結合部に他のニューロン ($i=1$ 番目から1000~10000番目まで)の軸索からの神経繊維が重み w_{ij} で連結する。自己組織化とは環境刺激による結合係数 w_{ij} の最適化と言える。

ニューロンの細胞膜電位のゆらぎ雑音のパワースペクトルが(1)式の型であることは、実験的に知られている/6/。静止電位では $P(f, 1, 0.1\text{Hz}, 1000\text{Hz})$ /9/、パルス電位のシリーズでは $P(f, 1, 0.0001\text{Hz}, 0.1\text{Hz})$ /10/ が観測された。なお前者は $f > 1000\text{Hz}$ で $\alpha = 0$ になる。神経素子で $\alpha = 1$ のゆらぎ雑音が特徴的である。ニューロンの集団の諸階層の、脳神経系において、 $\alpha = 1$ 様のゆらぎ雑音が観測されており、脳の自己組織化や様々な擬周期現象の安定化、環境への反応フレキシビリティなど関係づけられている/11//12/。(11/は脳波のクロススペクトル、12/は聴覚細胞イオンチャンネルのフラクタル構造や集団ふるまいのセルオートマトンの結果の $1/f^{**\alpha}$ スペクトル)。生体神経系の(1)式型雑音ゆらぎは、外界環境における、構造体の自己組織化、情報処理過程、構造形成過程にある種の役割を持つ、という期待が持たれている。言い替えれば開放系の構造体のアルゴリズムは $1/f^{**\alpha}$ 雑音ゆらぎを発生する。

3. 小宇宙の雑音

電波銀河やクェーサーからの電波が、世界各地の電波望遠鏡で観測されている。電波は小宇宙から噴出するプラズマジェットと磁場の相互作用によるシンクロトロン放射によると説明されている/13/。各地望遠鏡の観測可能帯域は制限があり、観測値はdatabase化されている。野辺山電波観測所で編集されたdatabase(井上 允教授、宇都宮大・田原博人教授等による編集)から、横軸を周波数 f ($10\text{MHz} < f < 100\text{GHz}$) に、縦軸を電波強度 $S(f)$ [$\text{W}/\text{m}^2\text{Hz}$] にとって、特定の小宇宙に関する $\text{Log}S$ - $\text{Log}f$ のグラフを描くと、ある法則性を持った曲線が描かれる/14/。曲線が単純でないものについては、放射源の構造の重なり等について種々の推測がなされているが、単純な直線のものに注目してその傾き α について検討した。一例をFig. 1に示す。マイクロ波帯の連続スペクトルは下式で表された

$$S(f) \propto f^{-\alpha} \quad (3)$$

小宇宙はケンブリッジカタログ(3CR)等にリストされている電波銀河138天体とクェーサー103天体を対象とした。単純な直線のもの(3)式の型に一般化できる。

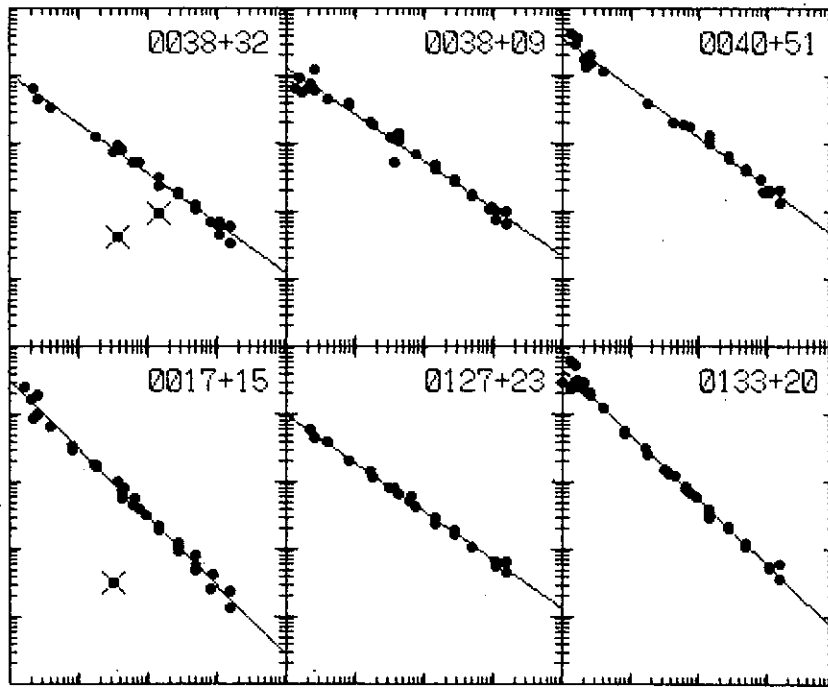


Fig.1 フラックス密度 $S(f)$ と周波数 f のプロット図[log-logスケール]
 縦軸 $0.01\text{Jy} < S < 1000\text{Jy}$ [$\text{Jy} = 10^{-26}\text{W/m}^2\text{Hz}$], 横軸 $10\text{MHz} < f < 100\text{GHz}$
 上段=電波銀河: 左から $(0.735, 0.482)$, $(0.689, 0.188)$, $(0.733, 0.350)$
 下段=クェーサー: 左から $(1.017, 2.012)$, $(0.723, 1.459)$, $(0.967, 0.425)$
 数値の各組は(傾き α , 赤方偏移 z)の数値を示す。

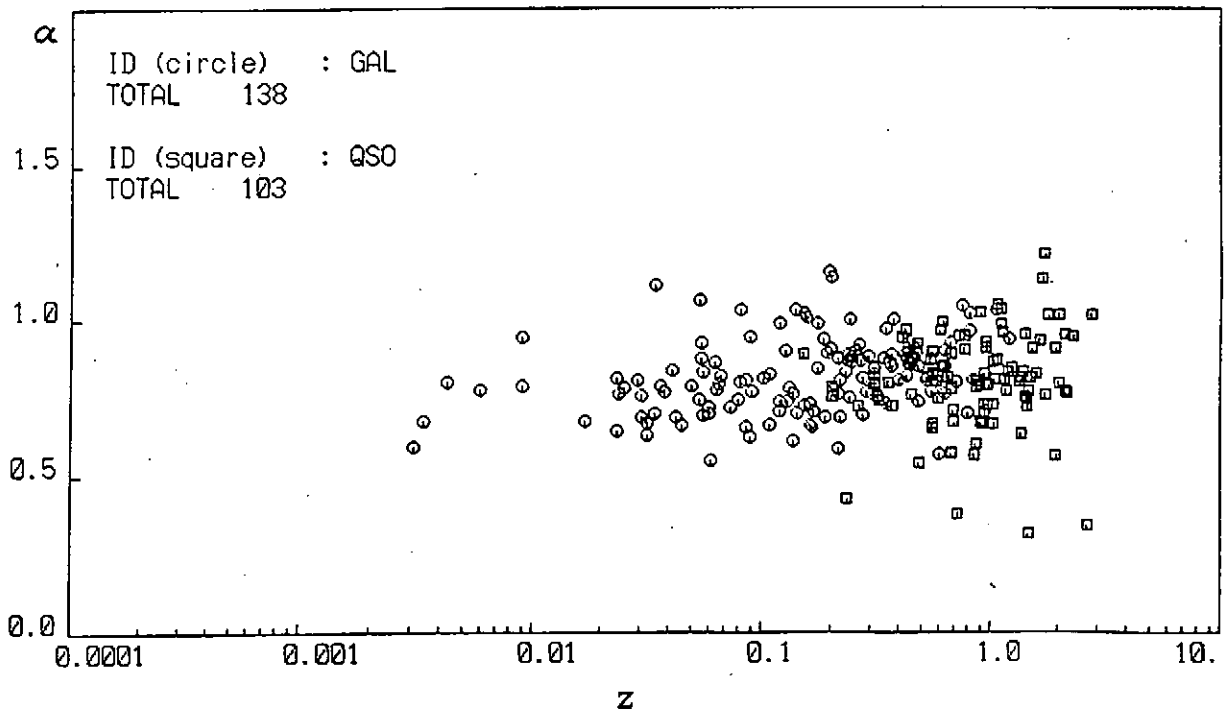


Fig.2 連続スペクトルの傾きと赤方偏移の関係(電波銀河138個,クェーサー103個)/15/

α の平均値は電波銀河で $\alpha=0.816 \pm 0.118$ 、クェーサーで $\alpha=0.796 \pm 0.157$ であった。対象の小宇宙の赤方偏移 z は0.003から3付近まで分布していた。 z が大きくなると α の値が大きくなる傾向があることが、 z と α の相関図Fig.2から明らかに解る/15/。 z の高い側にクェーサーの分布が偏っている。 z と α の関係から見る限り、電波銀河とクェーサーの間に断絶した性質は現れていない。シンクロトロン放射の説明から、放射源の電子エネルギーの単位体積当りの分布を

$$N(E) dE = NE^{-\gamma} dE$$

として

$$\gamma = 2\alpha + 1 \quad (4)$$

が与えられ/13/、シンクロトロン放射モデルでは、 α はエネルギースペクトル分布に帰着される。 $S(f)$ の強度分布が単純なものでない場合、小宇宙にスペクトル分布 $N(E)$ の異なる複数の電波源が存在することの証拠であると理解されている。

Fig.2の点群に入らない天体、例えば0133+47(クェーサー、激しく変光するため1980年ブレイザーblazarと命名された天体の一つ。Fig.3a, $\alpha=0.0, z=0.859$)、1404+28(電波銀河, Fig.3b, $z=0.077$)は、電波強度が時間の経過と共に変化する。約3年にわたる $f=2.7\text{GHz}, 8.1\text{GHz}$ における電波強度をFig.4(a)(b)に示す(観測は一日毎)。この他、30余りの変光天体の観測データはE. B. Waltman氏(Advanced Space Sensing, Naval Research Lab., Washington DC)から転送して頂いた/16/。電波強度のゆらぎをFFT法によるパワースペクトル解析した結果をFig.5(a)(b)に示す。20%のデータの欠け(観測しなかった日)はランニングミーンで元データに補った。図の計算の右端の周期は $\tau \sim 1/f$ として、 $\tau \sim 2$ 日、左端は $\tau \sim 3$ 年に相当する。2日 $< \tau < 10$ 日は白色雑音であるが $\tau > 10$ 日頃から傾きをもち、何等かの情報記憶が現れる。スペクトルの形は、天体によって異なる。今後、統計的な判断が出来る程に他の天体の計算を重ね、構造形成に関する考察を進めたいと考えている。

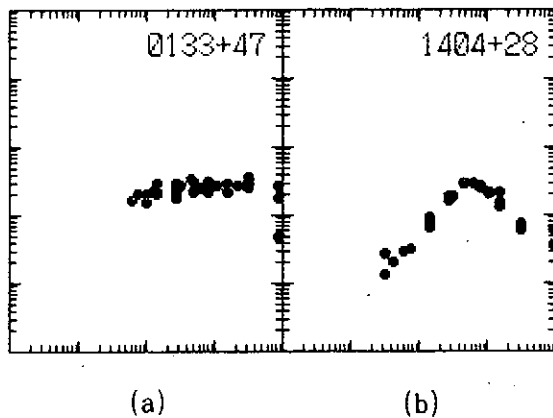


Fig.3 電波強度が激しく変化する小宇宙(縦横軸目盛はFig.1と同じ)

- (a) クェーサー
0133+47, $z=0.859$
- (b) 電波銀河
1404+28, $z=0.077$

4. 雑音ゆらぎと構造の形成

ニューロン、放電マグネトロン、小宇宙のスケールは、それぞれ $10^{-5}\text{m}, 10^{-1}\text{m}, 10^{21}\text{m}$ (10万光年)程度と桁外れに異なり、対象もそれぞれ神経細胞、実験室プラズマ、宇宙プラズ

マと異なるが、「雑音ゆらぎ」が発生することと発生源の構造に関する情報を、雑音ゆらぎの中に探ろうとの共通する関心がある。筆者はゆらぎを発生する系のアルゴリズムを知りたいと考えている。それぞれは閉じた系でなく、開いた系である。環境の中で情報の出入りがあり、構造が形成される系である。

ニューロンのネットワークの系は、外界の信号(情報)を受け入れる過程で自己組織化が進行し、外界環境の中で最適なネットワークの構造を形成する。外界情報を認識する過程で、認識の誤差が最も小さくなる平衡系を自ら探す。雑音ゆらぎ(1/f noise)は、自己組織化の過程と関係する可能性がある/12/。

放電マグネトロン回路の系では、放電部は電気エネルギー供給源(DC電源)と結合している。実験では、(1)式の型の雑音ゆらぎの発生は放電部の電位構造の形成と関係する。ガス圧力、電磁界条件、回路の抵抗(含キャパシタンス、インダクタンス)、供給可能エネルギー他の内外条件下で、最適な電位構造を形成する。これを放電回路の自己組織化と呼ぶなら、自己組織化の過程で雑音ゆらぎが発生することは実験事実である/6/。

宇宙スケールにおける、電波強度のゆらぎを調査している。図5において、横軸の周波数 10^{-7} Hzは100光日のスケールのゆらぎ、 10^{-6} Hzは10光日のスケールのゆらぎと考えてよい。ゆらぎは $\alpha \sim 0.5$ から1.5程度のパワー法則で変化する。ただしこの α は(3)式のマイクロ波領域での α とは別のものであることは言うまでもない。天体の特徴(赤方偏移、大きさ、光度、種類等)と α の相関を調べ、 α の違いが何に起因するのか調査する予定である。最近の観測・統計処理から、宇宙の細胞構造が明らかになってきた。宇宙を現在推測されているスケール(おおまかに150億光年)から眺めると、細胞の壁に相当する場所に小宇宙が密集して存在するという予測が立てられている。その中の変動の激しい小宇宙の電波強度にスポットを当てて、その変動をスペクトルで見たものがFig.5に表されている。現在の宇宙が、どのような過程を経て現在の姿になったのか、小宇宙のプラズマジェットを発生源として持つマイクロ波データを、それを解く鍵と見て、筆者等は研究を続けている。

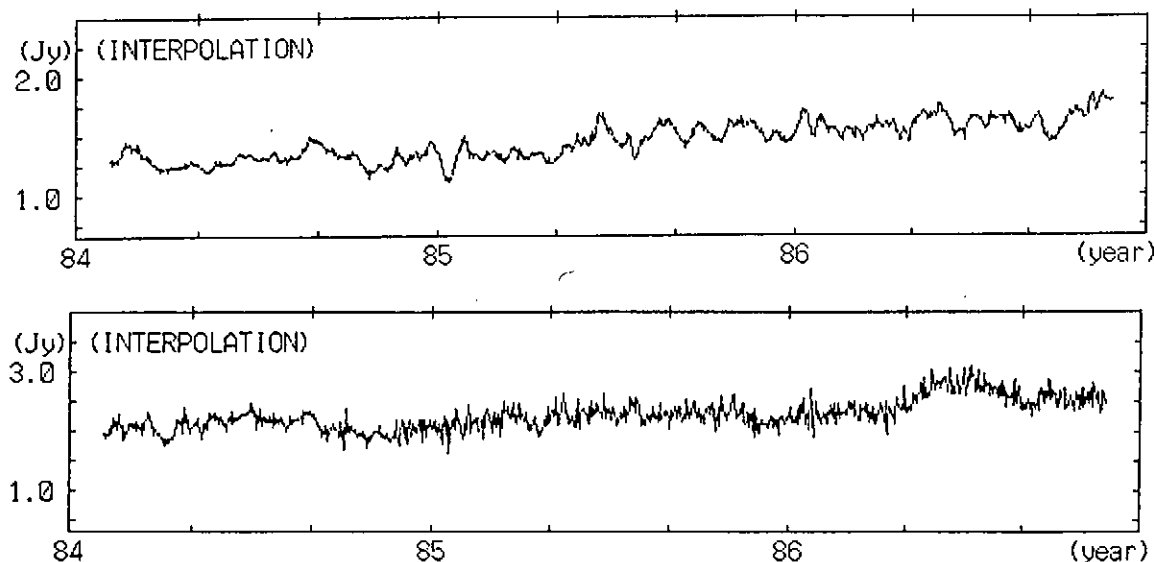


Fig. 4(a) 0133+476の電波強度変化(上2695MHz, 下8085MHz), Fig. 3(a) 参照

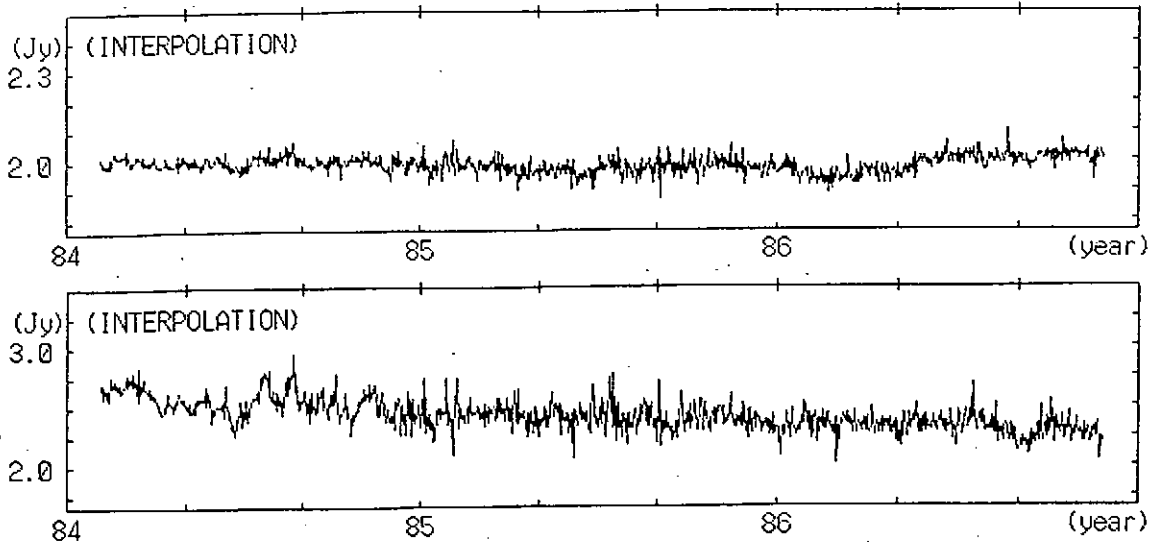


Fig. 4 (b) 1404+286の電波強度変化(上2695MHz, 下8085MHz). Fig. 3 (b) 参照

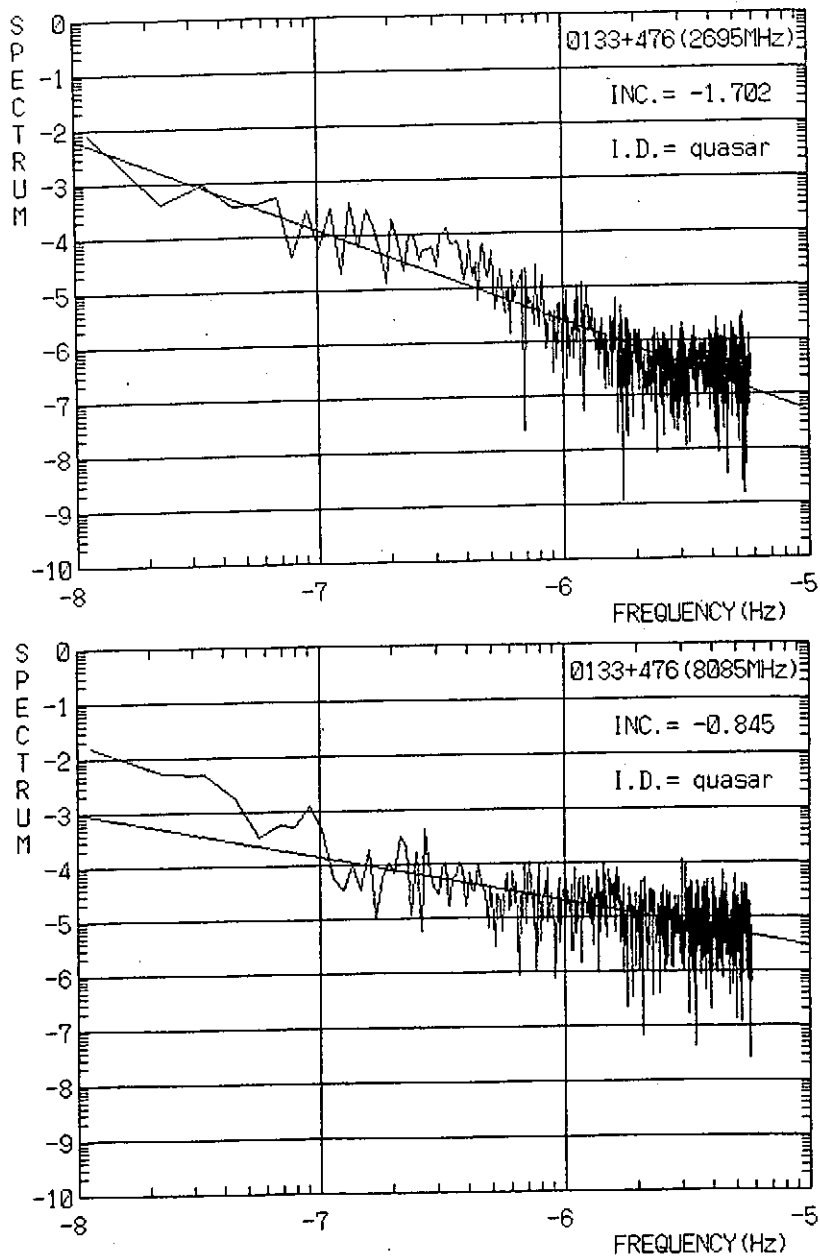


Fig. 5 (a) 0133+476の電波強度のゆらぎのパワースペクトル, Fig. 4 (a) 参照

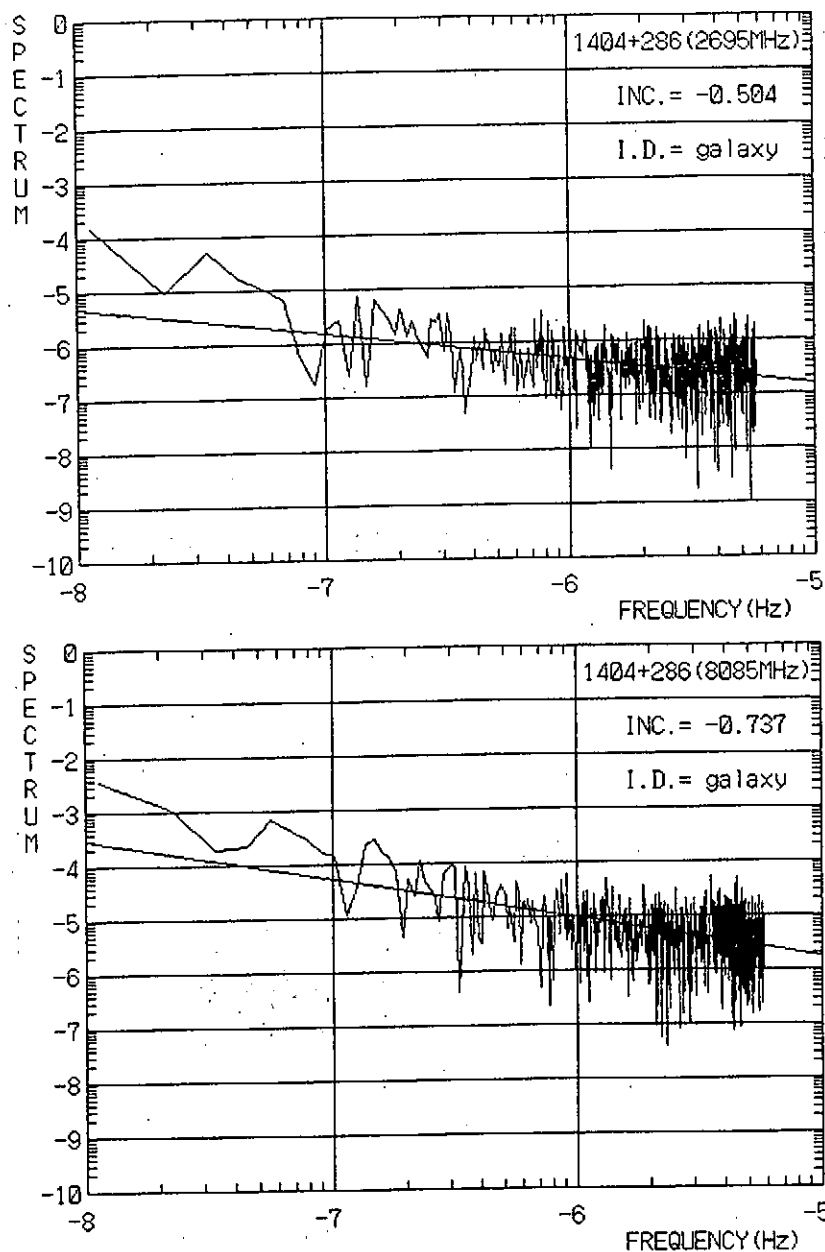


Fig. 5 (b) 1404+286の電波強度のゆらぎのパワースペクトル, Fig. 4 (b) 参照

5. 結論

実験室、生物、宇宙におけるプラズマカオスの鳥瞰図をFig.6に示す。3つの方向をカオスまたは雑音ゆらぎの視点で眺めている。実験室ではプラズマは制御可能である。実験条件の制御と観測結果の評価・検討が可能である。生物は神経細胞または集団のネットワークを念頭に置いている。そこでは非線形のアロリズムが絶えず働いて入力情報の認識と出力が行われる。宇宙は人為的な境界が入らないため観測事実は自然の第一義的な情報を持つ。宇宙雑音は銀河スケールのプラズマの貴重な情報源である。3者の雑音ゆらぎは3者各様のカオスから発出している。カオスは無意味にゆらいでいるのではなく、内に秩序を内蔵し、構造発生・自己組織化・アロリズムに法則性を持って進化・発展の方向を探している。 $1/f^{**\alpha}$ の雑音ゆらぎが、構造発生や自己組織化の過程にどのようなアロリズムを有しているのか、興味を持っている。 国立天文台野辺山 亀野誠二博士、宇都宮大田原博人教授からの貴重なコメントを感謝します。

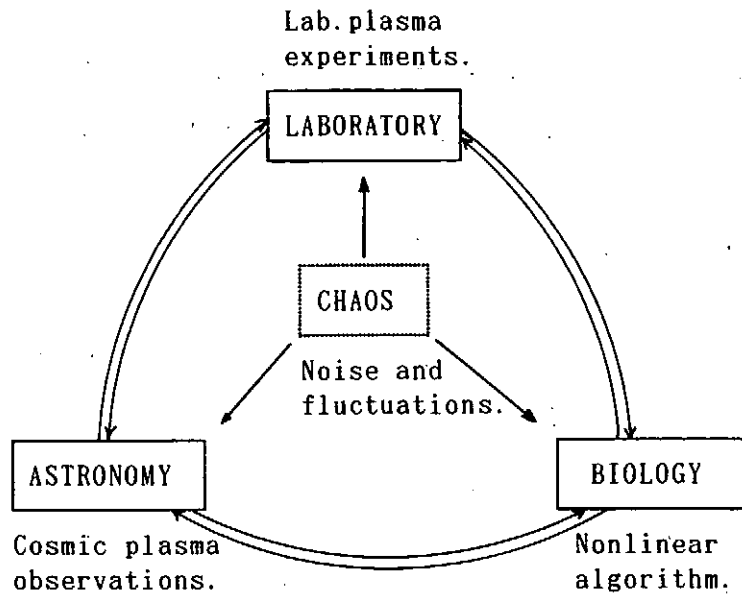


Fig. 6 実験室、生物、宇宙の3つの場所におけるプラズマのカオス鳥瞰図

文献

- /1/古在・栗田編:哲学小辞典,岩波,1979
- /2/N.Tanizuka:Jpn.J.Appl.Phys. 30(1991)171.
- /3/宮川 洋:情報理論,コロナ社,1979.
- /4/日野幹雄:スペクトル解析,朝倉書店,1986.
- /5/N.Tanizuka:Proc.Int.Conf.on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, ed.T.Musha et al.(Ohmsha Ltd.,1991)p.401.
- /6/谷塚 昇:非線形細胞膜系と比較したプラズマソース系,プラズマ核融合学会誌 70(1994)93.
- /7/谷塚 昇:マグネトロン構造をもつ放電の振動特性,真空 29(1986)26.
- /8/甘利俊一:神経回路網の数理,産業図書,1990.
- /9/H.E.Derksen and A.A.Verveen:Science 151(1966)1388.
- /10/T.Musha et al.:IEEE Trans. Biom. Eng. BME-30(1983)194.
- /11/C.M.Anderson et al.:Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, Conf.Proceedings No.285, Ed.P.H.Handel and A.L.Chung(AIP,1993)737.
- /12/S.B.Lowen et al.:Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, Conf.Proceedings No.285, Ed.P.H.Handel and A.L.Chung(AIP,1993)745.
- /13/V.L.Ginzburg et al.:Annual Rev.Astron.Astrophys. 3(1965)297.
- /14/谷塚 昇、岡田年明 他:VLBI観測計画シンポジウム集録(国立天文台野辺山,1992)27.
- /15/谷塚 昇:NROユーザーズミーティング集録(国立天文台野辺山,1993)33;
岡田年明、谷塚 昇:同上(国立天文台野辺山,1993)85.
- /16/E.B.Waltman et al.:Astrophys.Jour.Suppl.Series 77(1991)379.

Fractal dimensionality analysis of edge magnetic fluctuations in reversed field pinches

S. MASAMUNE, D. ISHIJIMA, A. TANONAKA,
K. OHTA, M. IIDA, H. OSHIYAMA

*Department of Electronics, Kyoto Institute of Technology
Sakyo-ku, Kyoto 606*

Y. HIRANO, Y. YAGI, T. SHIMADA

*Electrotechnical Laboratory
Tsukuba, Ibaraki 305*

1. Introduction

The reversed-field pinch (RFP)[1,2] is one of the toroidal magnetic confinement systems, in which the equilibrium is achieved by a balance between the stresses in the poloidal (B_θ) and toroidal (B_ϕ) magnetic fields. It leads to the relations $B_\phi/B_\theta < 1$, and $q \ll 1$, where q is the safety factor. Linear stability against ideal kink modes is provided by both high magnetic shear and a conducting outer boundary, the former resulting in the reversed toroidal field in the outer edge of the plasma. The RFP configuration is set up spontaneously (MHD relaxation)[3] and can be sustained against resistive diffusion as long as the toroidal plasma current is induced (RFP dynamo). The spontaneous formation and subsequent sustainment of the configuration is an example of the self-organization[4] in high temperature plasmas.

In the RFP configuration, $m=1$ kink modes play important roles in the dynamics of the self-organization, because singular surfaces of the $m=1$ modes are closely spaced, unlike in tokamaks. As a result, overlapping of magnetic islands for the dominant modes occurs at an early stage of their growth, allowing turbulent nature of magnetic fluctuations.

Experimental analyses of edge magnetic fluctuations have revealed rather complicated pictures of the mode coupling process during the self-organization. In the STP-3M, at the event of a discrete dynamo, growth of $m=0$ modes is preceded by the growth and subsequent decay of $m=1$ modes, giving rise to the picture that $m=0$ modes originate from the coupling of two $m=1$ (positive and negative) modes.[5] More recently, they have found the "continuous dynamo", characterized by a quiet, axisymmetric increase of a toroidal flux, which might result from single helicity mode coupling.[6] In the MST RFP, measured fluctuations are characterized by broadband frequency spectra, most of the power of which is concentrated in a few long wavelength internal resonant tearing

modes.[7] It is also shown that the mechanism behind these tearing mode turbulence is a three wave coupling process, where two $m=1$ modes couple to a $m=2$ modes.[8]

In view of these results summarized above, it is natural to raise a question whether the nature of the turbulent edge magnetic fluctuations in RFP is probabilistic or deterministic, i.e., has the turbulence infinite number of degrees of freedom or can it be modelled by nonlinear equations with only a few variables. If in the latter case, the model of the dynamical system would be helpful in understanding the self-organization mechanism in RFP.

In RFP experiments, low dimensional chaos was first reported in broadband magnetic fluctuations in the HBTX-1A.[9] Following this attempt, similar possibility was examined in the MST RFP. In the MST, however, low dimensional chaos could not be identified; they have ascribed it to the severe sensitivity of the analysis techniques to the presence of noise and stationarity of the RFP discharges.[10]

In what follows, preliminary results will be reported from our attempt to search for chaotic attractor in edge magnetic fluctuations in a small- (STE-2) and medium- (TPE-1RM20) sized reversed field pinches.

2. Analysis of STE-2 RFP data

Edge toroidal field fluctuation signals are analyzed in the STE-2 RFP. Details of the machine are described in ref.11. It uses a 2 mm thick non-bellows SUS chamber whose major radius R is 40 cm and minor radius a is 10 cm. Time traces for a typical discharge are shown in Fig.1.

The magnetic fluctuations are measured with one of the magnetic probes set just inside the chamber. Time series of the signals from 0.2 to 0.6 ms, in the quasi-steady state of a discharge, are recorded by a transient recorder as 4096 words of 10 bit resolution with a sampling time of 0.1 μ s. The fractal dimensionality analysis has been performed using the algorithm by Grassberger and Procaccia.[12] The sequence of signals are embedded in the p -dimensional delayed phase space in which a set of vectors \mathbf{X}_i is constructed,

$$\mathbf{X}_i = (x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots, x(t_i + (p-1)\tau)), (i = 1, \dots, N),$$

where $x(t_i)$ are recorded signals and N is the total number. τ is the delay time, which is usually chosen to be a fraction of the autocorrelation time of the fluctuations. For each value of p , the following correlation integral, which represents the probability that any two points are within a given distance r of each other in the p -dimensional delayed phase space, is calculated,

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i \neq j} \frac{1}{N^2} \theta(|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j| - r),$$

where θ is the Heaviside step function and $|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$ is the Euclidian norm of the vector $\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j$. The correlation integral, in the logarithmic sense, is proportional to distance r , and the correlation dimension is the proportionality constant (the slope in $\log C$ v.s.

log r plot). Existence of a strange attractor is indicated by saturation of the slope over a significant range of distance r , when increasing the embedding dimension. The correlation dimension is the saturated value of the slope, giving the lower bound of the Housdorff dimension of the fractal volume of the attractor.

The results are shown in Fig.2. Figure 2(a) shows a time trajectory of the signals in the 2-dimensional delayed phase space. The correlation integral v.s. distance is plotted (both in logarithm) in Fig.2(b) for the values of the embedding dimension $p = 1 - 9$. The values of the local slope are calculated from this figure, and is shown in Fig.2(c). Saturation of the slope is observed in a narrow range of distance, and the saturated correlation dimension is 2.5-3. A further examination is under way to test if the saturation is true, not spurious, by analyzing surrogate data constructed by randomizing the phase of the signals.

For comparison, we have examined how sensitive the analysis method is to noise and coherent oscillations which may be inevitably superposed in real experimental signals. In the first examination, we construct a time sequence of signals by adding white noise to those calculated from the Lorenz model for Benard convection. It has been found that, when amplitude of the noise is 1 maximum amplitude of the chaotic component, the correlation dimension can be estimated, in spite of dull saturation of the slope. When amplitude is increased up to 5 observed. The results provide us with an idea of the minimum dynamic range required in recording signals.

In the second examination, we construct a time sequence of signals by adding sinusoidally oscillating components to those from the Lorenz model. In this case, fractal volume of the attractor distributes around a limit cycle of the coherent component, and fractal dimension of the whole trajectory may be distorted. The effect of low frequency oscillation is shown in Fig.3. In this case, amplitude of the coherent component is the same as the chaotic component at the same frequency. Figure 3(a) gives the time trajectory in the delayed phase space, and local slope v.s. distance (in logarithm) is shown in Fig.3(b). It shows that original correlation in the chaotic component is distorted by the coherent oscillation over a significant range of distance; however, the original correlation dimension of the Lorenz attractor, slightly smaller than 2, appears to be preserved in the narrow range of r . This situation is similar to the experimental results shown in Fig.2. High frequency oscillation has been shown to be more harmful in estimating the correlation dimension.

On the basis of the results described above, we interpret the edge fluctuations in the STE-2 RFP as a mixture of the chaotic component with the correlation dimension 2.5-3 and low frequency coherent components. Some filtering techniques might be helpful in separating these components, leading to a more accurate estimate.

3. Analysis of TPE-1RM20 data

In the TPE-1RM20 device, edge magnetic fluctuations exhibit a variety of behaviors according to the value of the pinch parameter Θ . In the low- Θ regime where Θ is in the range 1.4-1.6, edge magnetic fluctuations are dominated by $m=1/n=7-9$ modes, resonant

near the plasma center, with fluctuation level of 1-2. Magnetic islands associated with these modes are observed to rotate rigidly with the plasma in the opposite direction to the current. On the contrary, in high- Θ regime where $\Theta > 1.6$, various types of discrete events are observed in coincidence with a sawtooth crash in soft-X ray (SXR) signal. Rotating modes are decelerated and subsequently locked to the wall prior to SXR crash, an abrupt change in the mode spectra then follows. Sometimes a single helicity state persists for a significant duration after the mode locking to the wall. Detailed analyses of the magnetic fluctuations are described in ref.13. In all these cases, the RFP configuration is sustained in the similar way; a question is raised how the degrees of freedom in the mechanism of these various types of mode coupling processes depend on the discharge parameter Θ .

In the TPE-1RM20 RFP, radial field fluctuations are measured with a pickup coil inserted inside the bellows liner right at the plasma edge. Time traces for a typical low- Θ discharge are shown in Fig.4. Time sequence of the signals is recorded with a 12 bit resolution at sampling frequency of 500 kHz. The signals from 3 ms to 9 ms are analyzed using the same algorithm as mentioned above. It should be noted that, owing to the capability of an amplifier, dynamic range of the signals recorded in this period is rather small (about 8 bit from peak to peak) in spite of the 12 bit resolution of an A/D converter.

Figure 5 gives the results for a discharge with the value of Θ 1.45 (# 66753). Time trajectory in the delayed phase space is shown in Fig.5(a), a plot for the correlation integral v.s. distance in Fig.5(b), and a plot for the local slope v.s. distance in Fig.5(c). The correlation dimension does not saturate up to the embedding dimension of 9.

Results in a high- Θ discharge ($\Theta=1.68$ (# 66512)) are shown in Fig.6(a), (b) and (c). In contrast to Fig.5, the correlation dimension saturates in a narrow range of distance, which is similar to the results in Fig.2. The value of the correlation dimension is around 3, slightly larger than in the STE-2 case.

In view of these results, it has been concluded that we have identified the difference in the correlation dimension depending on the values of the pinch parameter Θ . A modelling of the dynamical system[14] is essential for further understanding of the nature of edge the fluctuations in RFP.

4. Summary

Preliminary results are reported from an attempt to examine the possibility that low dimensional chaos governs the dynamics in RFP discharges. Magnetic fluctuation signals are analyzed using the algorithm by Grassberger and Procacia to estimate the correlation dimension which is a measure of the fractal volume of the attractor in the phase space.

In the STE-2 RFP, the correlation dimension saturates only in a narrow range of distance in the phase space, giving rise to the correlation dimension 2.5-3. This may be an indication of low-dimensional chaotic dynamics. The range for saturation of the correlation dimension is shown to be influenced by a coherent component which is possibly superposed in the experimental data. Some filtering techniques might be helpful for a more accurate estimate of the correlation dimension.

In the TPE-1RM20, the correlation dimension depends on the values of the pinch parameter Θ . In low- Θ regime, no evidence is obtained of low dimensional chaos. On the contrary, in high- Θ regime, the correlation dimension is estimated to be about 3, which might be influenced by coherent components. Increase in the dynamic range of signals recorded, now under way, may be helpful for more accurate estimate of the correlation dimension.

References

1. H.A.B.Bodin and A.A.Newton, Nucl. Fusion 30 (1990) 1717.
2. S.Ortolani and D.D.Schnack, *Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation*, World Scientific, 1993.
3. J.B.Taylor, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 741.
4. A.Hasegawa, Adv. Phys. 34 (1985) 1.
5. H.Arimoto et al., J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992) 1202.
6. A.Nagata et al., Phys. Fluids B 5 (1993) 1263.
7. W.Shen et al., Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 1319.
8. S.Assadi et al., Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 281.
9. S.J.Gee and J.B.Taylor, in *Proc. 12th Europ. Conf. on Control. Fusion and Plasma Phys.* Vol.2 (1985) 446.
10. C.A.Watts, Research Report, Uni. of Wisconsin-Madison, DOE/ER/53198-224 (1993).
11. S.Masamune et al., Plasma Phys. Control. Fusion 35 (1993) 209.
12. P.Grassberger and I.Procaccia, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 346.
13. P.R.Brunsell et al., Phys. Fluids B 5 (1993) 885.
14. Z.Yoshida et al., J. Plasma Phys. 49 (1993) 403.

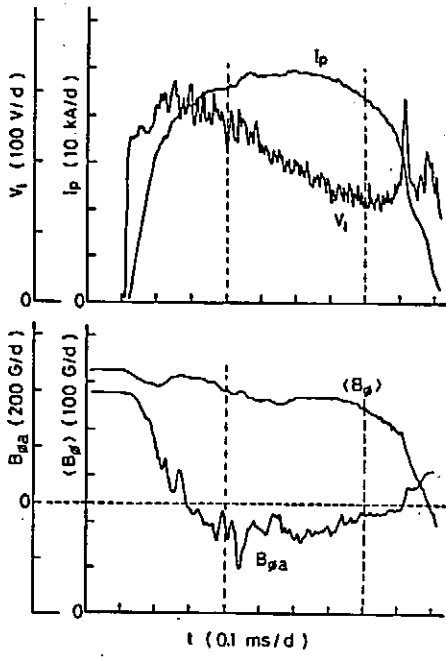


Fig.1. Time traces of a typical discharge in the STE-2 RFP.

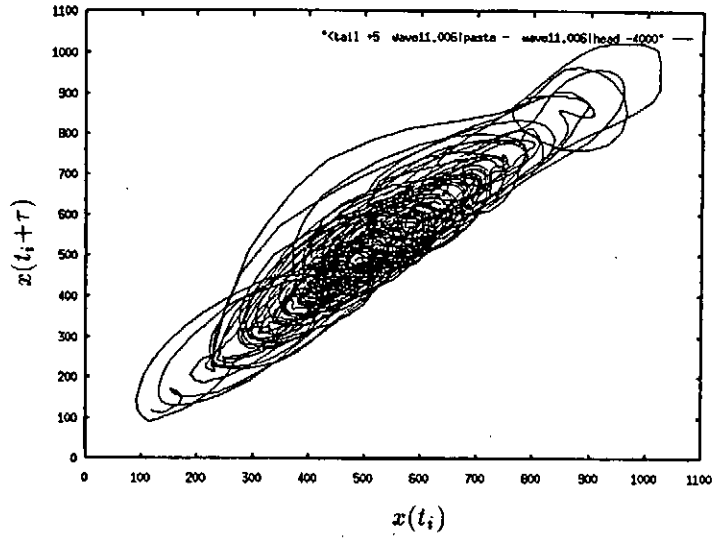


Fig.2.(a)Time trajectory in the delayed phase space.

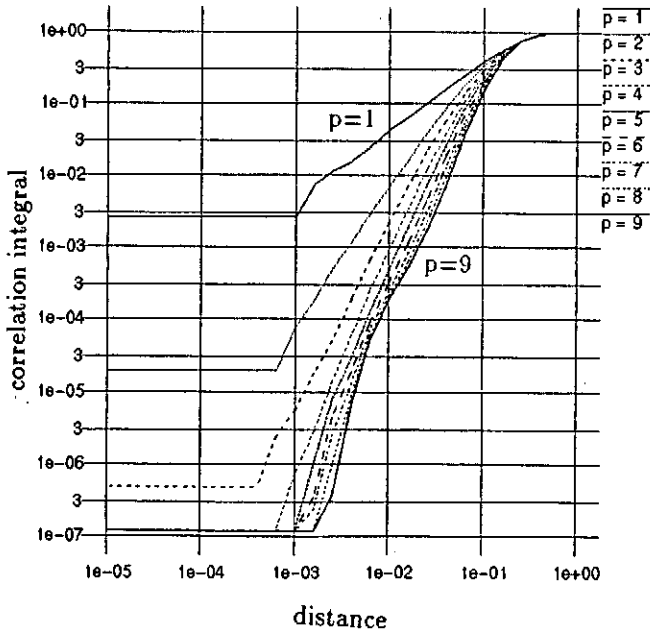


Fig.2.(b)Correlation integral v.s.distance for the embedding dimension $p=1-9$.

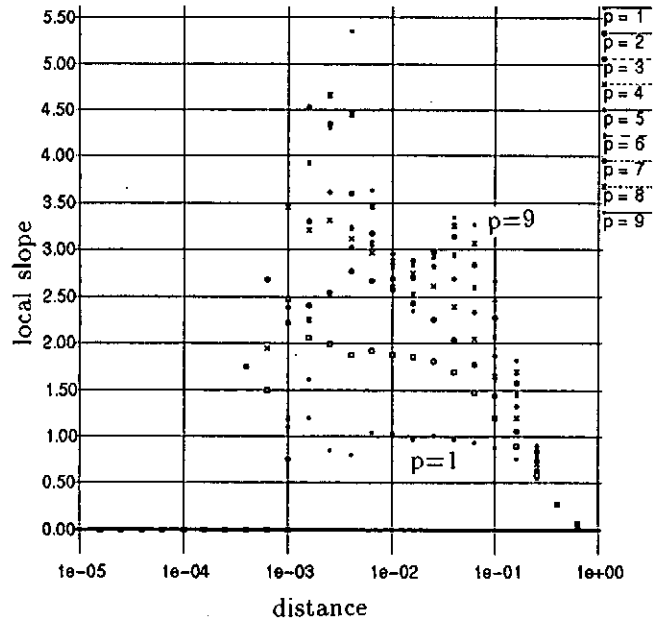


Fig.2.(c)Local slope of (b) v.s. distance.

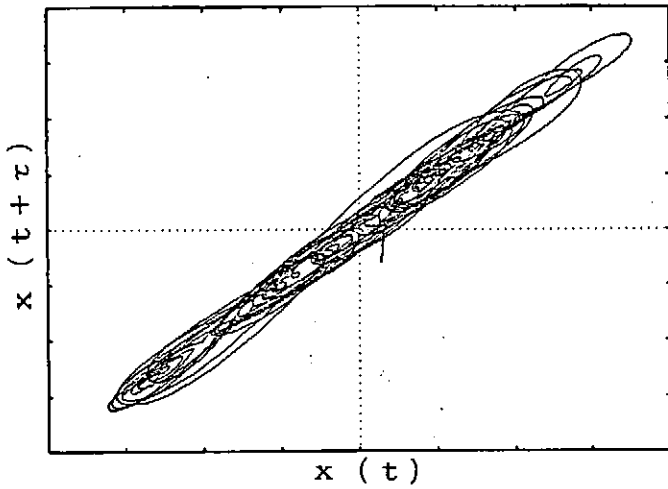


Fig.3.(a) Time trajectory of signals constructed by adding sinusoidal component to those from the Lorenz model.

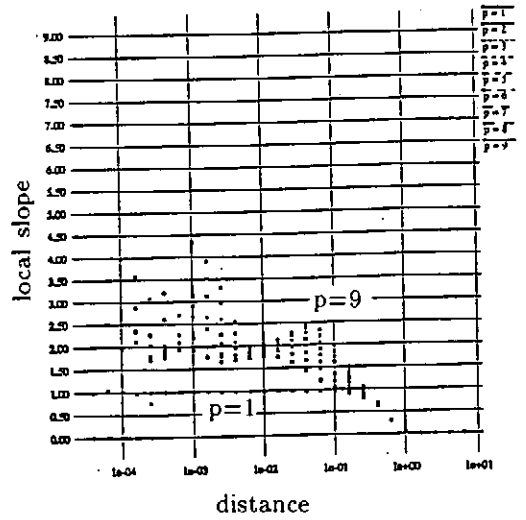


Fig.3.(b) Local slope v.s. distance.

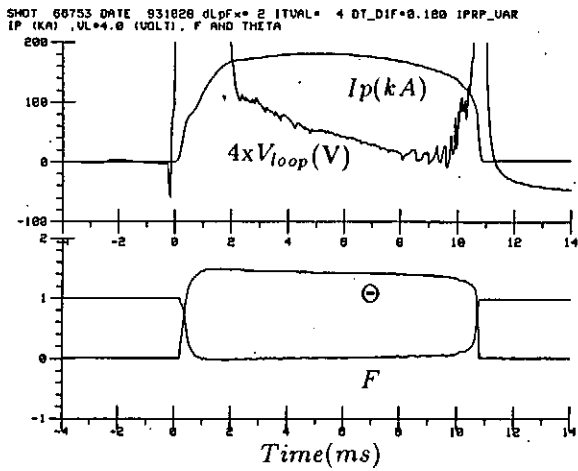


Fig.4. Time traces of a typical low- Θ discharge in the TPE-1RM20.

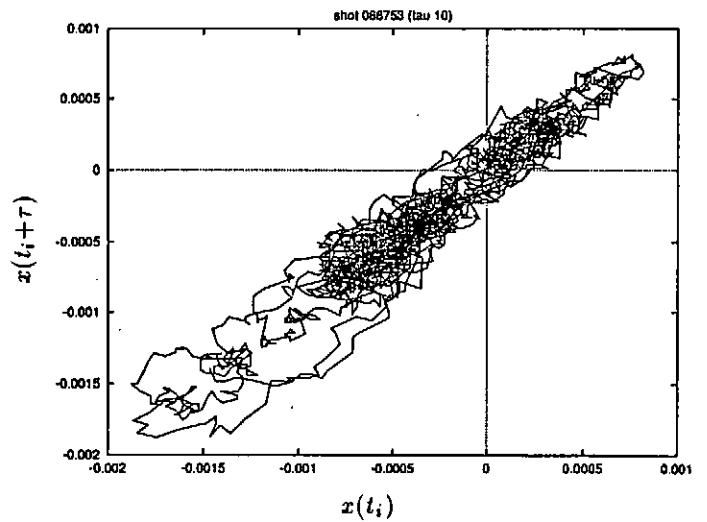


Fig.5.(a) Time trajectory in the delayed phase space in a low- Θ discharge.

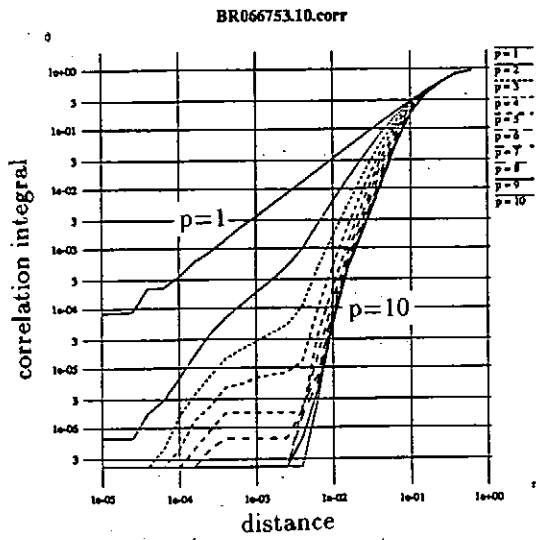


Fig.5.(b)Correlation integral v.s. distance.

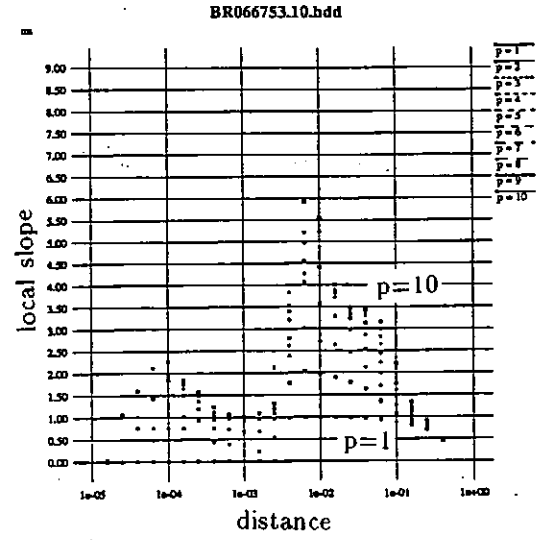


Fig.5.(c)Local slope of (b) v.s. distance.

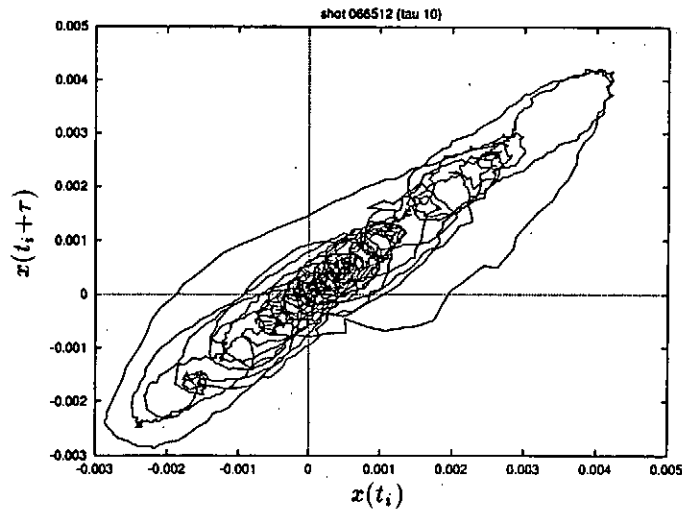


Fig.6.(a)Time trajectory in a high- Θ discharge.

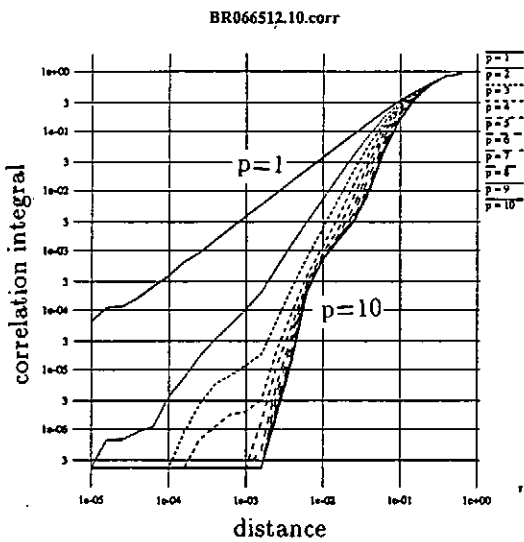


Fig.6.(b)Correlation integral v.s. distance.

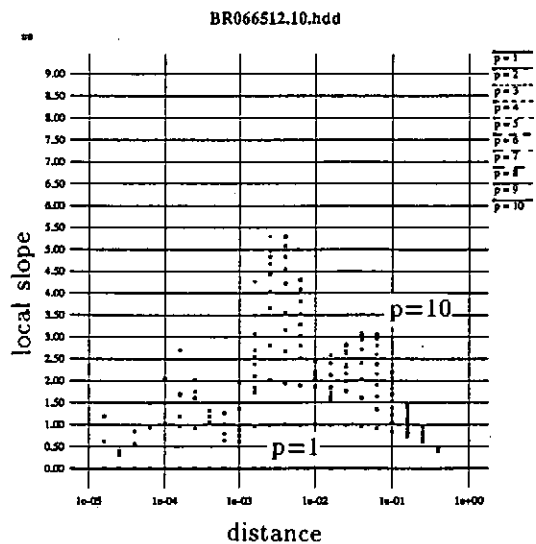


Fig.6.(c)Local slope of (b) v.s. distance.

電子サイクロトロン波と相互作用する電子のカオス過程

九州大学 総合理工学研究科 田中雅慶, 庄山裕章, 河合良信
中央大学 総合政策学部 河野光雄

不均一磁場中に捕捉された電子はバウンス運動を通してプラズマ中の波動と多数回相互作用することが可能である。特に電子サイクロトロン波 (ECW) が励起されている場合は、電子は強く相互作用するため初期エネルギーに比べかなり高いエネルギー領域まで加速されることが予想される。実験では弱いミラー配位 ($M \leq 1.1$) において 10 eV 程度の電子温度 (バルク) のプラズマに対して、10 keV 以上に加速された電子群が観測されている。我々はこの現象を保測系のカオス [1-5] の観点から理論的・実験的に調べているが、ここでは主に現象のモデル化とそれから導かれるマップおよび典型的な実験結果について述べる。

1. 現象のモデル化

外部磁場は中央が平坦 (長さ L) で両側が 2 次関数的に増大しているとする、

$$B_z(z) = \begin{cases} B_0[1 + \frac{z^2}{a^2}], & \text{if } z \leq 0; \\ B_0, & \text{if } 0 < z \leq L; \\ B_0[1 + \frac{(z-L)^2}{a^2}], & \text{if } z > L. \end{cases} \quad (1)$$

ここで a は磁場変化の特性長である。不均一性の程度は非常に小さく、ECW は磁力線に沿って z 軸の正方向に伝播しているとする。電子の運動はラーマー回転とバウンス運動のみを考慮し、ポロイダル運動は非常に遅いとして無視する。中心部の磁場強度は電子サイクロトロン共鳴条件 $\omega - \omega_{ce} - kv_z = 0$ を満たすように設定されているとする。ここで k と ω は ECW の波数と周波数、 ω_{ce} は電子サイクロトロン周波数、 v_z は電子の磁力線方向速度である。ECW は強磁場領域で伝播するため $\omega - \omega_{ce} < 0$ である。従って捕捉電子は ECW に向かって進む時 ($v_z < 0$) 共鳴条件を満たす事になる。

電子の運動方程式は

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_{ce}v_y + \frac{eE_0}{m}\sin(kz - \omega t) \quad (2)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_{ce} v_x + \frac{eE_0}{m} \cos(kz - \omega t) \quad (3)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{v_x^2 + v_y^2}{2B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (5)$$

で与えられる。ここでECWは電場強度 E_0 の右回り円偏波であるとした。方程式を簡単にするために、以下で定義される新しい変数を導入する、

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t), & \sin(kz - \omega t) \\ -\sin(kz - \omega t), & \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

上に与えた基礎方程式は次のような4変数の力学系に帰着される、

$$\dot{U} = \Delta V \quad (7)$$

$$\dot{V} = -\Delta U + \frac{eE_0}{m} \quad (8)$$

$$\dot{W} = -\frac{U^2 + V^2}{2B_z} \frac{\partial B_z}{\partial Z} \quad (9)$$

$$\dot{Z} = W \quad (10)$$

ここで、 $W = v_z$, $Z = z$, $\Delta = \omega - \omega_{ce} - kv_z$ とおいた。この力学系の位相空間における流れは保存されており

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial V} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial W} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = 0 \quad (11)$$

を満たしている。

位相空間の構造を見るために $Z = 0$ でポアンカレ断面をとって離散化する。いま n 回目から $n + 1$ 回目のバウンス運動を考えると、 $Z = 0$ を z 軸の負の向き出発した電子 (U_n, V_n とする) は左側のミラー磁場で反射され、 z 軸の正の向きに進み右側のミラーで再度反射されて $Z = L$ に到る。この点から $Z = 0$ まで波に向かって走る間は共鳴条件が満たされるのでECWによる加速 (または減速) を受けることになる。加速か減速かは $Z = L$ に到着した時の電子のラーマー運動の位相とECWの位相の相対関係によって決まる。初めに加速位相にあっても加速後はミラー磁場による反射点がずれるので、位相関係は常に加速位相にあるとは限らない。いま $Z = 0$ から出発して再び $Z = 0$ に戻ってきたときの U, V を U_{n+1}, V_{n+1} すると次のマップを得る、

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_n) & -\sin(\alpha_n) \\ \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで α_n はバウンス時間 $\pi a / \sqrt{U_n^2 + V_n^2}$ 、 K は1回の相互作用において電子が受ける加速の総量である。それぞれの物理量は規格化している。上式はバウンス時間のあいだのラーマー回転(第1項)とECWによる”キック”(第2項)の和という形になっている。

図1に25個の初期点に対して800回マッピングした結果を示す。縦軸は垂直方向の速度の絶対値 $\sqrt{U_n^2 + V_n^2}$ で横軸はラーマー回転角である。図からわかるように速度空間のあるところまでは周期1のアイランドがあり、低エネルギーの部分でストカスティックな領域が広がっている。この領域の範囲は K の値を大きくすると次第に高エネルギー領域まで広がっていく(図2)。

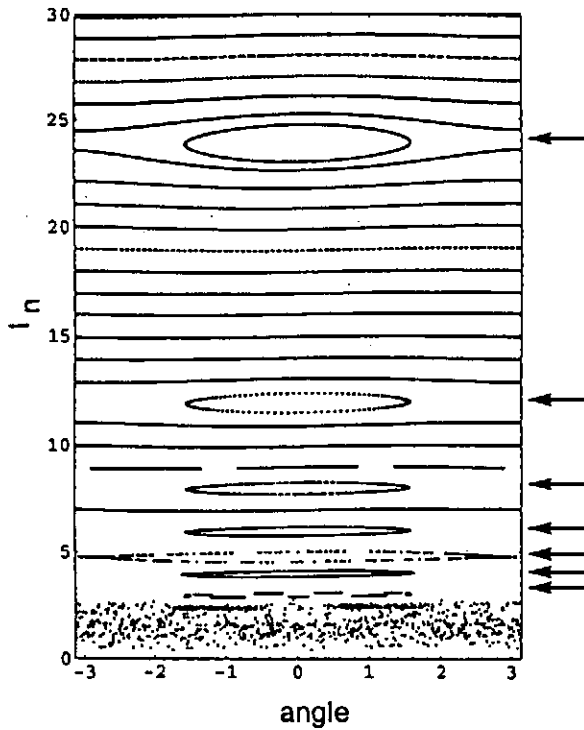


図1 ポアンカレ断面 $K = 0.1$

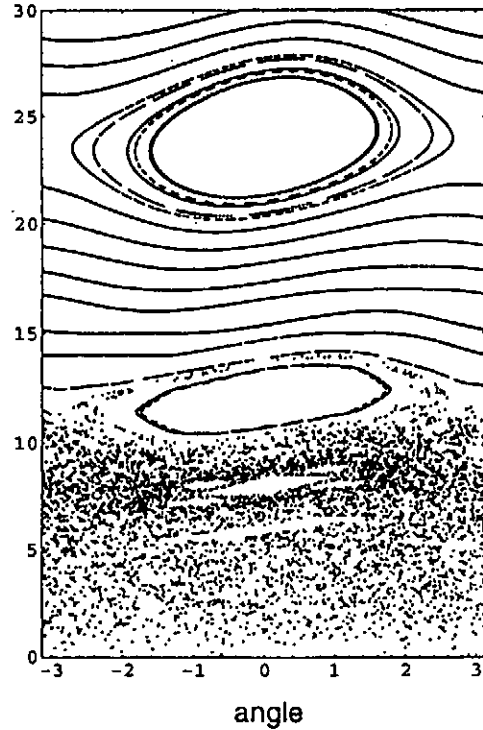


図2 ポアンカレ断面 $K = 1.0$

ECWによって加速(減速)を受けた電子はこの領域を拡散して高エネルギー

領域に達するが、初期に低エネルギーであった電子がどこまで加速されるかということはストカスティックな領域の上縁によって決められる。加速の上限が K の値とともにどのように変化するかを見るために、低エネルギー（縦軸1）のところからラーマー回転角の異なる10個の電子を並べて600回マッピングを行った。10個の電子の最高到達速度を平均し K の関数としてプロットしたのが図3である。図に見られるように、最高到達速度は K のほぼ0.5乗に比例している。これはストカスティックな領域がエネルギー単位で電場の1乗に比例して広がっていくことを意味している。また、図には階段状にジャンプするところが見られるが、これは周期1のアイランドがストカスティックな領域に飲み込まれるときに起きる現象で、アイランドの上縁まで電子が回り込むために起こる。低エネルギー領域のアイランドが飲み込まれる時もこのようなジャンプが起こっているはずであるが、この領域は周期1のアイランドが集積しているので図には顕著に現れていないと考えている。

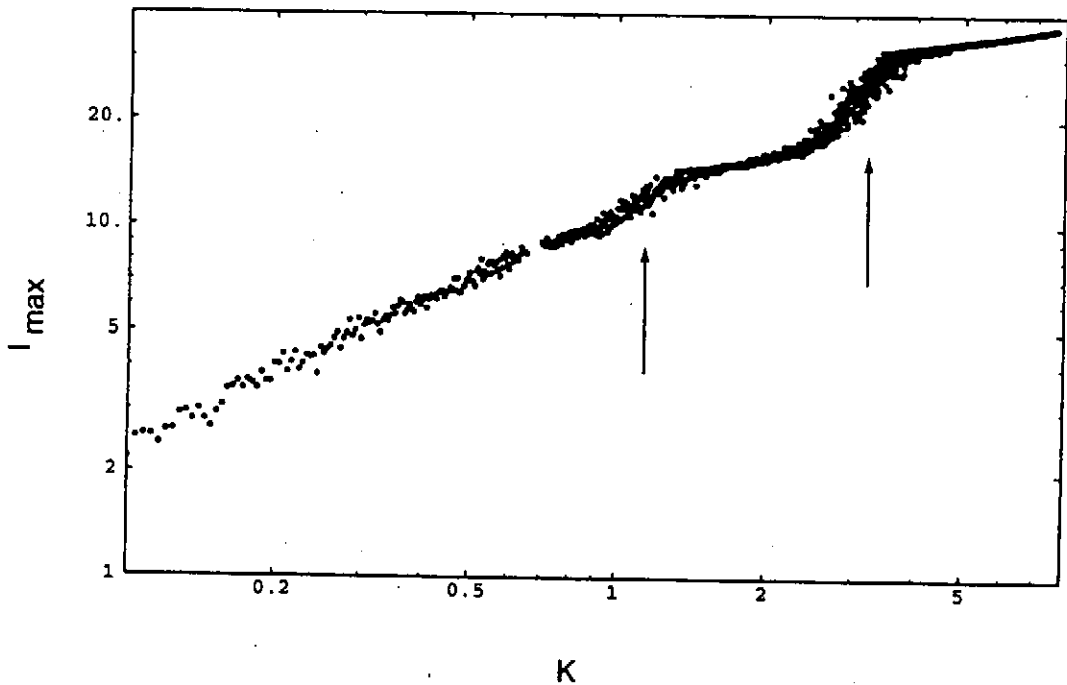


図3 最高到達速度（10粒子で平均）

図1, 2に見られる構造はフェルミマップの相空間構造と非常に良く似ている。いま U_n, V_n の複素表示に対して

$$U_n + iV_n = I_n \exp[i\theta_n] \quad (13)$$

を導入し、 $K/I_n \ll 1$ を仮定すると以下のフェルミマップを得る。

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_{n+1} \quad (14)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\pi a}{I_n} \quad (15)$$

周期1のアイランドは(15)式より $\pi a/I_n = 2m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)と求められる。図1に示した矢印は(15)式より求めたアイランドの位置で実際に良くあっていることがわかる。また、 I_n を任意の周期1のアイランドの回りで展開($I_n = I_{(1)} + \Delta I_n$)すれば、

$$I'_{n+1} = I'_n - K' \sin \theta_{n+1} \quad (16)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I'_n \quad (17)$$

となる。ここで $I'_n = -\pi a \Delta I_n / I_{(1)}^2$, $K' = \pi a K / I_{(1)}^2$ である。上のマップは標準写像で $K' \simeq 1$ でカオスを発生させる。 K' の定義から $I_{(1)}$ の値が小さいほど K' の値は大きいことになり、したがって位相空間は低エネルギー領域ほど壊れている。 $K' = 1$ という条件からストカスティックな領域の上限を決めると、図3に見られる0.5乗則が得られる。以上のように、離散化されたマップはフェルミマップによってかなり説明できることがわかった。このことは、不均一磁場中で波動と相互作用する電子の加速の問題は最も簡単な場合フェルミ加速の問題と同等であるということを示している。

3. まとめ

電子サイクロトロン波(E C W)と相互作用する電子を、保測系のカオスの観点から理論的・実験的に調べている。現象をモデル化しポアンカレ断面をとって簡単なマップを得た。このマップはE C Wによる加速が小さいという近似でフェルミマップに帰着できることがわかった。

位相空間の構造は全エネルギー領域でカオス化を起こすのではなく、低エネルギー側から徐々にK A M面が壊れてストカスティックな領域が広がっていくことが

わかった。この領域の上縁が加速の限界を与える。実験で観測される制動放射 X 線はこの加速限界が keV 領域を超えたために観測されると解釈される。

参考文献

- [1] R. A. Dandl, *et al.*; Nucl. Fusion **4**(1964)334
- [2] H. Ikegami, *et al.*; Phys. Rev. Lett. **19**(1967)778
- [3] T. Kawamura, *et al.*; Nucl. Fusion **11**(1971)339
- [4] G. R. Smith A. N. Kaufman; Phys. Rev. Lett. **34**(1975)1613.
- [5] F. Skiff, *et al.*; Phys. Rev. Lett **58**(1987)1430
- [6] 庄山 他, 物理学会第 47 回年会 (1992 年 3 月, 慶応大学)
- [7] 庄山 他, 物理学会秋の分科会 (1992 年 9 月, 東京大学)

Nonlinear Dynamic Behavior of An Emissive Divertor Plate and Divertor Plasma

OHNO Noriyasu*, YE Minyou, MASUZAKI Suguru, SHIRAISHI Katsuhiko
TAKAMURA Shuichi*

Department of Electrical Engineering,
*Department of Energy Engineering and Science
School of Engineering, Nagoya University

ABSTRACT--When the divertor target plate is heated by a plasma flow to a temperature sufficient for thermoelectron emission, the sheath voltage decreases abruptly so that the impurity generation through sputtering can be expected to be extremely suppressed. In this paper, a numerical analysis was done for a nonlinear system composed of the divertor target plate with thermoelectron emission and the high heat flux plasma including the power balance of electrons in the entire system. The relations among sheath voltage, plate temperature and plasma parameters are obtained. A preliminary experiment for demonstrating numerical results was carried out on NAGDIS-I.

1. Introduction

As is well known, it is quite important to study the interactions between the divertor plasma with very high heat flux and the divertor target materials in order to explore innovative divertor concepts which accommodate the heat and particle exhaust encountered in thermonuclear reactors. Impurity control from the divertor target plate is a crucial point for an advanced divertor. The sheath voltage at the plasma -- material interface is a key parameter determining the impurity production through a sputtering.

On the divertor target plate sometimes a very high plasma heat flow increases the plate temperature. Recently, the experiment of carbon test limiters in TEXTOR showed that the hot spot on carbon limiters was formed due to thermoelectron emission ¹⁾. But graphite is not a good thermoelectron emitter.

It has been shown that when the divertor target plate made of LaB₆ is heated by a high plasma heat flow to a temperature sufficient for thermoelectron emission, the sheath voltage decreases so that the impurity generation through sputtering can be expected to be extremely suppressed as predicted by a series of experiments on a linear device NAGDIS-I (Nagoya University Divertor Simulator) in 1992. **This concept is called Emissive Divertor Plate** ²⁾.

In these experiments the quasi static bifurcation phenomena was observed and it was analyzed by the nonlinear theory on the sheath potential, the plasma heat flow, the thermoelectron emission current and the heat-temperature characteristics of the plate. But in the numerical analysis of reference 2) the power balance of electron was not considered, i.e., T_e was assumed constant in

both the cold and the hot states. In fact T_e will change with the transition of target plate state.

This paper describes the dynamic behavior of a nonlinear system composed of the target plate made of LaB6 with thermoelectron emission and the high heat flux plasma **including the electron power balance in the entire system**. The relations among sheath voltage, plate temperature and plasma parameters are obtained. This is a first step for the new divertor concept which has a decreased sheath voltage suppressing a impurity sputtering and a efficient heat divergence from the hot plate , probably tungsten in real condition , through the radiation.

2. The basic experiments on NAGDIS-I ²⁾

A helium plasma with a magnetic field of 750 G was generated on NAGDIS-I . A divertor target plate was made of LaB6 which is a good electron emitter at relatively low temperature owing to a small work function of 2.7 eV. Figure 1 shows that when the divertor target plate was ohmically heated to a temperature sufficient for thermoelectron emission, the floating potential became abruptly half of that of a cold plate at a certain heating power. In fact the sheath voltage decreased to a third of the cold value because the plasma potential was negative with respect to the vacuum chamber. Some kind of hysteresis loop shows the presence of state transitions. Figure 2 shows that a heat pulse induced a transition from the cold state to the hot state of the target plate. Even after the removal of external heat input the sheath voltage remained low. An additional plasma heat flow associated with plasma electron influx went to the target plate due to the resultant small potential barrier compared with the case of cold plate.

3. Numerical analysis model

The plasma heat flow to the target Q is determined mainly by the energy associated with impinging plasma particles:

$$Q = S T_e n_{se} \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2} \left[0.5 - \frac{e\phi_s}{T_e} + \left(\frac{2m_i}{\pi m_e} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) \right] \quad (1)$$

where S is the area of the target plate and n_{se} is the plasma density at the sheath edge.

The sheath voltage on the emissive plate with the thermoelectron emission j_{TH} is described as follows :

$$\phi_s = \frac{T_e}{e} \ln \left[\left(\frac{2\pi m_i}{m_j} \right)^{1/2} + \frac{j_{TH}}{\frac{en_{se} \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2}}{4}} \right] \quad (2)$$

where thermoelectron current j_{TH} is determined by the smaller value of either the Richardson-Dushman's temperature limited current

$$j_{THt} = A T^2 \exp\left(-\frac{e\phi_w}{kT}\right) \quad (3)$$

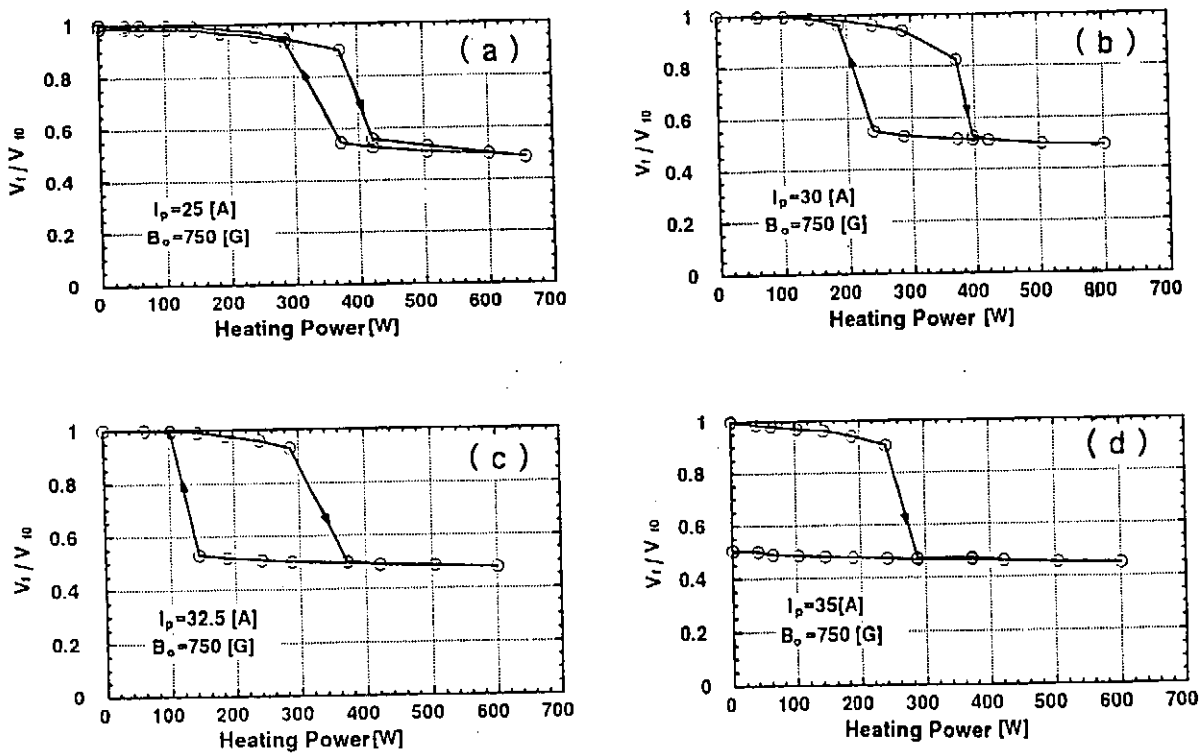


Fig. 1 Static characteristics of sheath voltage as a function of external heating power

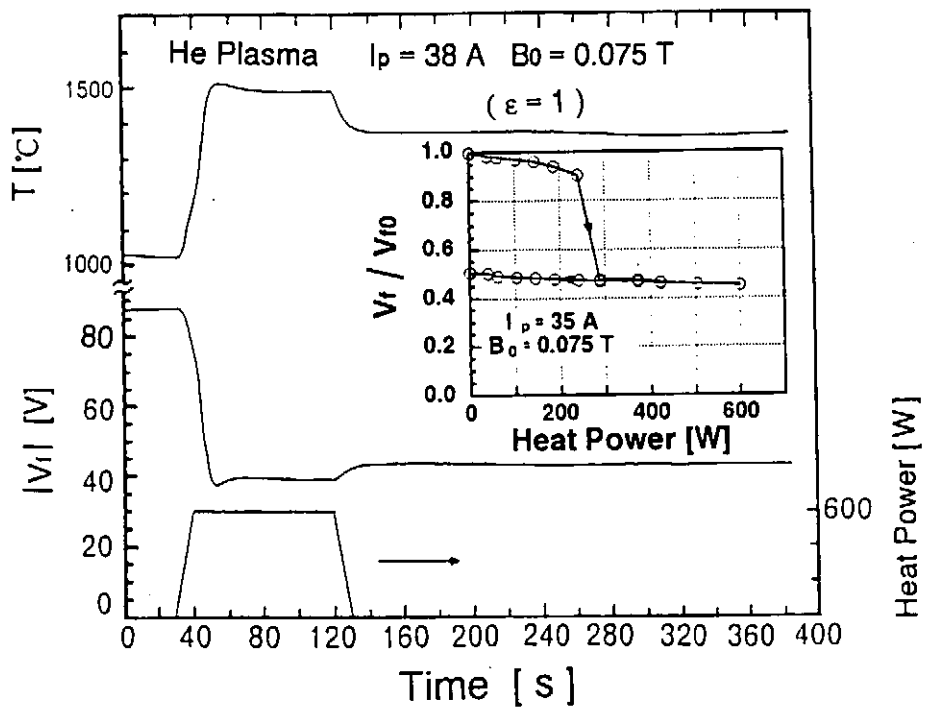


Fig. 2 Time response of the emissive plate to an external heat pulse

or space charge limited current ,

$$\bar{j}_{THs} = 2.33 \times 10^{-6} \phi_s^{1.5} / d^2 \quad (4)$$

where A is Dushman's constant , ϕ_w is the work function of plate material , T [K] is plate temperature and d is the sheath thickness .

On the plate the temporal change of plate temperature is written by

$$H \frac{dT}{dt} = Q - \sigma \epsilon S T^4 - \phi_w \bar{j}_{TH} S \quad (5)$$

where H is the heat capacity, σ is the Stefan-Boltzman constant and ϵ is the emissivity coefficient. Q is plasma heat flow flux arriving at plate, the second term , the third of the right hand side of equation (5) is respectively heat radiation loss of plate and heat loss due to thermoelectrons emission.

The energy balance equation of electron in the plasma is following :

$$n_e V \frac{dT_e}{dt} = P_h - n_e n_{He^0} \langle \sigma v \rangle_i eIV - \frac{(2T_e - e\phi_s) n_{se}}{4} \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) S - \phi_s \bar{j}_{TH} S \quad (6)$$

The first term of the right hand side of equation (6) is the input power, the second term is the energy loss by ionization , the third term is the energy loss by absorption of high-energy electrons and last term is the energy input by injection of thermoelectrons into the plasma. I is the ionization potential and $\langle \sigma v \rangle_i$ is the ionization rate coefficient which is a function of electron temperature . In the cold equilibrium state the right side of equation (5) equal to 0 and $\bar{j}_{TH} = 0$. In the case of electrically floated target plate, taking a cold state as a reference state "0", equation (6) can be written by

$$\frac{dT_e}{dt} = n_{He^0} (\langle \sigma v \rangle_{i0} - \langle \sigma v \rangle_i) eI + \frac{2T_{e0} - e\phi_{s0}}{2L} \left(\frac{T_{e0}}{m_i} \right)^{1/2} - \frac{2T_e - e\phi_s}{8L} \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) - \frac{\phi_s \bar{j}_{TH}}{n_e L} \quad (7)$$

where $n_{se} = 0.5n_e$ is assumed. L is the length of plasma considered.

4. Numerical results and discussion

The numerical calculation is performed following the experimental conditions for the target plate made of LaB₆ : the area of the target plate $S = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ $A = 2.9 \times 10^5 \text{ [A/(m}^2\text{K}^2)]$, $\phi_w = 2.7 \text{ eV}$, $\epsilon = 0.82$ and heat capacity $H = 5.0 \text{ J/K}$. In calculations, the sheath thickness d is assumed to be 3 times as large as the Debye length of the plasma.

4.1 steady state solution

Figure 3 shows that ϕ_s , T and T_e as a function of helium plasma density are of typical S curves in a steady state. This curve shows the presence of state transitions from the cold state to the hot state of plate. When the plate arrives at the hot state with increase of plasma density, the sheath

voltage and the electron temperature decrease to a smaller value and keep a constant the hot state.

We define the width of the transition region from the cold state to the hot state $\Delta n = n_{eh} - n_{el}$, where n_{el} , n_{eh} is respectively the plasma density of the transition region on the side of low density and high density, T_{eh} , ϕ_{sh} is respectively the temperature of electron and the sheath voltage in the hot state of the target plate. Figure 4 shows that the dependence of Δn , n_{el} , T_{eh} and ϕ_{sh} on the length of plasma L . These results shows that n_{el} decreases with the increase of the length of plasma column. Δn , T_{eh} and ϕ_{sh} increase with the increase of the length of plasma column. These phenomena can be explained by a plasam itself heat capacity. The drop of electron temperature depend on the magnitude of plasma heat capacity. A smaller amount of drop of electron temperature response to a larger plasma heat capacity, and a larger L value means plasma is of larger heat capacity. The change of electron temperature will affect the plasam heat flow and the sheath voltage through equation (1) and (2). So it is not difficulty to understand the results in Figure 4.

4.2 The dynamic behavior

In tokamak, a divertor target plate receives repeat heat pulse due to minor disruption and the activity of the edge localized modes in H-mode. So it is significant to investigate a time response of an emissive divertor plate for heat pulse. Here we consider simply a step increase and decrease in helium plasma density to study time response of ϕ_s , T and T_e .

Figure 5 shows that time response of ϕ_s , T and T_e to a step increase from $3.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ to $5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ and a step decrease from $5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ to $3.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ in helium plasma density. The initial values start from the solutions of the steady state in the cold state. The initial density in Fig. 5 is in transition region. It shows that a step increase of plasma density induces a transition

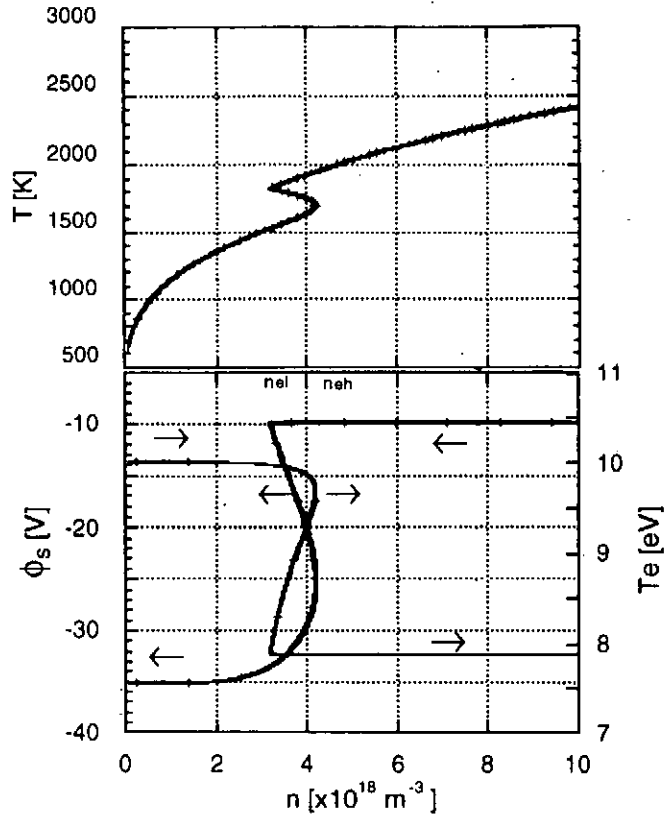


Fig. 3 Steady state solution

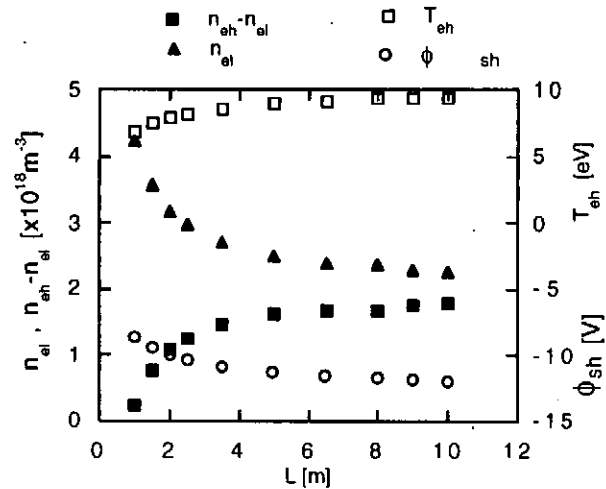


Fig. 4 Dependence of plasma parameters on the length of plasma L .

from the cold state to the hot state of the target plate, the sheath voltage and the electron temperature decrease arriving at a smaller steady state value. Even after the plasma density go back to $3.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, although the plate temperature decreases slightly, the state of the target plate is still kept hot, and the sheath voltage and electron temperature remain smaller value. A drop of electron temperature from the cold state to the hot state means that the plasma is finally cooled because the energy loss by absorption of high-energy electrons by plate is larger than the energy input by injection of thermoelectrons accelerated by a smaller sheath voltage. In TEXTOR carbon test limiters experiments ¹⁾ A drop of the electron temperature has been observed. A preliminary experiment on NAGDIS-I shows this point too.

If we choose a slightly lower value of initial density value in the cold state that in the previous case, the results will be very different. Figure 6 shows that time response of ϕ_s , T and Te to a step increase from $3.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ to $5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ and a step decrease from $5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ to $3.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ in helium plasma density. It also shows that a step plasma density increase induces a transition from the cold state to the hot state of the target plate. But when the plasma density go down to initial value $3.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, the plate temperature, the sheath voltage and electron temperature go back to initial values.

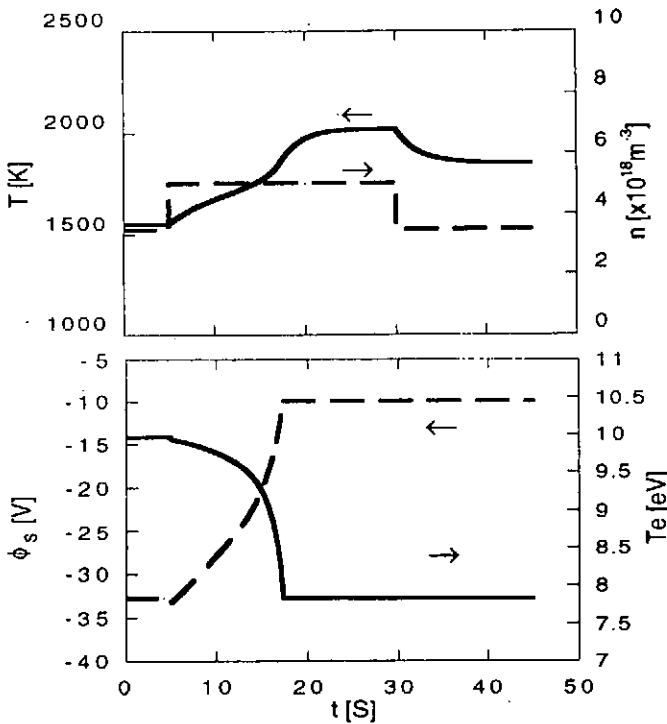


Fig. 5 Time response to a step increase $3.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow 5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow 3.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ in plasma density, the length of plasma $L=2.0 \text{ m}$

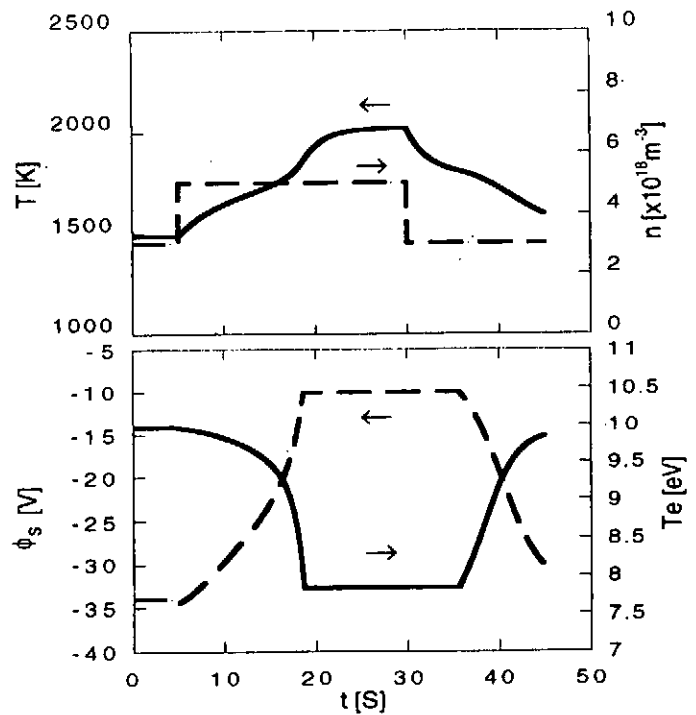


Fig. 6 Time response to a step increase $3.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow 5.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow 3.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ in plasma density, the length of plasma $L=2.0 \text{ m}$

5. Summary

Numerical results show the plasma and target plate parameters, ϕ_s , T and T_e as a function of helium plasma density are of typical S curves in a steady state. When the emissive divertor target plate is heated by a plasma flow to a temperature sufficient for thermoelectron emission, the transition from the cold state to the hot state is spontaneously made, the sheath voltage decreases abruptly and the electron temperature also decreases. The amount of drop depend on the length of plasma column.

A drop of the electron temperature means that the plasma is finally cooled because the energy loss by absorption of high-energy electrons by plate is larger than the energy input by injection of thermoelectrons accelerated by a smaller sheath voltage.

Dynamic behavior of the plasma - target nonlinear system is found to be very sensitive to the change in plasma density near the state transition.

Acknowledgements

One of the authors (Y. M.) would like to thank Dr. Y. UESUGI for his useful discussion, Mr. M. Takagi, Mr. S. SAKURAI and Mr. S. SASAKI for their kind help. This work is supported by the JSPS Postdoctoral Fellowship (No: 92144).

- 1) V. Philipps et al. : Nuclear Fusion Vol.33 ,No. 6 (1993)pp.953- 961.
- 2) S. Takamura et al. : Journal of Nuclear Materials 196-198(1992)pp.448-451.

Publication List of NIFS-PROC Series

- NIFS-PROC-1 *U.S.-Japan on Comparison of Theoretical and Experimental Transport in Toroidal Systems Oct. 23-27, 1989*
Mar. 1990
- NIFS-PROC-2 *Structures in Confined Plasmas –Proceedings of Workshop of US-Japan Joint Institute for Fusion Theory Program– ; Mar. 1990*
- NIFS-PROC-3 *Proceedings of the First International Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion –Next Generation Experiments in Helical Systems– Dec. 4-7, 1989*
Mar. 1990
- NIFS-PROC-4 *Plasma Spectroscopy and Atomic Processes –Proceedings of the Workshop at Data & Planning Center in NIFS–; Sep. 1990*
- NIFS-PROC-5 *Symposium on Development of Intensified Pulsed Particle Beams and Its Applications February 20 1990; Oct. 1990*
- NIFS-PROC-6 *Proceedings of the Second International TOKI Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion , Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas -Theory and Computer Simulation-; Apr. 1991*
- NIFS-PROC-7 *Proceedings of Workshop on Emissions from Heavy Current Carrying High Density Plasma and Diagnostics; May 1991*
- NIFS-PROC-8 *Symposium on Development and Applications of Intense Pulsed Particle Beams, December 6 - 7, 1990; June 1991*
- NIFS-PROC-9 *X-ray Radiation from Hot Dense Plasmas and Atomic Processes; Oct. 1991*
- NIFS-PROC-10 *U.S.-Japan Workshop on "RF Heating and Current Drive in Confinement Systems Tokamaks" Nov. 18-21, 1991, Jan. 1992*
- NIFS-PROC-11 *Plasma-Based and Novel Accelerators (Proceedings of Workshop on Plasma-Based and Novel Accelerators) Nagoya, Japan, Dec. 1991; May 1992*
- NIFS-PROC-12 *Proceedings of Japan-U.S. Workshop P-196 on High Heat Flux Components and Plasma Surface Interactions for Next Devices; Mar. 1993*

- NIFS-PROC-13 【NIFS シンポジウム
「核燃焼プラズマの研究を考えるー現状と今後の取り組み方」
1992年 7月 15日、核融合科学研究所
1993年 7月
NIFS Symposium
*"Toward the Research of Fusion Burning Plasmas -Present
status and Future strategy-", 1992 July 15, National Institute
for Fusion Science; July 1993*
(in Japanese)
- NIFS-PROC-14 *Physics and Application of High Density Z-pinches,*
July 1993
- NIFS-PROC-15 岡本正雄、講義「プラズマ物理の基礎」
平成5年度 総合大学院大学
1994年 2月
M. Okamoto,
"Lecture Note on the Bases of Plasma Physics"
Graduate University for Advanced Studies
Feb. 1994
(in Japanese)