

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

講義「核融合プラズマ物理の基礎 - II」

平成 8 年度

総合研究大学院大学 数物科学研究科 核融合科学専攻

"Lecture Note on the Fundamentals of
Fusion Plasma Physics - II"

岡本 正雄

Masao Okamoto

(Received - Mar. 24, 1997)

NIFS-PROC-31

Apr. 1997

RESEARCH REPORT
NIFS-PROC Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Nagoya 464-01, Japan.

NAGOYA, JAPAN

講義 「核融合プラズマ物理の基礎-II」

平成8年度

総合研究大学院大学

数物科学研究科 核融合科学専攻

岡 本 正 雄

Lecture Note on the Fundamentals of Fusion Plasma Physics -II

Masao Okamoto

Graduate University for Advanced Studies

Synopsis

The Lecture on the "Fundamentals of Fusion Plasma Physics" was given from September 1996 to March 1997 to the students of the Fusion Science Course, Department of Mathematical and Physical Science of the Graduate University for Advanced Studies and to other graduate students at the National Institute for Fusion Science. A transcript of the lecture is presented.

Key words: wave theory, magnetohydrodynamics, equilibrium, stability, banana particle, classical diffusion, neoclassical transport, viscosity

はじめに

本稿は、平成8年9月から平成9年3月にかけて、核融合科学研究所大学院教育協力委員会主催の講義として、総合研究大学院大学数物科学研究科核融合科学専攻の学生、核融合科学研究所特別研究学生等を対象に行った核融合プラズマ物理の基礎の講義に一部修正、加筆した講義録である。受講者の学部時代の専攻が多様であるため、簡単な物理の基礎知識で理解できるよう平易に書かれている。本稿は平成8年4月から7月までの講義ノート（NIFS-PROC-29）の続きである。

本稿作成にあたり、タイプや図の作成は全て長尾佳美嬢にお願いした。同嬢には大変な負担をかけたが心良く協力していただき、心から感謝したい。

目 次

第I部

§ 1 序	1
1) プラズマの概念	1
2) 平均熱運動エネルギー	3
3) デバイ遮蔽	4
4) プラズマ振動	7
5) プラズマ・パラメータ	9
6) シース	10
§ 2 単一荷電粒子の運動	14
(1) 一様な場	15
1) 一様磁場	15
2) 磁気モーメント	18
3) 一様な外力場	18
(2) 非一様磁場	21
1) μ の保存	22
2) $\text{grad } B$ ドリフト	23
3) 曲率ドリフト	25
(3) 粒子軌道とトーラス	26
1) 案内中心の運動	26
2) 単純トーラス	28
(4) ミラー場	30
1) 磁気ミラー	30
2) ミラー比	32
3) フェルミ加速と断熱圧縮	33
(5) 時間的に変動する場	34
1) 時間変動する電場	35
2) 時間変動する磁場	38
§ 3 運動論	40
(1) ボルツマンの式	40
1) 分布関数	40
2) ボルツマンの式の導出	40
3) ブラソフの式	43

4) BBGKYの理論	43
(2) マックスウェルの式	44
(3) プラズマ振動とランダウ減衰	45
(4) ランダウ減衰の物理的描像	55
(5) 捕捉粒子	59
(6) プラズマ分散関数	60
1) プラズマ分散関数	60
2) プラズマ振動	62
3) イオン音波	63
§ 4 クーロン衝突	68
(1) クーロン衝突の特徴	68
1) 弾性散乱	68
2) 大角散乱の場合	70
3) 運動量変化	70
4) 微小角散乱の効果	72
5) エネルギー変化	74
6) 熱化プラズマ	76
(2) 衝突積分	76
(3) 熱化粒子の衝突緩和	80
(4) テスト粒子の衝突衝突	83
1) 速度空間での拡散	83
2) 拡散係数と衝突時間	86
(5) 高エネルギーイオン	88
1) 高エネルギーイオン	88
2) 高エネルギー電子	92
(6) 逃走電子	93
(7) 実効衝突周波数	95
§ 5 流体近似と電磁流体力学	100
(1) 流体近似	100
1) 流体方程式系	100

2) 古典的輸送係数	103
(2) 電磁流体力学	106
1) 1 流体運動方程式	106
2) オームの式	110
3) MHD方程式系	113
4) 凍り付きの定理	115
(3) 磁気流体波	117
(4) 捕捉	126

第II部

§ 6 プラズマ波動	131
(1) 波動の基本的性質	131
1) 波の表現	131
2) 位相速度	131
3) 群速度	132
4) 屈折率	133
5) 分散式	133
6) 遮断と共鳴	133
(2) 冷たいプラズマ近似	134
1) 誘電率テンソル	134
2) 分散式	136
3) 偏光性	138
4) 平行伝搬	140
5) 垂直伝搬	142
6) 電磁流体波	143
7) イオンサイクロトロン波	144
8) 電子サイクロトロン波	145
(3) プラズマ振動とイオン音波	147
1) 2 流体モデルと分散式	147
2) プラズマ振動	149
3) イオン音波	150
(4) 有限温度効果	151
1) 波動方程式と分散式	151
2) 静電近似	152

§ 7	理想MHD 平衡と安定性	154
(1)	MHD 平衡	154
1)	平衡の式	154
2)	等圧面	156
3)	磁気面	156
4)	磁気軸	158
5)	磁気面量	158
6)	磁束と電流束	159
7)	回転変換と安全係数	160
8)	有理面	161
9)	磁気シア	161
10)	比体積	162
11)	磁気井戸・磁気丘	163
12)	軸対称系での平衡の式	165
13)	補足-磁気座標系	167
(2)	MHD 安定性とエネルギー原理	171
1)	境界条件	171
2)	線形初期値境界値問題	173
3)	演算子 $\bar{F}$ の性質と固有値問題	175
4)	エネルギー原理	177
(3)	交換型不安定性	180
1)	磁場の湾曲	180
2)	重力不安定性	181
3)	安定化効果	183
4)	重力不安定性の粒子的描象	185
5)	交換型不安定性の条件	185
(4)	キンク不安定性	188
1)	ソーセージ不安定性	188
2)	キンク不安定性	190
3)	Kruskal-Shafranov 限界	191
§ 8	抵抗性不安定性	195
(1)	抵抗の役割	195
(2)	スラブ配位における抵抗性 MHD 不安定性	199
1)	平衡	199
2)	線形化	200
3)	漸近的接続法 (Asymptotic Matching)	203
(3)	物理的描像と固有値の導出	205
1)	駆動力	205

2) 抵抗性Gモード	207
3) リップリングモード	208
4) テアリングモード	210
(4) テアリングモードと磁気島	213
(5) テアリングモードの非線形発展	218
§9 トーラスと粒子軌道	223
(1) トーラス性	223
(2) トカマクでの粒子軌道	225
1) ドリフト面	226
2) 周回粒子	227
3) バナナ粒子	232
(2) バナナ中心の運動	237
§10 古典輸送	241
(1) プラズマの流れ	242
(2) 拡散	243
(3) 古典的拡散の物理機構	245
(4) 不純物イオンの古典的拡散	247
§11 新古典的輸送	249
(1) 概論	249
(2) 新古典理論	256
(3) 平行電流	260
(4) 粒子拡散	266
(5) ヘリカル系の場合	272
(6) 揺動の効果	274
(7) 補足	276

§6 プラズマ中の波動

(1) 波動の基本的性質

1) 波の表現

プラズマ中の波動(微小振動、線形振動)は零次(あるいは平衡)のプラズマ諸量($n_0, \vec{E}_0, \vec{B}_0, \dots$)に重畳された微小振動と考え、それを例えば密度 n , 静電ポテンシャル ϕ を

$$\begin{aligned} n &= n_0 + R_e\{n' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + \delta_1]\} \\ \phi &= \phi_0 + R_e\{\phi' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + \delta_2]\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

で表す。 n', ϕ' を複素数とし、位相差 $e^{\delta_1}, e^{\delta_2}$ をそれに含ませると摂動部分は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n} &= n' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \\ \tilde{\phi} &= \phi' \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

と書ける。線形理論を論ずるので常に $\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ が式の両辺に現れ、このように(実数部をとらなくても)表現しておくだけでよい。 ω は波の角周波数、 $\vec{k}$ は波数ベクトルで $k = |\vec{k}|$ と波の波長 λ との間には

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.3)$$

の関係がある。線形理論では重ね合わせの原理が成立するので種々の単色波を重ね合わせ、波動は一般的に

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k A(\vec{k}, \omega) \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega(\vec{k})] \quad (6.4)$$

と表せる。

2) 位相速度

単色波 $A(\vec{k}, \omega) \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ を考えたとき、位相が一定の点は

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const} \quad (6.5)$$

である。 t で微分すると

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega &= 0 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\omega}{k} \hat{k} \quad (\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

であり、これは位相 = const の点の動く速度を表し、位相速度 (phase velocity) という。

3) 群速度

波の振巾 $A(\vec{k}, \omega)$ が $\vec{k}$ のゆるやかな関数とする。最大の A を与える $\vec{k}$ を $\vec{k}_0$ とし、 $\omega(\vec{k})$ を $\vec{k}_0$ の周りに展開すると

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k}_0) + \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) + \dots \quad (6.7)$$

波束 Ψ は

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \Psi_0 \exp[i\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - i\omega(\vec{k}_0)t] \\ \Psi_0 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k A(\vec{k}) \exp[-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot (\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}_0} t - \vec{r})] \end{aligned} \quad (6.8)$$

と書ける。振巾一定は

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}_0} t - \vec{r} = \text{const.} \quad (6.9)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \quad (6.10)$$

の速度で進む。これを群速度 (group velocity) という。群速度は直角座標、及び球座標で書くと

$$\begin{aligned} \vec{v}_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} &= \hat{k}_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + \hat{k}_y \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \hat{k}_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \\ &= \hat{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \hat{\theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (6.11)$$

と表せる。

4) 屈折率

屈折率 (refractive index) を

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega} = \hat{k} \frac{c}{\omega/k} \quad (\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}) \quad (6.12)$$

で定義する。 $\vec{n}$ は伝搬の方向で大きさは光速と位相速度の比になっている。

5) 分散式

屈折率 $\vec{n}$ は一般に ω の関数で、 $\vec{n}$ (あるいは $\vec{k}$) と ω との関係式を分散式あるいは分散関係 (dispersion relation) という。分散式は媒質の性質により決まる。

6) 遮断と共鳴

今外部から波を励起したとする (RF 加熱の場合など)。この時 ω は実で一定値である。媒質が空間的にゆるやかに変化しているとし、その変化の特徴的長さを L とする。即ち、

$$L \cong \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1}, \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)^{-1}, \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right)^{-1} \quad (6.13)$$

などである。もし $\lambda \ll L$ であると、波からみると各点各点において媒質は一様にみえ、一様プラズマの場合に求めた $\vec{n}$ を位置 $\vec{r}$ の関数とみなせる。例えばプラズマ中の ($\vec{B}_0 = 0$ の時) 電磁波の分散式は

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2(x) \quad (6.14)$$

で与えられる。ここで ω はプラズマ外から入射した電磁波の角周波数で実で一定ある。プラズマ中で密度が波の伝搬方向に変化しているとすると ω_{pe} は x の関数となる。

$$\lambda \ll \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1} \quad \text{即ち} \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \ll k \quad (6.15)$$

ならプラズマ中の電磁波の分散式は各点 x において上のように書ける。 $\omega^2 > \omega_{pe}^2(x)$ なら $k^2 > 0$ で波は伝搬できる。密度 n が大きくなる所まで波が進むと $\omega^2 \leq \omega_{pe}^2(x)$ となる領域に達し、 $k^2 \leq 0$ となり、波は伝搬しなくなる。

$k = 0$ 即ち屈折率 $n = 0$ を遮断 (cut off)、 $k = \infty (n = \infty)$ となれば共鳴 (resonance) という。遮断の起こる近傍では ($k \simeq 0$ なので) 一様プラズマに対する分散式は成立しない。共鳴点近くでは k が大きく、従って $k^2 \lambda_D^2$ や $k^2 \varrho_L^2$ は大きくなり温度効果が重要になってくる。一般に伝搬してきた波は遮断の点で反射され、共鳴点でプラズマに吸収される。

(2) 冷たいプラズマ近似

プラズマ中の線形波動を考える。一次の量はすべて $\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t]$ に比例すると仮定する。ここに $\vec{k}$ は伝搬の波動ベクトル、 ω は振動数とする。今、考えている波の波長 ($\lambda = 2\pi/k$) がデバイ半径 λ_D やラーモア半径 ϱ_L よりずっと長いとする。即ち、

$$\begin{aligned} k\lambda_D &\ll 1, & \lambda_D &= \left(\frac{\epsilon_0 T}{n e^2}\right)^{1/2} \\ k\varrho_L &\ll 1, & \varrho_L &= v_T / \Omega \\ v_T &= \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2} \\ \Omega &= \frac{eB}{m} \end{aligned} \quad (6.16)$$

の時を考えると、波動の振る舞いに与える温度の効果は小さい。 $T \rightarrow 0 (\lambda_D \rightarrow 0, \varrho_L \rightarrow 0)$ の極限で線形波動の分散式を考える事にする。このような近似を冷たいプラズマ近似という。

1) 誘電率テンソル

電気変位 (electric displacement) $\vec{D}$ は

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (6.17)$$

で与えられる。 $\vec{P}$ は分極で分極電流を $\vec{J}$ とすると $\vec{J} = \partial \vec{P} / \partial t = -i\omega \vec{P}$ となるので

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{J} \quad (6.18)$$

と書ける。 $\vec{J}$ は

$$\vec{J} = \sum_a n_a Z_a e_a \vec{v}_a \quad (6.19)$$

と表せる。ここに n_a は a 種粒子の密度、 $Z_a e_a$ は電荷（イオンなら $Z_i e$ 、電子なら $-e$ となる）、 $\vec{v}_a$ は a 種粒子のミクロな速度で運動方程式

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = Z_a e_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) \quad (6.20)$$

に従う。零次では $\vec{v}_{a0} = 0, \vec{E}_0 = 0, \vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const.}$ とする。式(6.20)は

$$-i\omega m_a \vec{v}_a = Z_a e_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}_0) \quad (6.21)$$

と書ける。ここで

$$\begin{aligned} v^\pm &\equiv v_x \pm i\varepsilon v_y \\ E^\pm &\equiv E_x \pm i\varepsilon E_y \end{aligned} \quad (6.22)$$

とおく。但し ε はイオンに対して $\varepsilon = 1$ 、電子に対して $\varepsilon = -1$ とする。運動方程式(6.21)の解は

$$v_a^\pm = \frac{i}{B_0} \frac{\epsilon_a \Omega_a}{\omega \mp \Omega_a} E^\pm \quad (6.23)$$

$$v_{a,z} = \frac{i}{B_0} \frac{\epsilon_a \Omega_a}{\omega} E_z \quad (6.24)$$

である。これらより (v_{ax}, v_{ay}, v_{az}) は (E_x, E_y, E_z) の関数で表す事ができる。即ち $\vec{J}$ は $\vec{E}$ で表す事ができるので式(6.18)は

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{\omega} \vec{J} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{\chi}_e \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \vec{\chi}_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{K} \vec{E} \end{aligned} \quad (6.25)$$

と表せる。 $\vec{\chi}_e$ はテンソルで受電率 (susceptibility) と言う。 $\vec{K}$ を誘電率テンソル (dielectric tensor) と言う。簡単な計算から $\vec{K}$ は次のようになる。

$$\vec{K} \vec{E} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(R+L), & D &= \frac{1}{2}(R-L) \\ R &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega + \epsilon_a \Omega_a} \right) \\ L &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega - \epsilon_a \Omega_a} \right) \\ P &= 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

ここに ω_{pa} はプラズマ振動数、 Ω_a はサイクロトン振動数で

$$\begin{aligned} \omega_{pa}^2 &= \frac{n_a e^2}{\epsilon_0 m_a} \\ \Omega_a &= \frac{|Z_a e_a| B_0}{m_a} \end{aligned} \quad (6.28)$$

と与えられる。 ϵ_a はイオンで1、電子で-1とする。

2) 分散式

マックスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} &= \vec{\epsilon} \vec{E} = \epsilon_0 \vec{K} \vec{E} \end{aligned} \quad (6.29)$$

であるので $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることに注意すると

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{K} \vec{E} = 0 \quad (6.30)$$

の関係式が得られる。屈折率は

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega} = \frac{\vec{k}}{k} \frac{c}{(\omega/k)} \quad (6.31)$$

で与えられる。 $\vec{n}$ は $\vec{k}$ の方向の光速と位相速度の比を表している。式(6.30)は

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \vec{K} \vec{E} = 0 \quad (6.32)$$

と書ける。 $\vec{n}$ (あるいは $\vec{k}$)は $x-z$ 平面内にあるとしても一般性は失わない。 $\vec{B}_0$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると式(6.32)は

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.33)$$

となる。

$$\begin{aligned} n_{\perp} &= n_x = n \sin \theta \\ n_{\parallel} &= n_z = n \cos \theta \end{aligned} \quad (6.34)$$

だから

$$\begin{pmatrix} S - n_{\parallel}^2 & -iD & n_{\parallel} n_{\perp} \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n_{\parallel} n_{\perp} & 0 & P - n_{\perp}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.35)$$

とも書ける。

式(6.33)が $E_x = E_y = E_z = 0$ でない意味のある解を持つ条件は

$$\begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

である。これより

$$An^4 - Bn^2 + C = 0 \quad (6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta \\ B &= RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \\ C &= PRL \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

が成立する。これが分散式 ($\vec{n}$ と ω の関係) を与える。式 (6.36) の解は

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{B \pm F}{2A}, \\ F^2 &= (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (6.38)$$

あるいは

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)} \quad (6.39)$$

と書ける。

$\vec{B}_0$ に平行方向に伝搬するモードは ($\theta = 0$)、

$$P = 0, \quad n^2 = R, \quad n^2 = L \quad (6.40)$$

$\vec{B}_0$ に垂直方向に伝搬するモードは ($\theta = \pi/2$)、

$$n^2 = \frac{RL}{S}, \quad n^2 = P \quad (6.41)$$

の関係を満たす。 $R = 0, L = 0, P = 0$ で遮断が、 $S = 0$ で共鳴が起こる。

3) 偏光性

電場 $\vec{E}$ が円偏光している場合を考える。図 6.1 のように $\vec{B}_0$ を見た時電子は右回り、イオンは左回りをしている。

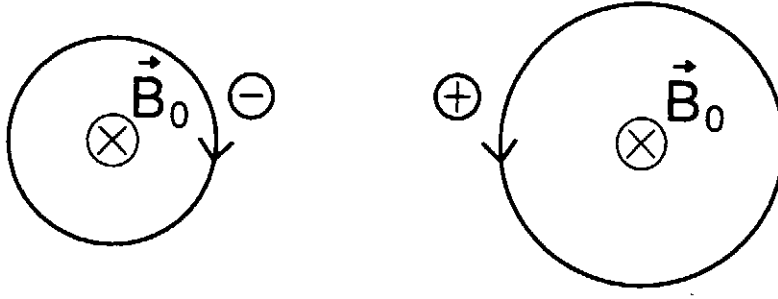


図6.1 右回りと左回りの定義

右回り、左回りはこのように定義する。 $\vec{E}$ が右回りの円偏光している時は

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos \omega t = a \operatorname{Re}(e^{-i\omega t}) \\ E_y &= a \sin \omega t = a \operatorname{Re}(ie^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

であるので

$$\frac{iE_x}{E_y} = 1 \quad (6.43)$$

が成り立つ。同様に左回りの円偏光は

$$\frac{iE_x}{E_y} = -1 \quad (6.44)$$

となる。一般には式(6.33)の y 成分を取る事により E_x と E_y の比は

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{n^2 - S}{D} \quad (6.45)$$

で与えられる。粒子の運動は式(6.23)から求める事ができる

$$\begin{aligned} v_a^\pm &= v_{ax} \pm i\varepsilon_a v_{ay} \\ &= \frac{i}{B_0 \omega \mp \Omega_a} \varepsilon_a \Omega_a E^\pm = C_{ak}^\pm E^\pm \\ E^\pm &= E_x \pm i\varepsilon_a E_y \end{aligned} \quad (6.46)$$

これより粒子運動の偏極は

$$\frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = -\varepsilon_a \left[\frac{C_a^+ \left(\frac{iE_x}{E_y} - \varepsilon_a \right) + C_a^- \left(\frac{iE_x}{E_y} + \varepsilon_a \right)}{C_a^+ \left(\frac{iE_x}{E_y} - \varepsilon_a \right) - C_a^- \left(\frac{iE_x}{E_y} + \varepsilon_a \right)} \right] \quad (6.47)$$

で与えられる。 $iE_x/E_y = (n^2 - S)/D$ を代入すると

$$\frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = \frac{(\epsilon_a\omega - \Omega_a)(n^2 - L) + (\epsilon_a\omega + \Omega_a)(n^2 - R)}{(\epsilon_a\omega - \Omega_a)(n^2 - L) - (\epsilon_a\omega + \Omega_a)(n^2 - R)} \quad (6.48)$$

となる。

$\theta = 0$ で $n^2 = R$ を満たす波は右まわり円偏光で

$$\frac{iE_x}{E_y} = 1, \quad \frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = 1 \quad (6.49)$$

$\theta = 0$ で $n^2 = L$ を満たす波は左まわり円偏光で

$$\frac{iE_x}{E_y} = -1, \quad \frac{iv_{ax}}{v_{ay}} = -1 \quad (6.50)$$

の条件を満たす。 $\theta \rightarrow 0$ で $n^2 = R$ となる波をR波、 $\theta \rightarrow 0$ で $n^2 = L$ となる波をL波という。

$\theta = \pi/2$ の時の偏光性は

$$\begin{cases} n^2 = P & \text{の波} \quad E_x = E_y = 0, E_z \neq 0 \\ n^2 = \frac{RL}{S} & \text{の波} \quad \frac{iE_x}{E_y} = -\frac{R-L}{R+L}, E_z = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

となる。 $\theta \rightarrow \pi/2$ の時 $n^2 = P$ になる波を正常波 (ordinary wave)、 $\theta \rightarrow \pi/2$ の時 $n^2 = RL/S$ になる波を異常波 (extraordinary wave) と言う。 $\theta = \pi/2$ の時の正常波 (O波) は E_z のみ、即ち $\vec{E} // \vec{B}_0$ で、 $\theta = \pi/2$ の時の異常波 (X波) は E_x, E_y のみ、即ち $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ である。

このように波の分類はR波又はL波、O波又はX波、とあるが、この他に $\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ の間の位相速度の大小により速波 (fast wave) と遅波 (slow wave) に分類したりする。

4) 平行伝搬

平行伝搬 ($\theta = 0$) は

$$P = 0, \quad n^2 = R, \quad n^2 = L$$

で与えられ、 m_e/m_i は小さいとしこのオーダを無視すると分散式は

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{pe}^2 \\ n_z^2 &= \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 \mp \omega \Omega_e - \Omega_e \Omega_i - \omega_{pe}^2}{(\omega \pm \Omega_i)(\omega \mp \Omega_e)}\end{aligned}\quad (6.52)$$

(上の符号は $n^2 = R$, 下の符号は $n^2 = L$ に相当)

となる。今、 $B_0 = 0$ の時を考える ($\Omega_e = \Omega_i = 0$)。この時分散式は

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{pe}^2 \\ \omega^2 &= \omega_{pe}^2 + k_z^2 c^2\end{aligned}\quad (6.53)$$

と簡単になる。上の分散式は静電的な縦波のプラズマ振動で温度効果をいれると

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{Te}^2 \quad (6.54)$$

になる。後者はプラズマ中を伝わる横波の電磁波である。プラズマ波と電磁波の分散式を図6.2に示す。

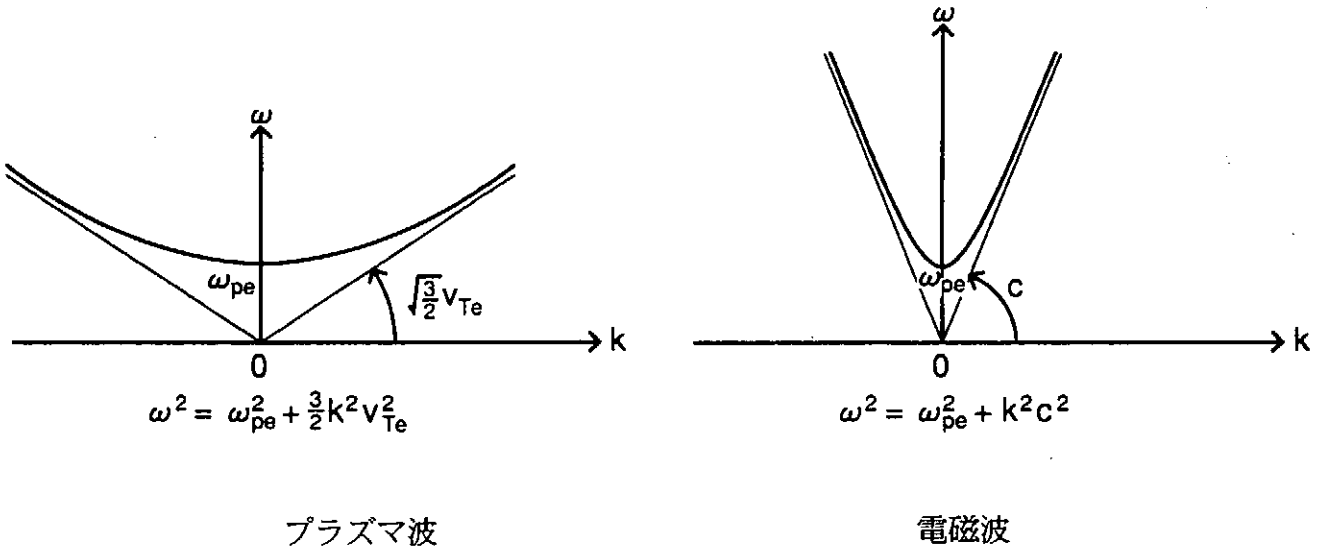


図6.2 プラズマ波と電磁波の分散式

プラズマの密度が x 方向に変化するとする。即ち ω_{pe} が x の関数とすると電磁波の分散式は

$$k_z^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2(x) \quad (6.55)$$

となる。与えられた電磁波の角周波数 ω が $\omega > \omega_{pe}(x)$ なら($k_z^2 > 0$ で)波は伝搬できる。もし $\omega \leq \omega_{pe}(x)$ なら($k_z^2 \leq 0$)となり波は伝搬できず反射される。

$B_0 \neq 0$ の時は

$$n_z^2 = \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega \mp \omega_R)(\omega \pm \omega_L)}{(\omega \pm \Omega_i)(\omega \mp \Omega_e)} \begin{cases} \text{上の符号 } n^2 = R \text{ (R波)} \\ \text{下の符号 } n^2 = L \text{ (L波)} \end{cases} \quad (6.56)$$

である。ただし ω_R, ω_L は

$$\omega^2 \mp \omega \Omega_e - \Omega_e \Omega_i - \omega_{pe}^2 = 0 \quad (6.57)$$

の解で

$$\left. \begin{matrix} \omega_R \\ \omega_L \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \Omega_e + \sqrt{\Omega_e^2 + 4\Omega_e \Omega_i + 4\omega_{pe}^2} \right\} \quad (6.58)$$

で与えられる。共鳴は $n^2 = R$ の時 $\omega = \Omega_e$ で、 $n^2 = L$ の時は $\omega = \Omega_i$ で起こる。前者が電子サイクロトロン共鳴で後者はイオンサイクロトロン共鳴と呼ばれる。

5) 垂直伝搬

垂直伝搬は $\theta = \pi/2$ の時

$$n^2 = P \text{ (正常波, O波)}, \quad n^2 = \frac{RL}{S} \text{ (異常波, X波)}$$

で与えられる。遮断は $R = 0, L = 0, P = 0$ でおこり、 $S = 0$ の時共鳴となる。 $m_e/m_i \ll 1$ のオーダーは無視する。 $n^2 = P$ より

$$k_x^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2 \quad (6.59)$$

の分散式が得られ、 $n^2 = RL/S$ から

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)} \quad (6.60)$$

を得る。ここに ω_{UH} は高域混成共鳴周波数 (upper hybrid resonance frequency)、 ω_{LH} は低域混成周波数 (lower hybrid resonance frequency) と呼ばれ次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\omega_{UH}^2 &= \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 \\ \frac{1}{\omega_{LH}^2} &= \frac{1}{\Omega_i^2 + \omega_{pi}^2} + \frac{1}{\Omega_i \Omega_e}\end{aligned}\quad (6.61)$$

遮断や共鳴の起こる条件は明かである。

6) 電磁流体波

$\omega \ll \Omega_i$ の場合を考えると、分散式 (6.36) は著しく簡単になる。 $m_e/m_i \ll 1$ とすると、

$$\begin{aligned}R &\simeq L \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \\ S &= \frac{1}{2}(R + L) \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \\ D &\simeq 0\end{aligned}\quad (6.62)$$

となる。次の量

$$\begin{aligned}K_{\perp} &\equiv 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = 1 + \frac{c^2}{C_A^2} \\ (C_A &= \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad : \quad \text{アルベン速度})\end{aligned}\quad (6.63)$$

はしばしば実効的垂直誘電率、あるいは (狭い意味で) 単に誘電率という。一般に $K_{\perp} \gg 1$ ($\omega_{pi}^2 \gg \Omega_i^2, C^2 \gg C_A^2$) である事に注意しておく。 $\vec{K}$ はこの時

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}\quad (6.64)$$

となる。 $K_{\perp}$ と P の比は

$$\left| \frac{K_{\perp}}{P} \right| = \left| \frac{1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2}}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \right| \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \simeq \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \ll 1\quad (6.65)$$

であり、 P は $K_{\perp}$ よりずっと大きい。即ち $R, L, S \ll P$ である。式(6.37)の A, B, C は $\theta = \pi/2$ のごく近くを除いて

$$\begin{aligned} A &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \\ B &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta) \\ C &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} K_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (6.66)$$

と近似でき分散式は次の解を持つ

$$\begin{aligned} n^2 &= K_{\perp}, & \omega^2 &= k^2 C_A^2 \\ n^2 \cos^2 \theta &= K_{\perp}, & \omega^2 &= k_z^2 C_A^2 \end{aligned} \quad (6.67)$$

それぞれは、圧縮性アルベン波、シアールベン波で既に§ 5で論じた。

7) イオンサイクロトロン波

$\omega \simeq \Omega_i \ll \Omega_e \sim \omega_{pe}$ の周波数帯を考える。 $\theta = \pi/2$ のごく近傍を除いて、 $\omega \ll \Omega_e$ の近似で

$$\left. \begin{aligned} A &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \\ B &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} (R + L)(1 + \cos^2 \theta) \\ C &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} RL \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

となり分散式は

$$n^4 \cos^2 \theta - n^2 \frac{\gamma \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\gamma^2 \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} = 0 \quad (6.69)$$

$$\gamma \equiv \frac{c^2}{C_A^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \quad (6.70)$$

$$k_{\perp}^2 c^2 = \frac{\omega^4 \gamma^2 \Omega_i^2 - \omega^2 (2\gamma \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\parallel}^2 c^4) + \Omega_i^2 k_{\parallel}^4 c^4}{\omega^2 (\gamma \Omega_i^2 + k_{\parallel}^2 c^2) - \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2} \quad (6.71)$$

$$(k_{\parallel} = k \cos \theta, k_{\perp} = k \sin \theta)$$

となる。次の条件を満たすと共鳴が起こる。

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \gamma \Omega_i^2} = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \omega_{pi}^2} \quad (6.72)$$

$\omega \simeq \Omega_i$ の時は

$$n^2 \simeq \frac{c^2/C_A^2}{1 + \cos^2 \theta} \quad (6.73)$$

$$n^2 \cos^2 \theta = n_{\parallel}^2 = \frac{c^2}{C_A^2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \quad (6.74)$$

となる。式(6.73)は $\omega \ll \Omega_i$ のMHD流体波の圧縮性アルベン波につながるもので、 $\omega \sim \Omega_i$ での圧縮性アルベン波と言ってよい。共鳴はない。式(6.74)はイオンサイクロトン波と呼ばれ $\omega = \Omega_i$ で共鳴する。イオンサイクロトン波は次のようにも書ける。

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{k_{\parallel}^2 c^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2} \right)^{-1} \quad (6.75)$$

$k_{\parallel}^2 \rightarrow \infty$ で $\omega \rightarrow \Omega_i$ となるので共鳴は $\theta = 0$ で起こる。

8) 電子サイクロトン波

$\omega_{pi} \ll \omega, \Omega_i \ll \omega$ の場合を考える。 $\omega_{pi} \rightarrow 0, \Omega_i \rightarrow 0$ の極限で

$$\begin{aligned} R &\simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_e} \\ L &\simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_e} \\ P &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (6.76)$$

と近似できて、分散式は

$$n^2 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)}{2\omega^2(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2) - \Omega_e^2 \sin^2 \theta \pm \Omega_e \Delta} \quad (6.77)$$

$$\Delta = [\Omega_e^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \quad (6.78)$$

で与えられる。 Δ の前の $\pm$ の符号は正の時正常波 (ordinary wave)、負の時異常波 (extraordinary wave) を表している。 $[\]$ の中の2つの項の大小により

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega_e^2 \sin^4 \theta \gg 4\omega^2(1-\alpha)^2 \cos^2 \theta & (\text{Quasi transverse : } QT\text{波}) \\ \theta \simeq \pi/2 \\ \Omega_e^2 \sin^4 \theta \ll 4\omega^2(1-\alpha)^2 \cos^2 \theta & (\text{Quasi longitudinal : } QL\text{波}) \\ \theta \simeq 0 \end{array} \right. \quad (6.79)$$

の2つの場合を考える。

QT波に対して

$$\left\{ \begin{array}{ll} n^2 \simeq \frac{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta} & (O\text{波}, \quad QT-O\text{波}) \\ n^2 \simeq \frac{(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2})^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta} & (X\text{波}, \quad QT-X\text{波}) \end{array} \right. \quad (6.80)$$

QT-O波で $\theta = \pi/2$ とすると

$$\frac{k_x^2 C^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (6.81)$$

となり磁場を横切る電磁波の分散式となる。 $\theta \simeq \pi/2$ のQT-O波は B_0 に独立である。この波はマイクロ波干渉計で用い密度測定に使われる。

QL波はさらに

$$\Omega_e^2 \sin^2 \theta \ll |2(\omega^2 - \omega_{pe}^2)| \quad (6.82)$$

と言う条件をつけて簡単化する。この時

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega \pm \Omega_e \cos \theta)\omega} \quad QL - \left\{ \begin{array}{l} L \\ R \end{array} \right. \quad (6.83)$$

となるが、 $\pm$ の符号のうち正はL波で、負はR波である。R波は $\omega \sim \Omega_e$ で共鳴を起こし、電子サイクロトロン波(electron cyclotron wave)と呼ばれる。この波は $\omega^2 \simeq \omega_{pe}^2$ では満たされない。また電子サイクロトロン波の事をホイッスラー波(whistler wave)とも言う。ホ

イッスラー波は雷により発生した電磁波が地球磁気圏のプラズマ中をほぼ磁力線に沿って伝搬する波と同定された。この場合は周波数は可聴領域にあり、また群速度が $v_g \propto \sqrt{\omega}$ (確かめよ) であるので、 ω の大きい波が先に耳に入り、しり下がりの口笛を吹くような音として聞こえるこのため whistler (口笛) 波と呼ばれている。

波動理論では様々な用語が用いられ人によっては使い方も異なる。本稿では例えば parallel とは $\vec{k} // \vec{B}_0$, の事を意味し、longitudinal は $\vec{k} // \vec{E}$, perpendicular は $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, transverse は $\vec{k} \perp \vec{E}$ の事である。

(3) プラズマ振動とイオン音波

温度効果の一例として、静電的なプラズマ振動とイオン音波を考える。これらは既に論じたが、運動論的な取扱いでは主プラズマが分散式あるいはプラズマ振動を決め、わずかな共鳴粒子が波の減衰 (あるいは増巾) を決める。イオン音波でも同様である。ここでは流体的に2つのモードの分散式を求める。

1) 2流体モデルと分散式

振動周期の間プラズマ粒子の2体衝突は無視できるとすると静電近似の場合 a 種粒子 ($a = e$: 電子、 $a = i$: イオン) に対して

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (6.84)$$

$$m_a n_a \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \nabla \vec{v}_a \right) = -\nabla p_a + n_a e_a \vec{E} \quad (6.85)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_a}{\rho_a} \right) = 0 \quad (6.86)$$

$$p_a = n_a T_a, \quad \rho_a = m_a n_a \quad (6.87)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (6.88)$$

と書ける。各変数を一様な部分と摂動量に分ける。

$$\left. \begin{aligned} n_a &= n_{a0} + \tilde{n}_a \\ \vec{v}_a &= \vec{v}_{a0} + \vec{\tilde{v}}_a \\ p_a &= p_{a0} + \gamma \frac{p_{a0}}{\rho_{a0}} \tilde{\rho}_a \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

$n_{a0}, p_{a0} = n_{a0} T_{a0}$ は一様で定数とする。式(6.89)の第3式から

$$\nabla p_a = \gamma_a T_{a0} \nabla \tilde{n}_a \quad (6.90)$$

である。ここで γ_a は比熱比であるが等温変化の場合 $\nabla p_a = \nabla(n_a T_a) = T_a \nabla n_a$ であるので $\gamma_a = 1$ である。断熱変化の場合は、一様プラズマ中の静電的摂動は一次元的であるので $\gamma_a = (f+2)/f$ (f は自由度) は $\gamma_a = 3$ を与える。

線形化した式は $\vec{E} = -\nabla\varphi$ を使うと

$$\frac{\partial \tilde{n}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{a0} \vec{\tilde{v}}_a) = 0 \quad (6.91)$$

$$m_a \tilde{n}_a \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} = -\gamma_a T_{a0} \nabla \tilde{n}_a - e_a n_{a0} \nabla \varphi \quad (6.92)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} (Z_i \tilde{n}_i - e \tilde{n}_e) \quad (6.93)$$

となる。但し $n_{e0} = Z_i n_{i0}$ である。 $\tilde{n}_a, \vec{\tilde{v}}_a, \varphi$ は $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ に比例するとする。一様プラズマを取り扱っているので $\vec{k}$ の方向をx軸にとり $\vec{k} = (k, 0, 0)$, $\vec{\tilde{v}}_a = (u_a, 0, 0)$ としても一般性は失わない。線形化した式は

$$-i\omega \tilde{n}_a + i n_{a0} k u_a = 0 \quad (6.94)$$

$$-i\omega m_a n_{a0} u_a = -i\gamma_a T_a k \tilde{n}_a - i e n_{a0} k \varphi \quad (6.95)$$

$$k^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} (z_i e \tilde{n}_i - e \tilde{n}_e) \quad (6.96)$$

となる。これから次の式の分散式が求まる。

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \gamma_e \frac{k^2 v_{Te}^2}{2})(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - \gamma_i \frac{k^2 v_{Ti}^2}{2}) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned}
v_{Te} &= \sqrt{2T_e/m_e} \\
v_{Ti} &= \sqrt{2T_i/m_i} \\
\omega_{pe} &= \sqrt{n_{e0}e^2/\epsilon_0 m_e} \\
\omega_{pi} &= \sqrt{n_{i0}Z_i^2 e^2/\epsilon_0 m_i}
\end{aligned} \tag{6.98}$$

2) プラズマ振動

$\omega \sim \omega_{pe} \gg kv_{Te} \gg kv_{Ti}$ の場合を考える。摂動の位相速度 ω/k は電子の熱速度より速く、断熱的であるので $\gamma_e = 3$ である。分散式は

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \frac{3}{2}k^2 v_{Te}^2 = 0 \tag{6.99}$$

となりこれから

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_{pe}^2 + 3k^2 \frac{T_e}{m_e} \\
&= \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)
\end{aligned} \tag{6.100}$$

$$\omega = \omega_{pe} (1 + \frac{3}{2}k^2 \lambda_{De}^2) \tag{6.101}$$

を得、既に求めた結果と一致する。冷たいプラズマ近似の場合 (ω_{pi}^2 も残すと)

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \tag{6.102}$$

$$\omega^4 - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)\omega^2 = 0 \tag{6.103}$$

すなわち

$$P \equiv 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} = 0 \tag{6.104}$$

である。有限温度の場合は P のかわりに K_{zz} と書くと

$$K_{zz} = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} - 3k^2 \lambda_{De}^2 \tag{6.105}$$

となる。

3) イオン音波

$\omega \ll \omega_{pe}$ かつ $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$ の場合を考える。この時電子の摂動は等温的、イオンは断熱的振る舞いとなる。 $\gamma_e = 1, \gamma_i = 3$ としてよい。分散式は

$$(\omega_{pe}^2 + \frac{\gamma_e}{2} k^2 v_{Te}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - \frac{\gamma_i}{2} k^2 v_{Ti}^2) + \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0 \quad (6.106)$$

となり、 $\gamma_e = 1, \gamma_i = 3$ とすると

$$\omega^2 = k^2 \frac{3T_i}{m_i} + \frac{\omega_{pi}^2 (k\lambda_{De})^2}{1 + (k\lambda_{De})^2} \quad (6.107)$$

を得、もし、 $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ なら

$$\omega = k \sqrt{\frac{Z_i T_e + 3T_i}{m_i}} \quad (6.108)$$

となり、 $T_e \gg T_i \rightarrow 0$ の極限では次のようになる。

$$\omega = \frac{k C_S}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (6.109)$$

$$C_S \equiv \left(\frac{Z_i T_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (6.110)$$

C_S は音速である。一般に

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 \frac{3T_i}{m_i} + \omega_{pi}^2 \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \\ &= \omega_{pi}^2 \left(3k^2 \lambda_{Di}^2 + \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.111)$$

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{n_{e0} e^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_{Di} = \left(\frac{\epsilon_0 T_i}{n_{i0} Z_i^2 e^2} \right)^{1/2}$$

であり、 $T_e \gg T_i$ の時は図6.3のようになる。

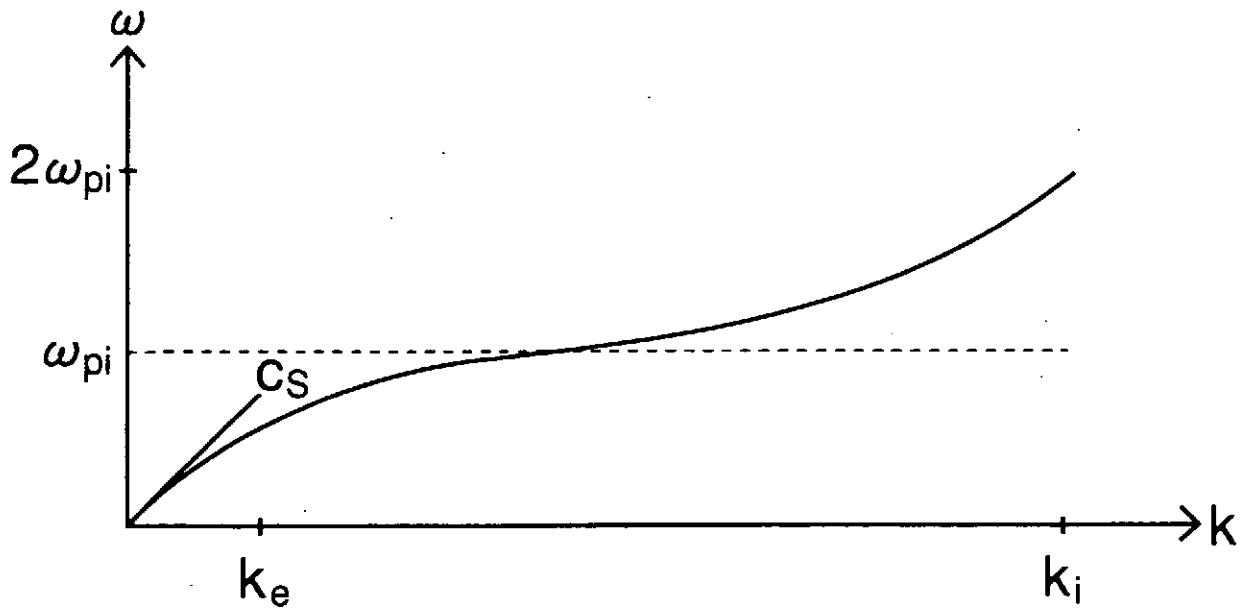


図6.3 静電的イオン波の分散式

$T_e \approx T_i$ の場合は非常に強いランダウ減衰が働く。音波領域では $\omega = kC_s$ であり、位相速度と群速度は等しい事に注意する事、即ち

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = C_s \quad (6.112)$$

である。

(4) 有限温度の効果

1) 波動方程式と分散式

有限温度の効果を考えて波動方程式は一般に次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} K_{xx} - n_z^2 & K_{xy} & K_{xz} + n_x n_z \\ K_{yx} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} + n_x n_z & K_{zy} & K_{zz} - n_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (6.113)$$

K_{ij} はブラソフの式とマックスウェルの式から計算できる。一様プラズマ、一様磁場の場合、零次の分布をマックスウェル分布として計算すると K_{ij} にはベッセル関数やプラズマ

分散関数が含まれる [1]。温度効果は $k_{\perp}^2 \rho_L^2 (\omega - l\Omega_a)/k_z v_{Ta}$ (ℓ はサイクロトロン高調) などの形でこれらの関数の変数として入ってくる。 K_{ij} の表示は省略するが冷たいプラズマ近似では

$$\begin{aligned} K_{xx} &\rightarrow S \\ K_{xy} &= -K_{yx} \rightarrow -iD \\ K_{xz} &= K_{zx}, \quad K_{yz} = -K_{zy} \rightarrow 0 \\ K_{zz} &\rightarrow P \end{aligned} \tag{6.114}$$

となる。プラズマ分散関数を含むので当然波のランダウ減衰やサイクロトロン減衰は考慮されている。

2) 静電近似

プラズマ中の波の電場 $\vec{E}$ が静電ポテンシャルのみで表せるとき、即ち摂動が

$$\vec{E}_1 = -\nabla\psi = -i\vec{k}\varphi \tag{6.115}$$

でのみ近似できる波を静電波 (electrostatic wave) と言う。この時 $\vec{E}_1$ は伝搬方向 $\vec{k}$ に平行で $\vec{k} \times \vec{E}_1 = 0$ である。従って

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}_1 \rightarrow \vec{B}_1 = \vec{k} \times \vec{E}_1 / \omega = 0 \tag{6.116}$$

であり摂動磁場はない。このような近似が成立する条件を考える。分散関係は

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \vec{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{6.117}$$

である。 $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$ と分解して書くと分散式は

$$(n^2 - \vec{K}) \cdot \vec{E}_{\perp} = \vec{K} \cdot \vec{E}_{\parallel} \tag{6.118}$$

と書ける。また分散式の $\vec{n}$ との内積をとると

$$\vec{n} \cdot \vec{K} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \vec{K} (\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}) = 0 \tag{6.119}$$

となり、 $|\vec{E}_{\parallel}| \gg |\vec{E}_{\perp}|$ であるためには

$$\vec{n} \cdot \vec{K} \vec{E}_{\parallel} = 0 \quad (6.120)$$

でなければならない。もし

$$|n^2| \gg |K_{ij}| \quad (\text{静電波近似の条件})$$

なら分散式は $n^2 \vec{E}_{\perp} = \vec{K} \vec{E}_{\parallel}$ となり $\vec{n} \cdot \vec{K} \vec{E}_{\parallel} = 0$ を満たす事ができる。静電近似の場合 $\vec{B}_1 = 0$ である。 $\vec{B}_1$ はアルベン速度 C_A で伝わるが、 $\omega/k \ll C_A$ であれば、(静電)波の特徴的時間の間に $\vec{B}$ の擾乱はおさまって $\vec{B}_1 = 0$ と考えてよいようになる。もし $\omega/k \sim v_{Te} < C_A$ だとすると

$$\begin{aligned} \frac{C_A^2}{v_{Te}^2} &= \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \frac{m_e}{2T_e} = \frac{B_0^2}{2\mu_0 n_{i0} T_e} \frac{1}{m_i} \\ &= \frac{1}{\beta_e} \frac{m_e}{m_i} > 1 \quad (6.121) \\ \beta_e &\equiv \frac{P_e}{B_0^2/2\mu_0} > \frac{m_e}{m_i} \end{aligned}$$

であり、この条件は静電近似の目安を与える。共鳴条件を満たす時は屈折率 $n \rightarrow \infty$ である。高域混成共鳴や低域混成共鳴では K_{ij} は有限に留まるので、共鳴近傍で静電波近似は良い近似となる。イオンサイクロトロン共鳴や電子サイクロトロン共鳴では必ずしもこうはならない。

参考文献

- [1] T.H.Stix, "*Theory of Plasma Waves*", MacGraw-Hill Co., 1962.

§7 MHD 平衡と安定性

MHD 方程式 (5.89)~(5.95) において、速度 $\vec{V}$ 、磁場 $\vec{B}$ 、時刻 t をそれぞれの特徴的大きさ v_0, B_0, t_0 で規格化する。長さの量は $l_0 = v_0 t_0$ で規格し、他の量、 $\varrho, P, \vec{J}, \vec{E}, \eta$ はそれぞれ $\varrho_0 = B_0^2/(\mu_0 v_0^2), p_0 = B_0^2/\mu_0, j_0 = B_0/(\mu_0 l_0), E_0 = v_0 B_0, \eta_0 = \mu_0 v_0^2 t_0$ で規格する。規格化された量をもとと同じ記号で表すと規格化された MHD 方程式系は次のように書ける。

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{V}) = 0 \quad (7.1)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.2)$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (7.3)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P \right) + \frac{5}{2} P \nabla \cdot \vec{V} = \eta J^2 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (7.5)$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (7.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.7)$$

$\eta = 0$ の場合を理想 MHD 方程式系という。この節では、理想 MHD 方程式に従うプラズマの平衡と、平衡に対して与えられた摂動が成長するかどうかの線形安定性について考察する。MHD 方程式系 (7.1)~(7.7) では圧力は等方的スカラーと近似している。このような方程式系をトーラスプラズマに適用し、トーラスプラズマの MHD 平衡と安定性について考える。このためトーラスプラズマの閉じ込めについて重要な概念も導入する。

(1) MHD 平衡

1) 平衡の式

理想MHD方程式系で時間変化がないとし、また、マクロなプラズマの流れもないとする。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{V} = 0 \quad (7.8)$$

とおくと次の平衡方程式が得られる。

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.9)$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (7.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.11)$$

これより直ちに

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0, \quad \vec{J} \cdot \nabla P = 0 \quad (7.12)$$

が得られる。

平衡の式(7.9)の $\vec{J} \times \vec{B}$ を §5 の式(5.49)のように書き改めると平衡の式は

$$B^2 \vec{\kappa} = \nabla_{\perp} \left(\frac{B^2}{2} + P \right) \quad (7.13)$$

と書ける。左辺の $\vec{\kappa}$ は式(5.50)の曲率ベクトルである ($\vec{\kappa} = \kappa \vec{n}$)。右辺は全圧力(プラズマ圧力と磁場エネルギーの和)の磁場に垂直方向の勾配を表す。平衡の式はこの全圧力勾配力と磁場の張力との釣り合いを示すものといえる。平衡配位を作るには何等かの導体により系を支えねばならない。つまり、電流を運ぶ固定導体がないと有限領域にプラズマを平衡に保つことはできない。これは式(7.9)と(7.10)から導かれる Virial 定理から証明される[1, 2]。

平衡の式(7.9)が解を持つことがはっきり判っているのは、(i) 外部導体が軸対称性を持つ時(例えば軸対称トカマク)、(ii) ヘリカル対称性のある時(例、直線ヘリオトロンや直線ステラレータ)、(iii) 平面对称性のある時(例、バンピートーラス)の3つの場合のみである[3]。

2) 等圧面

圧力 P はスカラー関数で連続微分可能とする。3次元空間のある有界な連結閉領域 D の内部で $P > 0$ 、その境界で $P = 0$ とする。 P は D 領域において最大値 P_M を取り、 $P = P_M$ である点の集合は連結とする。また、 P は $P = P_M$ となる点以外で極値はとらないとする。このような条件下では $0 < P < P_M$ である P を持つ点の集合は連結閉曲面である。圧力が一定 ($P = \text{const}$) の面を等圧面という。等圧面は連結閉曲面を形成し、互いに層状、つまり入れ子状になっている。以下、このような場合のみ考える。

3) 磁気面

空間に任意の弧を考え、これに交わる全ての磁力線を考えると、これらの磁力線は一つの曲面を生ずる。これを磁気面という。すなわち、磁気面はある関数 $\psi(\vec{r}) = \text{const}$ で表され、 $\psi(\vec{r})$ は

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi(\vec{r}) = 0 \quad (7.14)$$

を満たす。電流線についても同様に電流面の概念を考える事ができる。

今、平衡解が得られ $\vec{B}(\vec{r})$ が決まったとする。 $\vec{B}$ はベクトルポテンシャル $\vec{A}$ により

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.15)$$

で表せる。円筒座標 (r, θ, z) で考える。(図2.6の場合は $R = r$ 、 $\phi = \theta$ 、 $Z = z$ に相当する。) 式(7.15)は

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

と書ける。まず、全ての量が r と z のみの関数である場合を考える。この時 $\partial/\partial\theta = 0$ であり、系は θ に関して軸対称である。図2.6の場合は ϕ に関して軸対称であり、トカマクがその一例となる。軸対称系では、円筒座標として (R, ϕ, Z) を使うと

$$\left. \begin{aligned} B_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} (RA_\phi) \\ B_\phi &= \frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \\ B_Z &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\phi) \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

となる。 $\psi \equiv RA_\phi$ とすると、簡単な計算から $\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$ を証明できる。すなわち、軸対称系では

$$\psi = RA_\phi(R, Z) = \text{const} \quad (7.18)$$

となる磁気面が存在し得る。ヘリカル対称の場合、 (r, θ, z) の円筒座標を用いると、全ての量が r と $\eta = r - \alpha z (\alpha = \text{const})$ のみの関数となる。式(7.16)は

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial A_\theta}{\partial \eta} \\ B_\theta &= -\alpha \frac{\partial A_r}{\partial \eta} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

となり

$$\psi = A_z(r, \eta) + \alpha r A_\theta(r, \eta) = \text{const} \quad (7.20)$$

が磁気面となることが証明できる。すなわち、式(7.19)と式(7.20)により $\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$ が得られ平衡解が存在し得る。このような場合でも平衡解が存在するためには外部導体や電流分布等に何らかの付加的条件を必要とする。1) で定義した等圧面は式(7.12)より明らかに一つの磁気面と一致する。磁気面は必ずしも等圧面ではないが、単に磁気面と言えば等圧面に一致する磁気面のことを言う。しかし、もしプラズマに流れがあり平衡の式(7.9)が

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.21)$$

であると等圧面は磁気面と一致しない。図7.1に磁気面の概念図を示す。 $\vec{V} = 0$ の時は磁気面は等圧面と一致している。1) で述べたように等圧面は連結閉曲面を形成し、磁気面もまた同様である。 P が最大値 P_M をとらない等圧面上で $\nabla P \neq 0$ と仮定しているので式(7.9)により至る所 $\vec{B} \neq 0$ である。このような条件下では、この磁気面は位相学的にトー

ラス面であることが知られている [4, 5]。つまり、等圧面に一致する磁気面は層状（入れ子状）のトーラス面（ nested toroidal surfaces ）を形成する。

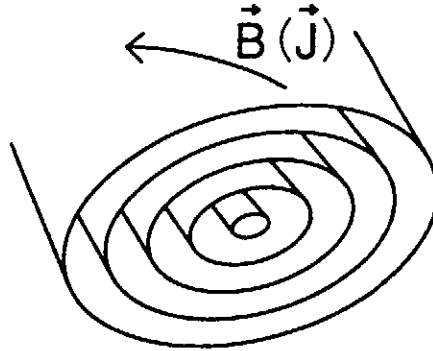


図7.1 磁気面

4) 磁気軸

$P = P_M$ を持つ点はすべての磁気面の内部に含まれる。この部分の体積は零であり、閉じた閉曲線であり、これは一つの磁力線に一致している。これを磁気軸という。軸対称トカマクでは磁気軸は真円を形成し、ヘリカル系では平面磁気軸を持つもの（ヘリオトロン E や CHS、LHD 等）と立体磁気軸のもの（Heliac, Helias, W7-AS, W7-X 等）がある。立体磁気軸系では磁気軸はヘリカル状にトーラスを一周する。

5) 磁気面量

磁気面を表す関数 ψ のみの関数になっている量を磁気面量、または磁気面関数という。 P は磁気面量である。また、ある磁気面内の体積

$$V = \int^{\psi} d\tau \quad (7.22)$$

も磁気面量である。ただし、 $d\tau$ は体積要素である。以下に述べる磁束、電流束、回転変換、安全係数、比体積等は磁気面量である。（言うまでもなく $\vec{B}, \vec{j}$ そのものは磁気面量ではない。）磁気面量の間には多くの関係があり、安定性や拡散の理論において重要となる。

6) 磁束と電流束

図7.2のようにポロイダル切断面 S_t 及びトーラスの穴の部分に張りわたされた面 S_p を考える。トロイダル磁束とポロイダル磁束をそれぞれ次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_t &= \int_{S_t} \vec{B} \cdot d\vec{S}_t \quad (\text{トロイダル磁束}) \\ \Phi_p &= \int_{S_p} \vec{B} \cdot d\vec{S}_p \quad (\text{ポロイダル磁束}) \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

切断面 S_t, S_p を（トポロジーは変えずに）どのように選んでも Φ_t, Φ_p は一定である。この事は $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を用いると簡単に証明できる。従ってトロイダル磁束及びポロイダル磁束は磁気面量である。電流 $\vec{J}$ についても同様に磁気面量の電流束を定義できる。

$$\left. \begin{aligned} I_t &= \int_{S_t} \vec{J} \cdot d\vec{S}_t \quad (\text{トロイダル電流束}) \\ I_p &= \int_{S_p} \vec{J} \cdot d\vec{S}_p \quad (\text{ポロイダル電流束}) \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

図7.2において磁気軸 a で張られる面を通る磁束、電流束を Φ_{pa}, I_{pa} とすると

$$\hat{\Phi}_p = \Phi_{pa} - \Phi_p \quad (7.25)$$

$$\hat{I}_p = I_{pa} - I_p \quad (7.26)$$

で定義される $\hat{\Phi}_p, \hat{I}_p$ が習慣上ポロイダル磁束、ポロイダル電流束として良く使われる。

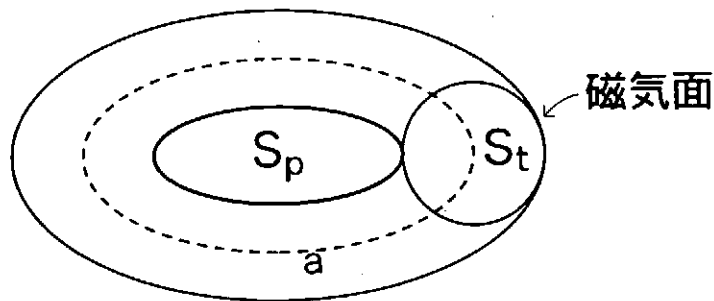


図7.2 トロイダル・ポロイダル面

7) 回転変換と安全係数

切断面 S_t の縁上の任意の点 Q から出発した磁力線がトーラスに沿って n 周する間に磁気軸のまわりを角度 α_n だけ回転したとする (図 7.3 参照)。回転変換角を

$$\iota \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \quad (7.27)$$

で定義する。回転変換 (比) を

$$\epsilon \equiv \frac{\iota}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2\pi} / n \quad (7.28)$$

で定義する。 $\alpha_n/2\pi$ はトーラスを n 回周る間にポロイダル方向に周回する回数である。

$$m_n \equiv \frac{\alpha_n}{2\pi} \quad (7.29)$$

この値は磁力線同志が交わる事はないので出発点 Q の位置を変えても高々 ± 1 より変動する事はない。従って、

$$\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = \text{一定} \quad (7.30)$$

であり ϵ は磁気面量である。即ち、 ϵ は出発点 Q の位置に依らず $\epsilon = \epsilon(\psi)$ で磁気面量である。

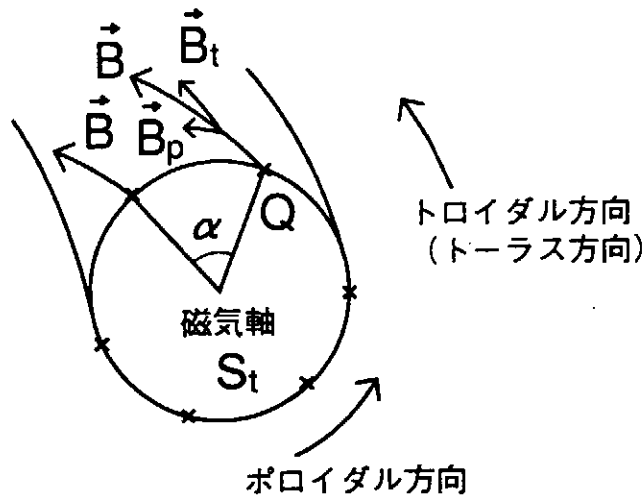


図 7.3 回転変換

回転変換の逆数

$$q = \frac{1}{\iota} \quad (7.31)$$

を安全係数といい、これも磁気面量である。 q （あるいは ι ）は安定性にとって非常に重要な量である。

8) 有理面

ある磁気面で $\iota = m/n$ (m, n は整数) であると、その磁気面を有理面という。この面上では点 Q から出発した磁力線はトロイダル方向に n 回、ポロイダル方向に m 回周って正確にもとの点 Q にもどる。 ι が有理数でない面は、無理面、あるいは非有理面と呼ばれる。当然、有理面は可付番無限個しかない。しかし、有理面の存在は MHD 安定性にとって、決定的に重要な役割を果たす。

トーラスの主半径を R 、プラズマの小半径を a としたとき R/a をアスペクト比という。アスペクト比 (R/a) の大きなトーラスを円筒におきかえる事がある。これを円筒プラズマ近似という。円筒座標を (r, θ, z) とする。磁場の θ 成分を B_p (トーラスではポロイダル磁場という)、 z 成分を B_t (トーラスではトロイダル磁場) とする。 B_p, B_t も一般に r の関数である。磁力線の方程式

$$\frac{r d\theta}{B_p} = \frac{dz}{B_t}, \quad d\theta = \frac{B_p}{r B_t} dz \quad (7.32)$$

から z 方向に $2\pi R$ 進んだときの (トーラス一周したときの) ピッチ角は

$$\iota = 2\pi \frac{R B_p}{r B_t} \quad (7.33)$$

で与えられる。即ち回転変換角である。安全係数は円筒プラズマ（あるいは円筒プラズマ近似）では

$$q = \frac{r B_t}{R B_p} \quad (7.34)$$

で与えられる。 B_p は $r \simeq 0$ で $B_p \propto r$ と振る舞うので $q(r=0)$ は一般に有限値をとる。

9) 磁気シア

$dq/d\psi \neq 0$ のとき磁気シアーがあるという。一般に磁気シアーはプラズマを安定化するように働く。シアーがあるという事は、ある磁気面上の磁場の向きと隣の磁気面上の磁場の向きが異なるという事である。磁気シアーは

$$S = \frac{2V}{q} \frac{dq}{dV}, \quad S = \frac{2\Phi_t}{q} \frac{dq}{d\Phi_t} \quad (7.35)$$

のように定義される。ただし q は安全係数、 V は体積、 Φ_t はトロイダル磁束である。円筒プラズマでは $S = (r/q)dq/dr$ になる。回転変換 ϵ を使って磁気シアーを次のように定義する事もできる。

$$S = \frac{2V}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dV}, \quad S = \frac{2\Phi_t}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\Phi_t} \quad (7.36)$$

磁気シアーの符号は、 q を使った磁気シアーと ϵ を使った磁気シアーとはその正負が逆になる。図7.4のように磁気シアーがあると、となりあう磁気面上の $\vec{B}$ の方向が異なる。

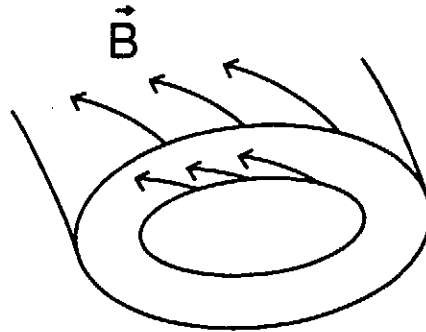


図7.4 磁気シアー

10) 比体積

ある磁気面をトロイダル磁束 Φ_t で表し、その磁気面内の体積を V とする。 V は Φ_t のみの関数である。次の量

$$U \equiv \frac{dV}{d\Phi_t} \quad (7.37)$$

を磁気面の比体積という。 U は明らかに磁気面量である。また、ある磁力線の点 A からその磁力線に沿って点 C まで積分した次の量

$$u \equiv \int_A^C \frac{dl}{B} \quad (7.38)$$

を磁力線の比体積という。 dl は磁力線に沿う線素である。考えている磁力線を含む細い磁束管を考えその断面を δS 、磁束を $\delta \Psi$ 、体積を δV とする。 C 点が A 点に充分近いと

$$u = \frac{dl}{B} = \frac{\delta S dl}{\delta S B} = \frac{\delta V}{\delta \Psi} \quad (7.39)$$

である。式(7.37)の U との対比から u を磁力線の比体積という。実際 u と U との間には密接な関係がある。トカマクの様に対称性のある系を考える。有理面上である点から出発し、磁力線に沿ってトロイダル方向に n 回周ってもとの位置にもどったとすると

$$U = \frac{dV}{d\Phi_p} = \frac{1}{n} \oint \frac{dl}{B} \quad (7.40)$$

が成立する[3]。これは積分の出発点に依存しない磁気面量である。非有理面上では

$$U = \frac{dV}{d\Phi_t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \frac{dl}{B} \quad (7.41)$$

と考えてよいだろう。ヘリカル系の様に対称性の無い系においては $\oint dl/B$ は積分の出発点に依存するので式(7.40)は近似的な意味しか持たない。これは、ある一つの磁気面上において軸対称系では磁力線は全て等価であるが、対称性がないと個々の磁力線は等価でないからである。軸対称系と非軸対称系のこのような違いは、例えばバレーニング・モードの構造に顕著に表れる[6, 7]。

11) 磁気井戸、磁気丘

次の量を定義する[8]。

$$\bar{W} = \frac{2V}{\langle B^2 \rangle} \frac{d}{dV} \left\langle \frac{B^2}{2} + P \right\rangle \quad (7.42)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は磁気面平均を表す。磁気面平均は13)節の式(7.68)で与えられる。 $\bar{W}$ は磁気面量である。 $\bar{W} > 0$ 、すなわち(磁気面平均した)全圧力の大きさが V の方向(動径方

向) に大きくなっていく時、磁気井戸 (magnetic well) があるという。 $\bar{W} < 0$ となる領域は磁気丘 (magnetic hill) という。圧力 P が磁場の圧力 $B^2/2$ と比べて無視できるときは $\bar{W}$ は磁気面平均した磁場の大きさが動径方向 (V の増加する方向) に増加するか減少するかを示す。このような時は動径方向に磁気面平均した磁場の大きさが増加する領域を磁気井戸、減少する領域を磁気丘という。トーラスでは磁力線に沿って磁気面上を走ると磁場の曲率の良い所と悪い所を通る。両者のかね合いにより $\bar{W}$ の正負が決まる。 $\bar{W}$ はもちろん磁気面量である。カスプ磁場配位では $B = 0$ の点からあらゆる方向に B^2 は増加していくが、トーラスではこのような事は有り得ない。磁気面平均した磁場強度 (より正確には全圧力) が平均的に良い曲率かどうかを考える。

式(7.42)を変形してその意味を考えてみよう。ここで次の量を定義する。

$$I = \frac{I_t}{2\pi}, \quad J = \frac{I_p}{2\pi} \quad (7.43)$$

式(7.24)の定義から I_t はある磁気面内を流れるトロイダル電流で、 I_p はその磁気面より外を流れるポロイダル電流である (トカマクの場合なら、トロイダルコイルに流れる電流も含まれる)。 I と J 、及び式(7.23)で定義される Φ_t (トロイダル磁束) と Φ_p (ポロイダル磁束) と圧力との間に次の関係が一般に成立する [3, 4]。

$$P' = -2\pi(\Phi_t' J' - \Phi_p' I') \quad (7.44)$$

ここで微分は V に関するものである ($' \equiv d/dV$)。この式は平衡の式そのものである。また $\langle B^2 \rangle$ とは

$$\langle B^2 \rangle = 2\pi(J + \epsilon I)\Phi_t' \quad (7.45)$$

の関係にある。式(7.44)と(7.45)を使うと式(7.42)は次のように書ける。

$$\bar{W} = \frac{V}{\langle B^2 \rangle} (2\pi\Phi_t'\epsilon'I + P) + \frac{V}{\Phi_t'} \Phi_t'' \quad (7.46)$$

ここで式(7.37)で定義された比体積 $U = dV/d\Phi_t$ を用いると

$$\bar{W} = \frac{V}{\langle B^2 \rangle} (2\pi\Phi_t'\epsilon'I + P) - \frac{V}{U} U' \quad (7.47)$$

となる。この式の右辺の第一項は正味のトロイダル電流の効果を表し、第2項の P の項は反磁性電流の効果を示す。もし、これらの項が無視できると磁気井戸か磁気丘かは

$$\bar{W} = -\frac{V}{U}U' \quad (7.48)$$

の符号で決まる。 $U > 0$ であるので

$$U' = \frac{d^2V}{d\Phi_t^2} \quad (7.49)$$

が負であると磁気丘であり、正であると磁気井戸となる。一般に式(7.42)を計算するのは難しく、式(7.49)の正負でもって磁気井戸か磁気丘を判断することが多い。

磁気シアー、磁気井戸とも安定性にとって重要な磁気面量である。トカマクやRFP（逆磁場ピンチ）のような軸対称系トーラスでは、トロイダル方向にプラズマ電流を流してポロイダル磁場 B_p を生成し回転変換を作る。トカマクではほどほどの磁気シアーがあり、また一般に、プラズマ全領域で磁気井戸（平均極小磁場）がある。トロイダル磁場 B_t はポロイダル磁場よりずっと大きい ($B_t \gg B_p$) のが特徴である。RFP（逆磁場ピンチ）は強いシアーを持つが磁気井戸は無い。また $B_p \simeq B_t$ である。

非軸対称系では外部コイルの電流で回転変換を作る。ヘリオトロン/トルサトロン型のヘリカル系装置では、アスペクト比 A の大小により磁場配位が異なってくる。ヘリオトロンE(H-E)は $A \simeq 11$ で強いシアーを持つが磁気井戸の領域は非常に狭く大部分が磁気丘である[9]。大型ヘリカル装置(LHD) ($A \simeq 7$)[10] やコンパクト・ヘリカル装置(CHS) ($A \simeq 5$)[11] はほどほどのシアーを持ち、磁気井戸もある。しかしプラズマ周辺部は必ず磁気丘になっている。W7-A, W7-ASのようなステラレータは磁気シアーが非常に弱いが全領域が磁気井戸になっている。

12) 軸対称系での平衡の式

図2.6のような円筒座標 (R, ϕ, Z) を用いる。軸対称トーラスを考えるので $\partial/\partial\phi = 0$ である。磁場 $\vec{B}$ は次のようにトロイダル成分とポロイダル成分に分けて表す事ができる。

$$\vec{B} = B_\phi \vec{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla\psi \times \vec{e}_\phi \quad (7.50)$$

この式はもちろん $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を満たす。 ψ は磁気面を表すラベルである。 B_R, B_Z は、式 (7.50) 及び式 (7.17) より次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} B_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = -\frac{1}{R} \frac{\partial (RA_\phi)}{\partial Z} \\ B_Z &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\phi) \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

$\psi = RA_\phi = \Phi_p/2\pi$ はポロイダル磁束を 2π で割ったものである事がわかる。即ちベクトル・ポテンシャルの ϕ 成分の A_ϕ とポロイダル磁束 Φ_p とは

$$\Phi_p = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_p = \int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}_p = \int \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi RA_\phi \quad (7.52)$$

の関係があるからである。

アンペアの式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ から電流密度 $\vec{J}$ は次のように書ける。

$$\mu_0 \vec{J} = -\frac{1}{R} \Delta^* \psi \vec{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla (RB_\phi) \times \vec{e}_\phi \quad (7.53)$$

$$\Delta^* \equiv R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (7.54)$$

$\vec{B} \cdot \nabla P = 0$ の式から $P = P(\psi)$ と表せる事が明らかで、また、 $\vec{J} \cdot \nabla P = 0$ と式 (7.53) から RB_ϕ は ψ の関数、即ち $RB_\phi = F(\psi)$ と書ける事がわかる。式 (7.50)、(7.53) を用いると平衡の式 (7.9) は次のように表す事ができる。

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (7.55)$$

式 (7.24) で定義される I_p は軸対称の場合

$$I_p = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}_p = \int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S}_p = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (7.56)$$

$$= \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi RB_\phi \quad (7.57)$$

である。面 S_p は図 7.2 のものである。これより F は

$$F(\psi) = J(\psi) = \frac{I_p}{2\pi} \quad (7.58)$$

である事がわかる。軸対称系に対するこの平衡の式を Grad-Shafranov の式という。 Δ^* は式(7.54)で定義され、普通のラプラシアン

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

と異なる事に注意する必要がある。 $P(\psi)$ と $F(\psi)$ は任意の関数であるので、これらと境界条件を与えて Grad-Shafranov の式（2 階非線形偏微分方程式）を解き ψ を得る。 $\vec{B}$ と $\vec{J}$ は式(7.50)、及び式(7.53)から得られる。

13) 補足-磁気座標系

平衡が与えられ、その線形安定性を考える時、平衡配位に適した座標系を用いると便利である。そのような座標系として磁気座標 (ψ, θ, ζ) が良く用いられる。磁気座標は次の条件を満たすものとする[12]。 ψ は磁気面のラベルを表す関数で動径方向の座標として用いる。 θ と ζ はそれぞれポロイダル、トロイダル方向の座標でポロイダル方向、あるいはトロイダル方向に一周すると 2π （あるいは1）増加するものとする。磁気座標は図2.6の円筒座標 (R, ϕ, Z) と一意の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} R &= R(\psi, \theta, \zeta) \\ \phi &= \phi(\psi, \theta, \zeta) \\ Z &= Z(\psi, \theta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

磁気座標系では θ と ζ は $\vec{B} \cdot \nabla \theta / \vec{B} \cdot \nabla \zeta$ が ψ のみの関数となるよう θ と ζ を選ぶ。磁気座標系はいろいろ考えられるが、浜田座標[5]や Boozer 座標[13]はその代表的なものである。磁気座標については文献[14]に要領よくまとめられている。

磁気座標系では体積 V は

$$V = \int d\tau = \int^\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\zeta \sqrt{g} \quad (7.60)$$

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\nabla \psi \cdot \nabla \theta \times \nabla \zeta} \quad (7.61)$$

で表される。 $d\tau$ は体積要素で $\sqrt{g}$ はヤコビアンである。 V はもちろん ψ のみの磁気面関数である。トロイダル磁束 Φ_t は

$$\Phi_t = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot \nabla \zeta d\tau \quad (7.62)$$

で表す事ができる。これは $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を使うと図7.5から

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot \nabla \zeta d\tau &= \int \nabla \cdot (\vec{B} \zeta) d\tau = \oint \vec{B} \zeta \cdot d\vec{S} \\ &= \int \zeta \vec{B} \cdot (d\vec{S}_t)_{\zeta=2\pi} - \int \zeta \vec{B} \cdot (d\vec{S}_t)_{\zeta=0} + \int \zeta \vec{B} \cdot d\vec{S}_n \\ &= 2\pi \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_t \end{aligned} \quad (7.63)$$

となる事からわかる。($d\vec{S}_n$ は磁気面の表面要素であるので $\vec{B} \cdot d\vec{S}_n = 0$ である。)

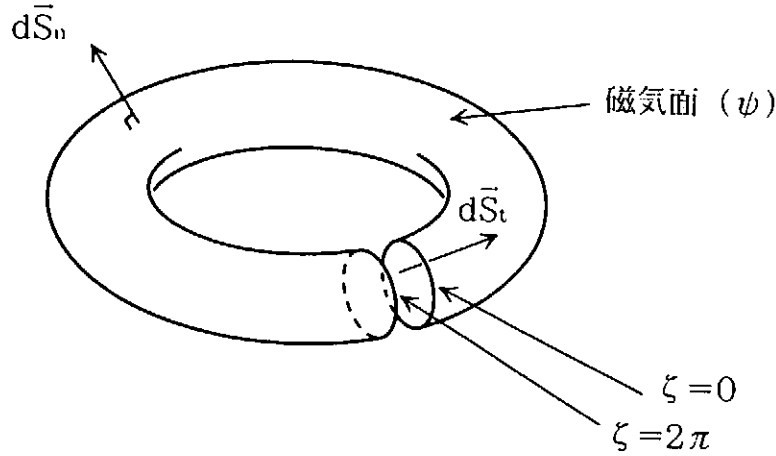


図7.5 トロイダル磁束

ポロイダル磁束 $\hat{\Phi}_p$ も同様に

$$\hat{\Phi}_p = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot \nabla \theta d\tau \quad (7.64)$$

と書ける。 I_t 、 $\hat{I}_p$ も同様に表現できる。

$$I_t = \frac{1}{2\pi} \int \vec{J} \cdot \nabla \zeta d\tau \quad (7.65)$$

$$\hat{I}_p = \frac{1}{2\pi} \int \vec{J} \cdot \nabla \theta d\tau \quad (7.66)$$

磁場 $\vec{B}$ やその強度は磁気面量ではなく一般に ψ, θ, ζ の関数である。磁気面量でない物理量の磁気面上の平均値を知る必要がしばしばある。ある量 A の磁気面平均は次のよう

に定義される。

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\zeta \sqrt{g} A}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\zeta \sqrt{g}} \quad (7.67)$$

体積 V の定義よりこの式の分母は $dV/d\psi$ であり、体積要素 $d\tau$ は $d\tau = \sqrt{g} d\psi d\theta d\zeta$ であるので $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = \frac{\frac{d}{d\psi} \int_0^\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\zeta \sqrt{g} A}{\frac{dV}{d\psi}} = \frac{d}{dV} \int A d\tau \quad (7.68)$$

により与えられる。磁気面の法線方向の面積要素は

$$\begin{aligned} d\vec{S}_n &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} d\theta d\zeta = \sqrt{g} \nabla \psi d\theta d\zeta \\ dS_n &= |d\vec{S}_n| = \sqrt{g} |\nabla \psi| d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (7.69)$$

で与えられるので、磁気面平均は

$$\langle A \rangle = \frac{\int_S A \frac{dS_n}{|\nabla \psi|}}{\int_S \frac{dS_n}{|\nabla \psi|}} \quad (7.70)$$

とも表現できることがわかる。

磁力線に沿った線素を $d\vec{l}$ とすると

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0 \quad (7.71)$$

である。 $d\vec{l}$ は磁気座標系 (ψ, θ, ζ) において

$$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} d\zeta \quad (7.72)$$

と表すことができ、磁場 $\vec{B}$ は

$$\vec{B} = B^\psi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} + B^\theta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} + B^\zeta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \quad (7.73)$$

と表せる。ただし、 $B^\psi, B^\theta, B^\zeta$ は反変成分で

$$B^\psi = \vec{B} \cdot \nabla \psi, \quad B^\theta = \vec{B} \cdot \nabla \theta, \quad B^\zeta = \vec{B} \cdot \nabla \zeta \quad (7.74)$$

で与えられる。これらより磁力線の式は次のように与えられる。

$$\frac{d\psi}{\vec{B} \cdot \nabla \psi} = \frac{d\theta}{\vec{B} \cdot \nabla \theta} = \frac{d\zeta}{\vec{B} \cdot \nabla \zeta} = \frac{dl}{B} \quad (7.75)$$

この式は一般的であるが、平衡状態では $\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$ であり $d\psi = 0$ である。このような時、

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \theta}{\vec{B} \cdot \nabla \zeta} \quad (7.76)$$

であり、回転変換の定義式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0 + 2\pi n} \frac{d\theta}{d\zeta} d\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0 + 2\pi n} \frac{\vec{B} \cdot \nabla \theta}{\vec{B} \cdot \nabla \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (7.77)$$

磁力線がある磁気面上で直線に見えるような磁気座標系では、 t は

$$t = \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \theta}{\vec{B} \cdot \nabla \zeta} \quad (7.78)$$

で表すことができる。また、磁力線が直線に見える磁気座標系では、式(7.62)と(7.64)から

$$t = \frac{d\hat{\Phi}_p}{d\hat{\Phi}_t} \quad (7.79)$$

の関係も容易に証明できる。ただし、 $\hat{\Phi}_p$ は式(7.25)で定義される磁束である。

(2)MHD 安定性とエネルギー原理

MHD 平衡が得られると、次にその安定性が問題となる。平衡解が安定であるということとは、平衡に加えられたいかなる摂動 $\xi(\vec{r}, t)$ が時間と共に限りなく増大しない事である。もし、時間と共に限りなく増大する ξ が（一つでも）存在すればその平衡は不安定であると言う。この節では与えられた平衡の安定性をどのように調べるのか、その方法について考える。外部から平衡状態にある系に加える摂動は、力学的摂動（プラズマの各部に初期変位を与える摂動）の他に、熱力学的摂動（放射、外部からの加熱、熱揺動等）や電磁氣的摂動（電流分布の変化等）があるが、ここでは瞬間的に加えられる力学的摂動に対する安定性のみ考える。一般に摂動は連続的に加えられるが、安定性の議論は線形理論であり、線形理論では重ね合わせの原理が成立するので、瞬間的に摂動が加えられる場合を考えれば充分である。すなわち、摂動は $t = 0$ の初期に加えられ、その後、系は孤立系と考える。

1) 境界条件

プラズマが完全導体で囲まれているとする。ただし、プラズマと完全導体の間に真空領域があっても良い。真空領域があるとプラズマの表面は動き得るので、このような時を自由境界と呼ぶ。真空領域がなく、プラズマが完全導体の固定壁に接している時は固定境界と言う。固定境界の時は、プラズマが接触している壁面はプラズマの（一番外の）磁気面と一致している。図7.6のように境界（プラズマ-プラズマ、プラズマ-真空、真空-固体壁）を囲む小さな体積要素 dV を考える。この体積要素の高さ ε は無限小とし、境界に沿う面積の面積要素を $d\vec{S}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{S} \int \nabla \times \vec{A} \cdot dV &= \frac{1}{S} \int d\vec{S} \times \vec{A} = \hat{n} \times \langle \vec{A} \rangle \\ \frac{1}{S} \int \nabla \cdot \vec{A} dV &= \frac{1}{S} \int \vec{A} \cdot d\vec{S} = \hat{n} \cdot \langle \vec{A} \rangle \\ \frac{1}{S} \int \nabla f dV &= \hat{n} \langle f \rangle \end{aligned} \right\} \quad (7.80)$$

となる。 $\vec{A}$ は任意のベクトル、 f は任意のスカラー量である。 $\hat{n}$ は境界の法線ベクトルである。 $\langle X \rangle$ は境界を $\hat{n}$ 方向に横切る時の X の変化量を表す。

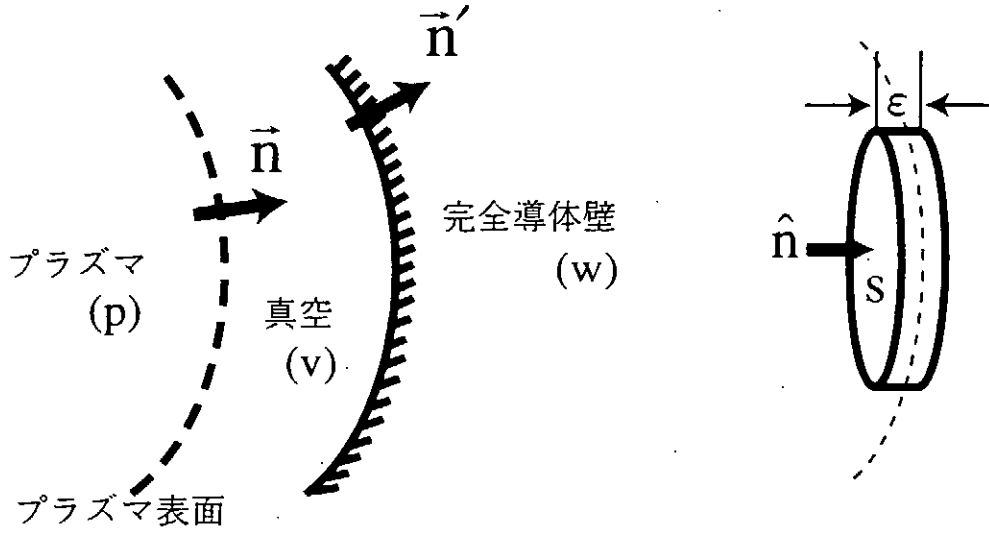


図7.6 境界条件

式(7.80)を理想MHD方程式に適用すると、境界での条件が得られる。運動方程式、質量密度連続の式、ファラデーの式、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ の式、アンペールの式、それぞれから次の関係式が得られる。

$$\langle P + \frac{1}{2} B^2 \rangle = 0 \quad (7.81)$$

$$\hat{n} \cdot \langle \vec{V} \rangle = 0 \quad (7.82)$$

$$\hat{n} \times \langle \vec{E} \rangle = (\hat{n} \cdot \vec{V}) \langle \vec{B} \rangle \quad (7.83)$$

$$\hat{n} \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0 \quad (7.84)$$

$$\hat{n} \times \langle \vec{B} \rangle = \vec{K} \quad (7.85)$$

式(7.85)において $\vec{K}$ は表面電流密度を表す。式(7.81)から式(7.85)はプラズマ-プラズマ ($p-p$) で成立するが、プラズマ-真空 ($p-v$) 境界、真空-固体壁 ($v-w$) 境界にも適用できる。図7.6のようにプラズマ表面の法線ベクトルを $\vec{n}$ 、固体壁表面の法線ベクトルを $\vec{n}'$ とするとプラズマ表面は（一番外の）磁気面であるので $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ である。理想MHDプラズマは磁場の凍りつきの定理 (§5, (2) 節) に従うのでこの関係はプラズマ表面が動

いていても成立すると考えてよいだろう。これを考慮すると、必要な境界条件は

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_v = 0 \quad (7.86)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.87)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_v = (\vec{n} \cdot \vec{V}) \vec{B}_v \quad (7.88)$$

$$\vec{n}' \cdot \vec{B}_v = 0 \quad (7.89)$$

$$\vec{n}' \times \vec{E}_v = 0 \quad (7.90)$$

となる。下付き添字の v は真空領域における量であることを示している。添字の無い量はプラズマ中のものである。また、プラズマ表面では式(7.81)の圧力バランスの式が成立する。

2) 線形初期値境界値問題

力学的摂動を瞬時に加えるとプラズマに変位 ξ が与えられる。 ξ は未知関数である。オイラー的に計算しても、ラグランジアン的に計算しても同じであるが、ラグランジアンの方が、変動する境界付近でのあいまいが無くなるのでラグランジアン的に計算する[15]。平衡の位置を $\vec{r}_0$ とすると ξ の変位によりプラズマは $\vec{r}_0$ から $\vec{r}$ へ移動する。 $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi} \quad (7.91)$$

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{\xi}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} = \dot{\vec{\xi}} \quad (7.92)$$

で与えられる。grad, div, rot は次のように展開される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla f &= \nabla_0 f - [(\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0] f \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \nabla_0 \cdot \vec{A} - [(\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0] \vec{A} \\ \nabla \times \vec{A} &= \nabla_0 \times \vec{A} - [(\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0] \times \vec{A} \end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

ここで f は任意のスカラー量、 $\vec{A}$ は任意のベクトル量である。 $\nabla_0 \vec{\xi}$ はディアディック(dyadic)である。下付添え字 0 は $\vec{r}_0$ の位置を示す。オームの式から

$$\vec{E} = -\dot{\vec{\xi}} \times \vec{B} \quad (7.94)$$

が得られ、これをファラデーの式に代入し時間積分をすると

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla_0 \vec{B}_0 \quad (7.95)$$

が得られる。下付き添え字ゼロは平衡量を示す（以下同様である）。 $\vec{Q}$ は

$$\vec{Q} = \nabla_0 \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (7.96)$$

で定義される $\vec{\xi}$ により生成された固定点 $\vec{r}_0$ での摂動磁場を表している。アンペールの式から

$$\mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{J}_0 - [(\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0] \times \vec{B}_0 + \nabla_0 \times \vec{Q} + \nabla_0 \times [(\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_0] \quad (7.97)$$

質量密度保存の式、エネルギーの式（断熱の式）の線形化から

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 - \varrho_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} \\ P &= P_0 - \gamma P_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (7.98)$$

が得られる。運動方程式の $d\vec{V}/dt$ は $\vec{\xi}$ の一次までで

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{\xi} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \ddot{\vec{\xi}} \quad (7.99)$$

となる。運動方程式の ϱ 、 P 、 $\vec{J}$ 、 $\vec{B}$ に式(7.95)から式(7.98)を代入すると線形化された運動方程式は次のようになる。

$$\varrho_0 \ddot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (7.100)$$

ここで力 $\vec{F}$ は次のように与えられる。

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla_0 (\gamma P_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla_0 P_0) + (\nabla_0 \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0 + (\nabla_0 \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} \quad (7.101)$$

式(7.100)を適切な初期値と境界値を用いて解くと $\vec{\xi}$ が得られる。

式(7.100)を解くときのプラズマ-真空($p-v$)境界の条件は式(7.86)から式(7.90)及び式(7.81)を $\vec{\xi}$ の一次形に書き改めると得られる。真空領域での磁場 $\vec{B}_v$ と電場 $\vec{E}_v$ は次の

ように表されたとする。

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_v &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E}_{v0} \\ \vec{B}_v &= \nabla \times \vec{A} + \vec{B}_{v0} \end{aligned} \right\} \quad (7.102)$$

$\vec{B}_{v0}$ と $\vec{E}_{v0}$ は平衡量である。ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は $\vec{\xi}$ の一次の量である。(スカラーポテンシャルがゼロとなるゲージを選んだ。) 圧力バランスの境界条件の式(7.81)より

$$\vec{B}_{v0} \{ (\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_{v0} + \nabla_0 \times \vec{A}(\vec{r}_0) \} = -\gamma P_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi} + \vec{B}_0 \cdot \{ \vec{Q} + (\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_0 \} \quad (7.103)$$

が得られる。右辺の P_0 、 $\vec{B}_0$ 、 $\vec{Q}$ はプラズマ領域における量である。オームの式を使って式(7.88)と式(7.90)から

$$\vec{n}_0 \times \vec{A} = -(\vec{n}_0 \cdot \vec{\xi}) \vec{B}_{v0} \quad (7.104)$$

が得られる。 $\vec{n}_0$ は平衡におけるプラズマ表面の法線ベクトルである。真空領域では式(7.102)より $\vec{A}$ は

$$\nabla_0 \times (\nabla_0 \times \vec{A}) = 0 \quad (7.105)$$

を満たさねばならない。 $\vec{A}$ は $\vec{\xi}$ により表されるので、 $\vec{\xi}$ に対する制約条件は圧力バランスの式(7.103)のみである。また、真空固体壁境界($v-w$)では

$$\vec{n}' \times \vec{A} = 0 \quad (7.106)$$

でなければならない。固定境界では

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (7.107)$$

である。

3) 演算子 $\vec{F}$ の性質と固有値問題

適切な境界条件を満たす2つの任意のベクトルを $\vec{\xi}$ 、 $\vec{\eta}$ とすると式(7.101)で与えられる $\vec{F}$ は次の自己随伴性(self-adjoint)の性質を有する。

$$\int d\tau_0 \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) = \int d\tau_0 \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}) \quad (7.108)$$

これは $\vec{F}$ が $\vec{\xi}$ を含まない事の帰結である。直接計算して式(7.108)を確かめる事ができるが[16]、後でもっと簡単に証明する。 $\vec{F}$ は時間 t を陽に含まないので

$$\vec{\xi}_n(\vec{r}_0, t) = \vec{\xi}_n(\vec{r}_0) e^{-i\omega_n t} \quad (7.109)$$

とおくと、式(7.100)より次の固有値方程式が得られる。

$$-\omega_n^2 \varrho_0 \vec{\xi}_n = \vec{F}(\vec{\xi}_n) \quad (7.110)$$

ω_n^2 が固有値で、 $\vec{\xi}_n$ が固有関数である。 $\vec{F}$ は自己随伴であるので固有値 ω_n^2 は実数である。また、離散固有値を持つ縮退のない2つの固有モード $(\omega_n^2, \vec{\xi}_n)$ 、 $(\omega_m^2, \vec{\xi}_m)$ を考えると

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int d\tau_0 \varrho_0 \vec{\xi}_n \cdot \vec{\xi}_m = 0 \quad (7.111)$$

であり $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ であるので

$$\int d\tau_0 \varrho_0 \vec{\xi}_n \cdot \vec{\xi}_m = 0 \quad (7.112)$$

となり、固有関数は直交性条件を満たす。従ってこれらの固有関数は完全系を成すことができると考えてよいだろう。 $\omega_n^2 > 0$ であると $\vec{\xi}_n \propto e^{-i\omega_n t}$ は振動するだけで時間的に増大しないので ξ_n は安定な固有モードである。 $\omega_n^2 < 0$ は不安定に相当する。すなわちこの時固有モードは時間とともに限りなく増大する。 $(\omega_n^2$ は実数であるので、振動しながら時間とともに増大(成長)するモードはない。) $\vec{\xi}_n$ は完全系を成すと考えたと(境界条件を満たす)任意の $\vec{\xi}$ は

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \sum_n a_n \vec{\xi}_n e^{-i\omega_n t} \quad (7.113)$$

と書ける。従って、ある平衡にある系が不安定であるための必要十分条件は、負の固有値が一つでも存在することである。全ての固有値が正であれば系は安定である。

式(7.100)に初期値を与え、その時間発展を追う事により安定性を調べることができる。この時は不安定モードが存在すれば最大成長率を持つものが見られるであろう。そのモードの成長率とモードパターンが分かる。第2の方法として、式(7.110)の固有値方程式を

解くやり方がある。この方法では原理的に全ての固有値 ω^2 (不安定な離散固有値だけでなく、安定な離散及び連続固有値) を求める事ができ、かつ、それぞれの固有値に属する固有関数 $\vec{\xi}$ も求める事ができる。このような方法を固有モード解析 (normal mode analysis) という。

4) エネルギー原理

ある与えられた平衡が小さな摂動にたいして、その摂動が時間と共に大きくなっていくかどうか、つまり安定か不安定かだけが分かれば良い場合がある。このような時には $\vec{\xi}$ の2次関数としてのポテンシャル・エネルギー δW の正負のみ調べればよい。もちろん、摂動によるプラズマの運動や、固有値 (成長率) や固有関数を正確に求める事はできない。

次の全エネルギーは保存される。

$$U = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \rho |\vec{V}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 + \frac{P}{\gamma - 1} \right) = \text{const} \quad (7.114)$$

この式の積分はプラズマ・真空領域も含んだ完全導体壁までの全積分である。この式の第一項は運動エネルギー K で、 B^2 と P の項は $\vec{V}$ を含まず、ポテンシャルエネルギー δW を表している。線形化した形では運動エネルギーは次のように与えられる。

$$K\{\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}\} = \frac{1}{2} \int d\tau \rho |\dot{\vec{\xi}}|^2 \quad (7.115)$$

以下、平衡量を示す下付き添字のゼロは省略する。ポテンシャルエネルギーは $\vec{\xi}$ で展開すると $\vec{\xi}$ の2次形式 $\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi})$ になる。 δW には $\dot{\vec{\xi}}$ は含まれない。従って

$$K\{\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}\} + \delta W\{\vec{\xi}, \vec{\xi}\} = \text{const} \quad (7.116)$$

であり、これより

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \int d\tau \dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{F}\{\vec{\xi}\} \\ &= -\delta W\{\dot{\vec{\xi}}, \vec{\xi}\} - \delta W\{\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}\} \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{F}\{\vec{\xi}\} + \frac{1}{2} \int d\tau \vec{\xi} \cdot \vec{F}\{\dot{\vec{\xi}}\} \end{aligned} \quad (7.117)$$

が成立する。従って

$$\int d\tau \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) = \int d\tau \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\dot{\vec{\xi}}) \quad (7.118)$$

が成立する。 $\dot{\vec{\xi}}$ は $\vec{\xi}$ と同じ境界条件を持ち、また、適当な外力により $\vec{\xi}$ と $\dot{\vec{\xi}}$ の初期値を任意に選ぶ事ができるので $\dot{\vec{\xi}} = \eta$ とおくと演算子 $\vec{F}$ の自己随伴性を示す式(7.108)が成立することがわかる。式(7.117)において $\dot{\vec{\xi}}$ として $\vec{\xi}$ を選ぶと、 δW は

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int d\tau \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (7.119)$$

と書けることがわかる。 δW は摂動によるポテンシャル・エネルギーの変化を表し、プラズマを平衡から $\vec{\xi}$ だけ変化させるための力 $\vec{F}$ に抗して為された仕事に等しい。運動エネルギーは $\omega^2 K(\vec{\xi}, \vec{\xi})$ とも書けるので、式(7.116)から

$$\omega^2 = \frac{\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi})}{K(\vec{\xi}, \vec{\xi})} \quad (7.120)$$

と書ける。この式の $\delta\omega^2 = 0$ の変分をとり、オイラーの式を求めると式(7.100)が得られる。

ポテンシャル・エネルギー δW は式(7.119)により与えられるが、この式の $\vec{F}$ に式(7.101)を代入する。部分積分により δW をプラズマ領域の δW_p 、プラズマ表面積分の δW_s 、真空領域の δW_v に分ける。その結果 δW は次のように書ける。

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_s + \delta W_v \quad (7.121)$$

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int_p \{ |\vec{Q}|^2 - \vec{J} \cdot \vec{Q} \times \vec{\xi} + \gamma P (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 + (\nabla \cdot \vec{\xi}) (\vec{\xi} \cdot \nabla P) \} d\tau \quad (7.122)$$

$$\delta W_s = \frac{1}{2} \int_{p-v} d\sigma (\vec{n} \cdot \vec{\xi})^2 \vec{n} \cdot \langle \nabla (P + \frac{B^2}{2}) \rangle \quad (7.123)$$

$$\delta W_v = \frac{1}{2} \int_v |\nabla \times \vec{A}|^2 d\tau \quad (7.124)$$

ここで $\vec{\xi}$ と $\vec{A}$ 以外は全て平衡量である。積分の各領域は平衡配位のものである。式(7.123)の $\langle \rangle$ はプラズマ表面を $\vec{n}$ 方向に横切る全圧力勾配力の差を示す。 δW をこのように表

現すると $\vec{\xi}$ は式(7.103)の制約条件を満たす必要はない。エネルギー原理では、平衡配位が不安定であるための必要十分条件は、境界条件(7.104)と(7.106)を満たし、かつ

$$\delta W < 0 \quad (7.125)$$

となるような $\vec{\xi}$ と $\vec{A}$ が存在する事である[15]。この結論には難しい問題がいくつかある。これらに対しては文献[3]に詳しく解説されている。

プラズマが直接完全導体壁で囲まれている時(固定境界)、 $\delta W_s = \delta W_v = 0$ で $\delta W = \delta W_p$ である。 δW_p は物理的に見通しのよい次のような形に変形することができる[17]。

$$\begin{aligned} \delta W_p = & \frac{1}{2} \int_p dr [|Q_\perp|^2 + B^2 |\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp^* + 2\vec{\xi}_\perp^* \cdot \vec{\kappa}|^2 + \gamma P |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2 \\ & - 2(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla P)(\vec{\kappa} \cdot \vec{\xi}_\perp^*) - J_\parallel (\vec{\xi}_\perp^* \times \vec{b}) \cdot \vec{Q}_\perp] \end{aligned} \quad (7.126)$$

ここで $\vec{b} \equiv \vec{B}/B$ は平衡磁場方向の単位ベクトル、 $\vec{\kappa} \equiv \vec{b} \cdot \nabla \vec{b}$ はその曲率を表す。右辺の第1項は磁場を曲げるため必要なエネルギーを表し、シアー・アルヴェン波のポテンシャル・エネルギーに対応する。第2項は磁力線の圧縮に必要なエネルギーを表し、圧縮性アルヴェン波のポテンシャル・エネルギーに対応する。第3項はプラズマの圧縮に必要なエネルギーを表し、音波のポテンシャル・エネルギーに対応する。以上の3つの項はいずれも正でありプラズマの安定に寄与するが、残りの第4、5項は正にも負にもなり、従って安定にも不安定にも寄与し得る。第4項は交換型不安定性やバルーニング不安定性等の圧力駆動型不安定をもたらすものであり、第5項はキンク不安定性等の電流駆動型不安定性をもたらすものである。この様にエネルギー原理は、理想MHD安定性解析において数値計算の手間を減らすだけでなく物理的解釈の基礎をも与える最も重要な道具である。固有値の誤差は固有ベクトルのそれよりも高次の微小量となるため、式(7.120)に $\vec{\xi}$ として適当な範囲内のベクトル関数を代入し ω^2 の極値を求めることによりかなり正確な固有値 ω^2 を求めることができる。

トカマクやヘリカル系のようなトーラスでのプラズマの理想MHD安定性はエネルギー原理を使って調べられる事が多いが、一般に、複雑な数値解析を行わねばならない。MHD理論には多くのテキスト（例えば文献[18]~[22]）があるので、以下では詳細に立ち入らず、典型的な理想MHDモードの物理的描像を考える。

(3) 交換型不安定性

交換型不安定性(interchange instability)は、フルート不安定性(flute instability)とかレイリー・テイラー不安定性(Rayleigh-Taylor instability)とか呼ばれることもあるが、全て同一のものである。レイリー・テイラー不安定性は流体力学での不安定性の一つで、その類似性から、プラズマでもしばしばレイリー・テイラー不安定性という言葉を使う。一般に $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 (k_{\parallel} = 0)$ となるような摂動（磁力線に沿って摂動が変動せず一定）が成長する時フルート不安定性という。全ての摂動 ξ に対してポテンシャル・エネルギーの変動 δW の符号を調べるのは難しい。しかし、あるクラスの、あるいはある特定の ξ に対して $\delta W > 0$ となるか $\delta W < 0$ となるか判定する事ができる事がある。一般に $\vec{B}$ を変化させる摂動 ξ に対しては、 $\vec{B}$ が曲げられると磁気張力(magnetic tension)が働き、磁場のエネルギーが増加する。式(7.126)から分かるように、 B^2 の増加は δW を増加させる。即ち $\vec{B}$ を歪める摂動は必ず磁場エネルギーを増加させ（ δW を増加させ）、系を不安定にさせにくい。従って $\vec{B}$ を変化させない摂動が最も不安定になりやすい。ここでは、交換型不安定性の物理的描像を考える[23]。

1) 磁場の湾曲

磁場に湾曲があると曲率ドリフトが生じ、粒子の案内中心(guiding center)は磁場を横切ってドリフトする。湾曲があると必ず ∇B が生じ、 ∇B ドリフトも同時に考慮せねばならない。§2で示したように曲率ドリフト速度 v_R は

$$\vec{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2 B^2} (mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2) \quad (7.127)$$

で与えられる。これは

$$\vec{v}_R = \frac{m\vec{g}_{eff} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (7.128)$$

$$m\vec{g}_{eff} = (mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2) \frac{\vec{R}}{R^2} \quad (7.129)$$

と書け、実効的に重力ドリフトとみなせる。

2) 重力不安定性

重い流体が軽い流体によって支えられている平衡配位は不安定である (Rayleigh-Taylor 不安定)。今、プラズマが重力に抗して磁場 $\vec{B}$ で支えられている場合を考える。重力 g が $-x$ 方向に加わっているとする。平衡では $x \geq 0$ の領域にのみプラズマがあり、 $x \leq 0$ の真空領域にのみ磁場 $\vec{B}$ が z 方向に一様にあるとする。平衡では

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g \quad (\text{プラズマ中}) \quad (7.130)$$

であり、プラズマ・真空境界で

$$P = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (7.131)$$

の関係にある。このプラズマが図 7.7 のような摂動を受けたとする。ここでは P' にあったプラズマと P にあった磁場が入れ替わった事になっていると考える。 P' の面積と P の面積は同じとする。このような摂動は明らかに磁力線を曲げないので磁場エネルギーは不変のままである。 P において圧力は $\delta P = -\rho g(-\delta x) = \rho g|\delta x|$ だけ増加する。 $|\delta x|$ は増加し続け不安定となる。

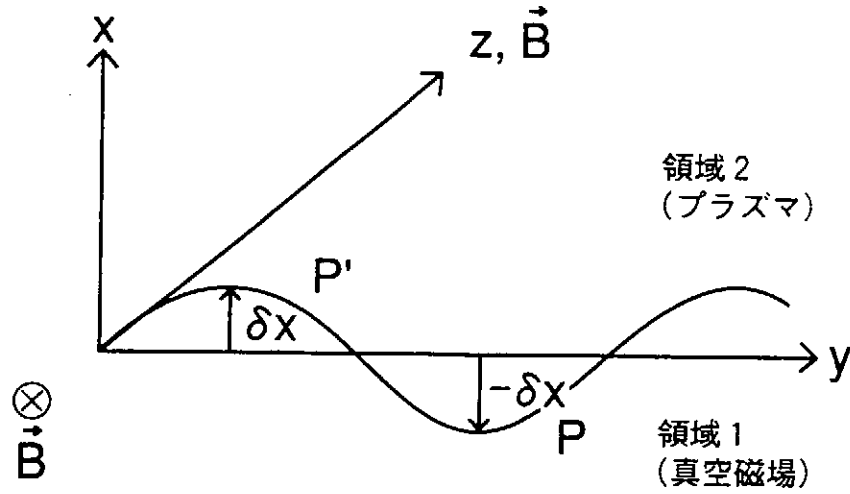


図7.7 重力不安定性

摂動 $\vec{\xi}$ に対する運動方程式は

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla \delta P \quad (7.132)$$

である。 $\nabla \delta P = (\varrho_1 - \varrho_2)g = -\langle \varrho \rangle g$ で $\langle \varrho \rangle = \varrho_2 - \varrho_1$ とした。隣接する流体1と流体2の境界面では $\vec{\xi} \sim e^{i\omega t}$ として

$$-\omega^2 \bar{\varrho} \vec{\xi} \simeq \langle \varrho \rangle g \quad (7.133)$$

が成立し $\omega^2 < 0$ で不安定となる。 $\bar{\varrho}$ は平均値である。 $\xi \sim 1/k$ とすると成長率 ω は

$$|\omega^2| \simeq gk \frac{\langle \varrho \rangle}{\bar{\varrho}} \quad (7.134)$$

となる。領域1が真空であると $\langle \varrho \rangle = \bar{\varrho}$ で

$$|\omega^2| \simeq gk \quad (7.135)$$

となる。摂動は z に沿って一定であり（即ち $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ）、縦溝（あるいはフルート）的になっているのでフルート不安定性とも呼ばれる。明らかに g が x の正の方向にあると安定である。

プラズマ中に $\vec{B}$ があっても真空中の $\vec{B}$ と同方向で一樣なら以上の結果は変わらない。なぜなら $\vec{v} = \partial \vec{\xi} / \partial t$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B}\end{aligned}\quad (7.136)$$

であり、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, また非圧縮性の摂動を考えると $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ であり、 $\vec{\xi}$ は $\vec{B}$ に垂直であるので $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$ であり

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{B} = 0 \quad (7.137)$$

が成立する。即ち、 $\vec{B}$ は流体要素により不変のまま運ばれ、磁場エネルギーは変化せず結局 $\vec{B}$ は不変のままである。

3) 安定化効果

摂動 $\vec{\xi}$ あるいは $\vec{v}$ は $\vec{B}$ に垂直方向であるが z の関数であるとする。この時

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{B} &= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} \\ &= B \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}(z) = ik_z B \vec{v}\end{aligned}\quad (7.138)$$

となり、もはや $\vec{B}$ は不変ではなく y 方向のみならず z 方向にも摂動を受け($k_y \neq 0, k_z \neq 0$)、 $\vec{B}$ は曲げられ張力が働き、これが復元力(restoring force)となり安定化に効く。復元力は R が小、即ち曲率の大きい方が強く、 z 方向に短波長(k_z 大)がより効果的である。

成長率を評価してみよう。摂動の運動方程式に張力 $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}/\mu_0 = B^2/\mu_0 R$ が復元力として加わる。 R は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{2k_z}\right)^2 &= |\delta x|(2R - |\delta x|) \simeq 2R|\delta x| \\ R &\simeq \frac{1}{k_z^2 |\delta x|}\end{aligned}\quad (7.139)$$

と評価できるので運動方程式は

$$-\omega^2 \bar{\rho} |\delta x| \simeq \langle \rho \rangle g - B^2 k_z^2 |\delta x| / \mu_0 \quad (7.140)$$

となる。右辺第2項が復元力である。 $\delta x \sim 1/k$ とおくと

$$-\omega^2 \simeq gk \left(\frac{\langle \varrho \rangle}{\bar{\varrho}} - \frac{B^2 k_z^2}{\mu_0 \bar{\varrho} g k} \right) \quad (7.141)$$

となり、流体と真空の境界では

$$\omega^2 \simeq -gk + \omega_A^2 \quad (7.142)$$

$$\omega_A^2 = k_z^2 c_A^2, \quad c_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \varrho}}$$

となる。 $k_z \neq 0$ の時（シア）アルベン波が伝わり安定化に効く。 $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ ($k_{\parallel} = 0$, 今の場合 $k_{\parallel} = k_z$) を満たす摂動をフルートモードと呼ぶ事はすでに述べた。この時重力不安定、あるいは交換型不安定が生ずるが、何らかの方法で $k_{\parallel} \neq 0$ とすると、安定化が可能になる。例えば、導体で $\vec{B}$ を固定すると $\vec{B}$ は必ず曲げられ $k_{\parallel} \neq 0$ となり安定化に効く。これを短絡効果あるいは磁力線結合 (line tying) 効果という。

磁気シアーのある場合を考えよう。図7.8のように $\vec{B}$ がねじれ (shear) を持っているとする。

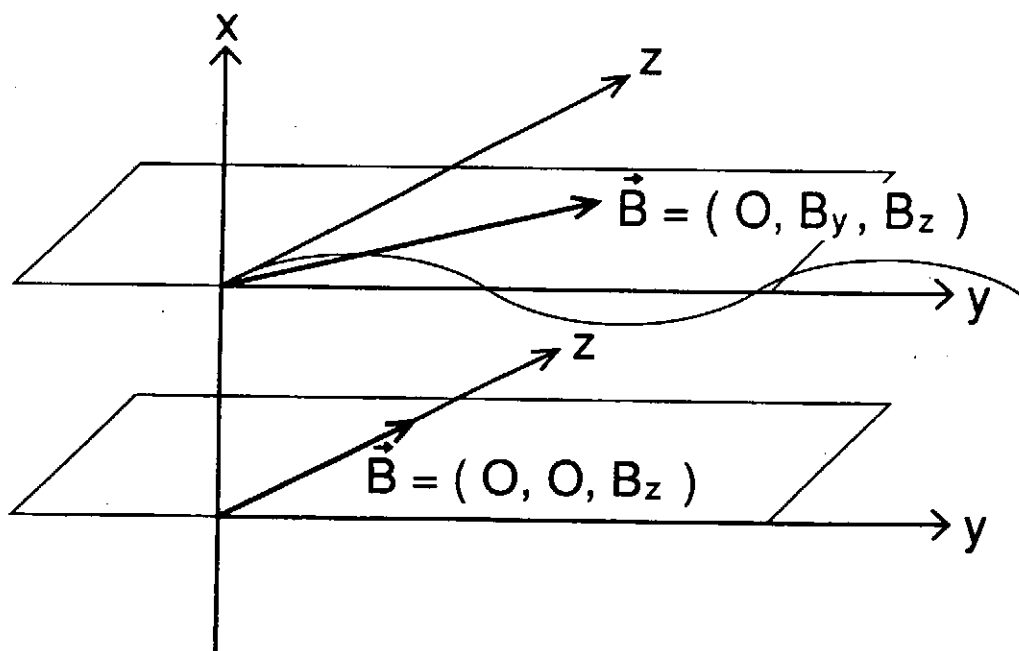


図7.8 磁気シアー

このようにプラズマの内と外で $\vec{B}$ の方向が異なると $\vec{B}$ の交換はできない。表面のいかなる変形も $\vec{B}$ を曲げ磁場エネルギーを増加させる。図7.8のような摂動は必ず B_y を曲げる。

$k_y \neq 0, B_y \neq 0$ なので

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = k_y B_y + k_z B_z \neq 0 \quad (7.143)$$

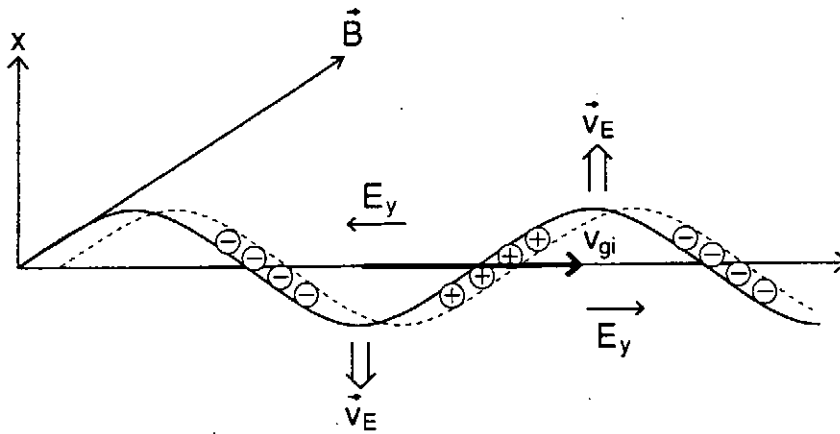
であり、即ち $k_{\parallel} \neq 0$ となりシアーは安定化に効く。

4) 重力不安定性の粒子的描象

重力 $\vec{g}$ が働くと粒子の案内中心は§2で示したようにa種粒子は

$$\vec{v}_{ga} = \frac{m_a \vec{g} \times \vec{B}}{e_a B^2} \quad (7.144)$$

でドリフトする。イオンと電子とではドリフトの方向は逆で、また $m_i \gg m_e$ のため $|v_{gi}| \gg |v_{ge}|$ である。図7.9のように重力ドリフトにより荷電分離が生じ E_y が生成される。次に $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトでイオンも電子も摂動を増加させる方向に動き系は不安定となる。



$$v_{gi} = \frac{m_i}{e} \frac{g}{B} > 0, \quad \vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$$

図7.9 重力不安定性の粒子的描象

5) 交換型不安定性の条件

プラズマ中に磁場 $\vec{B}$ があるとする。ただしシアーはないとする。また、 $\beta = 2\mu_0 p / B^2 \ll 1$ の低ベータプラズマを考える。また磁場エネルギーを不変とする摂動を考える。断面積

A、長さ L で一つの磁束管を考える。 L は $\vec{B}$ に沿っているので磁束 Φ は

$$\Phi = BA \quad (B = |\vec{B}|) \quad (7.145)$$

であり、磁束管の磁場エネルギーは

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \sim \frac{1}{2\mu_0} B^2 AL = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\Phi^2 L}{A} \quad (7.146)$$

である。2つのとなり合った磁束管 I と II を考える (図 7.10)。

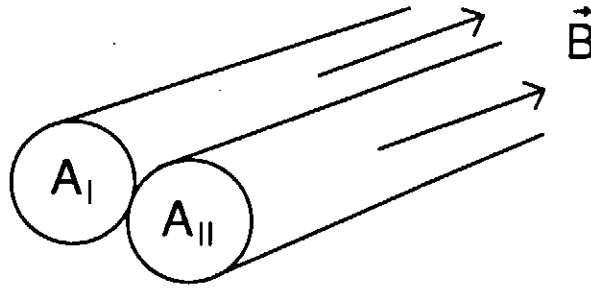


図 7.10 磁束管

I を占めているプラズマが II へ、II を占めているプラズマが I へ移動し、I と II が交換されたとする。磁束はプラズマの運動とともに運ばれるから、交換後 I の磁束は交換前の II の磁束になっている。交換前後の磁場エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{\Phi_I^2 L_{II}}{A_{II}} + \frac{\Phi_{II}^2 L_I}{A_I} \right\} - \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{\Phi_{II}^2 L_{II}}{A_{II}} + \frac{\Phi_I^2 L_I}{A_I} \right\} \quad (7.147)$$

であり、 $\Phi_I = \Phi_{II}$ であれば磁場エネルギーは変化しない。このような時、エネルギー原理におけるポテンシャルエネルギー δW は内部エネルギーの変化のみになる。交換後の I の圧力を P'_I 、II の圧力を P'_{II} (交換前はそれぞれ P_I, P_{II}) とすると

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1} \{ (P'_I V_I + P'_{II} V_{II}) - (P_I V_I + P_{II} V_{II}) \} \quad (7.148)$$

となる。ただし V_I, V_{II} はそれぞれの体積である。断熱変化の式 $PV^\gamma = \text{const}$ より

$$\begin{aligned} P_I' &= (P_{II} V_{II}^\gamma) / V_I^\gamma \\ P_{II}' &= (P_I V_I^\gamma) / V_{II}^\gamma \end{aligned} \quad (7.149)$$

が成立する。2つの磁束管はとなり合っているので、 $\Delta P, \Delta V$ を微小量として $P_{II} = P_I + \Delta P, V_{II} = V_I + \Delta V$ と書ける。従って

$$\delta W = \Delta V \left\{ \Delta P + \frac{\gamma P}{V} \Delta V \right\} < 0 \quad (7.150)$$

が不安定の条件となる。 $\Phi = BA$ であるので V は

$$V = \int dl A = \Phi \int \frac{dl}{B} \quad (7.151)$$

で与えられる。 Φ は $\Phi = \text{const}$ なので積分の外に出した。 dl は磁束管に沿う ($\vec{B}$ に沿う) 線要素である。

ここで次の量 $\bar{U}$ を定義する。

$$\bar{U} \equiv - \int \frac{dl}{B} \quad (7.152)$$

体積 V は $V = -\Phi \bar{U}$ で表せ $\bar{U} = -dV/d\Phi$ とも書ける。不安定の条件は ΔU を使うと

$$\Delta \bar{U} \Delta P < \gamma P \frac{(\Delta \bar{U})^2}{|\bar{U}|} \quad (7.153)$$

となる。プラズマの境界付近では $P \simeq 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U} \Delta P &< 0 \\ \frac{\Delta \bar{U}}{\Delta \Phi} \frac{\Delta P}{\Delta \Phi} &< 0 \end{aligned} \quad (7.154)$$

が不安定の条件である。ふつうは $\Delta P / \Delta \Phi < 0$ ($\Phi \sim r^2$) であるので不安定の条件は

$$\frac{d\bar{U}}{d\Phi} = - \frac{d^2 V}{d\Phi^2} = - \frac{d}{d\Phi} \int \frac{dl}{B} > 0 \quad (7.155)$$

である。

交換型不安定性に対する安定条件は

$$V'' = \frac{d}{d\Phi} \int \frac{dl}{B} < 0 \quad (7.156)$$

である。但し V の微分は Φ について行う。即ちプラズマから真空領域へ向かって $\int dl/B$ が減少すれば安定で逆は不安定となる。これは式(7.49)に相当している。

(4) キンク不安定性

プラズマ電流 $\vec{j}$ が自由エネルギー源となって引き起こされる不安定性を一般にキンク不安定性という。

1) ソーセージ不安定性

円柱プラズマの表面に表皮電流が z 方向に流れているとする。図7.11のようにプラズマ内に $\vec{B}$ はなく外の真空領域に $\vec{B} = B_\theta \hat{e}_\theta$ ができる。

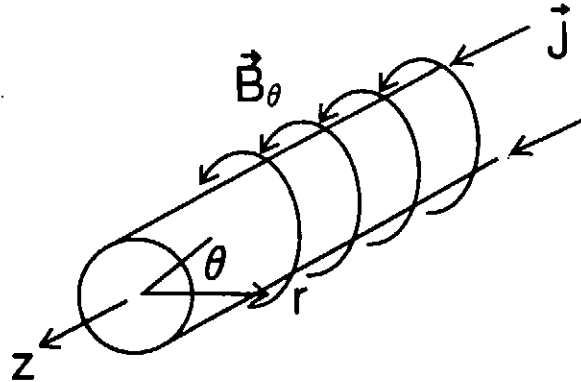


図7.11 表面電流のつくる磁場

$B_\theta \propto 1/r$ ($r > a$) で r とともに B は減少し、また、磁力線の長さも r とともに増加する($\int dl = 2\pi r$)。 $\int dl/B$ はプラズマの外に向かって増加するので不安定である。成長率は

$$\omega^2 \simeq -gk, \quad g \simeq \frac{2P}{qa}, \quad k \simeq \frac{1}{a} \quad (7.157)$$

から評価すると

$$|\omega| \simeq \sqrt{\frac{2P}{\rho}}/a \sim c_s/a \quad (7.158)$$

程度になる。 a は円筒プラズマの半径、 c_s は音速である。

ソーセージ不安定性はくびれた所で $\bar{J}$ が大きくなり $\bar{B}_\theta$ が大きくなり、 $B_\theta^2/2\mu_0$ が大きくなり、ますますくびれていく。ふくれたところは逆に $\bar{J}$ が小さくなり $\bar{B}_\theta$ が小さくなり $B_\theta^2/2\mu_0$ が減少してますますふくれていくとも解釈できる。 θ 方向の摂動のモード数を m とするとソーセージ不安定性は $m=0$ のモードであるといえる (図7.12)。

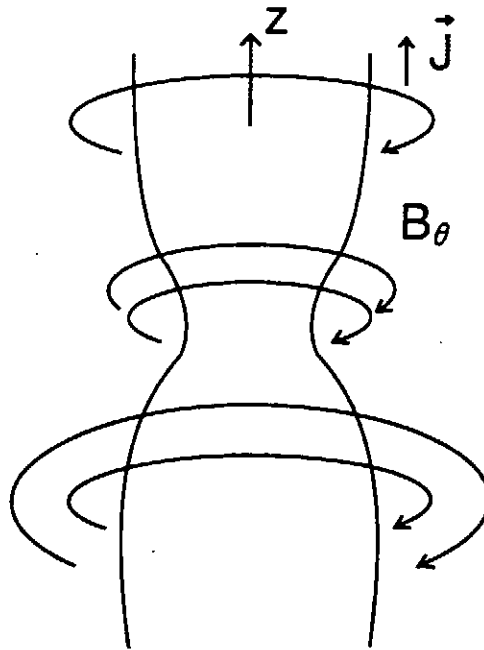


図7.12 ソーセージ不安定性 ($m=0$)

縦磁場 B_z がプラズマ中にあると安定化に働く。成長率は

$$\omega^2 = -\left(\frac{2P}{\rho}\right)/a + c_A^2/a \quad (c_A = \frac{B_z}{\sqrt{\mu_0 \rho}}) \quad (7.159)$$

程度になる。プラズマ表面で圧力バランス

$$P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (7.160)$$

が成立するので、安定化($\omega^2 > 0$)のためには

$$B_z^2 > \frac{1}{2} B_\theta^2 \quad (7.161)$$

が必要となる。

2) キンク不安定性

$z = \text{const.}$ の $(r - \theta)$ 面上でプラズマ断面をシフトさせるような摂動($m = 1$) を (狭い意味での) キンク・モード(kink mode) という。

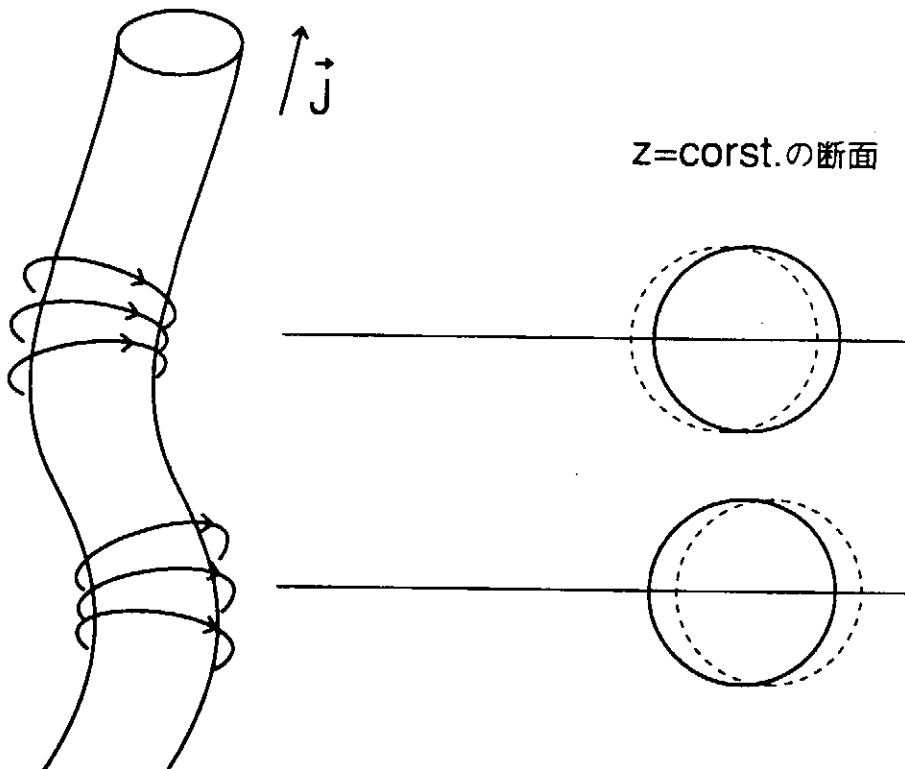


図7.13 キンク不安定性 ($m = 1$)

キンク不安定性は、図7.13のようにプラズマ柱がくびれるような摂動モードである。くびれた個所では凸側より凹側の方が $B_\theta^2/2\mu_0$ が大きく、左右アンバランスとなり、ますます

すくびれていく。プラズマ中の B_z が張力により安定化に効くが、長波長モードに対しては完全に安定化できない。即ちプラズマ表面で

$$P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (7.162)$$

であるが、この時は $B_\theta^2 > B_z^2$ で安定化磁場 B_z が足りないからである。キンク不安定を安定化するには

- i) 外部から B_z を加えること
- ii) 同軸の完全導体でプラズマを囲むこと

が必要となる。

3) Kruskal-Shafranov 限界

外部磁場 B_z も印加してキンク・モードを安定化する条件を考える。

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{B} &= k_\theta B_\theta + k_z B_z \\ &= \frac{m}{r} B_\theta + n \frac{2\pi}{L} B_z \\ &= \frac{B_\theta}{r} \left(m + n \frac{2\pi r B_z}{L B_\theta} \right) \end{aligned} \quad (7.163)$$

である。但し m は θ 方向、 n は z 方向のモード数で L は z 方向のプラズマ柱の長さとした。キンク・モードは $m = 1$ で、 z 方向のモード数 $n = -1$ に対して

$$\frac{2\pi r B_z}{L B_\theta} = 1 \quad (7.164)$$

なら $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ となる。磁力線のピッチは

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{r B_z} \quad (7.165)$$

で θ 方向に 2π 進むとき磁力線に沿って l だけ z 方向に進むとすると l は

$$l = 2\pi \frac{r B_z}{B_\theta} \quad (7.166)$$

で与えられる。これをピッチ長と呼ぶと、摂動のピッチ長は L を越えられない。外部磁場の磁力線のピッチ長と摂動のピッチ長が一致したとき $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ となる。従って磁力線のピッチ長が L より大きいと安定できる。キンク・モードの安定化の条件は

$$L < \frac{2\pi r B_z}{B_\theta} \quad (7.167)$$

で与えられる。プラズマ電流を I とすると

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.168)$$

だからこの安定化条件は

$$I < 4\pi^2 r^2 B_z / (\mu_0 L) \quad (7.169)$$

となる。これがKruskal-Shafranov 限界 (K-S limit) である。

今、軸対称トーラス（トカマク）を考えアスペクト比 R/a が $R/a \gg 1$ とすると、トーラスを近似的に円筒と考えてよい。この時 $L = 2\pi R, r = a$ になるから安定化条件は

$$1 < \frac{r B_z}{R B_\theta} = q \quad (7.170)$$

即ち $q > 1$ がキンク・モードの安定化条件となる。 q が安全係数と呼ばれるゆえんはここにある。

参考文献

- [1] C.L.Longmire; “*Elementary Plasma Physics*”, Interscience Pubilishers, 1963.
- [2] 宮本健郎、「核融合のためのプラズマ物理」岩波書店、1987年。
- [3] 浜田繁雄、「MHD 平衡と安定性」第18回プラズマ若手グループ夏の学校テキスト、1979年（名古屋大学プラズマ研究所、核融合懇談会）。
- [4] M.D.Kruskal and R.M.Kulsrud; Phys. Fluids 1 (1958) 265.

- [5] S.Hamada; Nucl. Fusion 2 (1962) 23.
- [6] N.Nakajima; Phys. Plasmas 3 (1996) 4545.
- [7] N.Nakajima; Phys. Plasmas 3 (1996) 4556.
- [8] J.P.Freidberg; "*Ideal Magnetohydrodynamics*", Plenum Press, New York, 1987.
- [9] M.Wakatani and S.Sudo; Plasma Phys. Control. Fusion 38 (1996) 937.
- [10] A.Iiyoshi, M.Fujiwara, O.Motojima, N.Ohyabu, and K.Yamazaki; Fusion Technology, 17 (1990) 169.
- [11] K.Nishimura, et al.; Fusion Technology, 17 (1990) 86.
- [12] F.L.Hinton and R.D.Hazeltine; Reviews of Modern Physics 48 (1976) 239.
- [13] A.H.Boozer; Phys. Fluids 23 (1980) 904.
- [14] N.Nakajima, J.Todoroki, and M.Okamoto; Kakuyugo-Kenkyu (J.Plasma and Fus. Res.) 68 (1992) 395.
- [15] I.B.Bernstein, E.A.Frieman, M.D.Kruskal, and R.M.Kulsrud; Proc. Royal Society 244 (1958) 17.
- [16] 浜田繁雄、「MHD講義」第3 4回プラズマ若手夏の学校テキスト、1995年（プラズマ核融合学会編集）。
- [17] J.M.Greene and J.L.Johnson; Plasma Physics 10 (1968) 729.
- [18] A.Jeffrey and T.Taniuti; "*Magnetohydrodynamic Stability and Thermonuclear Confinement*", Academic Press, New York and London, 1966.
- [19] G.Bateman; "*MHD Instabilities*", The MIT Press, 1980.

- [20] J.Wesson; "*Tokamaks*", Oxford Science Publications, Clarendon Press. Oxford, 1987.
- [21] R.B.White; "*Theory of Tokamak Plasmas*", North-Holland, Amsterdam. Oxford. New York. Tokyo, 1989.
- [22] 岡本正雄、「MHD 理論と磁場閉じ込め核融合」 第31回プラズマ若手夏の学校テキスト、1992年（プラズマ・核融合学会誌編集）。
- [23] M.N.Rosenbluth, C.L.Longmire; *Annals of Physics* 1 (1957) 120.

§8 抵抗性 MHD 不安定性

(1) 抵抗の役割

式(7.1)から(7.7)の方程式系で $\eta \neq 0$ の場合を抵抗性 MHD 方程式系という。ファラデーの式(7.5)にオームの式(7.3)の $\vec{E}$ を代入すると次の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \vec{J}) \\ &= \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \nabla^2 (\eta \vec{B})\end{aligned}\quad (8.1)$$

ここで、右辺第2項で、 $\vec{J} = \nabla \times \vec{B}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を使った。§5の(2)節で示したように、 $\eta = 0$ であれば右辺第1項から凍りつきの定理が導かれる。すなわち、第1項は理想プラズマの運動を表している。 $\eta \neq 0$ の時、右辺第2項は磁場 $\vec{B}$ の拡散を示している。理想プラズマでは流体要素は磁場と共に運動するが、 $\eta \neq 0$ であるとプラズマは磁場を横切って拡散していく。トーラスの場合は、理想 MHD では、磁気面を横切るプラズマの流れは無い。プラズマの運動と共に磁気面は歪むが、そのトポロジーは変化しない。しかし、抵抗はプラズマに凍りついている磁場を拡散によって離していく役割を果たす。このとき、磁場のトポロジーの変化が許されることになり、磁力線のつながり変え（磁力線の再結合、リコネクション）が生ずる。別の見方をすると第1項はシアールベン波に対応する項で、第2項は拡散項である。式(8.1)の右辺第1項の時間尺度を τ_H 、第2項の時間尺度を τ_D とすると、 τ_H と τ_D は次のように評価できる。

$$\tau_H \equiv \frac{L}{c_A} \quad (\text{アルベン時間}) \quad (8.2)$$

$$\tau_D \equiv \frac{L^2}{\eta} \quad (\text{拡散時間}) \quad (8.3)$$

ただし、 $c_A = \frac{B}{\sqrt{\rho}}$ はアルベン速度である。 L は考えている問題に対する空間尺度である。 τ_D と τ_H の比を磁気レイノルズ数と言う。

$$S \equiv \frac{\tau_D}{\tau_H} = \frac{L c_A}{\eta} \quad : \quad \text{磁気レイノルズ数} \quad (8.4)$$

S は式(8.1)の第1項と第2項の大きさの比を表す。すなわち、

$$S \equiv \frac{\left| \frac{\text{凍りつきの項}}{\text{磁場の拡散項}} \right|}{\left| \frac{\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})}{\nabla^2(\eta \vec{B})} \right|} \quad (8.5)$$

磁気レイノルズ数の大きさを評価してみよう。 c_A と η は次のように書ける。

$$c_A = \frac{\sqrt{B}}{\rho} = \frac{B}{\sqrt{n_i m_i}} = 2.18 \times 10^6 \cdot \frac{B}{(A n_i / 10^{20})^{1/2}} [m/s] \quad (8.6)$$

$$\eta = \eta_{\perp} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} = 1.03 \times 10^{-4} Z \ln \Lambda T_e^{-3/2} [Ohm \cdot m] \propto T_e^{-3/2} \quad (8.7)$$

例として、 $L = 0.2m, B = 2T, n = 5 \times 10^{19} m^{-3}, T_e = 100eV$ を考えると、 $c_A = 6.2 \times 10^6 m/s, \tau_H = 3.2 \times 10^{-8} s, \tau_D = 3.1 \times 10^{-2} s$ であり $S = \frac{\tau_D}{\tau_H} = 9.5 \times 10^5$ となる。 $L = 1.0m, B = 4T, n = 10^{20} m^{-3}, T_e = 10keV$ の時は、 $c_A = 8.7 \times 10^6 m/s, \tau_H = 1.1 \times 10^{-7} s, \tau_D = 7.7 \times 10^2 s$ であり、 $S = \frac{\tau_D}{\tau_H} = 6.7 \times 10^9$ となり S は大きな値になる。このように S は非常に大きい値を取るので、拡散項は常に無視して良いように思われる。しかし、もし $\vec{B} = 0$ となる所があればこの点付近では式(8.1)の第1項は小さく第2項の拡散項が支配的となる。さらに、拡散項は高階の微係数を含むので容易に拡散項を無視する事はできない。

どのような状況の時抵抗 η が重要な役割を果たすかどうか考えよう [1]。オームの式を線形化すると

$$\vec{E}_1 + \vec{V} \times \vec{B}_0 = \eta \vec{J}_1 \quad (8.8)$$

となる。 $\vec{J}_1$ によるローレンツ力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{J}_1 \times \vec{B}_0 &= \frac{1}{\eta} (\vec{E}_1 + \vec{V} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 \\ &= \frac{B_0^2}{\eta} \left(\frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_0}{B_0^2} - \vec{V}_{\perp} \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

$\eta = 0$ の時、 $\vec{E}_1 + \vec{V} \times \vec{B}_0 = 0$ より $\vec{V}_{\perp} = \vec{E}_1 \times \vec{B}_0 / B_0^2$ であるから $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0 / B_0^2$ は磁束管 (あるいは磁気面) の動く速度を表す。 $\eta \neq 0$ の場合を $\vec{E}_1 = 0$ の系で考える。この時の力を $\vec{F}_s$ で書くと

$$\vec{F}_s = -\frac{B_0^2}{\eta} \vec{V}_{\perp} \quad (8.10)$$

となる。これは磁気面からスリップしたプラズマを元にもどそうとする復元力 (restoring force) であり、 η が小さい程その力 F_s は大きい。 $\eta \rightarrow 0$ では $\vec{V}_\perp = \vec{E}_1 \times \vec{B}_0 / B_0^2$ になるまで復元力が働く。 $\vec{B}_0 = 0$ の極く近傍では $\vec{F}_s$ は小さい。しかし、 $\vec{B}_0$ に垂直な(しかし磁気面内にある)磁場 $\vec{B}'_0$ があるとすると

$$\vec{F}_s = -\frac{B_0^2}{\eta} \vec{V}_\perp - \frac{(B'_0)^2}{\eta} \vec{V}_\perp \quad (8.11)$$

であり、復元力は各々の成分に独立に働く。 $\vec{B}'_0 \neq 0$ でも $\vec{B}_0 = 0$ となる所では磁束管からスリップするプラズマを元にもどす復元力は小さく、式(8.1)で拡散項は重要になってくる。

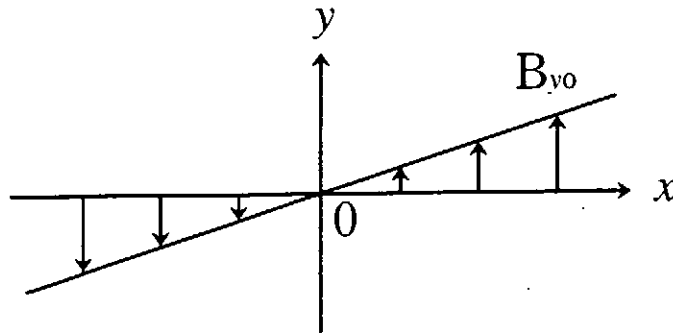


図8.1 $\vec{B}_0 = 0$ のある磁場配位

図8.1のような磁場配位を考える。すなわち、 $B_{x0} = 0, B_{y0} = x, B_{z0} = 0$ とする。このような配位では $x = 0$ で $B_0 = 0$ で $F_s = 0$ となり復元力は全く働かない。 $B_{z0} \neq 0$ でも同様である。図8.2のように磁場 $\vec{B}_0$ が x とともに振れている場合 (磁気シアーのある時) を考える。ある摂動の波数を $\vec{k}$ とし、 $\vec{k}$ を y 方向に取る。 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ となる点があると (x, y) あるいは (x, k) 平面で図8.1と同じように考えられる。 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ の点で $B_{y0} = 0$ で復元力は働かない ($B_{z0} \neq 0$ は関係ない)。円筒プラズマの場合を考える。円筒座標を (r, θ, z) とし、 z 方向の長さを $2\pi R$ とする。トーラスでは R は大半径、 $B_{\theta 0}, B_{z0}$ はそれぞれポロイダル、トロイダル磁場に相当する。 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0$ は

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = k_\theta B_{\theta 0} + k_z B_{z0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{r} B_{\theta 0} + \frac{n}{R} B_{z 0} \\
&= \frac{B_{\theta 0}}{r} (m + nq), \quad \left(q = \frac{r B_{z 0}}{R B_{\theta 0}} \right)
\end{aligned} \tag{8.12}$$

となる。ここで q は式(7.34)で定義される安全係数である。 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 (q = -m/n)$ となる所 ($r = r_s$ とする)、すなわち有理面上で図8.1と同じように考えられる。これは次の磁場 $\vec{B}_*$ を考えると容易に理解できる。

$$\vec{B}_* = \vec{B}_0 - \frac{r}{r_s} B_{\theta}(r_s) \vec{e}_{\theta} - B_z(r_s) \vec{e}_z \tag{8.13}$$

$r = r_s$ (有理面) で $\vec{B}_* = 0$ であり、 $\vec{B}_*$ は $r = r_s$ を境にその向きを変える。つまり $\vec{B}_*$ は図8.2の B_{y0} に相当している。トーラスでは有理面上、もしくはその極く近傍 ($\vec{k} \cdot \vec{B}_0 \simeq 0$) で式(8.1)の拡散項がある条件下で重要になり、抵抗が決定的な役割を果たす。

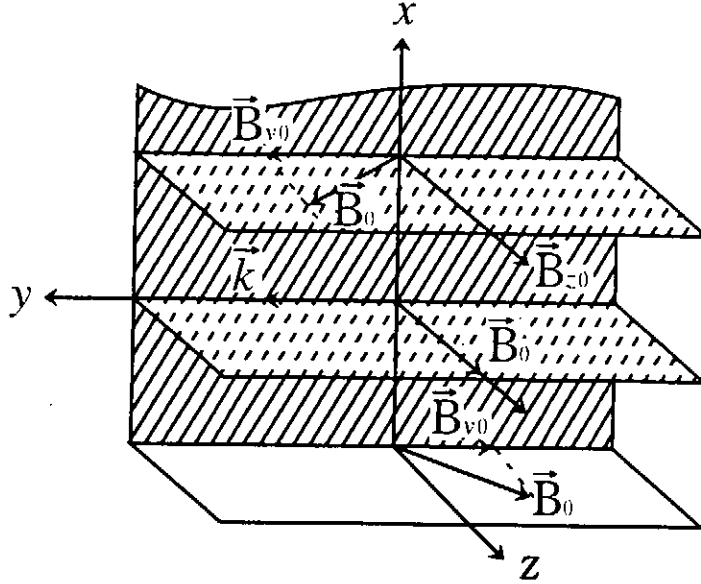


図8.2 磁場 $\vec{B}$ が振れている場合

$\eta \neq 0$ が起因するモードを抵抗性MHD不安定モードという。抵抗性MHD不安定性の時間スケールを τ_R とすると

$$\tau_H \ll \tau_R \ll \tau_D \tag{8.14}$$

であろう。つまり、不安定性の成長率を ω とすると

$$\omega \sim S^{-\zeta} \tau_H^{-1}, \quad (0 < \zeta < 1) \quad (8.15)$$

と書けることになる。理想MHDプラズマでは $\zeta = 0$ であり、 $\omega \sim \tau_H^{-1}$ となる。 $\zeta = 1$ なら $\omega \sim \tau_D^{-1}$ (拡散時間) となる。

抵抗性MHDモードが不安定になると層状 (nested) の磁気面を破壊する δB が生まれ磁気面のトポロジーが変化する。この時、磁力線に沿って大きな圧力差が生ずる。圧力差を平均化しようプラズマが運動し形状が変化する。 τ_D は磁場が自身と同程度まで変化するのに要する時間であるので $\tau_R \ll \tau_D$ である。磁力線に沿う運動の速さは $v_s \leq v_A$ 程度であり、圧力を平均化するために移動する距離は L よりずっと大きいから

$$\tau_H = \frac{L}{v_A} \ll \tau_R \ll \tau_D \quad (8.16)$$

と考えてよいであろう。

(2) スラブ配位における抵抗性MHD不安定性

1) 平衡

多くの磁場閉じ込め装置はトーラス形状であるが、磁場の表現が複雑であり、不安定性の基本的性質を調べるのは容易ではない。そこで、ここではスラブ形状において調べていくことにする。Furth, Killeen, Rosenbluth は抵抗性MHD不安定性の本質をスラブ形状において明らかにした[2]。以下では、 (x, y, z) のデカルト座標を用いるが、トーラスとの対応において x は動径方向、 y はポロイダル方向、 z はトロイダル方向と考える事にする。円筒座標 (r, θ, z) とは x が r 、 y が θ 、 z が z という関係にあることを念頭に置いておく和理解しやすいかも知れない。

まず、平衡配位として、次のものを用いることにする。

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_0 &= (0, B_{0y}(x), B_{0z}(x)), \\ \vec{J}_0 &= (0, -B'_{0z}(x), B'_{y0}(x)) \\ \rho_0 &= \rho_0(x), \quad P = P_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

ここで、平衡量は添え字 0 をつけて表すことにする。プライムは x に関する微分である。重力不安定性をスラブ配位で模擬するため、運動方程式(7.2)の右辺に重力項 $\rho\vec{g}$ をつけ加える。平衡の方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla P_0 &= \vec{J}_0 \times \vec{B}_0 + \rho_0 \vec{g} \\ \nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{2} \right) - (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 &= \rho_0 \vec{g}, \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

平衡状態では $\partial/\partial t \rightarrow 0$, $\vec{V} = 0$ であるのでファラデーの式より

$$\nabla \times (\eta_0 \vec{J}_0) = 0 \quad (8.19)$$

が成立しなければならない。平衡状態で $\vec{E}_0 = \eta_0 \vec{J}_0 = \text{const}$ であると考えたと式(8.19)は満たされる。

抵抗 η は次の式に従うと仮定する。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \vec{V}) = 0 \quad (8.20)$$

重力 $\vec{g}$ は x 成分 g のみを持ち、 g_0 は一定、 η_0 は x のみの関数と仮定する。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \vec{g} &= (g, 0, 0), \quad g = \text{const} \\ \eta_0 &= \eta_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

また、以下非圧縮性プラズマのみを考える。従って

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (8.22)$$

である。

2) 線形化

さて、式(7.1)~(7.7) (ただし、式(7.2)は重力項 $\rho\vec{g}$ を含む)、及び式(8.20), (8.22) の基礎方程式を線形化すると次のようになる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (V_1 \cdot \nabla) \rho_0 = 0, \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times (\rho_0 V_1)] = \nabla \times [(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \rho_1 \vec{g}], \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) V_1 - (V_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 - \nabla \times (\eta_0 \nabla \times \vec{B}_1 + \eta_1 \nabla \times \vec{B}_0), \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + (V_1 \cdot \nabla) \eta_0 = 0, \quad (8.26)$$

$$\nabla \cdot V_1 = \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad (8.27)$$

ここで、摂動量は添え字 1 をつけて表し、 $\vec{V}_0 = 0$ を利用した。式(8.24)は式(7.2)の両辺の rotation をとったもので、運動方程式に陽に圧力 P_1 が表れない形にしたので、式(7.4)に対応する式は必要ない。さらに、(7.6)及び(7.3)を用いて J_1 、 E_1 は消去してある。今、 y, z 方向には物理量は周期的であるとする、任意の摂動量 $f_1(x, y, z, t)$ に対して次の平面波近似を用いることができる。

$$f_1(x, y, z, t) = \hat{f}_1(x) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) \quad (8.28)$$

ここで、 ω は摂動の成長率、 $\vec{k}$ は波数ベクトルであり

$$k = (0, k_y, k_z), \quad k = |\vec{k}|, \quad (8.29)$$

で表される。そこで、式(8.28)を式(8.23)から(8.27)に代入し、式(8.23)、(8.26)をそれぞれ式(8.24)、(8.25)に代入して ρ_1, η_1 を消去する。さて、式(8.25)には、 $e_x \cdot$ (x 方向の単位ベクトルとの内積)、(8.24)には $e_x \cdot \nabla \times$ を作用させると、次のような $V_{x1}(x)$ と $B_{x1}(x)$ だけに対する閉じた方程式系が得られる。(フーリエ係数を表す記号 $\hat{}$ は以下では省略する。)

$$\omega B_{x1} = i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{x1} + \eta_0 \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) B_{x1} + i \frac{\eta'_0}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)' V_{x1} \quad (8.30)$$

$$\omega \rho_0 \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) V_{x1} = -i \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'' - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \right] B_{x1} + \frac{k^2}{\omega} \rho'_0 g V_{x1} \quad (8.31)$$

ここで、プライムは x に関する微分を表し、 $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ である。また、式(8.31)の左辺において慣性項における ρ_0 の微分の寄与は小さいとし Boussinesq 近似を用いた。式

(8.30) 及び (8.31) は V_{x1} 、 B_{x1} に対する 2 階常微分方程式の形をしており、 ω に対する固有値方程式となっている。従って、適当な境界条件の下で両式を説けば、固有値 ω と固有関数 V_{x1} 、 B_{x1} が決定される。

式 (8.30) 及び (8.31) で与えられる方程式系において重要なことは、平衡磁場 $\vec{B}_0$ は $\vec{k}$ との内積、およびその微分でしか表れないということである。それぞれの形の物理的意味を考えてみよう。まず、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 \neq 0$ であるということは、摂動の波数ベクトル方向の磁場成分が存在することを意味する。従って、このような摂動は、この磁場成分を曲げなければならないことになる。この磁場の曲がり、シアーアルヴェン波となって伝わってゆく。つまり、摂動が成長するためのエネルギーの一部がシアーアルヴェン波のエネルギーに交換されることによって消費される。従って、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0$ が大きいほどこのモードに対する安定化の寄与が大きくなる。逆に言えば、与えられた磁場 $\vec{B}_0$ に対して $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ となる波数 $\vec{k}$ を持つ摂動が最も不安定になり易い。あるいは $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ となる所で摂動が最も不安定になり易い。理想 MHD プラズマでは §7 で述べたようにこれは交換型不安定性に相当する。次に、 $(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)' \neq 0$ であるということは、磁場にシアーが存在することを意味する。この場合、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ を満たす場所は、 x 方向に一点だけとなり、この点から離れると $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 \neq 0$ となって安定化作用が働くことになる (図 8.2 の場合)。 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ を満たす $x = x_0$ の面は共鳴面と呼ばれ、この近傍にモードは局在すると考えられる。また、この共鳴面近傍では式 (8.1) 又は式 (8.30) の右辺第 1 項は小さくなるから、相対的に抵抗の効果が大きく効くことになる。最後に、 $(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'' \neq 0$ は平衡電流が x 方向に勾配を持っていることを意味している。即ち

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'' = \vec{e}_x \cdot \vec{k} \times \vec{J}_0(x) \quad (8.32)$$

この量は、後で述べるテアリングモードにおいて重要な役割を果たす。以上の考察により、以下の取り扱いを容易にするために、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ となる共鳴面を $x = 0$ にとることにする。

3) 漸近的接続法 (Asymptotic Matching)

式(8.17)で与えられているように、平衡磁場にシアがある場合、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ となる共鳴面近傍では式(8.1)の右辺において抵抗の効果を示す第2項が第1項よりも大きく寄与することが考えられる。逆に言うと、 η が小さい場合には、この抵抗が効くのは共鳴面近傍のごく狭い領域だけであって、そこから離れると、抵抗の影響は無視して考えても良いだろう。この抵抗の影響が実質的におよぶと考えられる領域を抵抗層と呼ぶ。そこで、式(8.30)及び(8.31)を解く場合にはこの抵抗層の内部領域と外部領域とに分けて考え、それぞれにおいて特徴的な項を残した別々の方程式をたてることができる。次に、それぞれの領域で別々に求められた解の漸近的振る舞いを両者の中間領域でつなぐことによって、固有値、固有関数を求めることができる。このような手法を漸近的接続法 (asymptotic matching) と呼ぶ。ここで重要なことは、外部、内部領域とも、それぞれの領域でのみ支配的な項を残すわけであるから、中間領域でつなぐ際に、どこか一点でつなぐのではなく、漸近的な量をつなぐという点である。今の場合、方程式は線形であるので解 $B_{x1}(x)$ の対数微分の「とび」をつなぐことになる。つまり、内部領域を考えるとときには抵抗層の幅を無限大とみなし、 $B_{x1}(x)$ の対数微分の漸近的なとびは、 $x \rightarrow \pm\infty$ で

$$\Delta'_{\text{int}} \equiv \left[\frac{d}{dx} (\ln B_{x1}) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \quad (8.33)$$

と評価する。逆に外部領域を考えるとときには、抵抗層は無限小の幅を持つと考え、 $B_{x1}(x)$ の対数微分の漸近的とびは

$$\Delta'_{\text{ext}} \equiv \left[\frac{d}{dx} (\ln B_{x1}) \right]_{x=-0}^{x=+0} \quad (8.34)$$

で与える。そうして固有値 ω は、この両者が等しい、即ち

$$\Delta'_{\text{int}}(\omega) = \Delta'_{\text{ext}} \quad (8.35)$$

となる条件から求められることになるのである。

そこで、外部領域および内部領域を支配する方程式をそれぞれ記述しよう。外部領域で

は $\eta_0, \eta'_0 \sim 0$ と考えて良いから式(8.30)より、次の方程式が成立する。

$$\omega B_{x1} = i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) V_{x1} \quad (8.36)$$

また、式(8.31)は式(8.15)より $S \rightarrow \infty$ では $\omega \rightarrow 0$ となるから慣性項は無視する：

$$0 = -i \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'' - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \right] B_{x1} + k^2 \frac{\rho'_0}{\omega} g V_{x1} \quad (8.37)$$

式(8.36)及び(8.37)において V_{x1} を消去すると

$$\frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)''}{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)} + \frac{k^2 \rho'_0}{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2} \right) B_{x1} = 0 \quad (8.38)$$

が得られる。式(8.38)の解から求められる Δ'_{ext} は g が小さいとすると波数によって符号が変わり、 $\alpha = ka$ (a は x 方向の電流層の厚さ、あるいは磁気シアー長などの特徴的長さ、もしくは小半径) と置くと

$$\Delta'_{\text{ext}} \propto \begin{cases} -\alpha & \text{for } \alpha \gg 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{for } \alpha \ll 1 \end{cases} \quad (8.39)$$

となることが知られている。 $\alpha \ll 1$ の場合には $(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)''$ の項が支配的となっていることに注意しなければならない。

次に内部領域では、抵抗は有限であるが、抵抗層の幅の範囲では平衡量の変化は小さいと考え、 x 方向に最低次しか取らないものとする。すなわち、

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \simeq (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)' y, \quad (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)' = \text{const}, \quad (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'' = 0 \quad (8.40)$$

そうすると、式(8.30)及び(8.31)は次のようになる。

$$\frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{\omega}{\eta_0} \right) B_{x1} + i \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)'}{\eta_0} \left(x + \frac{\eta'_0}{\omega} \right) V_{x1} = 0 \quad (8.41)$$

$$\frac{d^2 V_{x1}}{dx^2} - \left[k^2 + \frac{k^2 \rho'_0 g}{\omega^2 \rho_0} + \frac{[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)']^2}{\omega \eta_0 \rho_0} \left(x^2 + \frac{\eta'_0}{\omega} x \right) \right] V_{x1} - i (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)' \frac{x B_{x1}}{\eta_0 \rho_0} = 0 \quad (8.42)$$

この方程式は x に関して適当な変数変換を行い、さらに抵抗層の幅 ε を用いてオーダリングすることによって非斉次のエルミート方程式に帰着することができる。その解から

$\Delta'_{\text{int}}(\omega)$ が導けるが、その詳細についてはここでは紙面の関係上示さず、その特徴を述べることにとどめる（詳細は文献[2, 3]を参照）。固有値のパラメータ依存性については、次節で物理的考察から求めることにする。

$\Delta'_{\text{int}}(\omega)$ の振る舞いは g および η'_0 の値から3つの特徴的な場合に分類できる。まず、 $g \neq 0, \eta'_0 = 0$ の場合である。重力 g によって引き起こされるので、抵抗性 G モードと呼ばれる。次に、 $g = 0, \eta'_0 \neq 0$ の場合で、抵抗の空間的非一様性に起因するものでリップリングモードと呼ばれる。最後は、 $g = \eta'_0 = 0$ の場合であり、テアリングモードに対応する。初めの2つの場合には、 $\bar{g}$ および η'_0 をそれぞれ次説で説明するように選べば Δ'_{int} は

$$-\infty < \Delta'_{\text{int}} < +\infty \quad (8.43)$$

の範囲を動き、 Δ'_{ext} がどんな値であっても、それに対応する Δ'_{int} が存在することになる。これは、モードが抵抗層内部の条件だけで決定されていることを意味する。つまり、モードを駆動する源が抵抗層内部に存在する。これに対し、テアリングモードの場合には、必ず

$$\Delta'_{\text{int}} > 0 \quad (8.44)$$

となる。つまり、 Δ'_{ext} が正の時のみモードが駆動されることになる。従って、外部領域の条件がこのモードを決定しているわけであり、駆動の源は外部領域に存在する。式(8.39)の考察より $\Delta'_{\text{ext}} > 0$ となるためには、 $(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)''$ が必要である。つまり、外部領域の電流分布がこのモードの成長を決定する。

(3) 物理的描像と固有値の導出

1) 駆動力

ここでは、厳密な数学的解法によらず物理的洞察から各モードの成長率と、そのメカニズムを考えることにする。そのために、まず抵抗層の幅 ε と、モードの成長率との関係を調べよう。式(8.30)において、抵抗層の幅程度のところでは、右辺第1項と第2項が同程度の寄与を持つと考えられ

$$i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)V_{x1} \simeq -\eta_0 \frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} \quad (8.45)$$

が得られる。また、抵抗が小さい場合には、抵抗層の幅も狭いと考えられるから、運動方程式において、微分の階数の大きいところが支配的となる。よって式(8.31)より

$$\omega \rho_0 \frac{d^2 V_{x1}}{dx^2} \sim i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} \quad (8.46)$$

を用いてよいだろう。式(8.46)において $d^2 V_{x1}/dx^2 \sim V_{x1}/\varepsilon^2$ とおけば式(8.45)を利用して、次のように ε を評価することができる。

$$\varepsilon \simeq \left[\frac{\omega \eta_0 \ell_0}{k^2 [B'_k]^2} \right]^{1/4} \quad (8.47)$$

ここで、 B_k は $\vec{k}$ 方向の平衡磁場成分であり、 $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = k B_k$ である。式(8.47)は ω と ε の関係式であるから、もう一つ独立な ε と ω の関係式があれば、両者とも決定できることになる。そこで、摂動の運動エネルギーの変化率 $\dot{W}_{KE}$ と不安定性の駆動パワー $\dot{W}_d$ とのつり合いを考えよう。式を簡単にするために、 $(k-y)$ 平面で考えることにする。まず運動のエネルギーの変化率は

$$\dot{W}_{KE} \approx \rho_0 \omega (V_{x1}^2 + V_{k1}^2) \quad (8.48)$$

と書ける。ここで、式(8.27)より

$$|k V_{k1}| \simeq \left| \frac{V_{x1}}{\varepsilon} \right| \quad (8.49)$$

今、 η は小さいと考えているから、 ε も小さく

$$V_{k1} \sim \frac{V_{x1}}{k\varepsilon} \gg V_{x1} \quad (8.50)$$

としてよいだろう。そうすると式(8.48)は次のように書くことができる。

$$\dot{W}_{KE} \approx \frac{\rho_0 \omega V_{x1}^2}{k^2 \varepsilon^2} \quad (8.51)$$

この運動エネルギーと各モードを駆動するパワーとがつり合う、即ち

$$\dot{W}_{KE} = \dot{W}_d \quad (8.52)$$

となる条件を式(8.47)と組み合わせることによって ω 、 ε を評価することができる。

2) 抵抗性Gモード

このモードは重力加速度 $\vec{g}$ によって引き起こされる。抵抗層内部において摂動による重力 $\vec{F}_g$ は

$$\vec{F}_g = \rho_1 \vec{g} = -\frac{V_{x1} \rho'_0}{\omega} \vec{g} \quad (8.53)$$

と表される。これより、 x 方向に対して

$$\rho'_0 g < 0 \quad (8.54)$$

であれば、摂動が変位する向きである $\vec{V}_1$ とこれを駆動する力 $\vec{F}_g$ の向きが同じになり、摂動は成長することが分かる。このとき、式(8.52)の関係式は次のようになる。

$$\frac{\rho_0 \omega V_{x1}^2}{k^2 \varepsilon^2} = -\frac{\rho'_0 g V_{x1}^2}{\omega} \quad (8.55)$$

式(8.47)と組み合わせると、次の成長率と抵抗層幅の表現を得る。

$$\omega = \left(-\frac{\rho'_0}{\rho_0} g \right)^{2/3} \eta_0^{1/3} k^{2/3} \left[\frac{\rho_0}{[B'_k]^2} \right]^{1/3} \quad (8.56)$$

$$\varepsilon = \left(-\frac{\rho'_0}{\rho_0} g \right)^{1/6} \eta_0^{1/3} k^{-1/3} \left[\frac{\rho_0}{[B'_k]^2} \right]^{1/3} \quad (8.57)$$

式(8.56)より、 k が大きい程成長率は大きく（短波長モードの方が成長率が大きく）、 ω は $\eta_0^{1/3}$ に比例する。また、安定であるための条件は、式(8.54)の逆であればよい。即ち、

$$\rho'_0 g > 0 \quad (8.58)$$

なら抵抗性Gモードは安定である。図8.3に抵抗性Gモードの物理機構を示してある。図8.3では矢印は流れを示し、2重矢印は駆動力を表す。 $\vec{g} \cdot \nabla \rho_0 < 0$ の時は摂動の V_{x1} と駆

動力 F_g の向きは同じで摂動は成長し、不安定になる。図8.3から分かるように、 $\nabla \cdot \vec{V}_1 = 0$ を満たす流れは $x = 0$ の上下で循環の向きが逆になっている。このため $x = 0$ 近傍で磁場の圧縮を伴う。もし $\eta = 0 (\sigma = \infty)$ であれば $\nabla(B^2/2)$ の圧力で摂動の成長は抑えられるであろう。また、磁気シアーによる安定化効果も期待できる。従って理想MHDではこのモードが不安定になるためには大きな g を必要とする。しかし、 $\eta \neq 0$ であると、 $x = 0$ の所で B_k は打ち消し合い、 $\nabla(B^2/2)$ の力は解放され、小さな g で不安定になる。また、磁気シアーによる安定化は期待できない。

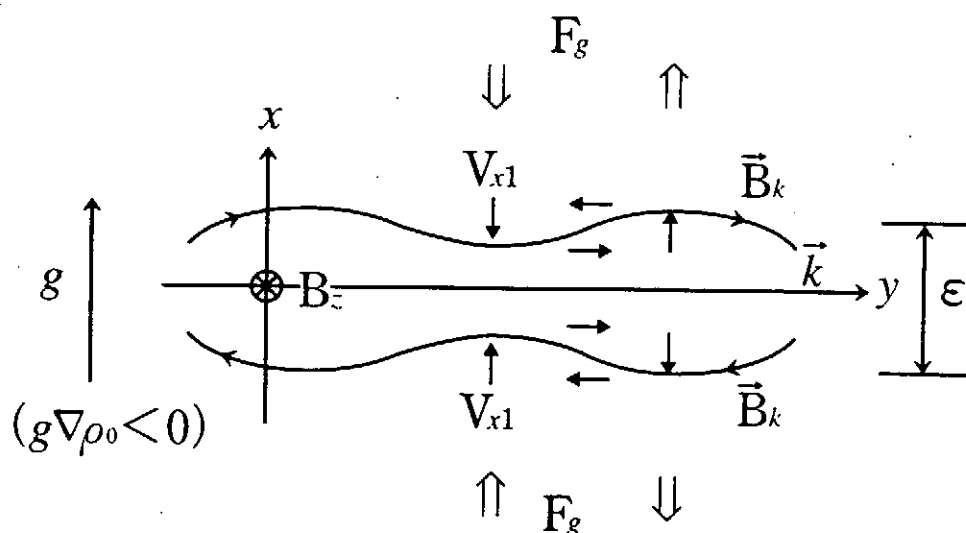


図8.3 抵抗性 G モード

3) リップリングモード

オームの法則(7.3)を線形化した式は

$$\vec{J}_1 = \frac{1}{\eta_0} [\vec{E}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0] - \frac{\eta_1}{\eta_0} \vec{J}_0 \quad (8.59)$$

と書ける。式(8.26)より

$$\eta_1 = \frac{\eta'_0}{\omega} V_{x1} \quad (8.60)$$

であるから、式(8.59)に代入すると、右辺第3項が抵抗の非一様性 $\nabla\eta_0$ による電流の摂動成分を表すことになる。リップリングモードは、抵抗層内部に $\nabla\eta_0$ が存在することによって生じるモードである。この効果をはっきりさせるために式(8.59)において右辺第3項が支配的であると考え

$$\vec{J}_1 \simeq -\frac{\eta_1}{\eta_0} \vec{J}_0 = \frac{\eta'_0 V_{x1}}{\eta_0 \omega} \vec{J}_0 \quad (8.61)$$

とする。そうすると、この電流によるローレンツ力 $\vec{F}_{\text{mag}}$ は

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \vec{J}_1 \times \vec{B}_k = \frac{\eta'_0 V_{x1}}{\eta_0 \omega} \vec{J}_0 \times \vec{B}_k \quad (8.62)$$

で表される。この力による駆動パワーは

$$\dot{W}_d = \vec{V}_1 \cdot \vec{F}_{\text{mag}} = \frac{\eta'_0 V_{x1}^2}{\eta_0 \omega} J_0 B_k \simeq \frac{V_{x1}^2}{\omega} \left(\frac{\eta'_0}{\eta_0} \right) \varepsilon [B'_k]^2 \quad (8.63)$$

で表されるから、式(8.52)を適用すると

$$\frac{\rho_0 \omega V_{x1}^2}{k^2 \varepsilon^2} = \frac{V_{x1}^2}{\omega} \left(\frac{\eta'_0}{\eta_0} \right) \varepsilon [B'_k]^2 \quad (8.64)$$

が得られ、式(8.47)を用いて解くと次の関係式が得られる。

$$\omega = \left(\frac{\eta'_0}{\eta_0} \right)^{4/5} \eta_0^{3/5} k^{2/5} \left[\frac{[B'_k]^2}{\rho_0} \right]^{1/5} \quad (8.65)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\eta'_0}{\eta_0} \right)^{1/5} \eta_0^{2/5} k^{-2/5} \left[\frac{[B'_k]^2}{\rho_0} \right]^{-1/5} \quad (8.66)$$

これよりリップリングモードの場合も k が大きい程 ω が大きくなる短波長モードであることがわかる。また、 ω は $\eta_0^{3/5}$ に比例している。式(8.62)において J_0 は B_k とアンペールの法則によって結びついているとすると $\vec{J}_0 \times \vec{B}_k$ の成分は共鳴面の両側で逆向きとなる。図8.4のように、 k 方向を y 方向にとり、 $x > 0$ の領域で B_k が y 軸の正方向、 $x < 0$ の領域で B_k が y 軸の負の方向を向いているとし、 x 方向に単調に変化しているとする。このとき、 J_0 は z 軸の正の方向を向くから $\vec{J}_0 \times \vec{B}_k$ は $x > 0$ の領域では x 軸の負の方向、 $x < 0$ の領域では x 軸の正方向を向くことになる。従って、式(8.62)において η'_0 が

4) テアリングモード

210

る。よって、

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad \vec{J}_1 = \nabla \times \vec{B}_1 \quad (8.67)$$

より、抵抗層内部での摂動電流の z 方向の成分は

$$J_{z1} = i \left(k B_{x1} - \frac{1}{k} \frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} \right) \approx -i \frac{1}{k} \frac{d^2 B_{x1}}{dx^2} \quad (8.68)$$

で表される。ここで、外部解の要請から B_{x1} の対数微分に Δ'_{ext} のとびがある場合には

$$J_{z1} \approx -i \frac{1}{k} \Delta'_{\text{ext}} \frac{dB_{x1}}{dx} \approx -i \frac{\Delta'_{\text{ext}} B_{x1}}{\varepsilon k} \quad (8.69)$$

と書ける。抵抗層内部では式(8.1)式の右辺において第2項が支配的であると考えたと

$$\omega \vec{B}_1 \simeq -\eta_0 \nabla \times \vec{J}_1 \quad (8.70)$$

であるから、 x 方向だけを取り出し、式(8.69)を代入すると

$$\omega B_{x1} \simeq \frac{\eta_0}{\varepsilon} \Delta'_{\text{ext}} B_{x1} \quad (8.71)$$

が得られる。これより、 ω と ε との関係式

$$\omega = \frac{\eta_0}{\varepsilon} \Delta'_{\text{ext}} \quad (8.72)$$

が得られる。(8.72)と(8.47)を組み合わせると、テアリングモードに対する成長率および抵抗層の幅が次のように与えられる。

$$\omega = \eta_0^{3/5} (\Delta'_{\text{ext}})^{4/5} k^{2/5} \left[\frac{[B'_k]^2}{\rho_0} \right]^{1/5} \quad (8.73)$$

$$\varepsilon = \eta_0^{2/5} (\Delta'_{\text{ext}})^{1/5} k^{-2/5} \left[\frac{[B'_k]^2}{\rho_0} \right]^{-1/5} \quad (8.74)$$

式(8.72)から明らかなように、このモードは $\Delta'_{\text{ext}} > 0$ の場合のみ成長する。言いかえると、外部領域の磁場構造によって駆動されるわけである。また、式(8.69)で関係づけられている摂動磁場と摂動電流によって磁力線のつながりかえが生じ、共鳴面近傍には、磁気島

構造が現れる。図8.5にテアリングモードの構造を示す。矢印は流れの方向で、点線矢印は摂動磁場 B_{x1} の方向を示し、また摂動電流 J_{z1} の方向も示している。

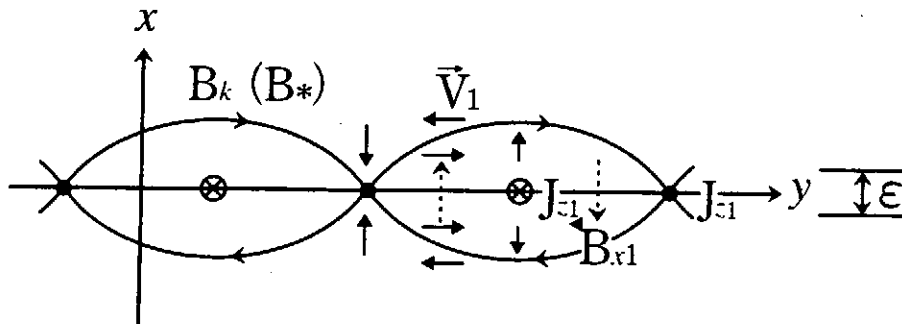


図8.5 テアリングモード

理想MHDではオームの式は $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ であり、磁場はプラズマの流れに凍りついており、両者は同じように運動する。この凍りつきを破り、プラズマが磁場を横切ってすり抜けるためにはオームの式は $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \neq 0$ でなければならない。従って抵抗だけでなくオームの式を導出する過程で無視したイオンや電子の運動（慣性）、粘性等が抵抗性MHD不安定性において重要な役割を果たす可能性がある。プラズマが高温になり、より衝突頻度が減ると抵抗層（あるいはテアリング層）は非常に狭くなり、オームの式の導出で無視したこれらの項がしばしば重要になる。抵抗 η は式(8.20)に従うと仮定した。 $\eta \propto T_e^{-3/2}$ であるので、これは電子のエネルギーに対する断熱の式と同じである。磁力線のつなぎかえが起こり、磁気面が破られるとプラズマは、磁力線方向に圧力が一定になるよう磁力線に沿って速やかに運動し、新しい磁場構造をつくろうとする。しかし、磁力線方向の熱伝導度 $\kappa_{||}$ は衝突頻度が小さくなると非常に大きくなり、磁力線方向の熱拡散は短い時間尺度で起こり、そのような時は $\kappa_{||}$ の効果が無視できないであろう。この他圧縮性 ($\nabla \cdot \vec{V} \neq 0$) の効果等も含めて、文献[2]では、これらの無視した項を吟味しており、また、現在でもこれらの項がどのような役割を果たすのかどうか盛んに研究されている。こ

れは磁力線のつなぎかえ、あるいは磁気再結合 (magnetic reconnection) という現象が核融合プラズマだけでなく宇宙プラズマ等においても本質的な物理過程の一つであるからである。

(4) テアリングモードと磁気島

テアリングモードが不安定になると磁気島 (magnetic island) を生成する。ここでは White の文献 [4] に沿って解析的に扱える例でテアリングモードと磁気島について考察する。平衡磁場は、式 (8.17) で与えられるとする。ただし、 $\rho_0 = \text{const}$, $\eta_0 = \text{const}$ と仮定する。さらに、 $B_{z0} = \text{const}$ と仮定し、 B_{y0} を次のように表しておく。

$$B_{y0}(x) = \bar{B}F(x) \quad (8.75)$$

ここで $\bar{B} = \text{const}$ で $F(x > 0) > 0$, $F(x < 0) < 0$, $F(x = 0) = 0$ とする。また、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $F(x) \rightarrow \pm 1$ とする。電流層の厚さを次のように定義する。

$$a^{-1} = \frac{1}{\bar{B}} \frac{dB_{y0}}{dx} = F'(x) \quad (8.76)$$

プライムは x に関する微分である ($' \equiv \frac{d}{dx}$)。 a は磁気シアーの特性長でもある。

磁束関数 ψ を導入する。トーラスにおける磁気面のラベルと同様、 ψ は $\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \psi = 0$ を満たすものとする。 $\bar{\mathbf{B}}$ は次のように表せるとする。

$$\bar{\mathbf{B}} = \nabla \psi \times \bar{\mathbf{e}}_z + B_z \bar{\mathbf{e}}_z \quad (8.77)$$

ここで $\bar{\mathbf{e}}_z$ は z 方向の単位ベクトルである。この $\bar{\mathbf{B}}$ は $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$ を満たす。また $\bar{\mathbf{B}}$ は平衡の $\bar{\mathbf{B}}_0$ と摂動の $\tilde{\mathbf{B}}$ の両方を含む。すなわち ψ は平衡の ψ_0 と摂動の ψ_1 を含む。 $B_z \gg |\nabla \psi \times \bar{\mathbf{e}}_z|$ ($B_{z0} \gg B_{y0}$) と仮定する。このようなとき B_z の変動分は考えず常に $B_z = B_{z0} = \text{const}$ として良いであろう。従って、今の平衡配位では ψ_0 は x のみの関数、 ψ_1 は x と y の関数である。 ($\psi_0 = \psi_0(x)$, $\psi_1 = \psi_1(x, y)$) アンペアの式 $\bar{\mathbf{J}} = \nabla \times \bar{\mathbf{B}}$ より次式が得られる。

$$\nabla^2 \psi = -J_z \quad (8.78)$$

が得られる。オームの式 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$ をファラデーの式 $\partial \vec{B} / \partial t = -\nabla \times \vec{E}$ に代入することにより

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \psi = \eta \nabla^2 \psi + E \quad (8.79)$$

E は積分定数で、外部から印加される電場を表しているが、以下 $E = 0$ とする。式(8.79)は、磁束関数がプラズマ流 $\vec{V}$ で運ばれる事(理想MHD)と、磁束関数、すなわち磁場の拡散を表している。プラズマ流は非圧縮性とし($\nabla \cdot \vec{V} = 0$)、 $\vec{V}$ は流れ関数(stream function) ϕ を使って

$$\vec{V} = \nabla \phi \times \vec{e}_z \quad (8.80)$$

と表す。 B_z が大きいので z 方向の変動は無いと考え、 $\vec{V}$ は $x-y$ 平面上だけの運動と考えてよいだろう。運動方程式に式(8.80)を用い、運動方程式の rotation を取ると

$$\rho \frac{d}{dt} (\nabla^2 \phi) = -\vec{e}_z \cdot [\nabla \psi \times \nabla (\nabla^2 \psi)] \quad (8.81)$$

が得られる。 $\vec{V}$ は一次の量なので、線形安定性を考える限り式(8.81)の d/dt は $\partial/\partial t$ に置き換えてよい。平衡状態は

$$\left. \begin{aligned} \psi'_0(x) &= -B_{y0}(x) = -\bar{B}F(x) \\ \psi''_0(x) &= -J_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (8.82)$$

である。但し、 $' \equiv \frac{d}{dx}$ である。

式(8.79)と式(8.81)を線形化し、今考えている系の安定性を考える。 ψ は平衡量(零次)と一次の量の和として

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi_1(x) \cos ky \quad (8.83)$$

と書いてみる。すると、式(8.79)と式(8.81)の線形化方程式から ϕ は

$$\phi(x, y) = \frac{\omega}{k\bar{B}} \phi_1(x) \sin ky \quad (8.84)$$

と表せる事がわかる。但し ψ_1 と ϕ_1 の時間変化は $\exp(\omega t)$ とした。 ω は成長率である。

$\psi = \text{const}$ の等高線を描くと図8.6のようになる。これはトーラスでの磁気面のポロイダル断面に相当する。

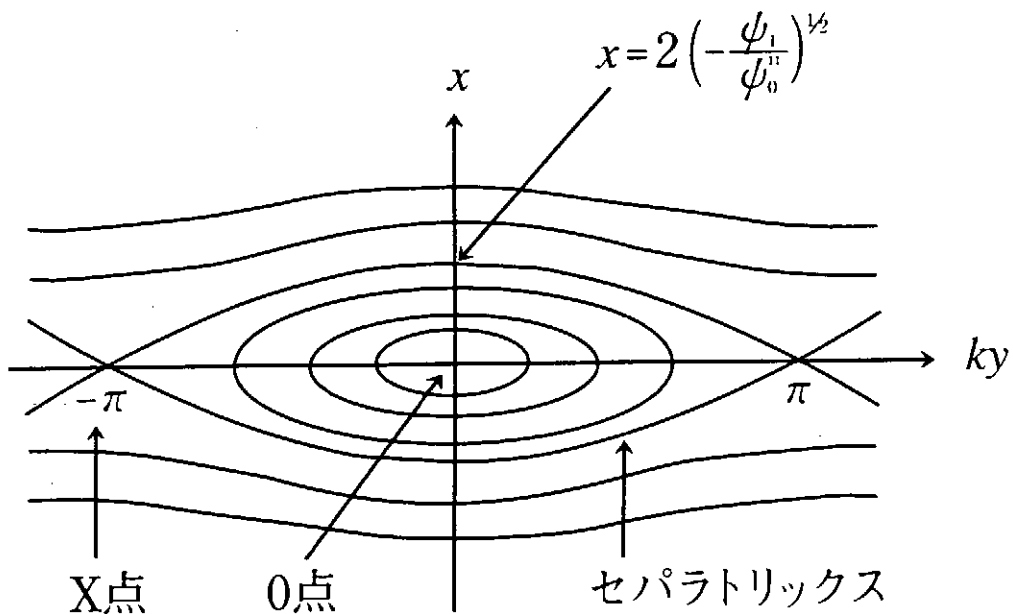


図8.6 磁気島

図8.6からわかるように、 ψ_1 は $x = 0$ に局所化しているとしているので $x = 0$ から遠く離れた所では $\psi_1 \simeq 0$ で平衡の配位に近い。 $x = 0$ の特異点近くで $\psi(x, y) = \text{const}$ は大きくゆがみ、 $ky = \pm\pi$ のところで交鎖している。このように交鎖している ψ の等高線をセパトラックス (separatrix) という。セパトラックスでは $\partial\psi/\partial x = 0$ 、 $\partial\psi/\partial y = 0$ である。セパトラックスの外側は $\psi = \text{const}$ の等高線は開いているが、内側では閉じている。閉じている部分を磁気島 (magnetic island) という。磁気島は y 方向にチェーンのように連なっている。 $ky = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ となる点 (交鎖点) を X点、 $ky = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$ の点 (磁気島の中心点) を O点という。

もし、モードが成長するなら ($\omega > 0$) この磁気島の幅は時間とともに大きくなっていく。磁気島の幅 W を考えてみよう。セパトラックスの ψ の値を ψ_s とすると、 $ky = 0$ の点で

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi_1(x) = \psi_s \quad (8.85)$$

$$(x = \pm \frac{W}{2}, y = 0)$$

であり、磁気島の幅 W が充分小さいとして式(8.85)を $x = 0$ の周りに展開すると

$$\psi_s = \psi_0(0) + x\psi'_0 + \frac{x^2}{2}\psi''_0 + \psi_1(0) + x\psi'_1 + \frac{x^2}{2}\psi''_1 \quad (8.86)$$

となるが、 ψ'_1 、 ψ''_1 は高次の量であるので無視する。一方、点 $(x = 0, ky = \pm\pi)$ で評価すると $\psi_s = \psi_0(0) - \psi_1(0)$ であるので

$$x\psi'_0 + \frac{x^2}{2}\psi''_0 + 2\psi_1 = 0 \quad (8.87)$$

が成立する。 $x = \pm W/2$ で式(8.87)を評価することにより磁気島の幅 W が次のように求まる。

$$W = 4 \left(-\frac{\psi_1}{\psi''_0} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{B_{x1}}{kB'_{y0}} \right)^{1/2} \quad (8.88)$$

式(8.79)と式(8.81)に式(8.83)、(8.84)を代入すると

$$\psi_1(x) - F(x)\phi_1(x) = \frac{1}{\omega\tau_R}[\psi''_1(x) - k^2\psi_1(x)] \quad (8.89)$$

$$-\omega^2\tau_A^2[\phi''_1(x) - k^2\phi_1(x)] = F(x)[\psi''_1(x) - k^2\psi_1(x)] - F''(x)\psi_1(x) \quad (8.90)$$

が得られる。この2つの式を外部領域と内部領域で解いて $\Delta'_{\text{ext}} = \Delta'_{\text{int}}$ (式(8.35)の接合条件) から固有値 (成長率) を求めてみよう。解析的な解を得るため $F(x)$ として次の形のものを考える。

$$F(x) = \tanh x \quad (8.91)$$

外部領域では式(8.89)、(8.90)は次のように近似できる。

$$\psi_1(x) = \phi_1(x)F(x) \quad (8.92)$$

$$F(x)[\psi''_1(x) - k^2\psi_1(x)] = F''(x)\psi_1(x) \quad (8.93)$$

F が式(8.91)で与えられると、式(8.92)、(8.93)の解は

$$\psi_1(x) = e^{\mp kx} \left[1 \pm \frac{1}{k} \tanh x \right] \quad (8.94)$$

で与えられる。符号は上が $x > 0$ 、下が $x < 0$ の領域に相当する。 $x = 0$ における微分の不連続性は

$$\Delta'_{\text{ext}} = \frac{\psi'_1(+0) - \psi'_1(-0)}{\psi_1(0)} = 2 \left[\frac{1}{ka} - ka \right] \quad (8.95)$$

で与えられる。明らかに $ka < 1$ の時 $\Delta'_{\text{ext}} > 0$ で、 $ka > 1$ の時 $\Delta'_{\text{ext}} < 0$ となる。前節で明らかにされたように、 $\Delta'_{\text{ext}} > 0$ の時、テアリングモードは不安定になる。すなわち長波長モード ($ka < 1$) が不安定になる。

抵抗 η は $x = 0$ の極く近傍のみで効く。このような領域を内部領域、あるいは抵抗層 (resistive layer) 又はテアリング層という。抵抗層は $x = -x_T$ から $x = +x_T$ に存在するとする ($\varepsilon = 2x_T$)。 ε は狭く $x_T \ll a$ である (a は電流層の厚さ、あるいは磁気シアー長)。 x_T の大きさは後で評価する。 x_T は充分小さく $x = 0$ の近傍のみ考えればよいので式(8.91)は $F(x) \simeq x$ と近似できる。内部領域の Δ'_{int} を計算するためには、 ψ'_1 の変動は考えねばならないが、非常に狭い領域の抵抗層では、 $\psi_1(x) = \psi_1(0) = \text{const}$ と仮定する (constant ψ 近似 [2])。 $\psi''_1 \gg k^2 \psi_1$ 、 $\phi''_1 \gg k^2 \phi_1$ と仮定することにより式(8.89)、(8.90)から

$$\psi_1(0) - x\phi_1(x) = \psi''_1/(\gamma\tau_R) \quad (8.96)$$

$$\omega^2 \tau_A^2 \phi''_1(x) = -x\psi''_1(x) \quad (8.97)$$

が得られる。これより

$$\Delta'_{\text{int}} = -\frac{\omega^2 \tau_A^2}{\psi_1(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi''_1(x)}{x} dx \quad (8.98)$$

が得られる。但し、積分の上下限 $x = \pm x_T$ を $\pm\infty$ で置き換えた。変数変換

$$\left. \begin{aligned} x &= (\omega\tau_A^2/\tau_D)^{1/4} z \\ \phi_1 &= -(\tau_D/\omega\tau_A^2)^{1/4} \psi_1(0) \chi(z) \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

をすることにより Δ'_{int} は次のように与えられる。

$$\Delta'_{\text{int}} = \omega^{5/4} \tau_D^{3/4} \tau_A^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} \chi'' \quad (8.100)$$

z による積分は正である事が解っているので [4]、 $\Delta'_{\text{int}} = \Delta'_{\text{ext}} > 0$ が前節の結果どおり $\omega > 0$ を与える。 ω は次のように与えられる。

$$\omega \propto \tau_D^{-3/5} \tau_A^{-2/5} (\Delta'_{\text{ext}})^{4/5} \quad (8.101)$$

これより

$$\left. \begin{aligned} \omega \tau_D &\propto S^{2/5} \gg 1 \\ \omega \tau_A &\propto S^{-3/5} \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.102)$$

が成立し、抵抗性 MHD モード（今の場合テアリングモード）の成長時間は τ_D と τ_A の中間にあるという最初の仮定（式 (8.14)）は正当化されたことになる。式 (8.100) の積分は $z \leq 2$ の部分で殆ど決まる。従って $z = 2$ を抵抗層の厚さと考えてよいだろう。すなわち

$$x_T = 2 \left(\frac{\omega \tau_A^2}{\tau_R} \right)^{1/4} a \ll a \quad (8.103)$$

これは抵抗層は電流層（磁気シアー長）よりずっと小さい事を示している。また $x_T/a \propto S^{-2/5}$ であり、 $S \propto \eta_0^{-1}$ である事を考えるとこの結果は式 (8.74) と一致する。この結果は、高温プラズマ程（ S は大きいので）抵抗層は小さくなる事を意味している。抵抗層が充分小さくイオンのラーモア半径程度になると運動論的効果が重要となり MHD の枠内だけで議論できなくなる。

(5) テアリングモードの非線形発展

テアリングモードが不安定になると、ある有理面近傍で磁力線のつなぎかえ（再結合）が起こり磁気島が生成される。テアリングモードが不安定になるかどうかは、（有理面近傍の）抵抗層から離れた所の電流分布によって決まる。テアリングモードが不安定になる過程では、磁気エネルギーを運動エネルギーに変換する。この逆の過程、つまり、運動エネルギーを磁場エネルギーに変換する過程は、磁場を生み出すのでダイナモ現象と呼ばれ

る。これらの現象は磁力線の再結合を通して磁気面のトポロジーを変え、また、磁気面を破壊したりするのでトーラスにおけるプラズマの閉じ込めにとっては重要な現象である。磁力線のつなぎかえ、あるいは再結合を引き起こすのはテアリングモードだけではないが、トカマクではテアリングモードの非線形発展が閉じ込められているプラズマの崩壊 (disruption) をもたらす要因の一つになると考えられている。

テアリングモードの非線形発展を簡単に考察してみよう [5]。図 8.5 において 2 次の摂動 $V_{y1}B_{x1}$ は $E_z^{(2)}$ を誘起し、これが z 方向に 2 次の電流 $J_z^{(2)}$ を生成する。

$$J_z^{(2)} \simeq \frac{1}{\eta_0} V_{y1} B_{x1} \quad (8.104)$$

これは $\vec{J} \times \vec{B}$ により 3 次の力を生み出す。この力の大きさは $J_z^{(2)} B_{x1}$ で図 8.5 からわかるようにこの力の向きは常に V_{y1} と逆になっている。従って、3 次の力はテアリングモードを不安定にする力と逆向きに働き、テアリングモードの発展を抑えようとする。それぞれの力により為される仕事率が釣り合うのは

$$V_{y1} J_z^{(2)} B_{x1} \simeq V_{x1} J_{z1} B_{y0} \quad (8.105)$$

の時であろう。式 (8.69)、(8.27)、(8.72) から J_{z1}, V_{x1}, ω の大きさはおよそ

$$\left. \begin{aligned} J_{z1} &\simeq \frac{\Delta' B_{x1}}{k\varepsilon} \\ kV_{y1} &\simeq \frac{V_{x1}}{\varepsilon} \\ \omega &\simeq \frac{\eta_0 \Delta'}{\varepsilon} \simeq kV_{y1} \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

と評価できる。但し $B_{y0} \simeq B'_{y0}\varepsilon$ を近似した。式 (8.105) に式 (8.104)、(8.106) を用いると抵抗層は

$$\varepsilon \simeq \left(\frac{B_{x1}}{kB'_{y0}} \right)^{1/2} = \frac{W}{4} \quad (8.107)$$

となる。 W は式 (8.88) で与えられる磁気島の幅である。これは、テアリングモードが不安定になると磁気島が生成され、その幅 W は $\exp(\omega t)$ に従って大きくなっていくが、 W が抵抗層の厚さ程度にまで発展すると非線形項が効き始め、その成長は抑えられる事を意

味する。磁気島は成長の過程において $\sin ky$ の構造はそのまま保ち、高次の項は重要でない。式(8.107)より

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} = \frac{k B'_{y0}}{z} W \frac{dW}{dt} \quad (8.108)$$

一方、式(8.106)の第1式の ε を W で置き換え、 B_{x1} に対して式(8.107)を用いると

$$J_{z1} \simeq \frac{\Delta' B_{x1}}{k W} = \frac{\Delta'}{16} B'_{y0} W \quad (8.109)$$

となる。従ってファラデーの式より

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} \simeq k \eta_0 J_{z1} \simeq \eta_0 \Delta' \frac{k B'_{y0}}{16} W \quad (8.110)$$

と評価される。式(8.108)と(8.109)から W の発展は、

$$\frac{dW}{dt} \propto \eta_0 \Delta' \quad (8.111)$$

で与えられる。すなわち W は t に比例してゆっくりと大きくなっていく。磁気島の発展のこの段階を Rutherford 領域という[6]。すなわち、テアリングモードは $\exp(\omega t)$ で成長した後、速やかに Rutherford 領域に入り、時刻 t に線形に比例する形で成長していく。最終的には磁気島の大きさは

$$\frac{dW}{dt} \sim \eta [\Delta'(W) - \alpha W] \quad (8.112)$$

に従って飽和する[4,5,7]。 $\Delta'(W)$ は磁気島の両端における B_x の微分の差で、式(8.34)と同様に定義される。 α は詳細な物理過程で決まる数値因子である。

円筒プラズマ、あるいはトカマク・プラズマを考える。テアリングモードは有理面 $q = m/n$ 上で不安定になる。ここで、 q は安全係数、 m, n はそれぞれ摂動のポロイダル、トロイダルモード数である。テアリングモードが不安定になるとポロイダル方向に m 個の磁気島をつくる。ポロイダル断面における m 個の磁気島構造はトロイダル方向に進むとともに回転し、トーラス方向一周する間に n 回、同じ位置にもどる。重要な事は、 $m = 1$ のテアリングモードと、 $m \geq 2$ のテアリングモードとは性質を全く異にする事で

ある。 $m \geq 2$ のテアリングモードは、不安定になると前述のように $\exp(\omega t)$ に従って成長する線形領域は狭く、すぐ Rutherford 領域に入り t とともに磁気島が成長し、やがて別の効果が効いて飽和する。飽和した時の磁気島の幅は、プラズマ半径の、例えば 1/10 程度になる。 $m \geq 2$ のテアリングモードでは m の小さいもの程成長率が大きい。もし、 $m = 2/n = 1 (q = 2)$ のテアリングモードが不安定になり、他の m, n のモードも別の有理面上で不安定になるとする。この時、異なる有理面上の磁気島が成長し、互いの磁気島が重なり合うと磁場はストキャスティックになり磁気面が破壊され、閉じ込められていたプラズマは崩壊してしまう事がある。これをプラズマの主崩壊 (major disruption) という。最近ではわずかな誤差磁場や、後述するブートストラップ電流が主崩壊現象の引き金になる可能性も指摘されている。

$m = 1$ のテアリングモードの不安定時間発展は $m \geq 2$ のものと全く異なる。 $m = 1$ のテアリングモードには Rutherford 領域は無く、 $\exp(\omega t)$ のように磁気島の幅は大きく成長し続け、最後は $q = 1$ の有理面内は始状態とトポロジカルに同じ円形磁気面を形成し、かつ、始状態の $q = 1$ 面より内側で電流分布を平坦化 ($q = 1$) して成長は終わる。カドムチェフはこの考えに基づいてトカマクでの内部崩壊現象 (minor or internal disruption) を説明しようと試みた。これをカドムチェフ・モデルという [8]。このモデルでは崩壊の特徴的時間は当然抵抗性 MHD 時間尺度の τ_R であるが、トカマクの実験は、この内部崩壊現象の時間尺度は τ_H 程度でずい分速い現象である事を示している。カドムチェフ・モデルを出発点として内部崩壊現象は、理論や計算機シミュレーションにより盛んに研究されてきたが、まだ完全に理解されていないと思われる。

参考文献

- [1] A. Jeffrey and T. Taniuchi: *Magnetohydrodynamic Stability and Thermonuclear Confinement*, Academic Press, New York and London, 1996.
- [2] H. Furth, J. Killen, and M. Rosenbluth: *Phys. Fluids* 6 (1963) 459.

- [3] R.B. Paris: *Lectures on Resistive Instabilities in MHD*, (EUR-CEA-FC-1130, 1982).
- [4] R.B. White: *Resistive Instabilities and Field Line Reconnection*, Handbook of Plasma Physics, vol.1, p.611, North-Holland 1983.
- [5] G. Bateman: *MHD Instabilities* (MIT Press, 1987).
- [6] P.H. Rutherford: Phys. Fluids 16 (1973) 1903.
- [7] R.B. White, D.A. Monticello, M.N. Rosenbluth, and B.V. Waddell: Phys. Fluids 20 (1977) 800.
- [8] B.B. Kadomtsev: Sov. J. Plasma Phys. 1 (1975) 389.

§9 トーラスと粒子軌道

(1) トーラス性

図9.1で示される軸対称トカマクを考える。円筒座標系 (R, ϕ, Z) も (r, θ, φ) も右手系にとる。対称軸 Z と点 O との距離をプラズマ大半径 R_0 と呼ぶ。ここで、磁気面のポロイダル断面は円形であるとする。また磁気面は磁気軸を縮退点とした入れ子状をなしているとし、さらに、磁気面のポロイダル断面は点 O を中心とする同心円と仮定する。すなわち、 $r = \text{const}$ が磁気面を表す。一番外の円がプラズマ半径 $r = a_p$ である。このような仮定は低ベータ、かつ、大アスペクト比トカマクの時のみ許されるだろう。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{n(T_e + T_i)}{B^2} \ll 1 \\ A_p &= \frac{R_0}{a_p} \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

ここで n はプラズマ密度、 T_e と T_i はそれぞれ電子及びイオン温度、 B は磁場強度である。平衡状態にある軸対称トカマクには、 θ 方向のポロイダル磁場と、 ϕ 方向のトロイダル磁場しかない。従って磁場 $\vec{B}$ は

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_t \quad (9.2)$$

であり、 $\vec{B}$ は $(\vec{B}_p, \vec{B}_t)$ も) 磁気面上にある。トカマクでは安全係数 q は1程度の量である。すなわち、安全係数は、今の場合

$$q = \frac{r B_t}{R B_p} \quad (9.3)$$

で与えられ、 $q \simeq O(1)$ であり、また

$$\varepsilon_t = \frac{1}{A} = \frac{r}{R} \simeq \frac{r}{R_0} \ll 1 \quad (9.4)$$

であるので、

$$\frac{B_p}{B_t} \ll 1 \quad (9.5)$$

である。ポロイダル磁場の大きさ B_p がトロイダル磁場の大きさ B_t よりずっと小さいのはトカマクの特徴である。この関係は、ヘリカル系でも同様であるが、RFP(Reversed Field Pinch) では B_p と B_t は同程度である。座標系 (R, φ, Z) と座標系 (r, θ, ϕ) との関係は

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + r \cos \theta \\ Z &= r \sin \theta \\ \phi &= -\varphi \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

である。

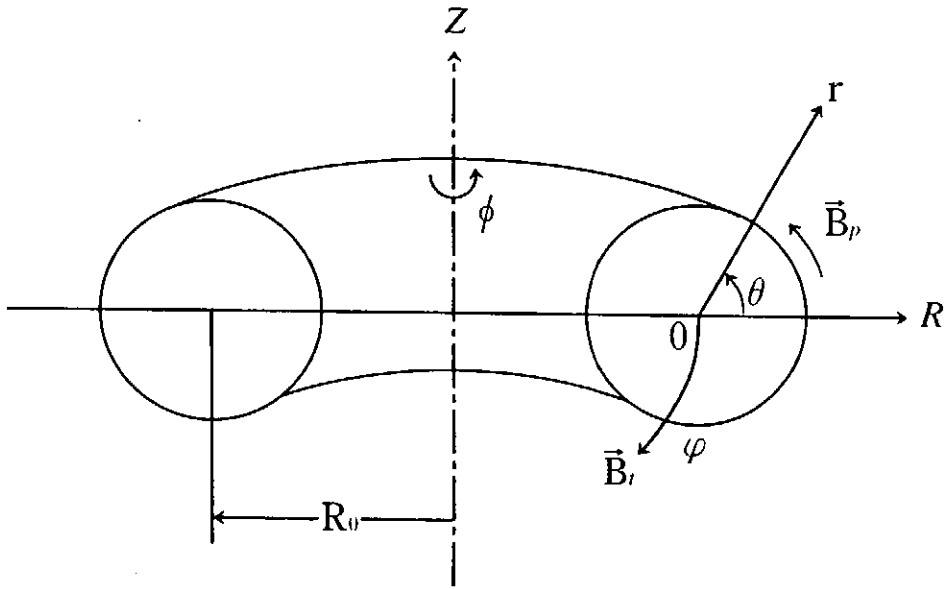


図9-1 軸対称トカマク

$|\vec{B}_p| \ll |\vec{B}_t|$ であるので、 $\vec{B}$ の大きさ B は

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_t^2 + B_p^2} \simeq B_t = |\vec{B}_t| \quad (9.7)$$

である。低ベータプラズマであるので、トロイダル磁場は外部トロイダルコイル電流でのみ生成されていると考えてよい。従って

$$\begin{aligned} B \sim B_t &= \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0 R_0}{R_0 + r \cos \theta} \simeq B_0 (1 - \varepsilon_t \cos \theta) \\ \varepsilon_t &\equiv \frac{r}{R_0} \end{aligned} \quad (9.8)$$

である。 B が R に逆比例することをトーラス性 (toroidicity) という。 B はトーラス外側 ($\theta = 0$) で最小となり、トーラス内側 ($\theta = \pi$) で最大となり、磁場 $\vec{B}$ に沿って B はその大きさが変化しミラー場を作る。ミラー比 R_m は、 $\epsilon_t \ll 1$ であるのでおおよそ

$$R_m = \frac{B_{\max}}{B_{\min}} = \frac{1 + \epsilon_t}{1 - \epsilon_t} \simeq 1 + 2\epsilon_t \quad (9.9)$$

となる。図9.2に磁場 $\vec{B}$ に沿った磁場強度 $B = |\vec{B}|$ の変化を示す。

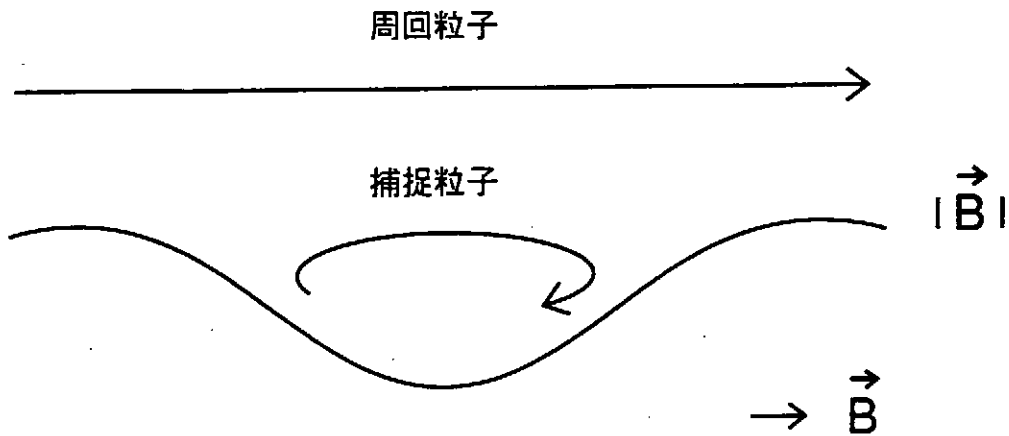


図9.2 磁場強度の変化

(2) トカマクでの粒子軌道

磁場閉じ込め方式の核融合装置において、プラズマ中を荷電粒子がどのように運動するかという事は重要な問題である。特にプラズマが高温になればなる程、あるいは考えている荷電粒子のエネルギーが大きい程、単一荷電粒子の運動は重要になる。これは高エネルギー粒子は、他の粒子との衝突が少なく、磁場構造を直接感じ磁場配位に強く依存する運動を行うからである。ここではトカマク中の単一荷電粒子の運動について考える。簡単のためトカマクは低ベータ・大アスペクト比のトカマクとする。このような時には、粒子の運動は解析的に解くことができ物理的洞察が容易だからである。

一つの粒子の速度を $\vec{v}$ 、磁力線方向の速度を $v_{\parallel}$ 、垂直方向を $\vec{v}_{\perp}$ とする ($\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$)。磁力線に沿って磁場はミラー場を形成しており、そのミラー比は式(9.9)で与えられる。従って、§2の議論より、もし、 $(v_{\parallel}/v)^2 < 2\varepsilon_t$ であればその粒子はミラー場に捉えられ、そうでなければ、磁力線に沿ってトーラスを周回できる。つまり粒子軌道は

$$\left. \begin{array}{ll} \left(\frac{v_{\parallel}}{v}\right)^2 < 2\varepsilon_t & \text{捕捉粒子 (バナナ粒子)} \\ \left(\frac{v_{\parallel}}{v}\right)^2 > 2\varepsilon_t & \text{非捕捉粒子 (周回粒子)} \end{array} \right\} \quad (9.10)$$

の2つに分類される。捕捉粒子はその軌道をポロイダル面に投影するとバナナのような形になるので一般にバナナ粒子と呼ばれる。この節では主として論文[1]に沿って、低ベータ・大アスペクト比トカマクでの粒子軌道について考える。

1) ドリフト面

イオン・ラーモア半径はプラズマの特性長よりずっと短いと仮定する。つまり、

$$r_{Li}/L \ll 1 \quad (9.11)$$

r_{Li} はイオン・ラーモア半径で、 L はプラズマ半径、密度勾配長、温度勾配長、磁場の曲率半径、磁場強度変化長等の特徴的長さを表す。トカマクやヘリカル系では式(9.11)の条件は充分満たされており、磁気モーメント μ は粒子の運動中精度良く保存される。このような時は §2 で述べたように粒子の運動は案内中心 (guiding center) の軌道で良く記述できる。案内中心の方程式は低ベータプラズマに対して次のように与えられる。

$$\vec{v}_G = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + m v_{\parallel}^2 \right) \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3} \quad (9.12)$$

ここで $\vec{E} = -\nabla\Phi = 0$ と仮定する。ただし Φ は静電ポテンシャルである。この仮定は $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトが無い事を意味する。案内中心の式(9.12)は次のように書ける。

$$\vec{v}_G = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (9.13)$$

$\omega_c = qB/m$ はサイクロトロン周波数で符号を含む ($q_e = -e < 0$, $q_i = Z_i e > 0$)。

§2の第(3)節で述べたように、 $B_p = 0$ のトロイダル磁場のみの単純トーラスでは、プラズマイオンと電子はトロイダルドリフト

$$v_d = \frac{v_\perp^2/2 + v_\parallel^2}{\omega_c R} \quad (9.14)$$

の大きさで Z 方向 (図9.1では、イオンは $Z < 0$ の方向、電子は $Z > 0$ の方向) にドリフトする。ポロイダル磁場の存在により磁気面が形成され、粒子は殆ど磁力線に沿って走るので、一つの粒子はある面を形成するだろう。これをドリフト面という。軸対称系トーラスでは、このドリフト面のポロイダル断面はトポロジカルには閉じた円になる。ある磁気面上から出発した粒子の形成するドリフト面は、トロイダルドリフトの存在のため、その磁気面から少しずれる。 $A = R_0/r \rightarrow \infty$ の円筒トーラスでは $v_d = 0$ でドリフト面と磁気面は一致するが、有限のアスペクト比のトカマクでは $v_d \neq 0$ 、すなわち、トーラス性 (toroidicity) のため、ドリフト面は磁気面からずれるのである。

案内中心の式(9.13)の r -成分は

$$\frac{dr}{dt} = -v_d \sin \theta \quad (9.15)$$

となる。 θ -成分及び ϕ -成分は、それぞれ、

$$r \frac{d\theta}{dt} = v_\parallel \frac{B_\theta}{B} - v_d \cos \theta \quad (9.16)$$

$$R \frac{d\phi}{dt} = v_\parallel \frac{B_\phi}{B} + v_d \frac{B_\theta}{B} \cos \theta \simeq v_\parallel \quad (9.17)$$

となる。ただし、 $B_\theta = B_p$, $B_\phi = B_t \simeq B$ である。

2) 周回粒子

トカマクにおける単一荷電粒子の案内中心軌道は周回粒子 (非捕捉粒子) とバナナ粒子 (捕捉粒子) の2つに分類される。単一粒子の運動が、粒子間衝突や揺動等に一切影響を受けないと、周回粒子は周回粒子のまま、バナナ粒子はバナナ粒子のまま軌道を描き続ける。今はこのような状態を考えている。周回粒子もバナナ粒子もドリフト面を形成する。

しかしある磁気面上から出発した粒子の形成するドリフト面はその磁気面とは一致せず
にずれる。これはトーラス性のためトロイダルドリフトが有限 ($v_d \neq 0$) であるためであ
る。周回粒子のドリフト面の磁気面からのずれを計算しよう。軸対称トーラスを考えてい
るのでドリフト面のポロイダル断面は閉じた形をしているので、ポロイダル断面のみ考え
ればよい。粒子の案内中心の軌道の r -成分と θ -成分は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v_d \sin \theta \\ r \frac{d\theta}{dt} &= -v_d \cos \theta + v_{\parallel} \frac{B_p}{B} \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

である。ポロイダル断面での粒子の速度の R -成分と Z -成分は式 (9.18) から

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -v_{\parallel} \frac{B_p}{B} \sin \theta \\ v_Z &= -v_d + v_{\parallel} \frac{B_p}{B} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

となる。次の回転周波数 ω を定義する。

$$\omega = v_{\parallel} \frac{B_p}{rB} = \frac{v_{\parallel}}{qR} \quad (9.20)$$

$r\omega$ は粒子のポロイダル速度であるので、 ω はポロイダル方向を一周する角周波数である。
あるいは、 qR はトーラスの外側と内側を結ぶ磁力線の長さ (連結長, connection length)
であるので、 ω^{-1} は粒子がこの連結長を走る時間ともいえる。今、周回粒子を考えてい
るので $v_{\parallel} \gg v_{\perp}$ で、ある粒子に対してはその運動中は $v_{\parallel} = \text{const}$ とみなしてよい。また、
 qR も一定とみなす。例えばプラズマ電流密度の分布が一様であるとする $B_p \propto r$ であ
るので $qR = \text{const}$ になる。ここでは $v_{\parallel} = \text{const}$, $qR = \text{const}$ とし、 $\omega = \text{const}$ と仮定す
る。図9.1の点Oを原点とし (X, Y) 座標を考える ($X = R - R_0$, $Y = Z$)。式 (9.19) と式
(9.20) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -r\omega \sin \theta = -\omega Z \\ \frac{dY}{dt} &= -v_d + r\omega \cos \theta = \omega X - v_d \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

が得られる。この式から容易に次の関係が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(X - \frac{v_d}{\omega} \right)^2 + Z^2 \right\} = 0 \quad (9.22)$$

つまり、

$$\left(X - \frac{v_d}{\omega}\right)^2 + Z^2 = \text{const} \quad (9.23)$$

が成立する。ここで $\omega = \text{const}$ が仮定されている。この式は周回粒子の軌道のポロイダル断面への斜影された軌跡を表している。今の低ベータ・アスペクト比トカマク近似では、ドリフト面（のポロイダル断面）は v_d/ω だけ偏心した円であることを意味している。 $v_d = 0$ なら式(9.23)は磁気面を表すが、トーラス性のため $v_d \neq 0$ であり、粒子の形成するドリフト面は偏心した円で磁気面とのずれ Δ_c は次のように与えられる。

$$\Delta_{ca} = \frac{v_{da}}{\omega} \quad (9.24)$$

ここで a は a 種粒子を示す。図9.1の座標系では $v_{di} < 0, v_{de} > 0$ である。

このずれの大きさ $|\Delta_c|$ は次のように評価できる。トロイダルドリフトは $v_{\parallel} \gg v_{\perp}$ であるので

$$v_d = \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \simeq \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \simeq \frac{v_T^2}{\omega_c R} \quad (9.25)$$

のようにおくことができる。従って

$$|\Delta_c| = \left|\frac{v_d}{\omega}\right| = \left|q \frac{v_{\parallel}}{\omega_c}\right| \simeq q \frac{v_T}{\Omega} = q \varrho \quad (9.26)$$

となる。ここで $q = rB/(RB_p)$ は安全係数、 $\varrho = v_T/\Omega$ ($\Omega = |\omega_c|$) はラーモア半径である。式(9.26)はポロイダル磁場でのサイクロトロン周波数 Ω_{pa} 及びポロイダル磁場で測ったラーモア半径 ϱ_{pa}

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{pa} &= \frac{q_a B_p}{m_a} \\ \varrho_{pa} &= \frac{v_{Ta}}{\Omega_{pa}} \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

を使うと

$$|\Delta_c| = \varepsilon_t \varrho_p \quad (9.28)$$

と書ける。 ϱ_p のことをポロイダル・ラーモア半径と呼ぶことにする。 $\varepsilon_t = r/R_0$ で $\varepsilon_t \ll 1$ である。単一粒子を磁場によりトーラス内に閉じ込めるのに際して、決定的役割を果たし

ているのはポロイダル磁場であり、トロイダル磁場はトロイダルドリフトを生じさせているだけでむしろ粒子軌道の閉じ込めを悪くするように働いている。従って、ドリフト面と磁気面とのずれを表す Δ_c はポロイダル・ラーモア半径で表す方が適切と言える。すなわし、もし $B_p = 0, e_p = 0$ であると ($e \neq 0, e_{Li} \ll L$ であっても) $\Delta_c = \infty$ で、粒子は閉じ込められないことになる。良好な粒子の閉じ込めのためには e_p が小さいこと、すなわち B_p が大きいほうが良い。(トロイダル磁場の大きさ B_t そのものは関係ない)。実際のトカマクでは $B_p \ll B_t \simeq B$ であるが、 e_p は十分小さく、また Δ_c には $e_t (\ll 1)$ も含まれているので周回粒子の偏心あるいはドリフト面と磁気面とのずれは小さい。

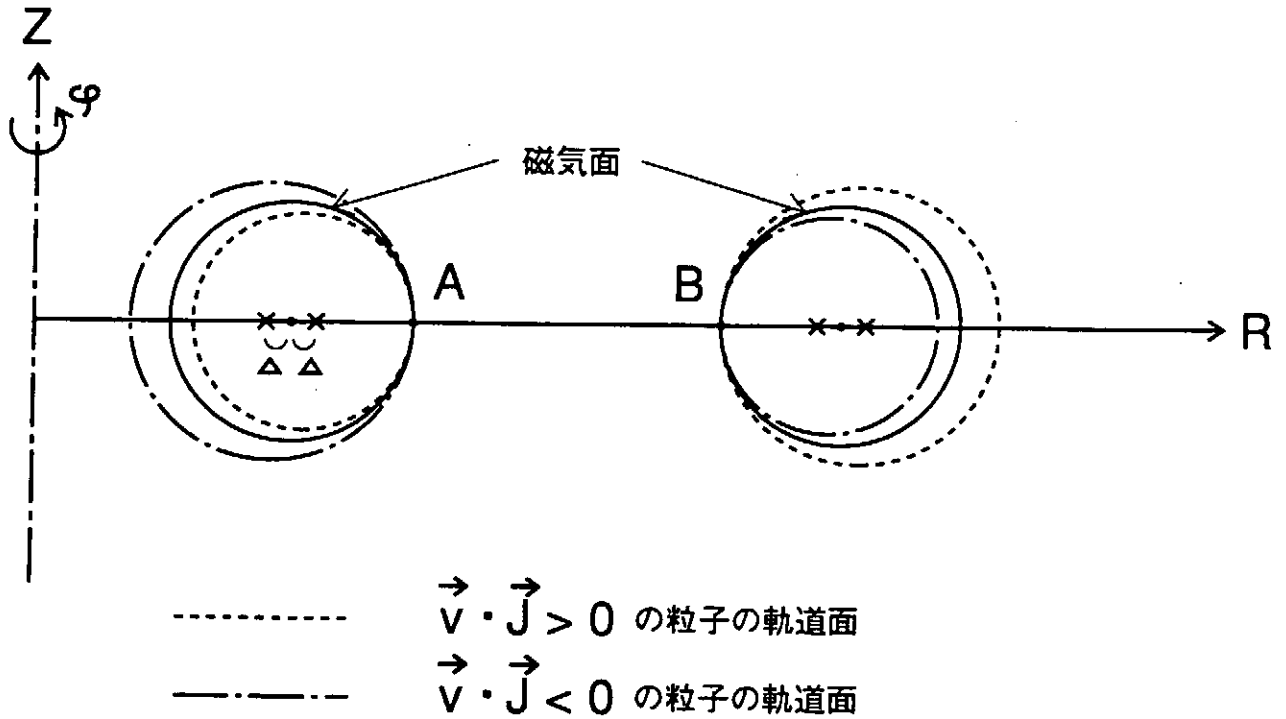


図9.3 イオンのドリフト面の偏心 ($B_p > 0$ と仮定している)

A点、B点はある磁気面上におけるイオンの出発点。

次にずれ Δ_c の方向を考えよう。イオンについて考える。イオンのドリフト面の偏心、あるいはずれ Δ_{ci} は

$$\Delta_{ci} = \frac{v_{di}}{\omega}, \quad (9.29)$$

で与えられるが、イオンのトロイダルドリフトは

$$v_{di} = \frac{2T_i[\text{eV}]}{Z_i B[\text{T}] R[\text{m}]} > 0 \quad (9.30)$$

で、正の値を持つ。ただし、トロイダルドリフトの式(9.25)で $mv_{\parallel}^2 \simeq 2T_i$ とおいた。式(9.30)では T_i は eV 単位、 B は Tesla、 R は m 単位である。 Δ_{ci} の正負を決めるのは ω である。 $\omega > 0$ なら $\Delta_{ci} > 0$ でドリフト面の中心は正の方向(X 又は R 方向)にずれ、 $\omega < 0$ なら $\Delta_{ci} < 0$ となり、ドリフト面の中心は負の方向にずれる。 ω の定義式(9.20)から明らかなように $v_{\parallel} B_p > 0$ なら $\omega > 0$ 、 $v_{\parallel} B_p < 0$ なら $\omega < 0$ である。式(9.18)において v_d の項は小さく、 $v_{\theta} = r d\theta/dt \simeq v_{\parallel} B_p / B$ であるので、 v_{θ} がポロイダル磁場の方向にあると、ドリフト面のポロイダル断面の中心は正の方向にずれ、 v_{θ} がポロイダル磁場と逆方向であると負の方向にずれる。この様子を図9.3に示す。図9.3では右側がトーラス外側で左側に対称軸(Z 軸)がある。(a)、(b)とも点線は磁気軸(又はプラズマ中心) O を中心とする円で、ある一つの磁気面を表している。図(a)はイオンがこの磁気面上のトーラス外側の点 A から出発した場合、(b)はイオンがトーラス内側の点 B から出発した場合のドリフト面を描いてある。実線がドリフト面(のポロイダル断面)で、それぞれが、偏心 Δ_c^+ 又は Δ_c^- を中心とする円である。図9.3では $B_p > 0$ と仮定しているので $v_{\parallel} > 0$ は $v_{\theta} > 0$ のイオン、 $v_{\parallel} < 0$ は $v_{\theta} < 0$ のイオンである。点 A から出発した $v_{\parallel} > 0$ のイオンは磁気面の内側にドリフト面を形成し、 $v_{\parallel} < 0$ のイオンは磁気面の外側にドリフト面を形成する。点 B から出発したものは逆である。もし考えている磁気面が最外殻磁気面であるとすると点 A から出発した $v_{\parallel} > 0$ のイオンは閉じ込められるが、 $v_{\parallel} < 0$ のイオンは閉じ込め領域からはみ出す。

注意すべき事は、 $v_{\parallel}$ の正負はポロイダル磁場の方向によって決まり、トロイダル磁場は全く関係ない。これは粒子軌道の閉じ込めはポロイダル磁場だけで決まるからである。 $v_{\theta} > 0$ 、つまり $\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{B}_p > 0$ の粒子を順方向(co-direction)に走る粒子といい、 $v_{\theta} < 0$ 、つまり $\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{B}_p < 0$ の粒子を逆方向(counter-direction)に走る粒子という。順方向かポロイダル磁場を作るプラズマ電流の方向である。順方向か逆方向かということはトロイダ

ル磁場の方向には関係ない。以上で電子のドリフト面のずれはイオンと逆であることを注意しておく。

3) バナナ粒子

次に捕捉粒子について考えよう。式(9.10)より $(v_{\parallel}/v)^2 < 2\varepsilon_i$ となる粒子は図9.2の磁場の井戸にミラー捕捉される。このような粒子を捕捉粒子という。捕捉粒子も一つのドリフト面を形成するが、その面のポロイダル断面はバナナのような形をしているので、捕捉粒子は通常、バナナ粒子と呼ばれる。周回粒子を論ずるときドリフト面の偏心を計算するため、式(9.16)の v_d を含む小さな項を残した。ここではその項を無視すると案内中心の軌道は次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v_d \sin \theta \\ r \frac{d\theta}{dt} &= v_{\parallel} \frac{B_{\theta}}{B} \\ R \frac{d\phi}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

また、今、静電ポテンシャルは考えていないので ($\Phi = 0$)、エネルギー保存式は

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \\ &= \mu B + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (9.32)$$

となる。 $\mu = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2/B$ は磁気モーメントで保存量である。式(9.32)より

$$v_{\parallel} = \sigma \sqrt{\frac{2}{m}(W - \mu B)} \quad (9.33)$$

である。 $\sigma = \pm 1$ で、 $\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{B}_p > 0$ なら $\sigma = +1$ 、 $\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{B}_p < 0$ なら $\sigma = -1$ である。もし、ある点で $W = \mu B$ となると $v_{\parallel} = 0$ となり粒子はこの点で反射され、図9.2の磁場強度の井戸に捕らえられ、 $B_{\min}$ となる点を中心にバウンス運動をする。

$B = B_{\min}$ での粒子の速さを $v, v_{\perp}, v_{\parallel}$ と書く事にすると、 μ は

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B_{\min}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \simeq \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B_0}(1 + \varepsilon_t) \quad (9.34)$$

と書ける。これを用いると、 $B = B_0(1 - \varepsilon_t \cos \theta)$ だから、 $\sqrt{W - \mu B}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{W - \mu B} &= \sqrt{W - \mu B_0(1 - \varepsilon_t \cos \theta)} \\ &= \sqrt{W - \frac{1}{2}mv_{\perp}^2(1 + \varepsilon_t)(1 - \varepsilon_t \cos \theta)} \end{aligned} \quad (9.35)$$

と書ける。 $\varepsilon_t \ll 1$ なので ε_t の一次まで残す近似で式(9.35)は次のように表せる。

$$\sqrt{W - \mu B} = W\varepsilon_t \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\varepsilon_t} - 1 + \cos \theta} \quad (9.36)$$

ここで γ は $B = B_{\min}$ 、つまり $\theta = 0$ の点での粒子のピッチ角で

$$\cos \gamma = \frac{v_{\parallel}}{v} \quad (\text{at } \theta = 0) \quad (9.37)$$

と定義した。

一方、式(9.31)をみると $r d\theta/dt$ と dr/dt の大きさは

$$\left| \frac{r d\theta/dt}{dr/dt} \right| = \left| \frac{v_{\parallel} B_{\theta}/B}{v_d \sin \theta} \right| \simeq \left| \frac{v_{\parallel}}{v_d} \frac{B_{\theta}}{B} \right| \gg 1 \quad (9.38)$$

と評価できる。従って、 $r d\theta/dt$ の式の中で r の変化は無視してよく、 r は一定として扱うことができる。 θ 方向の速度は

$$\begin{aligned} r \frac{d\theta}{dt} &= v_{\parallel} \frac{B_{\theta}}{B} = \sigma \frac{B_{\theta}}{B} \sqrt{\frac{2}{m}(W - \mu B)} \\ &= \sigma \frac{r}{qR_0} v \sqrt{\varepsilon_t} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\varepsilon_t} - 1 + \cos \theta} \end{aligned} \quad (9.39)$$

となる。ここで $q = rB/(RB_{\theta})$ は安全係数である。ここで、次の量 κ を定義する。

$$\kappa^2 = \frac{\cos^2 \gamma}{2\varepsilon_t} = \frac{1}{2\varepsilon_t} \left(\frac{v_{\parallel}}{v} \right)_{B_{\min}}^2 \quad (9.40)$$

式(9.39)より

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma \frac{v}{qR_0} \sqrt{\varepsilon_t} \sqrt{2\kappa^2 - 1 + \cos \theta} \quad (9.41)$$

となる。反射点の r 座標、 θ 座標をそれぞれ r_t, θ_t とすると、反射点で、

$$2\kappa^2 - 1 + \cos \theta_t = 0 \quad (9.42)$$

を満たす。反射点が $\theta_t = 0$ なら $\kappa = 0$ 、反射点が $\theta_t = \pi$ なら $\kappa^2 = 1$ である。明らかに

$$\kappa^2 < 1 \quad (9.43)$$

なら粒子はミラー捕捉される。粒子が捕捉される条件は $\kappa^2 < 1$ 、つまり $(v_{\parallel}/v)^2 < 2\varepsilon_t$ である。

以上から明らかなように、 $\kappa^2 < 1$ の粒子は反射点 (r_t, θ_t) の点で反射されるが、 $(r_t, -\theta_t)$ もまた式(9.42)を満たし反射点になる。捕捉粒子は、この2つの反射点の間を往復することになりバウンス運動をする。2つの反射点は同一の磁気面上に存在するが、バウンス運動の間、粒子はこの磁気面からずれる。このずれはトロイダルドリフトの存在による。つまり $v_d \neq 0$ のためにバウンス運動中に粒子はもとの磁気面からずれる。このずれを計算しよう。今は、ドリフト面のポロイダル断面のみを考えているので r と θ に対する運動方程式を考えればよい。つまり次の2式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v_d \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sigma \frac{v}{R_0 q} \sqrt{\varepsilon_t} \sqrt{2\kappa^2 - 1 + \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (9.44)$$

捕捉粒子に対しては $v_{\perp}^2 \gg v_{\parallel}^2$ なのでトロイダルドリフト v_d の中で $v_{\parallel}^2$ は無視する。式(9.44)から

$$\frac{dr}{d\theta} = -\sigma \frac{qv}{2\sqrt{\varepsilon_t}\omega_c} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\kappa^2 - 1 + \cos \theta}} \quad (9.45)$$

となる。この式を積分すると

$$r = \sigma \frac{qv}{\sqrt{\varepsilon_t}\omega_c} \sqrt{2\kappa^2 - 1 + \cos \theta} + r_t \quad (9.46)$$

ここで r_t は反射点の r 座標である。 $r_t = \text{const}$ の磁気面を基準に考えるとこの磁気面からの捕捉粒子のずれは

$$\Delta_b = r - r_t = \sigma \frac{qv}{\omega_c \sqrt{\epsilon_t}} \sqrt{2\kappa^2 - 1 + \cos \theta} \quad (9.47)$$

となる。明らかに $\theta = \theta_t$ 又は $\theta = -\theta_t$ で $\Delta_b = 0$ で、 Δ_b は $\theta = 0$ の所で最大となる。 $\theta = 0 (B = B_{\min})$ のところで Δ_b は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta_b &= \sigma \frac{qv}{\omega_c \sqrt{\epsilon_t}} \sqrt{2\kappa} \\ &= \frac{qv_{\parallel}}{\omega_c \epsilon_t} \end{aligned} \quad (9.48)$$

ここで κ に対して式(9.40)を使った。また、 $q = rB/(RB_p)$ は安全係数である。

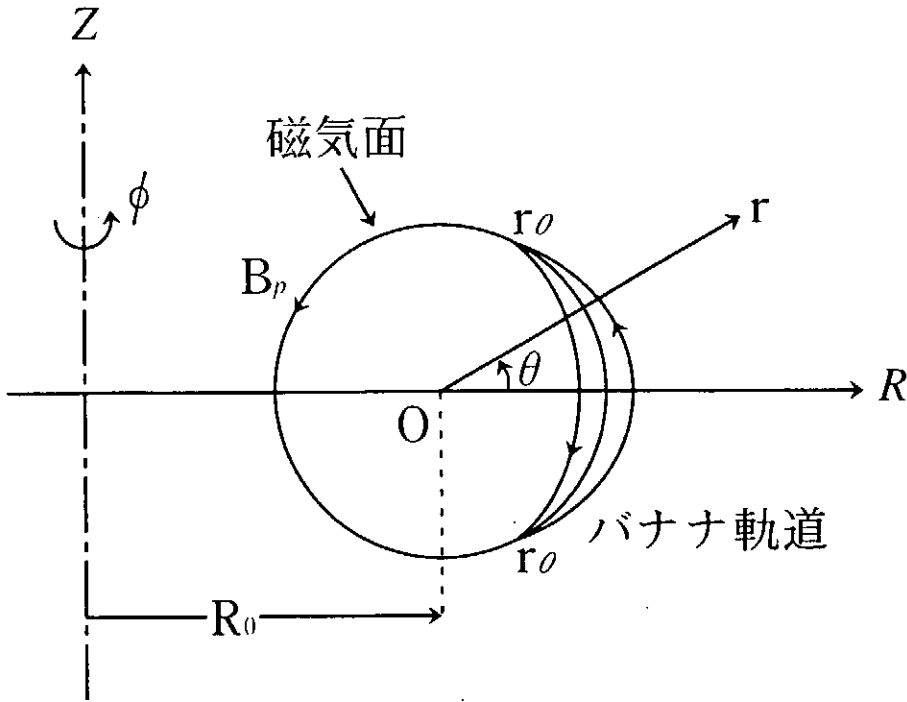


図9.4 パナナ粒子軌道のポロイダル断面への投影（イオンの場合）

Δ_b の符号について考える。周回粒子と同様、イオンの場合を考える。電子はずれの向きはイオンと逆になる。今は図9.1の座標系で計算しており、 $B_p > 0$ としている。 $v_{\parallel} > 0$

なら $\Delta_{bi} > 0$ 、 $v_{\parallel} < 0$ なら $\Delta_{bi} < 0$ である。ここでいう $v_{\parallel}$ の正負の意味は周回粒子の場合と同様である。 Δ_b の大きさは、式(9.48)より

$$|\Delta_b| \simeq \sqrt{\epsilon_t} \varrho_p \quad (9.49)$$

と評価できる。ただし、 $v_{\parallel} \simeq \sqrt{\epsilon_t} v$ 、 $v \sim v_{\perp}$ と近似した。 ϱ_p は式(9.27)で定義されるポロイダル磁場で測ったポロイダル・ラーモア半径である。周回粒子のずれ式(9.28)と比較すると $\sqrt{\epsilon_t}$ 倍だけ捕捉粒子の方がずれが大きい。

捕捉粒子の軌道のポロイダル面への投影は図9.4のようになる。この図の円は反射点を通る磁気面で、反射点は点 (r_t, θ_t) と点 $(r_t, -\theta_t)$ である。軸対称系であるのでポロイダル面での軌道は閉じ、かつ、 $Z = 0$ の面（赤道面）に対して上下対照である。イオンが2つの反射点の間をバウンス運動している間、 $v_{\parallel} > 0$ のとき軌道は磁気面より外にずれ、反射後 $v_{\parallel} < 0$ となると軌道は磁気面より内にずれる。最大ずれの大きさはおよそ $\sqrt{\epsilon_t} \varrho_p$ である。バウンス運動中、このように軌道は磁気面の外と内にずれ、軌道の形がバナナに似ていることから、捕捉粒子のことをバナナ粒子という。

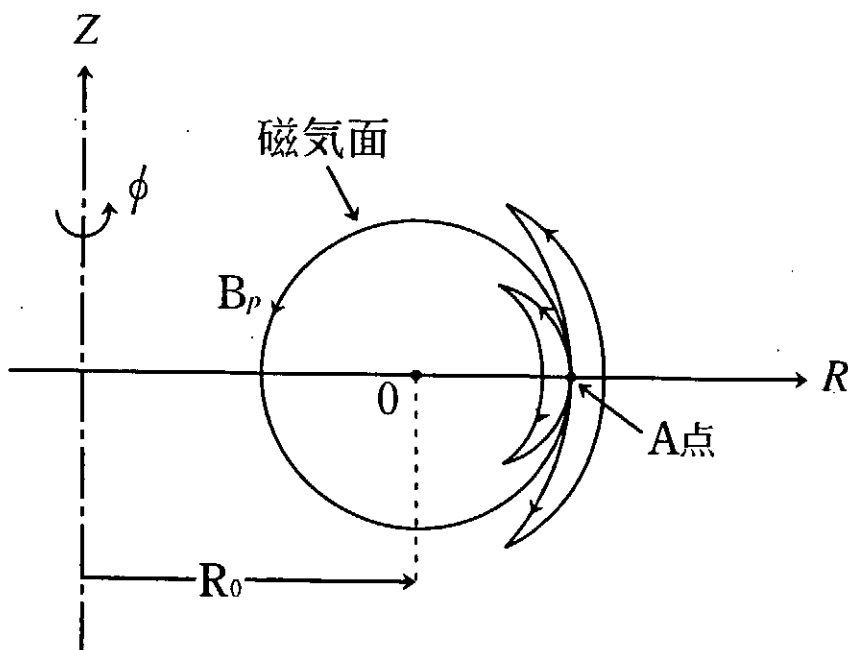


図9.5 バナナ粒子軌道（イオンの場合）

図9.5に示すように、もしバナナ粒子が点Aから出発したとする。出発時に $v_{\parallel} > 0$ であるとバナナは全体としてこの磁気面より内側にできる。出発時に $v_{\parallel} < 0$ であると外側にできる。もしこの磁気面が最外殻磁気面なら点Aで $v_{\parallel} < 0$ で出発するバナナは閉じ込め領域内に入れないことになる。このことから、中性粒子入射加熱 (NBI) において、順方向入射 (co-injection) より逆方向入射 (counter injection) の方が入射高速バナナイオンは逃げ易い事がわかる。

(3) バナナ中心の運動

軸対称トカマクを考える。前節と同様、大アスペクト比近似を行い、図9.1の座標系を用いる。バナナ粒子の軌道は図9.4のようにポロイダル断面に投影すると完全に閉じている。バナナの中心は $|\vec{B}|$ が最小になる所 (赤道面上トーラス外側) にありポロイダル断面上では動かない。しかし、 $\vec{B} \times \nabla B$ ドリフトはトーラス方向の成分 (φ 方向の成分) を持つ。従って、ポロイダル磁場 $\vec{B}_p$ が θ 方向を向いているとすると、イオンに対しては、トーラス外側 (曲率の悪い所) では $\vec{B} \times \nabla B$ ドリフトは $+\varphi$ 方向で、トーラス内側 (曲率の良い所) では $-\varphi$ 方向である。電子に対してはその逆になる。式(9.40)で定義される κ が充分小さい粒子 ($\kappa \ll 1$) は深く捕捉された粒子で、トーラスの外側に局在する。このような粒子はバナナ軌道を一周する間にトーラスの正の方向 (φ の方向) に少し移動するであろう。つまり、バナナ中心が $+\varphi$ 方向に運動する。浅く捕捉されている粒子 ($\kappa \simeq 1$) は反射点がトーラス内側にあり、バナナ軌道を一周する間にトーラス内側及び外側を通り、トーラス方向に負の方向及び正の方向にドリフトし、平均としてバナナ中心はどちらかの方向に進む。反射点近くでは $v_{\parallel} \simeq 0$ で粒子の滞在時間が長いので、充分浅く捕捉されている粒子は平均として $-\varphi$ 方向に進む事が有り得る。つまりバナナ粒子の大部分は正の方向 (φ の方向) にゆっくりドリフトするが、 $\kappa \simeq 1$ の少数のバナナ粒子が逆方向 ($-\varphi$ の方向) にドリフトする。逆ドリフトするバナナ粒子がどの程度の割合存在するかどうかは、安全係数 q の分布、あるいは磁気シア $-q'/q$ の大きさと向きにも関係している [1]。

バナナ粒子は周期運動をする。周期運動の間、系の時間変化及び空間変化は充分穏やかであるので、磁力線に沿う1周期積分

$$J_{\parallel} = m \oint v_{\parallel} dl \quad (9.50)$$

は運動の恒量とみなす事ができる。ここで、

$$dl = v_{\parallel} dt = \frac{v_{\parallel} d\theta}{d\theta/dt} \quad (9.51)$$

であり、 $J_{\parallel}$ は縦の断熱量と呼ばれる。 $d\theta/dt$ に式(9.41)を用いると $J_{\parallel}$ は

$$J_{\parallel} = 4R_0 q v \sqrt{\varepsilon_t} \int_{\theta_t}^{\pi} \sqrt{2\kappa^2 - 1 - \cos \theta} d\theta \quad (9.52)$$

となる。 θ_t はバナナ粒子の反射点で、 κ は式(9.40)で定義され、 $\kappa^2 < 1$ の時、粒子は捕捉されバナナ粒子となる。式(9.52)は第一種及び第二種楕円積分 K, E を使って

$$J_{\parallel} = 8\sqrt{2\varepsilon_t} m R_0 q v \{E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)\} \quad (9.53)$$

と計算される。

$J_{\parallel}$ を用いるとバナナ軌道を一周する周期 τ_b を計算できる。すなわち、式(9.33)より $\partial v_{\parallel} / \partial W = 1/(m v_{\parallel})$ であるので τ_b は

$$\tau_b = \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} = m \frac{\partial}{\partial W} \oint v_{\parallel} dl = \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial W} \quad (9.54)$$

で与えられる。これより

$$\tau_b = 4\sqrt{2} \frac{R_0 q}{v \sqrt{\varepsilon_t}} K(\kappa) \quad (9.55)$$

が得られる。

今、 $\xi = \varphi - q\theta$ を定義する。今の近似では $\xi = \text{const}$ が磁力線を与える。粒子の運動に沿う微分 $d\xi/dt$ はある磁気面上において粒子がある磁力線からずれていく速さを表す。バナナの1周期の間の ξ の変化量を $\langle \Delta \xi \rangle$ で表す。 $\langle \Delta \xi \rangle$ はバナナ中心の運動を示している。 $\Delta \xi$ は $J_{\parallel}$ と

$$\langle \Delta \xi \rangle = \frac{q}{e_a B_0 r} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r} \quad (9.56)$$

の関係にある事が知られている[2]。ここで e_a はイオンのとき $e_i = Z_i e > 0$ 、電子のとき $e_e = -e < 0$ である。この関係は $d\xi/dt$ と $\partial J_{\parallel}/\partial r$ を前節に従って計算して直接確かめる事ができる。バナナはポロイダル断面では完全に閉じているので $\langle \Delta \xi \rangle = \langle \Delta \varphi \rangle$ であり、バナナ中心はトロイダル方向にのみ運動する。その速さは、

$$v_{\varphi} = \frac{\langle \Delta(R\varphi) \rangle}{\tau_b} \simeq \frac{R \langle \Delta \xi \rangle}{\tau_b} \quad (9.57)$$

で与えられる。 $\partial J_{\parallel}/\partial r$ を式(9.53)から直接計算し、 τ_b として式(9.55)を用いるとバナナ中心の速さは次のように与えられる[1]。

$$v_{\varphi} = \varepsilon_t \frac{mv^2 q R}{e_a B_0 r^2} G(\kappa) \quad (9.58)$$

$$G(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 + \frac{2rq'}{q} \left(\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 + \kappa^2 \right) \quad (9.59)$$

q' は r による微分で rq'/q は磁気シアーを表す。 $q' = 0$ の時（電流分布が r に関して一様で磁気シアーがない時）、バナナ中心の運動の方向は κ のみで決まる。数値計算によると $0.9 < \kappa < 1$ の浅く捕捉されたバナナ粒子は $v_{\zeta} < 0$ で他の大部分のバナナ粒子は $v_{\zeta} > 0$ である。 $q' > 0$ なら $v_{\zeta} < 0$ のバナナの割合は減る。もし $q' < 0$ なら $v_{\varphi} < 0$ のバナナ粒子の割合が増加する。

通常トカマクでは全領域で $q' > 0$ （正の磁気シアーを持つ）であり、殆ど全てのバナナ粒子は $v_{\zeta} > 0$ で φ の正の方向にゆっくりドリフトする。このような時バナナは平均的にトーラス外側（曲率の悪い所）に局在する。このような状況ではミラーにおけるフルート不安定性に似た不安定性が引き起こされる。これは捕捉粒子不安定と呼ばれる。もし $q' < 0$ の領域があると $v_{\varphi} < 0$ のバナナ粒子の割合が増え、また、 $v_{\varphi} < 0$ のバナナ粒子は平均としてトーラス内側（曲率の良い所）に滞在するので、捕捉粒子不安定が抑制される可能性がある[1]。最近、JT-60等の大型トカマクで負磁気シアー配位をつくり、高性能のプラズマを得ている。

参考文献

- [1] B.B. Kadomtsev and O.P. Pogutse, Sov. Phys. JETP 24 (1967) 1172.
- [2] H.P. Furth and M.N. Rosenbluth : Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res. (Conf. Proc. Novosibirsk, 1968) IAEA, Vol.1, p.821, 1969.

§10 古典輸送

磁場によりプラズマを閉じ込めようとした時、先ず、プラズマの大域的不安定性（マクロなスケール長の不安定性）を抑える事が必要である。マクロな不安定性を抑えたとしてもプラズマは磁場を横切り閉じ込め領域から逃げていく。これがプラズマの拡散現象で、プラズマ粒子や熱が輸送される。粒子や熱の補給がなければ充分時間がたつとプラズマは全て拡散により閉じ込め領域から逃げてしまう。実際は粒子や熱が外部から補給されて、この補給と拡散による損失とがつり合うと定常な密度分布、あるいは熱（温度）分布が一定に保たれる。このような時は閉じ込め領域内のプラズマの粒子や熱は閉じ込め時間の間に入れ替わっている事になる。

粒子閉じ込め時間とは、もし（仮想的に）外部からの粒子源を全てたち切ったとした時の全粒子数の減衰時間の事で、エネルギー閉じ込め時間とは、もし（仮想的に）外部からの熱源（ α 加熱の熱源もこれに相当する）を全て切ったとした時のプラズマ全エネルギーの減衰時間として定義されるものである。

一般に、あるいは全てのトーラス装置（トカマク、ヘリカル系、...）のプラズマの拡散は比較的短波長のミクロなプラズマの集団運動に起因しており、これを普通「異常拡散」とか「異常輸送」という。これに対して2体衝突による拡散、あるいは輸送を古典的拡散とか古典的輸送という。トーラス効果を考えた古典的輸送を新古典輸送という。

古典拡散より新古典拡散の方が大きく、また、（余程新古典拡散が大きい限り）異常拡散は新古典拡散よりずっと大きく、トーラスでは閉じ込め時間は異常拡散で決まっている。仮に何らかの手段で異常輸送を完全に抑制したとすると、閉じ込め時間は新古典輸送で決まり、従って新古典輸送は最小の輸送過程を与えるものといえる。

輸送理論は粒子拡散や熱拡散のみならず、電気抵抗（あるいは電気伝導度）、ブートストラップ電流、粘性、プラズマ回転などを論ずる。プラズマ閉じ込めの立場からは輸送理論では粒子閉じ込め、エネルギー閉じ込め、運動量閉じ込め等を論ずる。トカマクやヘリカ

ルでは、電気抵抗やブートストラップ電流は最近の研究では新古典的であると考えられている。本節では、クーロン2体衝突に基づくプラズマの磁場を横切る古典拡散を考える。プラズマ中で生ずる多様な現象の中でこの拡散現象は衝突時間程度の最もゆっくりした現象である。もちろん $\Omega \gg \nu_c$ が仮定される。（ Ω はサイクロトロン周波数で ν_c は衝突周波数である。）新古典輸送は§11で述べる。

(1) プラズマの流れ

2流体の運動方程式において圧力のストレス・テンソル $\vec{\pi}$ は小さいとして無視する。また時間的にゆっくり変化する現象を考えるので $m_e \rightarrow 0$ 、 $m_i \rightarrow 0$ とする。即ち、 $\Omega \gg \nu_c$ であり、またプラズマの流れ $\vec{V}_a$ の大きさは音速、アルベン速と比較して充分小さいので

$$m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_a + \vec{V}_a \cdot \nabla \vec{V}_a \right) \rightarrow 0$$

とする。流れ $\vec{V}_a$ が大きいと（例えばプラズマ回転速度が充分大きいと） $\vec{V}_a \cdot \nabla \vec{V}_a$ が無視できない時もある。運動方程式は a 種粒子に対して

$$-\nabla p_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{V}_a \times \vec{B}) + \vec{R}_a = 0 \quad (10.1)$$

となる。式(10.1)の $\vec{B}$ の外積をとる。次の関係

$$\begin{aligned} \vec{B} \times (\vec{V} \times \vec{B}) &= \vec{V} B^2 - \vec{B} (\vec{V} \cdot \vec{B}) \\ &= B^2 (\vec{V} - V_{\parallel} \vec{b}) \\ &= B^2 \vec{V}_{\perp} \end{aligned} \quad (10.2)$$

を利用すると

$$\vec{V}_{\perp a} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_a}{e_a n_a B^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \quad (10.3)$$

が得られる。右辺第1項は反磁性流れであり、第2項は $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れで、第3項は衝突による流れ、即ち拡散を表す。反磁性流れは電子($a = e$)と1種のイオン($a = i$)それぞれに

対して

$$\vec{V}_e^{dia} = -\frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{en_e B^2} \quad (10.4)$$

$$\vec{V}_i^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i en_i B^2} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{en_e B^2} \quad (10.5)$$

である。但し、1種のイオンと電子とから成るプラズマを考えたので $n_e = Z_i n_i$ である。

式(10.4)、(10.5)のそれぞれの流れが作る電流密度は

$$\vec{J}_e^{dia} = -en_e \vec{V}_e^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{B^2} \quad (10.6)$$

$$\vec{J}_i^{dia} = Z_i en_i \vec{V}_i^{dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{B^2} \quad (10.7)$$

であり、全電流密度は

$$\vec{J} = \frac{\vec{B} \times \nabla P}{B^2} \quad (P = p_e + p_i) \quad (10.8)$$

で、これは普通反磁性電流密度 (diamagnetic current density) と呼ばれる。この電流はMHD平衡の式 $\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}$ から直接得られるものである。式(10.3)の第2項は $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れである。

$$\vec{V}_a^{\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (10.9)$$

単一粒子の $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトと同様、流体要素の $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れはイオン、電子とも大きさも向きも同じである。この流れは理想MHD流体のオームの式 $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ から生ずるものである。このように反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れは流体としての基本的な流れである。反磁性流れは、プラズマの荷電粒子のラーモア運動に起因している。

(2) 拡散

式(10.3)の右辺第3項は電子、イオン間の衝突 (摩擦、friction) による流れで $\vec{R}_a$ は異種粒子との衝突によるa種粒子のモーメントムの変化を表し、電子と1種のためのイオンに
対して

$$\vec{R}_e + \vec{R}_i = 0 \quad (10.10)$$

が成立する。 $\vec{R}_e$ は

$$\vec{R}_e = \vec{R}_u + \vec{R}_T \quad (10.11)$$

の2つの部分から成り、 $\vec{R}_u$ は電子とイオンの流れの差 $\vec{u} = \vec{V}_e - \vec{V}_i$ を緩和する過程における電子のモーメント変化率で

$$\begin{aligned} \vec{R}_u &= -\nu_{ei} m_e n_e (\alpha_o \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}) \\ &= e n_e (\eta_{\parallel} \vec{J}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{J}_{\perp}) \end{aligned} \quad (10.12)$$

で表せる。ここで $\eta_{\parallel}, \eta_{\perp}$ は電気抵抗で

$$\eta_{\perp} = \frac{1}{\sigma_{\perp}} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_{ei}} \quad , \quad \eta_{\parallel} = \alpha_o \eta_{\perp} \quad (10.13)$$

で与えられる。 α_o は Z_i の関数で $Z_i = 1$ の時 $\alpha_o = 0.51$ である事が分かっている。式(10.13)において $\tau_{ei} \propto T_e^{3/2}/n_e$ であるので、電気抵抗 $\eta_{\perp}, \eta_{\parallel}$ は電子温度 T_e のみの関数であり n_e には関係しない。式(10.11)の $\vec{R}_T$ は熱的な力 (thermal force) に起因するものでBraginskiiによれば[1]

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\Omega_e \tau_{ei}} \frac{\vec{B}}{B} \times \nabla T_e \quad (10.14)$$

で与えられる。右辺第2項は金属中の熱起電力であるNernst 効果[2]に類似のものである。磁力線方向の熱伝導度は非常に大きく速やかに T_e は磁力線に沿って一定となるから $\nabla_{\parallel} T_e = 0$ ($\vec{B} \cdot \nabla T_e = 0$) と仮定する。式(10.2)の第3項を $\vec{V}_{Da}$ と書く。即ち

$$\vec{V}_{Da} \equiv -\frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \quad (10.15)$$

この式の $\vec{R}_a$ に $\vec{R}_u$ と $\vec{R}_T$ の表式 (式(10.12) と式(10.14)) を代入すると

$$\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} (\nabla_{\perp} P - \frac{3}{2} n_e \nabla_{\perp} T_e) \quad (10.16)$$

が得られる。 $\nabla_{\perp} P$ に比例する項は流れの異なる2つの流体要素間の摩擦(friction)から、 $\nabla_{\perp} T_e$ に比例する項は熱的な力 (thermal force) から生じたものである。

式(10.16)は電子とイオンの衝突による流れで粒子拡散を表している。式(10.16)は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} &= -\nu_{ei}\varrho_e^2 \left\{ \left(1 + \frac{T_i}{Z_i T_e}\right) \frac{\nabla_{\perp} n_e}{n_e} - \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\perp} T_e}{T_e} + \frac{T_i}{Z_i T_e} \frac{\nabla_{\perp} T_i}{T_i} \right\} \\ &= -\nu_{ie}\varrho_i^2 \left\{ \left(1 + \frac{Z_i T_e}{T_i}\right) \frac{\nabla_{\perp} n_e}{n_e} - \frac{1}{2} \frac{Z_i T_e}{T_i} \frac{\nabla_{\perp} T_e}{T_e} + \frac{\nabla_{\perp} T_i}{T_i} \right\}\end{aligned}\quad (10.17)$$

(3) 古典的拡散の物理機構

磁場を横切る流体的流れを与える式(10.3)は、反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れ、衝突による拡散の流れからなるが、このうち反磁性流れと $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れは理想MHD平衡において常に存在するものである。反磁性流 $\vec{V}^{dia}$ と拡散の流れ $\vec{V}_D$ の大きさの比は

$$\begin{aligned}\left| \frac{\vec{V}_{Da}}{\vec{V}_a^{dia}} \right| &= \left| \frac{e_a n_a B^2}{\vec{B} \times \nabla p_a} \right| \cdot \left| \frac{\vec{B} \times \vec{R}_a}{e_a n_a B^2} \right| \\ &\simeq \left| \frac{en_e \eta_{\perp} J_{\perp}}{|\vec{J} \times \vec{B}|} - \frac{1}{\nabla p_a} \frac{3}{2} \frac{n_e}{\Omega_e \tau_e} \nabla p_e \right| \simeq \frac{\nu_{ei}}{\Omega_e} \ll 1\end{aligned}\quad (10.18)$$

で、 $|\vec{V}_{Da}|$ は $|\vec{V}_a^{dia}|$ に比べて ν_{ei}/Ω_e だけ高次の量である。 $\nu_{ei}/\Omega_e \rightarrow 0$ の零次では流れは $\vec{V}_a^{dia}$ と $\vec{V}_a^{\vec{E} \times \vec{B}}$ であるが、 $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れはイオン、電子とも大きさも向きも同じであるが、 $\vec{V}_e^{dia}$ と $\vec{V}_i^{dia}$ は向きが逆のため、イオン流と電子流との間は衝突による摩擦力が働く。今 $T_e = const$ とするとこの力は

$$\begin{aligned}\vec{F}_e = -\vec{F}_i &= -m_e \nu_{ei} (\vec{V}_e^{dia} - \vec{V}_i^{dia}) \\ &= -\nu_{ei} m_e \left(-\frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{en_e B^2} - \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i en_i B^2} \right) \\ &= \nu_{ei} m_e \frac{\vec{B} \times \nabla P}{en_e B^2} = \frac{1}{n_e} \vec{R}_u\end{aligned}\quad (10.19)$$

である。この力により $\vec{F} \times \vec{B}$ ドリフト

$$\vec{V}_{Da} = \frac{\vec{R}_a \times \vec{B}}{e_a B^2}\quad (10.20)$$

を受けるが、 $\vec{R}_e = -\vec{R}_i$ でかつ $e_e = -e < 0$, $e_i = Z_i e > 0$ であるため

$$\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Di} = -\frac{\vec{R}_e \times \vec{B}}{e B^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{eB^2} \nu_{ei} \frac{\vec{B} \times \nabla P}{en_e B^2} \times \vec{B} \\
&= -\frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e B^2} \nabla_{\perp} P = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla_{\perp} P
\end{aligned} \tag{10.21}$$

となる。

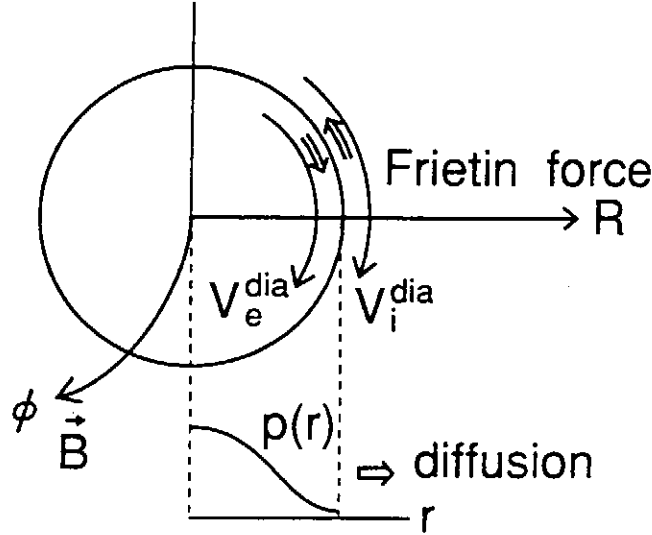


図10.1 古典的拡散

式(10.17)で $T_e = T_i = \text{const}$, $Z_i = 1$ とすると

$$n_e \vec{V}_{De} = -D \nabla_{\perp} n_e \tag{10.22}$$

の形に書ける。 D は粒子の拡散係数である。拡散係数は相関時間を t_c 、ステップ長を Δl とすると

$$D \sim \frac{(\Delta l)^2}{t_c} \tag{10.23}$$

で与えられる。電子の場合 $t_c \sim \nu_{ei}^{-1}$ 、 $\Delta l = \varrho_e$ でイオンに対しては $t_c \sim \nu_{ie}^{-1}$ 、 $\Delta l \sim \varrho_i$ であるので

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \nu_{ei} \varrho_e^2, & D_i &= \nu_{ie} \varrho_i^2 \\ D_e &= D_i \end{aligned} \right\} \tag{10.24}$$

となる。

(4) 不純物イオンの古典的輸送

今までは1種類のイオンと電子からなるプラズマを考えてきたが種類の異なるイオン(例えば不純物イオン)が混入しているプラズマを考える。第1種のイオンは電荷 Z_i 、質量 m_i 、密度 n_i 、温度 T_i とし、第2種のイオンはそれぞれ Z_I, m_I, n_I, T_I とする。 a 種($a=e, i, I$)の粒子の流れは、 $\nu_a/\Omega_a \ll 1$ の近似の第0次では、

$$\vec{V}_{\perp a}^{(0)} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_a}{e_a n_a B^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (10.25)$$

で与えられる。第1種イオン($a=i$)と第2種イオン($a=I$)の間の衝突の時間スケールを考える。 $\tau_{Ii} \ll \tau_{Ie} \sim \tau_{ie}$ であるので電子との衝突は考えなくてもよい。第2種イオンが第1種イオンとの衝突により受ける摩擦力は単位体積当たり

$$\begin{aligned} \vec{R}_I &= -\nu_{Ii} m_I n_I (\vec{V}_{\perp I}^{(0)} - \vec{V}_{\perp i}^{(0)}) \\ &= -\nu_{Ii} m_I n_I \left(\frac{\vec{B} \times \nabla p_I}{Z_I e n_I B^2} - \frac{\vec{B} \times \nabla p_i}{Z_i e n_i B^2} \right) \end{aligned} \quad (10.26)$$

である。この力により第2種イオンは拡散し、その粒子束は

$$\begin{aligned} n_I \vec{V}_{DI} &= \frac{\vec{R}_I \times \vec{B}}{Z_I e B^2} \\ &= -\frac{\nu_{Ii} m_I n_I}{Z_I e B^2} \left(\frac{\nabla_{\perp} p_I}{Z_I e n_I} - \frac{\nabla_{\perp} p_i}{Z_i e n_i} \right) \end{aligned} \quad (10.27)$$

となる。イオン・イオン衝突の時間スケールの間にはほぼ定常に達したとすると $n_I \vec{V}_{DI} \simeq 0$ であり、その時

$$\frac{\nabla_{\perp} p_I}{Z_I n_I} - \frac{\nabla_{\perp} p_i}{Z_i n_i} \simeq 0 \quad (10.28)$$

となる。イオン・イオン衝突の時間の間にイオン温度は緩和し $T_I \simeq T_i$ となる。 $T_I = T_i = \text{const.}$ と仮定すると

$$\frac{\nabla_{\perp} n_I}{Z_I n_I} - \frac{\nabla_{\perp} n_i}{Z_i n_i} \simeq 0 \quad (10.29)$$

となる。スラブ・プラズマを考え z 方向に一樣磁場があり n_I, n_i は半径 r のみの関数とすると $\nabla_{\perp} = \partial/\partial r$ であるので

$$n_I(r) = n_{I0} \left(\frac{n_i(r)}{n_i(0)} \right)^{Z_I/Z_i} \quad (10.30)$$

という分布が得られる。第2種イオンが Z_I の大きい不純物だとすると $Z_I/Z_i \gg 1$ のため $n_I(r)$ は $n_i(r)$ と比較して中心部($r=0$)に局在した鋭い分布となる。これが古典論における不純物集中である。

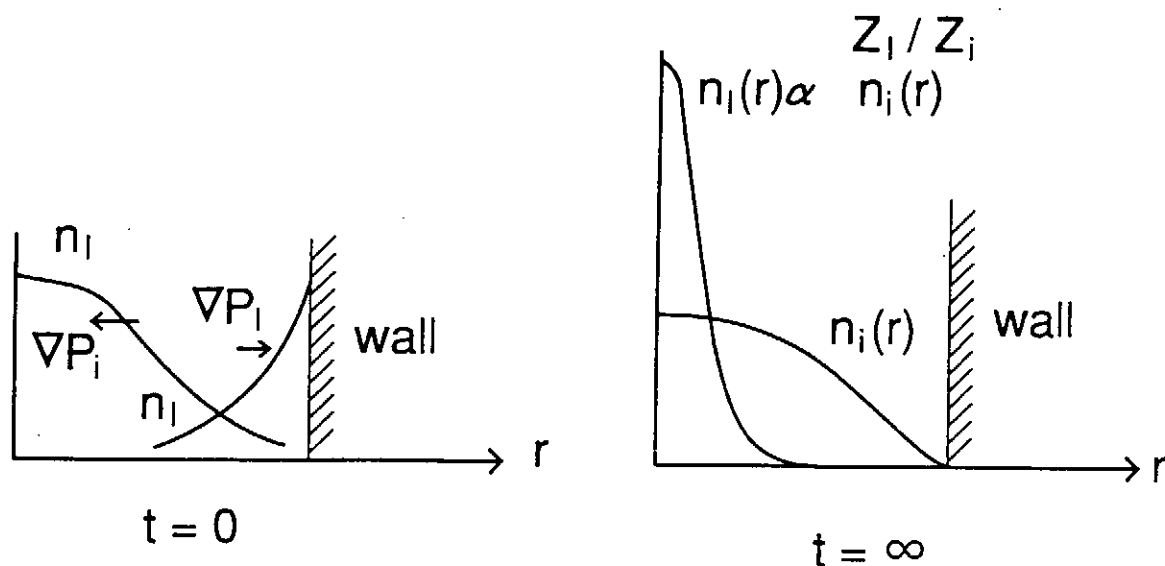


図10.2 古典論における不純物集中

参考文献

- [1] S.I.Braginskii, "Transport Processes in a Plasma", Review of Plasma Physics (ed. M.A.Leontovich), Vol.1, Consultant Bureau, New York (1965).
- [2] ランダウ、リフシツ、「電磁気学」 東京図書、1962年(中上健男他共訳)

§11 新古典輸送

(1) 概論

プラズマの輸送とは、粒子や熱、運動量などの移動現象のことをいう。具体的には、プラズマ粒子の拡散、熱拡散、プラズマの流れ、電流生成などの物理現象である。磁場に垂直方向、平行方向、トロイダル方向、ポロイダル方向、径方向など、移動は様々な方向に生ずる。粒子軌道とクーロン2体衝突だけで決まる輸送現象を古典輸送、あるいは新古典輸送という。これら以外の輸送現象は全て異常輸送と呼んでいる。古典輸送は粒子のラーモア運動に起因するもので、新古典輸送は、案内中心軌道とトーラス性によって起こるものである。トカマクやヘリカル系のようなトーラスでは新古典拡散は古典拡散を凌駕しており、さらに一般的に、トーラスでは異常拡散が支配的である。しかし、近年の実験的観測では、ブートストラップ電流や電気伝導度は新古典輸送理論でかなり良く説明できている。この意味で、新古典輸送理論は理論体系として完全なものであるだけでなく、現実の物理現象（少なくともその一部）を正しく記述しているものと思われる。新古典輸送理論の構築は Galeev と Sagdeev の論文[1]に始まると考えられているが、今日では軸対称トカマクに対しては新古典輸送理論は完成されており、優れたレビューもある[2,3,4]。この節では新古典輸送理論の本質点のみを簡単に述べる。

図9.1のように低ベータ・大アスペクト比軸対称トカマクを考える。§9の(2)節と同様、プラズマベータが充分小さいと仮定しているので、 B_t はトロイダルコイル電流が真空中に作る磁場に殆ど等しいと考えてよい。従って

$$B \sim B_t \propto \frac{1}{R} \quad (11.1)$$

である。すでに述べたように、 B が R に逆比例することをトーラス性 (toroidicity) と呼ぶ。§9で示したように、このトーラス性が軸対称トカマクにおいて決定的な役割を果たす。ヘリカル系トーラスにおいてはこのトーラス性の他にヘリカルコイルの作る磁場の変動も重要な役割を果たす。

始めに衝突を考えずに、単一荷電粒子の軌道のみ考えよう。一つの粒子の速度を $\vec{v}$ 、磁場に平行方向の速度を $v_{\parallel}$ 、垂直方向を $v_{\perp}$ とする ($v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$)。§9 で示したように、もし、 $(v_{\parallel}/v)^2 < \varepsilon_t$ であればその粒子はミラー場に捉えられ、そうでなければ、磁力線に沿ってトーラスを周回できる。つまり粒子軌道は

$$\begin{aligned} \frac{v_{\parallel}^2}{v^2} &> \varepsilon_t = \frac{r}{R_0} && \text{非捕捉粒子 (周回粒子)} \\ \frac{v_{\parallel}^2}{v^2} &< \varepsilon_t = \frac{r}{R_0} && \text{捕捉粒子 (バナナ粒子)} \end{aligned} \quad (11.2)$$

の2つに分類される。捕捉粒子はバナナ粒子とも呼ばれる。軸対称系では案内中心の軌跡は一つの閉じたドリフト面を形成する。粒子の案内中心は磁力線に沿って殆ど $v_{\parallel}$ の速さで走る。もし、トロイダルドリフトがゼロ、すなわち、 $\vec{v}_D = 0$ であると案内中心はある磁気面上にあるが、トーラス性のため $\vec{v}_D \neq 0$ であり、ドリフト面と磁気面はずれる。周回粒子はトロイダル方向、ポロイダル方向とも一周することができ、回転変換を充分感じるのでドリフト面と磁気面とのずれは小さい。捕捉粒子はトーラス方向にはゆっくり回るが、ポロイダル方向には局在するので回転変換を充分感じないのでそのずれは大きい。(本稿では主として軸対称トカマクを扱うが、現実のトカマクではトロイダルコイルは有限個なので、 B_t に浅いリップルができる。 $v_{\parallel} \simeq 0$ の粒子がこのリップルに捕捉されると回転変換を全く感じずトロイダルドリフトで逃げる。) §9 の(2)節で明らかにしたように、ドリフト面と磁気面とのずれは、周回粒子に対しておおよそ

$$\Delta_c \simeq \varepsilon_t \rho_p = q\rho \quad \left(q = \frac{rB_t}{RB_p} \right) \quad (11.3)$$

程度であり、捕捉粒子 (バナナ粒子) に対しておおよそ

$$\Delta_b \simeq \sqrt{\varepsilon_t} \rho_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_t}} q\rho \quad (11.4)$$

である。ただし、 ρ はラーモア半径で、 ρ_p は B_p で測ったラーモア半径である。また、 q は安全係数である。捕捉粒子のずれは周回粒子のずれより $1/\sqrt{\varepsilon_t}$ だけ大きい。

次に衝突の効果を考える。熱化プラズマの衝突周波数 ν_d の依存性は

$$\nu_d \propto \frac{n}{T^{3/2}} \quad (11.5)$$

である。ただし、 n はプラズマ密度、 T は温度である。プラズマの温度が高くなるにつれ、衝突は小さくなり、それに伴い粒子は磁場構造をはっきり感じるようになる。従って衝突が充分小さくなるとプラズマ粒子は上記の周回粒子と捕捉粒子（バナナ粒子）の2種類に別れる。しかし、式(11.2)から明らかなように、粒子のピッチ角が $\sqrt{\epsilon_t}$ 程度変化すると周回粒子とバナナ粒子は入れかわるであろう。このための衝突周波数は実効的に

$$\nu_{eff} \simeq \frac{\nu_d}{\epsilon_t} \quad (11.6)$$

となる。実際ピッチ角散乱による分布関数の時間変化は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nu_d}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (1 - \lambda^2) \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad (11.7)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda = \cos \theta$ で θ はピッチ角、すなわち $\cos \theta = v_{\parallel}/v$ である。 λ の変化は $\delta \lambda \simeq \lambda_b = \sqrt{\epsilon_t} \ll 1$ 程度を考えればよいから、式(11.7)は

$$\frac{\delta f}{\delta t} \simeq \nu_d \frac{\delta f}{(\delta \lambda)^2} \simeq \nu_d \frac{\delta f}{\epsilon_t} \quad (11.8)$$

のように評価でき、実効衝突周波数は式(11.6)のように与えられることがわかる。捕捉粒子の密度 n_t の全密度 n （捕捉粒子と周回粒子を合わせたもの）に対する比は

$$n_t = \int_{-\lambda_b}^{\lambda_b} f v_{\perp} dv_{\perp} d\lambda \simeq \lambda_b n = \sqrt{\epsilon_t} n \quad (11.9)$$

から、およそ $\sqrt{\epsilon_t}$ であることがわかる。

粒子が磁場構造の詳細を感じて捕捉粒子が何度もバナナ軌道を描くには、粒子がバナナを一周する時間 τ_b よりも実効衝突時間 ν_{eff}^{-1} の方が充分長い必要がある。すなわち、

$$\nu_{eff} < \tau_b^{-1} \quad \left(\nu_{eff} = \frac{\nu_d}{\epsilon_t} \right) \quad (11.10)$$

$$\tau_b \simeq \frac{qR}{v_{\parallel}} \simeq \frac{qR}{\sqrt{\epsilon_t} v} \quad (11.11)$$

ここで $q = rB/(RB_p)$ は安全係数で qR は磁力線に沿う $B_{\max}$ から $B_{\min}$ への長さ（磁力線の結合長）程度のものである。式(11.10)を満たす時、粒子はバナナ軌道を描くことができ、このような衝突周波数帯をバナナ領域という。電子の場合、バナナ領域は ν_{ei} が次の条件を満たす領域である。

$$\nu_{ei} < \frac{v\epsilon_t^{3/2}}{qR} \simeq \epsilon_t^{3/2} \frac{v_{Te}}{qR} \quad (11.12)$$

バナナ電子の拡散係数は、ステップ長が Δ_b 程度、相関時間が ν_{eff}^{-1} 程度、バナナ粒子の割合は $\sqrt{\epsilon_t}$ 程度であるので次のように評価できる。

$$D_b \simeq \epsilon_t^{1/2} \Delta_b^2 \nu_{\text{eff}}^{-1} \quad (11.13)$$

式(11.4)と(11.6)より

$$D_b \simeq \epsilon_t^{-3/2} q^2 \nu_{ei} \rho_e^2 \quad (11.14)$$

を得る。トカマクでは $q = 1 \sim 3$ 程度で、また $\epsilon_t \ll 1$ だからバナナ拡散は古典拡散 $D_c = \nu_{ei} \rho_e^2$ よりずっと大きい。捕捉されたバナナ・イオンに対しても同様に評価できるが、式(11.14)と全く同じになる。これは、粒子間衝突におけるモーメント保存、中性条件、軸対称性の結果である。

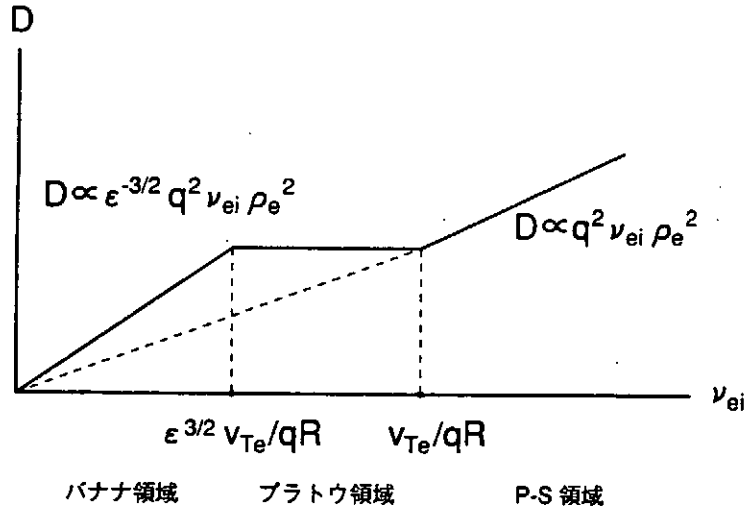


図11.1 新古典粒子拡散係数の衝突周波数依存性

$$\omega_B = \epsilon_t^{3/2} \frac{v_{Te}}{qR}, \quad \omega_T = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_t}} \omega_B$$

もし、電子の衝突周波数 ν_{ei} が充分大きく、平均自由行程の長さが磁力線の結合長より短いとき、すなわち

$$\nu_{ei} \geq \frac{v_{Te}}{qR} \quad (11.15)$$

の時、電子は古典的領域、多衝突領域あるいは Pfirsch-Schlüter 衝突領域にあるという。このようなとき、電子はバナナ軌道を描くことができず拡散はラーモア半径をステップ長、衝突時間を相関時間とする古典的拡散係数 $D = \nu_{ei} \rho_e^2$ で決まるように思われるが、多衝突領域においてもトーラス性は重要な役割を果たす。すなわち ∇B ドリフトにより荷電分離が生ずるが、電子が磁力線に沿って走りこれを打ち消そうとする。磁力線に沿って電気伝導度 $\sigma_{\parallel}$ は有限であるので有限の大きさの電流が荷電分離を打ち消すために磁力線に沿って流れる。これを Pfirsch-Schlüter 電流という [5]。この電流 $J_{\parallel}$ は平衡をとるために必ず流れる電流である。すなわち平衡の式

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B} \quad (11.16)$$

と $\vec{B}$ との外積をとることにより垂直方向に流れる電流が

$$\vec{J}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla P}{B^2} \quad (11.17)$$

と求められる。この電流を反磁性電流と呼ぶ。これは粒子のラーモア運動を起因とする電流である。トーラスでは $\nabla \cdot \vec{J}_{\perp} \neq 0$ である。一方 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ が成立しなければならないので

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\parallel} = -\nabla \cdot \vec{J}_{\perp} \neq 0 \quad (11.18)$$

となり、必然的に $\vec{J}_{\parallel}$ が存在する。これが Pfirsch-Schlüter 電流 (P-S 電流) である。この電流は磁力線方向に電場 $E_{\parallel} = J_{\parallel} / \sigma_{\parallel} = E_p B_p / B$ を生ずる。この E_p が粒子に $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトを引き起こす。後で示す式 (11.63) の P-S 電流の表示から明らかなようにトーラス外側と内側で P-S 電流の向きは逆であり、従って $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトによる粒子束はトーラス内側では内向き方向、トーラス外側で外向きになる。しかし磁気面平均をとると P-S 電

流による拡散は式(11.107)のようになる。衝突頻度の大きいP-S領域では拡散係数は古典拡散もあわせて

$$D_c \simeq \left(1 + \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} q^2\right) \nu_{ei} \rho_e^2 \quad (11.19)$$

となる。ここで $\sigma_{\perp}$ は垂直方向の電気伝導度である。拡散係数は衝突周波数に対して図11.1のように描ける。 $\omega_B < \nu_{ei} < \omega_T$ の領域では、拡散係数 D_p は簡単な議論では ν_{ei} に依存しないのでこの領域はプラトウ領域と呼ばれているが、実際は遷移領域でバナナ領域とP-S領域を滑らかに接続している。

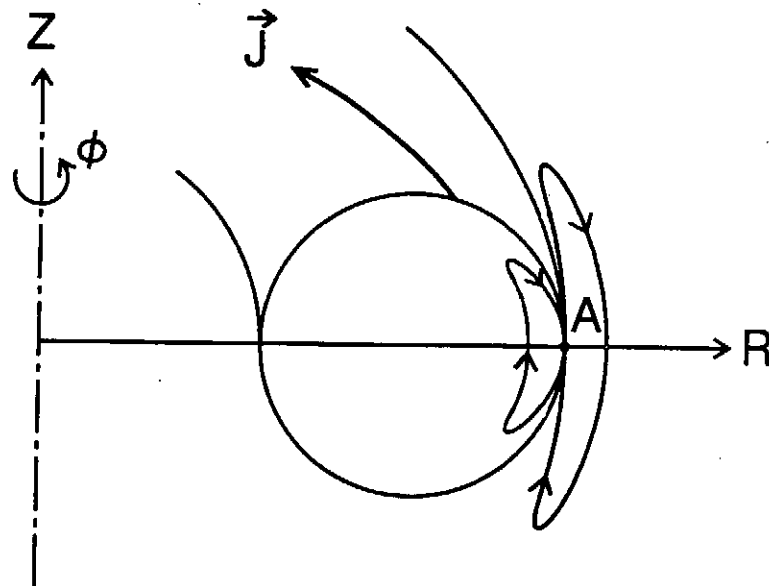


図11.2 ブートストラップ電流生成の抽象 (バナナ電子)

次にブートストラップ電流[6,7,8]について考えてみよう。図11.2のようにバナナ電子Aとバナナ電子BがX点で衝突するとする。バナナ軌道は外側は必ず $v_{\parallel} > 0$ ($\vec{B}_p$ の方向)、内側は $v_{\parallel} < 0$ ($\vec{B}_p$ の逆方向) であるが、もし密度勾配があると (A側の方がB側より密度 n が大きいとする)、X点において $v_{\parallel} > 0$ の方向に余剰の運動量が生じ電流が生成される。これは

$$J_b \simeq (-en v_{\parallel})_A + (-en v_{\parallel})_B \quad (11.20)$$

と書けるが、 $(v_{\parallel})_A = -(v_{\parallel})_B > 0$ とし、また

$$n_A - n_B \simeq \Delta_b \nabla n_b \quad (11.21)$$

と近似する。ここで Δ_b は式(11.4)で与えられるバナナ巾である。 n_b はバナナ粒子の密度で、式(11.9)で与えられる捕捉粒子の密度 n_t である。

$$\left. \begin{aligned} n_b &= n_t \sim \sqrt{\varepsilon_t} n \\ v_{\parallel} &\simeq \varepsilon_t^{1/2} v \\ \Delta_b &\simeq \varepsilon_t^{1/2} \rho_p = \varepsilon_t^{1/2} \frac{mv}{eB_p} \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

であることを考えると

$$J_b \simeq -\varepsilon_t^{3/2} \frac{1}{B_p} \frac{dP}{dr} \quad (11.23)$$

となる。ただし、 $mv^2/2 \simeq T$ 、 $P = 2nT$ とおいた。X 点において周回電子がバナナ電子と衝突してこの余剰の運動量を運び去る。このときの周回電子とバナナ電子との間の衝突時間は式(11.6)の実効的衝突周波数で決まるものである。周回粒子は磁場方向に $u_{\parallel}$ の速さで走るがイオンとのまさつで運動量を失う。バナナ電子の余剰の運動量の時間変化とまさつによる運動量損失率はつり合うだろう。すなわち、

$$\frac{\nu_{ee}}{\varepsilon_t} \cdot m_e \left(\frac{J_b}{-en_e} \right) = \nu_{ei} m_e u_{\parallel} \quad (11.24)$$

この式で左辺はバナナ電子周志の衝突により生ずる単位時間当たりの運動量を表し、右辺がイオンとの衝突による運動量損失率を表している。次節以下で明らかになるように左辺は粘性力を表し、右辺はまさつ力を表している。式(11.23)と(11.24)より

$$J_{BS} \simeq -en_e u_{\parallel} = -\varepsilon_t^{1/2} \frac{1}{B_p} \frac{dP}{dr} \quad (11.25)$$

が得られる。これがブートストラップ電流である。

ブートストラップ電流は、バナナ粒子の運動量を周回粒子が運び去ることにより生ずる。定常状態では失われたバナナ粒子の運動量はその分補わなければならない。この損失

はバナナ粒子の拡散により補われるはずである。従ってブートストラップ電流とバナナ拡散は直接的な関係にあると推測できる。

次の第(2)節では新古典理論の近似や仮定について述べる。新古典理論ではエネルギーの式も重要であるが、その取扱いは運動方程式より繁雑ではあるが本質的に同じであるので本稿では運動方程式のみ論ずる。第(3)節で平行電流を考える。平行電流とは磁場 $\vec{B}$ に沿って流れる Pfirsch-Schlüter 電流、オーミック電流、ブートストラップ電流などをいうことにする。(ビーム電流、あるいは大河電流もこれに属するが本稿では外部からプラズマへの運動量注入はないとしてこれは考えないことにする。) 第(4)節では新古典的径方向粒子拡散を考え、平行電流と拡散の関係を明らかにする。以上は全て軸対称トカマクの場合についてのみ論ずる。ヘリカル系の場合は第(5)節で簡単に述べる。最後に第(6)節で揺動が新古典輸送に与える効果等について簡単に触れる。

(2) 新古典理論

密度に対する保存式と運動方程式(運動量保存式)を考える。新古典輸送はエネルギー保存式まで考えなければ正しい結果は得られないが、本稿では簡単のためこれは扱わないことにする。密度保存式と運動方程式はそれぞれ次のように与えられる[9]。

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot n_a \vec{u}_a = 0 \quad (11.26)$$

$$m_a n_a \frac{d\vec{u}_a}{dt} = n_a e_a (\vec{E} + \vec{u}_a \times \vec{B}) + \vec{F}_a - \nabla P_a - \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \quad (11.27)$$

ここで添字 a は電子、又はイオン(一種のみ考える)を示す。 m_a は質量、 n_a は密度、 $\vec{u}_a$ は流体としての速度、 $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は電場及び磁場、 $\vec{F}_a$ は a 種粒子が b 種粒子 ($a \neq b$) との衝突により受けるまさつ力、 P_a は圧力、 $\vec{\Pi}_a$ はストレス・テンソルで圧力の非等方性を表している。粒子間衝突の間、運動量は保存されるので

$$\sum_a \vec{F}_a = 0 \quad (11.28)$$

である。

古典輸送、新古典輸送理論では次の仮定を置く。

$$\rho \ll L, \quad \nu \ll \Omega \quad (11.29)$$

ここで ρ はラーモア半径、 L は磁場 B の変動する特長的長さ、 ν は衝突周波数、 Ω はイオンサイクロトロン周波数である。この2つの条件はトカマクやヘリカル系のようなトーラスにおいては充分満たされる。 ρ や ν で展開して方程式(11.26)と(11.27)を解くことを考える。クーロン衝突によるプラズマ輸送過程のみ考え、速い振動の揺動（通常「異常」と呼ばれる揺動）は考えないので、式(11.26)は次のように評価できる。

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\nabla \cdot n_a \vec{u}_a = \nabla \cdot D \nabla n_a \sim \frac{\nu_a \rho_a^2}{L^2} n_a \quad (11.30)$$

従って、時間変動は $O(\nu \rho^2 / L^2)$ である。従って、式(11.26)と(11.27)において時間微分の項は高次のオーダーとして無視する（これを輸送オーダーリングということがある。）また、慣性項も

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \simeq O(\rho^2 / L^2) \quad (11.31)$$

のオーダーとなるのでこれを無視する。以上の近似から

$$\nabla \cdot n_a \vec{u}_a = 0 \quad (11.32)$$

$$n_a e_a (\vec{E} + \vec{u}_a \times \vec{B}) + \vec{F}_a - \nabla P_a - \nabla \cdot \vec{\Pi}_a = 0 \quad (11.33)$$

が得られる。式(11.33)の最低次は

$$n_a e_a (\vec{E} + \vec{u}_a \times \vec{B}) - \nabla P_a = 0 \quad (11.34)$$

である。この式を a について和をとると MHD 平衡の式

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla P \quad (P = P_e + P_i) \quad (11.35)$$

が得られる。磁気面のラベルを ψ とすると P は ψ のみの関数である。従って P_a も、また、 n_a 、 T_a も ψ のみの関数と考えてよいであろう。また、式(11.34)の $\vec{B}$ の外積をとる

と直ちに

$$\vec{u}_{a\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla \Phi}{B^2} + \frac{\vec{B} \times \nabla P_a}{n_a e_a B^2} \quad (11.36)$$

が得られる。 Φ は静電ポテンシャル ($\vec{E} = -\nabla \Phi$) で ψ のみの関数である。この垂直方向の流れの右辺第一項は $\vec{E} \times \vec{B}$ の流れで単一荷電粒子の $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトと全く同じ形をしており、電子、イオンともに同じ方向で大きさも同じである。第2項は反磁性流と呼ばれ粒子の旋回運動に起因する流体としての流れで、単一荷電粒子ではこれに相当するドリフトはない。式(11.36)で与えられる流れの作る電流は明らかに式(11.17)の反磁性電流である。 $\vec{u}_{a\perp}$ は明らかに磁気面量(ψ のみの関数)である。 $\vec{u}_a = u_{a\parallel} \vec{b} + \vec{u}_{a\perp}$ において ($\vec{b} = \vec{B}/B$), $\vec{b} \cdot \nabla \psi = 0$, $\vec{u}_{a\perp} \cdot \nabla \psi = 0$ であるので

$$\nabla \cdot n_a \vec{u}_a = \vec{u}_a \cdot \nabla \psi \frac{dn_a}{d\psi} + n_a \nabla \cdot \vec{u}_a = 0 \quad (11.37)$$

から

$$\nabla \cdot \vec{u}_a = 0 \quad (11.38)$$

が得られる。

以上より、最低次において n_a , T_a , Φ は ψ のみの関数で、流れは非圧縮性であり、その垂直成分は $\vec{E} \times \vec{B}$ 流と反磁性流である。また、一般に、

$$\nabla \cdot \vec{u}_{a\parallel} = -\nabla \cdot \vec{u}_{a\perp} \neq 0 \quad (11.39)$$

であることに注意しておく。

粒子の案内中心軌道、クーロン2体衝突、それとトーラス性によってのみ決まるプラズマ輸送を新古典輸送という。第(1)節の概論で述べたように軸対称トカマクでは衝突頻度が小さくなると粒子軌道のトポロジーは周回粒子と捕捉粒子(バナナ粒子)の2つに分類される。(ヘリカル系では周回粒子、トーラス捕捉粒子、ヘリカルリップル捕捉粒子、遷移粒子等に分類される。)バナナ粒子は $v_\perp$ が大きく周回粒子は $v_\parallel$ が大きい。これは、流体的には磁場に垂直方向の圧力 $P_\perp$ と磁場に平行方向の圧力 $P_\parallel$ が異なることを意味する ($P_\perp \neq P_\parallel$)。このように圧力が非等方的になると式(11.33)でストレステンソルが無視でき

なくなる。つまり、 $P_{\perp}$ と $P_{\parallel}$ を緩和させる粘性力 $(-\nabla \cdot \vec{\Pi}_a)$ が働く。温度が高く、衝突頻度の小さい領域（バナナ領域）ではこの粘性力が特に重要な働きをする。ストレステンソルは

$$\Pi_{\alpha\beta} \equiv nm \langle v'_\alpha v'_\beta - \frac{1}{3} (v')^2 \delta_{\alpha\beta} \rangle \quad (11.40)$$

と定義される [9]。ただし $\vec{v}'$ は速度の平均流からのずれ、すなわち

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad \langle \vec{v}' \rangle = 0 \quad (11.41)$$

であり、 $\langle A \rangle$ は速度分布関数による平均である。

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \int A f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (11.42)$$

磁場 $\vec{B}$ は z 方向にあるとする。強い磁場中 ($\nu \ll \Omega_i$) では荷電粒子は非常に速く磁力線の周りを旋回運動しており、磁場の周りには圧力は等方的と考えてよい ($\langle (v'_x)^2 \rangle = \langle (v'_y)^2 \rangle$)。このような時にはストレステンソルの非対角要素は無視してよい ($\langle v'_x v'_y \rangle = 0, \dots$)。 $P_{\perp}$ と $P_{\parallel}$ 及び P は次のように定義できる。

$$\left. \begin{aligned} P_{\perp} &= \langle nm (v'_x)^2 \rangle = \langle nm (v'_y)^2 \rangle \\ P_{\parallel} &= \langle nm (v'_z)^2 \rangle \\ P &= \langle nm (v')^2 \rangle / 3 = \frac{2P_{\perp} + P_{\parallel}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

ストレステンソルは対角要素のみで a 種粒子に対して

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_a &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(P_{a\parallel} - P_{a\perp}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(P_{a\parallel} - P_{a\perp}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(P_{a\parallel} - P_{a\perp}) \end{bmatrix} \\ &= (P_{a\parallel} - P_{a\perp})(\vec{b}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{I}) \end{aligned} \quad (11.44)$$

のように $P_{\perp}$ と $P_{\parallel}$ のみで表すことができる。ここで $\vec{b} = \vec{B}/B$ である。

ストレステンソルの発散 $-\nabla \cdot \vec{\Pi}_a$ を粘性力という。この力は流体近似の枠内では求めることができない。案内中心の軌道とクーロン衝突を含むドリフト運動論的方程式を解き

a 種粒子に対する分布関数を求めることによってのみ計算することができる。本稿ではドリフト運動論的方程式をどう解くかについては触れずその結果のみ引用することにする。重要なことは、一様な磁場方向には粘性力は働かないということである。軸対称トカマクではトーラス方向に磁場は一様であるのでトーラス方向に粘性力は働かない。すなわち

$$\vec{B}_t \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a = 0 \quad (11.45)$$

である。一様磁場方向には粒子は粒子に乗った系から見て、磁場から何の力も受けないので $P_\perp$ と $P_\parallel$ を緩和させる粘性力は働かないためである。粘性力は磁場の大きさが変動する方向に働き、その方向のプラズマの流れを減衰させようとする。

磁場方向の粘性力を単に平行粘性力ということにする。磁気面平均した平行粘性力は

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle &= \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot (P_\parallel - P_\perp)(\hat{b}\hat{b} - \frac{1}{3}\vec{I}) \rangle \\ &= \langle (P_{a\perp} - P_{a\parallel})\vec{b} \cdot \nabla B \rangle \end{aligned} \quad (11.46)$$

で与えられる。但し、 $\langle \rangle$ は磁気面平均（付録参照）を表す。新古典理論においてはこの平行粘性力が決定的に重要な役割を果たす。軸対称トカマクにおいても非軸対称ヘリカル系においても、ブートストラップ電流はこの粘性力と平行方向のまさつ力のつり合いで決まる。軸対称トカマクでは粒子拡散も平行粘性力で決まる。

(3) 平行電流

式(11.33)の磁場に平行な成分をとり、さらに磁気面平均すると

$$\langle e_a n_a \vec{B} \cdot \vec{E} \rangle = -\langle \vec{B} \cdot \vec{F}_{a1} \rangle + \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle \quad (11.47)$$

を得る。ここで次の関係があることを注意しておく。

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{E} &= BE_\parallel^{(A)} \\ \sum_a \vec{F}_a &= 0 \\ \sum_a n_a e_a &= 0 \\ \sum_a \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

$B = |\vec{B}|$ であり、 $E_{\parallel}^{(A)}$ は誘導電場を表す。付録に示したように軸対称トカマクの磁場を次のように表す。

$$\vec{B} = \nabla\phi \times \nabla\psi + F(\psi)\nabla\phi \quad (11.49)$$

ここで、 $\psi = -RA_{\phi}$ であり、 ϕ はトロイダル角を表し、 $F(\psi) = RB_t$ である。流れ $\vec{u}_a$ は磁気面上の非圧縮流であるので $\vec{B}$ と同じように次のように書ける。

$$\begin{aligned} \vec{u}_a &= \vec{u}_{a\perp} + u_{a\parallel}\vec{b} \\ &= u_{a\theta}(\psi)\nabla\phi \times \nabla\psi + u_{a\phi}(\psi)\nabla\phi \end{aligned} \quad (11.50)$$

ポロイダル流は θ をポロイダル角とすると

$$u_{a\theta} = \frac{\vec{u}_a \cdot \nabla\theta}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} \quad (11.51)$$

と書くことができる。 $u_{a\theta}$ と $u_{a\phi}$ は ψ のみの関数である。 $\vec{u}_a$ と $\nabla\theta$ の内積より

$$\vec{u}_a \cdot \nabla\theta = \vec{u}_{a\perp} \cdot \nabla\theta + u_{a\parallel}\vec{b} \cdot \nabla\theta \quad (11.52)$$

が得られるが、この式に $u_{a\theta}$ に対する式(11.51)と $\vec{u}_{a\perp}$ に対する式を使うと

$$u_{a\parallel} = u_{a\theta}(\psi)B + V_a \quad (11.53)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} V_a &= -\frac{\vec{u}_{a\perp} \cdot \nabla\theta}{\vec{b} \cdot \nabla\theta} \\ &= -\frac{F(\psi)}{e_a B} T_a \left(\frac{e_a}{T_a} \frac{d\Phi}{d\psi} + \frac{1}{P_a} \frac{dP_a}{d\psi} \right) \end{aligned} \quad (11.54)$$

は熱力学的な力を表しており、 $E \times B$ 流と反磁性流がその原因となっている。

平行電流は次のように書ける。

$$\begin{aligned} J_{\parallel} B &= (n_i e_i u_{i\parallel} - n_e e u_{e\parallel}) B \\ &= n_i e_i B (u_{i\theta}(\psi) B + V_i) - n_e e B (u_{e\theta}(\psi) B + V_e) \end{aligned} \quad (11.55)$$

ここで磁気面量 $K(\psi)$ を

$$K(\psi) \equiv n_i e_i u_{i\theta}(\psi) - n_e e u_{e\theta}(\psi) \quad (11.56)$$

と定義すると平行電流は次のように書ける。

$$J_{\parallel} B = B^2 K(\psi) + n_i e_i B V_i - n_e e B V_e \quad (11.57)$$

式(11.54)の V_e 、 V_i の表示を代入すると平行電流は

$$J_{\parallel} B = -F(\psi) \frac{dP}{d\psi} + K(\psi) B^2 \quad (P = P_e + P_i) \quad (11.58)$$

と書ける。 $J_{\parallel} B$ の磁気面平均をとると

$$\langle J_{\parallel} B \rangle = -F(\psi) \frac{dP}{d\psi} + K(\psi) \langle B^2 \rangle \quad (11.59)$$

となり、式(11.58)と式(11.59)から $K(\psi)$ を消去すれば平行電流は

$$J_{\parallel} B = -F(\psi) \frac{dP}{d\psi} \left(1 - \frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} \right) + \langle J_{\parallel} B \rangle \frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} \quad (11.60)$$

のように表現できる。

平行電流の式(11.60)で、右辺第1項は Pfirsch-Schlüter 電流 (P - S 電流) を表している。すなわち

$$J_{PS} B = -F(\psi) \frac{dP}{d\psi} \left(1 - \frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} \right) \quad (11.61)$$

大アスペクト ($r/R_0 \ll 1$) の近似での P-S 電流を求める。付録の式(11.129)を用いると

$$\frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} = \frac{B_0^2 (1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta)}{B_0^2 (1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2})} \simeq 1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta \quad (11.62)$$

と近似でき、また、式(11.124)及び(11.132)を考慮すると

$$J_{PS} \simeq -2q \frac{1}{B_0} \frac{dP}{dr} \cos \theta \quad (q = \frac{r B_t}{R B_p}) \quad (11.63)$$

が得られる。 q は安全係数である。 J_{PS} はトーラス外側と内側で符号が異なり磁気面平均するとP-S電流は消える。すなわち

$$\langle J_{\parallel} B \rangle_{PS} = 0 \quad (11.64)$$

この事実は式(11.61)からも、また式(11.63)からも明らかである。

平行電流の式(11.60)の右辺第2項の $\langle J_{\parallel} B \rangle$ はオーミック電流とブートストラップ電流を表している。平行方向のまさつ力は次のように表せる。

$$F_{e\parallel} = -F_{i\parallel} = en_e \frac{J_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} \quad (11.65)$$

ここで $\sigma_{\parallel}$ は磁場に平行方向の電気伝導度で

$$\sigma_{\parallel} = f(Z_i)\sigma_{\perp}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}} \quad (11.66)$$

で表せる。 $\sigma_{\perp}$ はSpitzerの電気伝導度で、 $f(Z_i)$ は Z_i (又は有効電荷数 Z_{eff})の関数である。平行方向の力のつり合いの式(11.47)に式(11.65)を用いると

$$\langle J_{\parallel} B \rangle = \frac{\sigma_{\parallel}}{en_e} \{ en_e \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle + \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_e \rangle \} \quad (11.67)$$

と書ける。

平行粘性力はドリフト運動論的方程式を解かねば得られない。Hirshman と Sigmar の計算[3]によると平行粘性力はポロイダル流 $u_{a\theta}(\psi)$ を使って

$$\langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle = 3 \langle (\vec{b} \cdot \nabla B)^2 \rangle \mu_a u_{a\theta}(\psi) \quad (11.68)$$

と書ける。 μ_a は粘性係数である。この式は $u_{a\theta}$ のみに比例しており、 $u_{a\phi}$ は含まれていない。すなわち平行粘性力はポロイダル流にのみ比例している。これは軸対称トカマクではトロイダル方向に磁場は一様で粘性力が働かないためである。式(11.48)から

$$\vec{B} \cdot \nabla \vec{\Pi}_i + \vec{B} \cdot \nabla \vec{\Pi}_e = 0 \quad (11.69)$$

であるが第1項（イオン）は第2項（電子）よりずっと大きい。従って最低次では

$$\vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_i \simeq 0 \quad (11.70)$$

と考える。式(11.70)と式(11.68)及び式(11.53)より

$$u_{i\theta}(\psi) = \frac{u_{i\parallel} - V_i}{B} \simeq 0 \quad (11.71)$$

となるのでイオンの平行方向の流れは

$$u_{i\parallel} \simeq V_i = -\frac{F(\psi)}{e_i B} T_i \left(\frac{1}{P_i} \frac{dP_i}{d\psi} + \frac{e_i}{T_i} \frac{d\Phi}{d\psi} \right) \quad (11.72)$$

大アスペクト比近似では

$$u_{i\parallel} \simeq -\frac{T_i}{e_i B_p} \left(\frac{1}{P_i} \frac{dP_i}{dr} + \frac{e_i}{T_i} \frac{d\Phi}{dr} \right) \quad (11.73)$$

となる。最低次の近似では $u_{e\parallel} = u_{i\parallel}$ であるが $u_{e\parallel}$ と $u_{i\parallel}$ との差が $J_{\parallel}$ を生む。次の近似では

$$\begin{aligned} \langle J_{\parallel} B \rangle &= e_i n_i \langle u_{i\parallel} B \rangle - e n_e \langle u_{e\parallel} B \rangle \\ &\simeq e_i n_i \langle V_i B \rangle - e n_e (u_{e\theta}(\psi) \langle B^2 \rangle + \langle V_e B \rangle) \end{aligned} \quad (11.74)$$

となる。一方 $\langle J_{\parallel} B \rangle$ は式(11.68)を使うと

$$\langle J_{\parallel} B \rangle = \sigma_{\parallel} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle + \frac{\sigma_{\parallel}}{e n_e} 3 \langle (\vec{b} \cdot \nabla B)^2 \rangle \mu_e u_{e\theta}(\psi) \quad (11.75)$$

と書くことができるので、式(11.74)と(11.75)からポロイダル流が次のように求まる。

$$u_{e\theta}(\psi) = \frac{e n_e \langle B(V_i - V_e) \rangle - \sigma_{\parallel} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle}{e n_e \langle B^2 \rangle + \frac{\sigma_{\parallel}}{e n_e} 3 \langle (\vec{b} \cdot \nabla B)^2 \rangle \mu_e} \quad (11.76)$$

バナナ領域での粘性係数は文献[3]で次のように計算されている。

$$\mu_e \simeq \frac{f_t}{f_c} c_e (Z_{\text{eff}}) n_e m_e \nu_{ee} \frac{\langle B^2 \rangle}{3 \langle (\vec{b} \cdot \nabla B)^2 \rangle} \quad (11.77)$$

ここで、 f_t は捕捉粒子（バナナ粒子）の割合で、 $f_c = 1 - f_t$ である。 $c_e(Z_{\text{eff}})$ は Z_{eff} の関数で大きさは1程度の定数である。大アスペクト比近似では $f_t/f_c \simeq \sqrt{\varepsilon_t} \ll 1$ である。式(11.76)と式(11.77)を式(11.75)に代入して $\sqrt{\varepsilon_t}$ のオーダーまで計算する。 $\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle$ に比例する項はオーミック電流で、粘性力に比例する電流はブートストラップ電流である。すなわち

$$\langle J_{\parallel} B \rangle = \langle J_{\parallel} B \rangle_{OH} + \langle J_{\parallel} B \rangle_{BS} \quad (11.78)$$

と書くとオーミック電流は

$$\langle J_{\parallel} B \rangle_{OH} = \sigma_{NC} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle \quad (11.79)$$

$$\sigma_{NC} = \sigma_{\parallel} (1 - c\sqrt{\varepsilon_t}) \quad (11.80)$$

と表せる。 c はオーダー1の数値因子である。電気伝導度は $\sqrt{\varepsilon_t}$ 程度の割合だけ減少している。これは平行方向に電場を印加しても捕捉粒子（ $\sqrt{\varepsilon_t}$ の割合だけ存在する）は速やかに応答できないからである。

ブートストラップ電流は次の式で与えられる。

$$\langle J_{\parallel} B \rangle_{BS} = \frac{\sigma_{\parallel}}{en_e} \sqrt{\varepsilon_t} n_e m_e \nu_{ee} c_e \langle B(V_i - V_e) \rangle \quad (11.81)$$

今簡単に

$$J_{BS} \simeq -en_e u_{\parallel} \simeq \frac{\sigma_{\parallel}}{en_e} \sqrt{\varepsilon_t} n_e m_e \nu_{ee} (V_i - V_e) \quad (11.82)$$

とする。 V_i と V_e に式(11.81)の表示を代入すると次の関係が得られる。

$$\nu_{ei} m_e u_{\parallel} = \frac{\nu_{ee}}{\varepsilon_t} m_e \frac{-\varepsilon_t^{3/2} \frac{1}{B_p} \frac{dP}{dr}}{-en_e} \quad (11.83)$$

これは第(1)節の式(11.24)に他ならない。式(11.81)に V_e , V_i の表示式(11.54)を代入するとブートストラップ電流は $O(1)$ の数値因子を除いておおよそ

$$J_{BS} \simeq -\varepsilon_t^{1/2} \frac{1}{B_p} \frac{dP}{dr} \quad (11.84)$$

で与えられ、式(11.25)と一致する。

(4) 粒子拡散

磁気面を横切る粒子拡散について考える。このため式(11.33)のトロイダル成分をとり、磁気面平均を行う。式(11.33)と $R^2 \nabla \phi$ との内積を取ると $\vec{u}_a$ の項は

$$\langle R^2 \nabla \phi \cdot n_a \vec{u}_a \times \vec{B} \rangle = \langle R^2 n_a \vec{u}_a \cdot \vec{B} \times \nabla \phi \rangle = \langle \vec{u}_a \cdot \nabla \psi \rangle \quad (11.85)$$

で磁気面を横切る径方向の粒子束を与える。粘性力の項は付録の式(11.127)を使うと

$$\begin{aligned} \langle R^2 \nabla \phi \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle &= \langle \nabla \cdot (R^2 \nabla \phi \cdot \vec{\Pi}_a) \rangle \\ &= \frac{1}{V'} \frac{d}{d\psi} V' \langle R^2 \nabla \phi \cdot \vec{\Pi}_a \cdot \nabla \psi \rangle = 0 \\ &\quad \left(\nabla \phi \cdot \vec{\Pi}_a \cdot \nabla \psi = (\nabla \phi)_i \Pi_{ij} (\nabla \psi)_j = e^3 \Pi_{31} \vec{e}^1 \right) \end{aligned} \quad (11.86)$$

となる。これはトロイダル粘性力であり、上式より明かなようにストレステンソルの非対角項しか残らず零である。(少なくとも $O(\rho^3/L^3)$ 程度にしかない。) これは式(11.45)と同じことを意味しており、軸対称性のためトロイダル方向には粘性力は働かない。しかし、トロイダル方向にも磁場の大きさが変動する非軸対称ヘリカル系ではトロイダル粘性力は大きく、むしろ、この力が非軸対称ヘリカル系における粒子拡散を決める。 P_a は ψ のみの関数であるので ∇P_a はトロイダル成分を持たない。従って、式(11.33)のトロイダル成分の磁気面平均は

$$\langle n_a \vec{u}_a \cdot \nabla \psi \rangle = -\frac{1}{e_a} \langle R(F_{a\phi} + e_a n_a E_\phi) \rangle \quad (11.87)$$

となる。これが粒子拡散を決める式で粒子束は $\vec{F}_a$ 及び $\vec{E}_a$ の ϕ 成分で決められる。この粒子束は古典的及び新古典的拡散の両方を含んでいる。式(11.87)を粒子種 a について和をとると

$$\sum_a e_a \langle n_a \vec{u}_a \cdot \nabla \psi \rangle = -\langle R(\sum_a F_{a\phi} + \sum_a e_a n_a E_\phi) \rangle = 0 \quad (11.88)$$

となる。つまり

$$\langle n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \psi \rangle = Z_i \langle n_i \vec{u}_i \cdot \nabla \psi \rangle \quad (11.89)$$

であり、イオンの粒子束と電子の粒子束は常に等しい。径方向電場 E_ψ と独立に常に粒子束が等しいことを本来的両極性拡散 (intrinsic ambipolar diffusion, automatic ambipolar diffusion) という。これは、

- 1) 中性化条件 ($\sum_a e_a n_a = 0$)、
- 2) 衝突における運動量の保存 ($\sum_a \vec{F}_a = 0$)、
- 3) 軸対称性 ($\partial/\partial\phi = 0$)、

の結果である。第3番目の条件は（案内中心軌道の）トロイダル方向の一般化角運動量保存といってもよい。しかし、非軸対称系（ヘリカル系、リップルトカマク、...）では新古典的拡散は本来的に両極性ではない。非軸対称系では粒子束 $\Gamma_{a\psi}^{na}$ は E_ψ の関数であり両極性条件

$$\Gamma_{e\psi}^{na}(E_\psi) = Z_i \Gamma_{i\psi}^{na}(E_\psi) \quad (11.90)$$

を満たすよう径方向電場 E_ψ が決まる。また、軸対称系であっても荷電交換などにより運動量が持ち去られる場合も（第2の条件を満たさないため）本来的両極性拡散にはならない。プラズマ表面近傍（ポロイダル・ラーモア半径の数倍程度）においても粒子が選択的に表面から損失されるような状況では軸対称系でも第2の条件を満たさず本来的両極性拡散にはならない。

粒子種 a の速度分布関数を f_a 、衝突積分を $C(f_a)$ とすると

$$\begin{aligned} (\vec{F}_a)_\phi &= \int d^3v m_a (v_{\parallel\phi} + v_{\perp\phi}) C(f_a) \\ &= (F_{a\parallel})_\phi + (F_{a\perp})_\phi \end{aligned} \quad (11.91)$$

であり、 $(\vec{F}_{a\parallel})_\phi$ が新古典拡散を、 $(\vec{F}_{a\perp})_\phi$ が古典拡散を表す。すでに見たように

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle &= \langle \vec{B} \cdot \vec{F}_a \rangle + \langle e_a n_a \vec{B} \cdot \vec{E} \rangle \\ &= \langle B (F_{a\parallel} + e_a n_a E_{\parallel}^{(A)}) \rangle \end{aligned} \quad (11.92)$$

であり、これより新古典拡散は平行粘性と直接結び付いていることがわかる。つまり拡散とブートストラップ電流は直接関係している。

式(11.87)で与えられる磁気面を横切る粒子束を具体的に計算してみる。すでに見たように電子の粒子束とイオンの粒子束は等しいから電子の粒子束を計算する。まさつ力は

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_i = en_e \left(\frac{1}{\sigma_\perp} \vec{J}_\perp + \frac{1}{\sigma_\parallel} \vec{J}_\parallel \right) \quad (11.93)$$

で与えられる。 $\vec{J}_\perp$ は式(11.17)で与えられる反磁性電流であり、 $\vec{J}_\parallel$ は式(11.60)で与えられる平行電流である。 $F_{e\phi} = R\nabla\phi \cdot \vec{F}_e$ であるので式(11.87)と式(11.93)から電子の粒子束は

$$\langle n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \psi \rangle = \langle n_e R^2 \nabla \phi \cdot \left(\frac{1}{\sigma_\perp} \vec{J}_\perp + \frac{1}{\sigma_\parallel} \vec{J}_\parallel \right) - n_e R E_\phi \rangle \quad (11.94)$$

となる。反磁性電流は粒子のラーモア運動に起因して生ずるものであるので $\vec{J}_\perp$ に比例する項は古典拡散である。他の項は電場に比例するものとトーラス性に起因する新古典拡散である。すでに見たように、 $\vec{J}_\perp$ と $\vec{J}_\parallel$ は次のように与えられる。

$$\vec{J}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla P}{B^2} \quad (11.95)$$

$$\vec{J}_\parallel = \bar{b} \left\{ -\frac{F(\psi)}{B} \frac{dP}{d\psi} \left(1 - \frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} \right) + \langle J_\parallel B \rangle \frac{B}{\langle B^2 \rangle} \right\} \quad (11.96)$$

ここで $\langle J_\parallel B \rangle$ は式(11.67)及び式(11.68)で与えられる。式(11.95), (11.96)を式(11.94)に代入すると粒子束は

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_\psi^e \rangle &\equiv \langle n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \psi \rangle \\ &= \Gamma_d^e + \Gamma_{PS}^e + \Gamma_{bp}^e + n_e \frac{F(\psi)}{\langle B^2 \rangle} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle - \langle n_e R^2 \nabla \phi \cdot \vec{E} \rangle \end{aligned} \quad (11.97)$$

と書ける。ここで

$$\Gamma_d^e = \left\langle \frac{n_e}{\sigma_\perp} R^2 \nabla \phi \cdot \vec{J}_\perp \right\rangle \quad (11.98)$$

$$\Gamma_{PS}^e = - \left\langle \frac{n_e}{\sigma_\parallel} \left(\frac{F(\psi)}{B} \right)^2 \left(1 - \frac{B^2}{\langle B^2 \rangle} \right) \frac{dP}{d\psi} \right\rangle \quad (11.99)$$

$$\Gamma_{bp}^e = \frac{1}{e} \frac{F(\psi)}{\langle B^2 \rangle} \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_e \rangle \quad (11.100)$$

である。式(11.99)と(11.100)を導くのに

$$R^2 \nabla \phi \cdot \vec{b} = \frac{F(\psi)}{B} \quad (11.101)$$

の関係を使った。 Γ_d^e は古典拡散で、 Γ_{ps}^e はP-S電流による拡散、 Γ_{bp}^e はバナナ・プラトウ領域の拡散を表す。これを大アスペクト比近似の時に示してみよう。 $\langle \Gamma_\psi^e \rangle$ の $\vec{E}$ に比例する項により生ずる半径 r 方向の流れは

$$u_{er} \simeq \frac{E_p^{(A)}}{B} \sim \varepsilon_t \frac{1}{q} \frac{E^{(A)}}{B} \quad (11.102)$$

で近似でき充分小さく無視できる。

古典領域における拡散を計算してみよう。 $\vec{J}_\perp$ に反磁性電流を与える式(11.17)あるいは式(11.95)を代入すると

$$\Gamma_d^e = -\langle n_e \frac{1}{B^2} \frac{1}{\sigma_\perp} |\nabla \psi|^2 \frac{dP}{d\psi} \rangle \quad (11.103)$$

が得られる。大アスペクト比近似では付録の式を使うと、 $\langle n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \psi \rangle \simeq n_e u_{er} R B_p$ であるので、

$$n_e u_{er} = -\frac{n_e}{\sigma_\perp} \frac{1}{B^2} \frac{dP}{dr} \quad (11.104)$$

となる。もし $T_e = T_i = \text{const}$ とすると

$$n_e u_{er} = -D_c \frac{dn_e}{dr} \quad (11.105)$$

$$D_c = \nu_{ei} \rho_e^2 \quad \left(\rho_e = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}} \cdot \frac{m_e}{eB} \right) \quad (11.106)$$

となる。 D_c は古典的粒子拡散係数であり、ステップ長が電子のラーモア半径 ρ_e 、相関時間が電子の衝突時間 ν_{ei}^{-1} になっている。粒子のラーモア運動は流体としての流れ（反磁性流）を生ずるが、この反磁性流は電子とイオンとで方向が逆向きのため両者の間にまさつ力が働く。まさつ力 $\vec{F}_a$ は $n_e \vec{F}_a \times \vec{B} / (e_a B^2)$ の粒子束を径方向につくる。 $\vec{F}_e = -\vec{F}_i$ であり、また $e_e = -e < 0$, $e_i = Z_i e > 0$ であつ $n_e = Z_i n_i$ なので径方向粒子束はイオン、電子とも同じ方向で大きさも同じになる。これが式(11.105)である。P-S電流から生ずる

粒子束 Γ_{ps}^e は大アスペクト比近似では

$$n_e u_{er} = -\frac{n_e}{\sigma_{\parallel}} \frac{1}{B^2} q^2 \frac{dP}{dr} \quad \left(q = \frac{rB}{RB_p} \right) \quad (11.107)$$

となる。P-S 電流による拡散の意味については第(1)節の概論で述べたとおりである。もし電子が衝突頻度の大きい領域にあると $\langle J_{\parallel} B \rangle$ および E_{ϕ} による拡散は充分小さく粒子束は式(11.105)と式(11.107)をあわせて

$$n_e u_{er} = -\frac{n_e}{\sigma_{\perp}} \frac{1}{B^2} \left(1 + \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} q^2 \right) \frac{dP}{dr} \quad (11.108)$$

なる。これがP-S 衝突領域（古典領域）における粒子拡散である。

バナナ・プラウト領域の粒子束 Γ_{bp}^e をバナナ領域で評価してみる。 $\sqrt{\varepsilon_t}$ のオーダーまででは Γ_{bp}^e は

$$\begin{aligned} \Gamma_{bp}^e &= \frac{1}{e} \frac{F(\psi)}{\langle B^2 \rangle} \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_e \rangle \\ &= \frac{1}{e} \frac{F(\psi)}{\langle B^2 \rangle} \frac{en_e}{\sigma_{\parallel}} \langle J_{\parallel} B \rangle_{BS} \end{aligned} \quad (11.109)$$

で近似できるので、 $\langle J_{\parallel} B \rangle_{BS} \simeq J_{BS} B$ として J_{BS} に式(11.84)を用いると、 $\langle n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \psi \rangle \simeq n_e u_{er} R B_p$ であるので

$$n_e u_{er} \simeq -\sqrt{\varepsilon_t} \nu_{ei} \frac{m_e}{e^2 B_p^2} \frac{dP}{dr} \quad (11.110)$$

となる。今、 $T_e = T_i = T = \text{const}$ とすると

$$\begin{aligned} n_e u_{er} &= -D_b \frac{dn_e}{dr} \\ D_b &= -\varepsilon_t^{3/2} q^2 \nu_{ei} \rho_e^2 \end{aligned} \quad (11.111)$$

が得られ拡散係数 D_b は式(11.14)と一致する。バナナ領域では Γ_{bp}^e は Γ_{ps}^e , Γ_d^e よりずっと大きく $\langle \Gamma_{\psi}^e \rangle$ は Γ_{bp}^e で決まる。従ってバナナ領域ではブーツトラップ電流又は平行粘性力と粒子拡散は直接関係のあることがわかる。ヘリカル系プラズマでは、ブーツトラップ電流と直接関係する（軸対称）拡散とは別に（非軸対称）リップル拡散が存在する。

一般にリップル拡散はバナナ中心の運動で決まり、案内中心の運動で決まる軸対称拡散よりずっと大きい。

プラズマの輸送過程の間、磁気面は完全に空間的に固定されているのではない。実際、誘導電場があると $\partial\psi/\partial t = RE_\phi \neq 0$ で、また $\partial\psi/\partial t = \langle \vec{u}_\psi \cdot \nabla\psi \rangle$ であるので磁気面は運動する。磁気面を横切る粒子束はこの磁気面の運動も考慮して

$$\langle \Gamma_R^e \rangle = \Gamma_\psi^e - \langle f n_e \vec{u}_\psi \cdot \nabla\psi \rangle \quad (11.112)$$

で定義されねばならない。 f は磁気面の運動に寄与する粒子の割合である。バナナ領域におけるバナナの運動のみがこの磁気面の動く速さを有意なものにする。

電子の案内中心のドリフト面は

$$\frac{d\psi^*}{dt} = 0 \quad (\psi^* = \text{const}) \quad (11.113)$$

$$\psi^* = \psi + F(\psi) \frac{m_e v_{||}}{eB} \quad (11.114)$$

で与えられる[10]。式(11.113)をバナナの反射点から反射点まで積分すると、反射点では $v_{||} = 0$ であるので

$$\left(\frac{d\psi^*}{dt} \right) = \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = 0 \quad (11.115)$$

となる。これは、バナナの運動は磁気面の運動に凍りついていることを意味している。バナナ粒子の運動中

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{v}_G \cdot \nabla\psi \\ &= RE_\phi + \vec{v}_G \cdot \nabla\psi \end{aligned} \quad (11.116)$$

であるので

$$\langle \vec{u}_\psi \cdot \nabla\psi \rangle = -\overline{(\vec{v}_G \cdot \nabla\psi)} = \overline{(RE_\phi)} \quad (11.117)$$

となる。式(11.112)において大アスペクト比近似では $f \sim \sqrt{\varepsilon_t}$ で、また式(11.117)のバナナ中心の動く速さは

$$v_{Gr} \simeq -\frac{E_\phi}{B_p} < 0 \quad (11.118)$$

となる。 $\langle \Gamma_R^e \rangle$ はバナナ領域では

$$\langle \Gamma_R^e \rangle \simeq -D_b \frac{dn_e}{dr} - c' \sqrt{\varepsilon_t} \frac{E_\phi}{B_p} \quad (11.119)$$

となる。右辺第1項は $dn_e/dr < 0$ である限り径方向に向かう正の拡散であるが、第2項は負の値でプラズマ中心へ向かう流れである。これを Ware ピンチと呼ぶ[11]。式(11.119)の c' は衝突周波数を含む数値因子で衝突周波数が大きくなると減少していく。

(5) ヘリカル系の場合

ヘリオトロンやステラレータのようなヘリカル系は非軸対称系であり、トロイダル方向にも磁場の大きさは変動する。従ってポロイダル方向だけでなくトロイダル方向にも粘性力が働き、プラズマの流れをポロイダル方向にもトロイダル方向にも減衰させようとする。このような場合のプラズマの流れや平行電流に対する新古典理論が軸対称トカマクを含む形で定式化された[12~15]。ここでは、文献[13]に従って非軸対称系の場合の平行電流の新古典理論を簡単に紹介する。この理論は軸対称トカマクの場合を完全に包含しているのでトーラス全てにおいて一般的なものである。

非軸対称系でもオーミック電流やブートストラップ電流は軸対称トカマクと同様、平行方向の力の釣り合い、すなわち磁場方向の粘性力とまさつ力で決まる。まさつ力は速度空間分布のみで決まるので磁場配位には依存しないが、粘性力は磁場構造、粒子軌道に強く依存する。軸対称トカマクも含むトーラス一般において平行粘性力は Boozer 座標系 (ψ, θ, ζ) で

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \cdot \nabla \cdot \vec{\Pi}_a \rangle = & \left(\frac{J}{t} \langle G_{BS} \rangle_{Na} + I \right) \mu_a \langle \vec{u}_a \cdot \nabla \theta \rangle \\ & + J (1 - \langle G_{BS} \rangle_{Na}) \mu_a \langle \vec{u}_a \cdot \nabla \zeta \rangle \end{aligned} \quad (11.120)$$

と書ける。 θ と ζ はそれぞれポロイダル角、トロイダル角で、 $2\pi I$ は磁気面 ψ (Boozer 座標系ではトロイダル磁束を 2π で割ったもの) の中の全トロイダル電流、 $2\pi J$ は ψ より外の全ポロイダル電流である。 t は回転変換で $t = 1/q$ (q は安全係数) である。 $\langle G_{BS} \rangle_{Na}$

は a 種粒子の規格化形状因子と呼ばれ、 $\langle G_{BS} \rangle_{Na} \leq 1$ である。式(11.120)の第1行目はポロイダル方向の粘性力で、第2行目はトロイダル粘性力である。軸対称トカマクでは $\langle G_{BS} \rangle_{Na} = 1$ であるのでトロイダル粘性力は消える。これはトーラス方向には磁場の大きさが一定でこの方向には粘性力が働かないことを反映している。非軸対称系では一般に式(11.120)のように粘性力はポロイダル方向にもトロイダル方向にも働く。軸対称トカマクでは $\langle G_{BS} \rangle_{Na} = 1$ であるが非軸対称ヘリカル系では a 種粒子が $1/\nu$ 領域（バナナ領域）にあると $\langle G_{BS} \rangle_{Na}$ は大きく、また磁場配位に強く依存する。プラトウ領域にあると $\langle G_{BS} \rangle_{Na}$ は小さくなり磁場配位依存性も弱くなり、P-S 領域では非常に小さな量となる。もし、電子とイオンが異なる衝突周波数領域に存在し、 $\langle G_{BS} \rangle_{Ne} \neq \langle G_{BS} \rangle_{Ni}$ となった場合は、電子とイオンが受ける粘性力の方向が異なることになり、従って両者の流れ（回転）の方向は異なることになる。軸対称トカマクでは $\langle G_{BS} \rangle_{Na} = 1$ であるので粘性力の働く方向は同一なのでこのようなことは起こらない。

文献[13]では、任意の磁場配位（ヘリカル系もトカマクも他のトーラスも含む）、多成分プラズマ、任意の衝突周波数領域に対して成立するように定式化されている。もちろん運動量保存式だけでなくエネルギー保存式も解かれ熱粘性力も考慮されている。これを電子と一種のイオンのプラズマに適用するとブートストラップ電流は

$$\begin{aligned} \langle J_{\parallel} B \rangle_{BS} = & L_{11} [-\langle G_{BS} \rangle_e + \langle G_{BS} \rangle_i] en_e \frac{d\Phi}{d\psi} \\ & + L_{11} \left[\langle G_{BS} \rangle_e \frac{dP_e}{d\psi} + \langle G_{BS} \rangle_i \frac{dP_i}{d\psi} \right] \\ & + \langle G_{BS} \rangle_e (-L_{12} + L_{32}) n_e \frac{dT_e}{d\psi} + \langle G_{BS} \rangle_i (L_{14} - L_{34}) n_i \frac{dT_i}{d\psi} \quad (11.121) \end{aligned}$$

となる。ここで $L_{11}, L_{12}, \dots$ は輸送係数である。この式の右辺第1項は電場 $E_{\psi} = -d\Phi/d\psi$ に比例する項である。軸対称トカマクでは $\langle G_{BS} \rangle_e = \langle G_{BS} \rangle_i$ であるのでこの項は消える。しかし非軸対称系では電子とイオンが異なる衝突周波数領域にあると $\langle G_{BS} \rangle_e \neq \langle G_{BS} \rangle_i$ となり E_{ψ} に比例する項が残る。 L_{11} は負の量で電子が $1/\nu$ 領域にあるとその大きさは大きい。電子が $1/\nu$ 領域でイオンが仮にプラトウ領域にあるとすると $\langle G_{BS} \rangle_e \gg \langle G_{BS} \rangle_i$

で、かつ $E_\psi > 0$ ($d\Phi/d\psi < 0$) であるとする、 E_ψ に比例する項は従来の圧力駆動型ブートストラップ電流を打ち消す方向に流れる。 E_ψ が充分大きいとブートストラップ電流を消したり、あるいは負の方向に流すこともできる。軸対称トカマクでこのような E_ψ 駆動電流が流れないのは、軸対称性、衝突における運動量保存、準中性の3つの条件が満たされているからである。 E_ψ 駆動型ブートストラップ電流の物理機構は文献[16]に述べられている。

文献[13]ではプラズマの回転についても一般的に論じている。一般論を電子、主イオン、不純物イオンの3成分プラズマに応用して解析すると文献[14]に示されているように、ヘリカル系では非軸対称性が強い程ポロイダル流の方がトロイダル流より大きく、また、不純物イオンと主イオンとの回転の差は小さい。中性粒子入射加熱を行う時のように運動量が外部から注入されトルクがプラズマに与えられる場合は文献[15]に述べられている。

(6) 揺動の効果

新古典理論では、粒子軌道とクーロン衝突のみで決まるプラズマ輸送を考え、電磁場の揺動は一切考えない。この前提のもとに新古典理論はわずかの仮定（しかし充分妥当性のある仮定）のもとに理論体系を構っている。実際のプラズマには様々な電磁場の揺動があり、これにより様々な集団運動あるいは強い非線形現象が存在する。トカマクやヘリカル系でのプラズマ閉じ込め実験においては観測される粒子や熱の径方向拡散は電子に対してもイオンに対しても新古典理論が予測するものよりはるかに大きいものである。しかしながら、近年のトカマクやヘリカル系で観測されている電流は新古典理論でかなり良く説明できているのも事実である。観測されている電流とは、オーミック電流、ブートストラップ電流、中性粒子ビーム入射 (NBI) によるビーム電流 (Ohkawa 電流) などのことであり、具体的には電気伝導度やブートストラップ電流が新古典理論の予測とかなり、あるいは非常に良く一致し、また NBI での高速イオンの減衰過程、加熱入力分布、加熱効率なども ($m=1$ の鋸歯状振動や魚骨振動、TAE モードがない限り) 新古典理論で極めて良

く説明されている。

本稿では、軸対称トカマクでは新古典的拡散とブートストラップ電流は同じ平行粘性で表せる表裏一体のものであることを示した。然るに一方は実験的に観測され、他方はされていないことに疑問が生ずる。この疑問に対していくつかの説明がある[17~20]。これらは静電的揺動による平行電流を計算したり、あるいは与えられた静電揺動をドリフト運動論的方程式に繰り込み計算し、静電揺動スペクトルが粒子や熱拡散、ブートストラップ電流、電気伝導度に与える影響を計算している。Sugama と Horton[20] はヴラソフ・フォークープランクの式に準線形的静電揺動をつけ加え、揺動が拡散を生み出す垂直方向に与える影響、平行電流を生み出す平行の力に与える影響を研究した。これらの研究ではいずれも静電的揺動は磁場を横切る粒子や熱拡散には非常に大きな影響を与えるが、ブートストラップ電流に与える影響は小さく、電気伝導度には殆ど全く与えない、という結論である。この原因は明らかに、静電的揺動では $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ であるので、磁場に平行方向の揺動は波長は長いため平行方向の力のつり合いにあまり影響は与えないが、一方、垂直方向には波長は短いため垂直方向の力のつり合いは揺動に対して極めて敏感になるからである。

新古典理論で予測されるブートストラップ電流はトカマクでもヘリカルでも確かに観測されている。ブートストラップ電流が実在するということは軸対称トカマクでは新古典的拡散もまた実在することを意味している。しかし、揺動による異常拡散の方がずっと大きく新古典的拡散は観測されないものと思われる。ヘリカル系では事情はもう少し複雑である。ヘリカル系においてもブートストラップ電流は平行粘性より生ずる。しかし粒子拡散は平行粘性力により引き起こされるものの他に、トロイダル粘性力により引き起こされるものとがあり前者を軸対称拡散、後者をリップル拡散と呼んだりする。一般にリップル拡散の方が軸対称性拡散より大きい。ヘリカル系ではリップル拡散はブートストラップ電流と同様、磁場配位に対して強い依存性を持ち、また径方向電場にも強く依存する。

本稿では、平行電流も粒子拡散も運動方程式を解くだけで論じ、かつオーダ1の数値因子は無視してきた。軸対称トカマクにおける大アスペクト比近似での正確な新古典輸送係

数は文献[3]に見られる。また文献[3]は文献[2]とは異なる方法で新古典的輸送理論を構築し、多成分プラズマ、任意のプラズマ断面、任意のアスペクト比、任意の衝突周波数の軸対称トカマク・プラズマに対して一般的理論を展開している。

(7) 補足

軸対称トカマクの平衡磁場 $\vec{B}$ を磁場座標系を使って次のように表すことができる[21]。

$$\vec{B} = \nabla\phi \times \nabla\psi + F(\psi)\nabla\phi \quad (11.122)$$

第1項はポロイダル磁場 $\vec{B}_p$ を、第2項はトロイダル磁場 $\vec{B}_t$ を表している。ここで、 ϕ はトロイダル角、 ψ は磁気面を表すラベルで

$$\psi = -RA_\phi \quad (11.123)$$

ととる。これはポロイダル磁束を 2π で割ったものである。 R は図9.1の円筒座標 (R, φ, Z) の R 座標（大半径）で、 A_ϕ はベクトルポテンシャルのトロイダル成分である。§7でも示したが、 F は磁気面関数、すなわち ψ のみの関数で

$$F(\psi) = RB_t \quad (11.124)$$

で与えられる。 $|\nabla\phi| = 1/R$ であるので B_t はトロイダル磁場 $\vec{B}_t$ の大きさを示している。 θ をポロイダル角とすると、ある量 K の磁気面平均は次のように定義される。

$$\langle K \rangle \equiv \frac{d}{dV} \int K d^3x = \frac{d}{d\psi} \frac{d\psi}{dV} \int \frac{d\psi d\theta d\phi}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} K \quad (11.125)$$

$$= \frac{1}{V'} 2\pi \oint K \frac{d\theta}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} \quad \left(V' \equiv \frac{dV}{d\psi} = 2\pi \oint \frac{d\theta}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} \right) \quad (11.126)$$

また、 $\nabla \cdot \vec{K}$ の磁気面平均は

$$\langle \nabla \cdot \vec{K} \rangle = \frac{1}{V'} \frac{d}{d\psi} V' \langle \vec{K} \cdot \nabla\psi \rangle \quad (11.127)$$

と書ける。

本稿では、アスペクト比が大きいとき、すなわち $r/R_0 \ll 1$ のときは、図9.1の座標系 (r, θ, ϕ) を用いて諸量を計算する。このとき図9.1の O 点 ($R = R_0, Z = 0$) をプラズマ中心（磁気軸）とし、磁気面は O 点を中心とする同心円と仮定する（すなわち $r = \text{const}$ が磁気面を表す）。このような近似では

$$R = R_0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (11.128)$$

であるので、磁場の大きさ B は

$$B \simeq B_t \simeq \frac{R_0 B_0}{R} \simeq B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (11.129)$$

と書ける。

また、 θ 方向の単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とすると

$$\vec{B}_p = \frac{|\nabla\psi|}{R} \vec{e}_\theta \quad (11.130)$$

であり、 $\vec{e}_r$ を r 方向の単位ベクトルとすると

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= RB_p \vec{e}_r \\ &\simeq R_0 \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) B_p(r) \vec{e}_r \end{aligned} \quad (11.131)$$

と近似できる。ある磁気面量 $A(\psi)$ の微分は

$$\frac{dA(\psi)}{d\psi} = \frac{1}{RB_p} \frac{dA}{dr} \quad (11.132)$$

と書ける。

参考文献

- [1] A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev : Sov. Phys. JETP 26 (1968) 233.
- [2] F.L. Hinton and R.D. Hazeltine : Rev. Mod. Physics 48 (1976) 239.

- [3] S.P. Hirshman and D.J. Sigmar : Nucl. Fusion 21 (1981) 1079.
- [4] R.D. Hazeltine : " Review of Neoclassical Transport Theory ", Advances in Plasma Physics Vol. 6 (ed. P.K. Kaw, W.L. Kruer, C.S. Liu, and K. Nishikawa), John Wiley & Sons, 1976.
- [5] D. Pfirsch and A. Schlüter : Report of Max-Planck-Institute for Plasma Physics and Astrophysics, MPI/PA/7/62, München (1962).
- [6] R.J. Bickerton, J.W. Connor, and J.B. Taylor : Nature Phys. Sci. 229 (1971) 110.
- [7] A.A. Galeev and R.Z. Sagdeev : in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 4th Int. Conf. Madison, 1971), Vol. 1, IAEA Vienna (1972) p. 481.
- [8] B.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov : in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 4th Int. Conf. Madison, 1971), Vol. 2, IAEA, Vienna (1972) p. 479.
- [9] S.I. Braginskii, " *Transport Processes in a Plasma* ", Review of Plasma Physics (de. M.A. Leontovich), Vol.1, Consultant Bureau, New York (1965).
- [10] A.I. Morozov and L.S. Solovèv, Rev. Plasma Phys. Vol. 2 (ed. M.A. Leontovich), Consultant Bureau, New York 1966.
- [11] A.A. Ware : Phys. Rev. Lett. 25 (1970) 15.
- [12] K.C. Shaing and J.D. Callen : Phys. Fluids 26 (1983) 3315.
- [13] N. Nakajima and M. Okamoto : J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992) 833.
- [14] N. Nakajima and M. Okamoto : J. Phys. Soc. Jpn. 60 (1991) 4146.

- [15] N. Nakajima and M. Okamoto : Kakuyugo-Kenkyu 68 (1992) 46.
- [16] N. Nakajima, M. Okamoto, and M. Fujiwara : Kakuyugo-Kenkyu 68 (1992) 503.
- [17] S.I. Itoh and K. Itoh : Phys. Letters A 127 (1988) 267.
- [18] K.C. Shaing : Phys. Fluids 31 (1988) 8.
- [19] K.C. Shaing : Phys. Fluids 31 (1988) 2249.
- [20] H. Sugama and W. Horton : Phys. Plasmas 2 (1995) 2989.
- [21] V.D. Shafranov : Rev. Plasma Phys. Vol. 2 (ed. M.A. Leontovich), Consultant Bureau, New York, 1966.

Publication List of NIFS-PROC Series

- NIFS-PROC-1 *"U.S.-Japan on Comparison of Theoretical and Experimental Transport in Toroidal Systems Oct. 23-27, 1989", Mar. 1990*
- NIFS-PROC-2 *"Structures in Confined Plasmas –Proceedings of Workshop of US-Japan Joint Institute for Fusion Theory Program–"; Mar. 1990*
- NIFS-PROC-3 *"Proceedings of the First International Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion –Next Generation Experiments in Helical Systems– Dec. 4-7, 1989" Mar. 1990*
- NIFS-PROC-4 *"Plasma Spectroscopy and Atomic Processes –Proceedings of the Workshop at Data & Planning Center in NIFS–"; Sep. 1990*
- NIFS-PROC-5 *"Symposium on Development of Intensified Pulsed Particle Beams and Its Applications February 20 1990"; Oct. 1990*
- NIFS-PROC-6 *"Proceedings of the Second International TOKI Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion , Nonlinear Phenomena in Fusion Plasmas -Theory and Computer Simulation-"; Apr. 1991*
- NIFS-PROC-7 *"Proceedings of Workshop on Emissions from Heavy Current Carrying High Density Plasma and Diagnostics"; May 1991*
- NIFS-PROC-8 *"Symposium on Development and Applications of Intense Pulsed Particle Beams, December 6 - 7, 1990"; June 1991*
- NIFS-PROC-9 *"X-ray Radiation from Hot Dense Plasmas and Atomic Processes"; Oct. 1991*
- NIFS-PROC-10 *"U.S.-Japan Workshop on "RF Heating and Current Drive in Confinement Systems Tokamaks" Nov. 18-21, 1991, Jan. 1992*
- NIFS-PROC-11 *"Plasma-Based and Novel Accelerators (Proceedings of Workshop on Plasma-Based and Novel Accelerators) Nagoya, Japan, Dec. 1991"; May 1992*
- NIFS-PROC-12 *"Proceedings of Japan-U.S. Workshop P-196 on High Heat Flux Components and Plasma Surface Interactions for Next Devices"; Mar. 1993*
- NIFS-PROC-13 『NIFS シンポジウム
「核燃焼プラズマの研究を考えるー現状と今後の取り組み方」
1992 年 7 月 15 日、核融合科学研究所」
1993 年 7 月

NIFS Symposium

"Toward the Research of Fusion Burning Plasmas -Present Status and Future strategy-", 1992 July 15, National Institute for Fusion Science"; July 1993 (in Japanese)

NIFS-PROC-14 *"Physics and Application of High Density Z-pinchs", July 1993*

NIFS-PROC-15 岡本正雄、講義「プラズマ物理の基礎」
平成5年度 総合大学院大学
1994年2月
M. Okamoto,
"Lecture Note on the Bases of Plasma Physics"
Graduate University for Advanced Studies
Feb. 1994 (in Japanese)

NIFS-PROC-16 代表者 河合良信
平成5年度 核融合科学研究所共同研究
研究会報告書
「プラズマ中のカオス現象」
"Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences"
Report of the meeting on Chaotic Phenomena in Plasma
Apr. 1994 (in Japanese)

NIFS-PROC-17 平成5年度 NIFS シンポジウム報告書
「核融合炉開発研究のアセスメント」
平成5年11月29日-30日 於 核融合科学研究所
"Assessment of Fusion Reactor Development"
Proceedings of NIFS Symposium held on November 29-30,
1993 at National Institute for Fusion Science" Apr. 1994
(in Japanese)

NIFS-PROC-18 *"Physics of High Energy Density Plasmas Produced by Pulsed Power" June 1994*

NIFS-PROC-19 K. Morita, N. Noda (Ed.),
"Proceedings of 2nd International Workshop on Tritium Effects in Plasma Facing Components at Nagoya University, Symposium Hall, May 19-20, 1994", Aug. 1994

NIFS-PROC-20 研究代表者 阿部 勝憲 (東北大学・工学部)
所内世話人 野田信明
平成6年度 核融合科学研究所共同研究 [研究会]
「金属系高熱流束材料の開発と評価」成果報告書
K. Abe and N. Noda (Eds.),
"Research and Development of Metallic Materials for Plasma Facing and High Heat Flux Components" Nov. 1994
(in Japanese)

NIFS-PROC-21 世話人：森田 健治 (名大工学部)、金子 敏明 (岡山理科大学理学部)
「境界プラズマと炉壁との相互作用に関する基礎過程の研究」

研究会報告

K. Morita (Nagoya Univ.), T. Kaneko (Okayama Univ. Science)(Eds.)
"NIFS Joint Meeting "Plasma-Divertor Interactions" and
"Fundamentals of Boundary Plasma-Wall Interactions"
January 6-7, 1995 National Institute for Fusion Science"
Mar. 1995 (in Japanese)

- NIFS-PROC-22 代表者 河合 良信
 プラズマ中のカオス現象
 Y. Kawai,
 "Report of the Meeting on Chaotic Phenomena in Plasma, 1994"
 Apr. 1995 (in Japanese)
- NIFS-PROC-23 K. Yatsui (Ed.),
 "New Applications of Pulsed, High-Energy Density Plasmas";
 June 1995
- NIFS-PROC-24 T. Kuroda and M. Sasao (Eds.),
 "Proceedings of the Symposium on Negative Ion Sources and Their
 Applications, NIFS, Dec. 26-27, 1994" , Aug. 1995
- NIFS-PROC-25 岡本 正雄
 新古典輸送概論 (講義録)
 M. Okamoto,
 "An Introduction to the Neoclassical Transport Theory"
 (Lecture note), Nov. 1995 (in Japanese)
- NIFS-PROC-26 Shozo Ishii (Ed.),
 "Physics, Diagnostics, and Application of Pulsed High Energy
 Density Plasma as an Extreme State"; May 1996
- NIFS-PROC-27 代表者 河合 良信
 プラズマ中のカオスとその周辺非線形現象
 Y. Kawai ,
 "Report of the Meeting on Chaotic Phenomena in Plasmas and
 Beyond, 1995", Sep. 1996 (in Japanese)
- NIFS-PROC-28 T. Mito (Ed.),
 "Proceedings of the Symposium on Cryogenic Systems for Large Scale
 Superconducting Applications", Sep. 1996
- NIFS-PROC-29 岡本 正雄
 講義「核融合プラズマ物理の基礎 - I」
 平成 8 年度 総合研究大学院大学 数物科学研究科 核融合科学専攻
 1996年 10月
 M. Okamoto
 "Lecture Note on the Fundamentals of Fusion Plasma Physics - I"
 Graduate University for Advanced Studies; Oct. 1996 (in Japanese)

NIFS-PROC-30

研究代表者 栗下 裕明 (東北大学金属材料研究所)
所内世話人 加藤 雄大
平成 8 年度核融合科学研究所共同研究
「被損傷材料の微小体積強度評価法の高度化」研究会
1996年 10月 9日 於：核融合科学研究所

H. Kurishita and Y. Katoh (Eds.)

*NIFS Workshop on Application of Micro-Indentation Technique to
Evaluation of Mechanical Properties of Fusion Materials, Oct. 9,
1996, NIFS*

Nov. 1996 (in Japanese)

NIFS-PROC-31

岡本 正雄
講義「核融合プラズマ物理の基礎 - II」
平成 8 年度 総合研究大学院大学 数物科学研究科 核融合科学専攻
1997年 4月

M. Okamoto

"Lecture Note on the Fundamentals of Fusion Plasma Physics - II"
Graduate University for Advanced Studies; Apr. 1997 (in Japanese)