

平成 19 年度 NIFS 共同研究、研究会「MHD 理論の進展とその周辺」集録
Proceedings of Workshop of NIFS Cooperative Programs 2007
‘Progress of MHD Theory and Related Topics’

Abstract

A workshop of NIFS cooperative programs (NIFS07KKGL002), ‘Progress of MHD theory and related topics’ was held from 1 November to 2 November in 2007 at National Institute of Fusion Science. The contributed papers in the workshop are collected here.

Key Words:

MHD theory, heliotron, tokamak, stability, equilibrium, simulation, eigenvalue problem, numerical scheme, flow, RWM, NTM, magnetic island, pellet ablation

序

2007年11月1日—2007年11月2日の日程で、平成19年度核融合科学研究所一般共同研究、研究会「MHD理論の進展とその周辺」(NIFS07KKGL002、研究代表者：核融合科学研究所、市口勝治)を開催した。

MHD現象の理論的解明は、磁場閉じ込めプラズマにおいて非常に基本的かつ重要な問題であり、核融合プラズマを理解する上で解決すべき問題も多く残されている。特に、近年では、LHD実験におけるMHD崩壊現象の解明や、ITERにおけるNTM, RWM, ディスラプションのようなMHDイベント制御に関する包括的理解が重要課題となっている。このような問題に対する研究を強力に推進するためには、個々の装置に特化した解析だけでなく、様々な観点からの幅広い知識の集積と、その根底に共通する学理を探求することが重要である。そこで本研究会では、MHD理論を専門とする所内外の多くの研究者が情報交換を行うこと、及び、それに基づいて双方における研究を発展させていくことを目的とした。

MHDの理論的研究には、基礎方程式の性質の探求、研究対象に適したモデル方程式の構築あるいは拡張、要素的現象に関する数値解析、実験を見通した大規模シミュレーションと、様々な研究の側面がある。今回の研究会では、それぞれの専門家が多数集結することができたため、同じ対象でも異なる側面からの研究結果が提示されたり、類似の手法を用いた研究間においても、対象の異なる研究結果から様々な示唆が提示されたりという、有機的な議論を行うことができた。また、本研究会では、テーマをMHD理論という枠組みに限定しているので、各自が自分の研究にフィードバックしやすい身近なアイデアをより多く吸収できたと考えられる。今回、このように非常に有意義な研究会を開催することができたため、本研究会の成果をプロシーディングスにまとめることとした。本プロシーディングスが、今後のMHD理論研究の発展に大いに寄与することを祈念する。

最後に、ご多忙の中、本研究会に参加していただき、また原稿を執筆していただきました参加者の皆様に厚く御礼申し上げます。

2008年12月

研究代表者：

核融合科学研究所 大型ヘリカル研究部、理論・データ解析研究系
市口 勝治

平成 19 年度核融合科学研究所一般共同研究、研究会

「MHD 理論の進展とその周辺」

研究代表者：市口勝治(核融合研)

日時：2007 年 11 月 1 日（木）13：45 — 11 月 2 日（金）16：10

場所：核融合科学研究所 研究 I 期棟 8 階セミナー室

プログラム（敬称略）

11 月 1 日（木）

13：45 開会のごあいさつ 研究代表者：市口勝治（核融合研）

座長：徳田伸二（原子力機構）

13：50 吉田善章（東大新領域）

「渦の非正準力学とマルチスケール構造」

14：30 廣田 真（九大数理学研究院）

「流れをもつ MHD 平衡における波のエネルギー」

15：00 伊藤 淳（核融合研）

「流れを持つ MHD 平衡の拡張」

15：30 休憩

座長：吉田善章（東大新領域）

15：45 松元亮治（千葉大理）

「磁気降着円盤の時間変動と状態遷移」

16：25 石澤明宏（核融合研）

「磁気島と微視的乱流の相互作用」

16：55 市口勝治（核融合研）

「ヘリオトロンプラズマの非線型発展におけるメルシエ安定性の改善」

17：30 懇親会（ヘリコンクラブロビー）

19：00

19：20 東濃バス多治見駅行き出発

11月2日(金)

座長：古川 勝(東大新領域)

9:00 徳田伸二(原子力機構)

「エネルギー汎関数法による抵抗性壁モード解析」

9:40 相羽信行(原子力機構)

「周辺局在MHDモードの安定性解析への高n展開の適用と流れを考慮した安定性解析への応用」

10:10 休憩

座長：中村祐司(京大エネ科)

10:25 古川 勝(東大新領域)

「誤差磁場による磁気島生成に対するプラズマ流の効果」

11:05 石井康友(原子力機構)

「外部揺動による回転プラズマ中で磁気島の成長」

11:35 松本太郎(原子力機構)

「円柱プラズマにおける抵抗性MHDスペクトル」

12:05 昼食

座長：石井康友(原子力機構)

13:30 山田豪史(京大エネ科)

「簡約化MHD方程式を用いた抵抗性不安定性解析」

14:00 石崎龍一(核融合研)

「ヘリカルプラズマにおけるプラズモイドの運動」

14:30 休憩

座長：松本太郎(原子力機構)

14:45 水口直紀(核融合研)

「ヘリカル系における崩壊現象の非線形シミュレーション」

15:15 中島徳嘉(核融合研)

「シャフラノフシフトとバルーニングモード」

15:45 まとめと今後について

16:10 閉会

16:30 東濃バス多治見駅行き出発

目次

渦の非正準力学とマルチスケール構造	1
吉田善章 (原子力機構)	
流れをもつ MHD 平衡における波のエネルギー	8
廣田 真 (九大数理学研究院)	
流れを持つ MHD 平衡の拡張	15
伊藤 淳 (核融合研)	
磁気降着円盤の時間変動と状態遷移	25
松元亮治 (千葉大理)	
磁気島と微視的乱流の相互作用	31
石澤明宏 (核融合研)	
ヘリオトロンプラズマの非線型発展におけるメルシエ安定性の改善	35
市口勝治 (核融合研)	
エネルギー汎関数法による抵抗性壁モード解析	42
徳田伸二 (原子力機構)	
周辺局在 MHD モードの安定性解析への高 n 展開の適用と流れを考慮した安定性解析への応用	53
相羽信行 (原子力機構)	
誤差磁場による磁気島生成に対するプラズマ流の効果	66
古川 勝 (東大新領域)	
外部揺動による回転プラズマ中で磁気島の成長	76
石井康友 (原子力機構)	
簡約化 MHD 方程式を用いた抵抗性不安定性解析	82
山田豪史 (京大エネ科)	
ヘリカルプラズマにおけるプラズモイドの運動	89
石崎龍一 (核融合研)	
ヘリカル系における崩壊現象の非線形シミュレーション	93
水口直紀 (核融合研)	
シャフラノフシフトとバルーニングモード	95
中島徳嘉 (核融合研)	

Non-Canonical and Multiscale Structures in Vortex Dynamics Systems

Z. Yoshida

*Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo,
Chiba 277-8561, Japan*

June 1, 2008

Abstract

The Lagrangian for collective (fluid-mechanical) matter-field coupling must incorporate a non-canonical structure in order to describe a nonzero “vorticity” of the momentum (violating the basic Hamilton-Jacobi relation $\mathbf{P} = \nabla S$ for the momentum \mathbf{P} and the action S). Here, the non-canonical structure is represented by a singular Poisson bracket, which allows existence of “Casimir invariants”. Adding Casimir invariants, one may transform the Hamiltonian without changing the dynamics. This transformation reveals an interesting “multiscale” property of the system, because the Casimir invariants have different scalings in comparison with the Hamiltonian.

1 Introduction

From the view-point of nonlinear field theory, “flow” is a delicate subject — the nature of flow is often indicated by adjectives crowned with “non”, such as non-linear, non-Hermitian, non-canonical, non-Abelian, non-commutative, etc., and thus, fluid mechanics is a rich resource of basic concepts that may be disseminated to other fields of sciences.

The origin of “vorticity” is the central problem which makes the theory extremely non-trivial. The Lagrangian for fluid motion must incorporate a “non-canonical” structure that is symbolized by the vorticity of the momentum. Remembering the basic relation $\mathbf{P} = \nabla S$ (\mathbf{P} is the momentum and S is the action) of the Hamilton-Jacobi equations, it is interesting to ask how a mechanical system, being described by the criticality of some action, can attain a vorticity ($\nabla \times \mathbf{P} \neq 0$). A potential flow $\mathbf{P} = \nabla S$ suffices for the mechanics of a “particle”, because the notion of a bundle of orbits is not there; the vorticity (helicity) is a geometric index measuring the twists of multiple orbits. It is worthwhile noting that any theory that constructs fields from the action cannot have a vorticity of the phase; a well-known example is the Ginzburg-Landau wave function of a super-fluid.

The attempt to formulate a fluid-mechanical Lagrangian has a long history [1, 2, 3, 4]. Some different Lagrangians have been proposed, while some of them are “incomplete” to describe general motion of fluids, and the relations among these formulations are not well understood. It is rather straightforward

to extend the classical-mechanical Lagrangian for particle motion to that for continuum by invoking the notion of diffeomorphism that describes the displacements of matter in the “Lagrangian view”. However, difficult exploration has been continuing aiming at developing an “Eulerian view”. While classical mechanics is based on the Lagrangian view, standard field theories stand behind the Eulerian view. The above-mentioned problem, the origin of vorticity is, indeed, posed in the quest for the latter.

The Lagrangian view attributes the origin of vorticity to the “initial condition”, and its diachronic analysis of vortex dynamics is unaware of the “topological defects” associated with the vorticity. The Eulerian view finds singularities in formulating Poisson brackets with synchronic variables. So-called “Casimir invariants” [5, 6], defining the kernel of the Poisson bracket operator, produces a variety of interesting structures. We will formulate a variational principle to analyze multi-scale collective matter-field coupling in plasmas [7, 8].

2 Fluid Mechanics in Lagrangian View

The Lagrangian for the collective matter-field couplings may be naturally derived by generalizing the Lagrangian of a particle (mass m and charge e) in the presence of an EM field (we consider the non-relativistic limit for simplicity):

$$L = L_P + L_{EM}, \quad (1)$$

$$L_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - H, \quad (2)$$

$$L_{EM} = \int \mathcal{L}_{EM} dx = \int -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx, \quad (3)$$

where $H = p^2/(2m) + e\phi$ is the Hamiltonian, $\mathbf{P} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ is the canonical momentum, and \mathbf{p} is the mechanical momentum. The vector and the scalar potentials define the four potential $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ whose curl is the Faraday (field strength) tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. The velocity \mathbf{v} is related to the particle orbit $\mathbf{q}(t)$ (along which L_P is to be evaluated) by

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (4)$$

The relation (4) is the essential input that “causes” the motion of the particle. Indeed, if we calculate the variation of $\int L dt$ for general $\delta\mathbf{v}$, we find $\mathbf{P} = 0$, but, for $\delta\dot{\mathbf{q}}$, with fixed end points $\mathbf{q}(t_0)$ and $\mathbf{q}(t_1)$, the well-known Lagrange’s equation of motion follows.

Generalizing the single particle orbit $\mathbf{q}(t)$ to a diffeomorphism $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t)$ in \mathbf{R}^3 (\mathbf{x}_0 being the initial position of each streamline), we construct the fluid Lagrangian

$$L_F = \int \mathcal{L}_F dx = \int (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} - H_F) \rho dx \quad (5)$$

by replacing the single-particle velocity $\dot{\mathbf{q}}$ in (4) by the flow velocity

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{Q}}|_{\mathbf{x}, t} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t). \quad (6)$$

Here, $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$ is the initial position of the streamline being connected to the time-space position (\mathbf{x}, t) . To relate (\mathbf{x}, t) to $(\mathbf{x}_0, 0)$, one needs the inverse

map $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ of the diffeomorphism $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t)$, which traces-back the streamlines.

The fluid Hamiltonian H_F consists of the kinetic and potential energies plus an “internal (thermal) energy” $\varepsilon(\rho)$:

$$H_F = H + \varepsilon(\rho). \quad (7)$$

The fluid density ρ is defined by

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)) \cdot \frac{D(\mathbf{x}_0)}{D(\mathbf{x})}. \quad (8)$$

When we formally take $\rho_0(\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{q}_0 - \mathbf{x}_0)$, we recover (1) with $\rho d\mathbf{x}dt$ giving the integral along the orbit $\mathbf{q}(t)$.

In what follows we denote

$$D_t f = \partial_t f + \mathbf{V} \cdot \nabla f, \quad (9)$$

$$D_t^* f = \partial_t f + \nabla \cdot (\mathbf{V} f). \quad (10)$$

The mass conservation law

$$D_t^* \rho = 0 \quad (11)$$

is a direct consequence of (8). By the criticality of the action $\int (L_F + L_{EM})dt$, fixing the space-time boundaries, we obtain, from the variation $\delta \mathbf{p}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$ ($= m\dot{\mathbf{Q}}$), and from $\delta \mathbf{Q}$, the equation of motion

$$mD_t \mathbf{V} = -\nabla h + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right), \quad (12)$$

where $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}/c$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, and h is the enthalpy density defined by $h = \partial(\rho\varepsilon)/\partial\rho = \varepsilon + \mathcal{P}/\rho$ (\mathcal{P} is the pressure; $\rho\nabla h = \nabla \mathcal{P}$). Maxwell’s equations with the currents $(e\rho, e\rho\mathbf{V})$ follow from δA_μ .

3 Fluid Mechanics in Eulerian View

In this section, we formulate an Eulerian representation of the fluid Lagrangian. In the Eulerian case where no *a priori* relation between the fluid velocity \mathbf{V} and the streamlines is assumed, and the unrestricted variation $\delta \mathbf{V}$ yields $\mathbf{P} = 0$. To reproduce properly the evolution equations, we must appropriately “constrain” \mathbf{V} .

The measure $\rho d\mathbf{x}dt$, defined by (8), is the generalization of the integral along a single orbit to collective orbits. It was argued, then, that imposing a physically motivated “restriction” on ρ that leads to the conservation law (11), must be a step in the right direction. Serrin, in a pioneering paper [1], proposed the Lagrangian density

$$\mathcal{L}_F = \rho(\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} - H_F) + S D_t^* \rho, \quad (13)$$

in which the variation of the Lagrange multiplier S does exactly that.

The Serrin Lagrangian, however, is inadequate because the momentum $\mathbf{P} = \nabla S$ (obtained by the variation $\delta \mathbf{V}$) describes only an “irrotational” flow representing a relatively small area of general fluid mechanics. We will see later that this restriction is due to a “canonical structure” premised by (13).

To derive flows with vorticity, Lin [2] imposed another constraint by including a term $\rho\alpha(\partial_t\beta + \mathbf{V} \cdot \nabla\beta)$ to the integrand of (13). The resulting flow $\mathbf{P} = \nabla S + \alpha\nabla\beta$, corresponding to the so-called Clebsch parameterization of a vector field, does acquire a finite “vorticity” ($\nabla \times \mathbf{P} = \nabla\alpha \times \nabla\beta$). Unfortunately, the Clebsch representation (with a single valued S, α and β) is not a global representation for arbitrary flows with non-zero helicity. The Serrin-Lin Lagrangian still falls short of reproducing the fluid dynamics of arbitrary flows.

We propose a generalized and rearranged Serrin-Lin-type Lagrangian density

$$\mathcal{L}_F = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} - H_F - (D_t S + \lambda^j D_t \sigma_j)] \rho. \quad (14)$$

The variational principle $\delta \int (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{EM}) dxdt = 0$ yields a complete set of determining equations. By $\delta\mathbf{V}$, we obtain $\mathbf{P} = \nabla S + \lambda^j \nabla\sigma_j$ that is now “complete” to represent any three-dimensional vectors if we take (at least) three independent scalars σ_j . The fluid (plasma) equation follows from

$$D_t \mathbf{P} = D_t(\nabla S + \lambda^j \nabla\sigma_j) = -\nabla(e\phi + h) + \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A}],$$

which is equivalent to (12).

The role of S is best understood by referring to the original Serrin form ($\lambda^j = \sigma_j = 0$). Though Serrin’s S is a Lagrange multiplier that imposes mass conservation (11), we proffer a different interpretation. By moving (by integrating by parts) D_t^* from ρ to S , one may think of ρ as a Lagrange multiplier demanding that \mathcal{L}_F must be a complete derivative (evaluated through each streamline of \mathbf{V}) of some scalar field S —this is nothing but Hamilton’s principle demanding the criticality of the action integral with S as the “action”.

We have to specify what we have called “non-canonical”. A canonical Hamiltonian mechanics is endowed with a regular (non-degenerate) Poisson bracket, i.e., if $\{F, C\} \equiv 0$ for all F , C must be a constant. Otherwise, i.e., if there exists such a non-constant C , which we call a “Casimir invariant”, the system is non-canonical.

The fluid-mechanics equations do have a Casimir invariant, that is the so-called “helicity” defined by $C = \int (\nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{P} dx$ [5, 6]. Obviously, if $\mathbf{P} = \nabla S$, then the helicity density is zero, implying that $C = 0$. A Clebsch-form vector field has a finite helicity density; if $\mathbf{P} = \nabla S + \alpha\nabla\beta$, we have $C = \int \nabla \cdot (S\nabla\alpha \times \nabla\beta) dx$. This C is fixed, when we give boundary conditions on the Clebsch parameters S, α, β . Then, the kernel of the Poisson bracket is removed, and hence, we obtain a “canonical” system. Jackiw [4] showed that the (S, ρ) and $(S\alpha, \beta)$ compose canonical pairs describing the fluid motion. As mentioned above, however, Clebsch-form falls short to represent general \mathbf{P} , and, indeed, the general fluid mechanics is “non-canonical” in a sense that the helicity is a Casimir invariant; See Sec. 4.

4 Casimir Invariants, Beltrami Fields, Lyapunov Function

In this section, we study the non-canonical Hamiltonian structure of the collective matter-field coupling. We start with an abstract formulation. Let $H(u)$

denote a Hamiltonian of a state vector u , and

$$\frac{d}{dt}u = \mathcal{A}\partial_u H(u), \quad (15)$$

where \mathcal{A} is an antisymmetric operator such as $(\mathcal{A}f, g) + (f, \mathcal{A}g) = 0$.¹ Defining the Lie-Poisson bracket by $\{G(u), F(u)\} = (\mathcal{A}\partial_u G(u), \partial_u F(u))$, Liouville's equation is

$$\frac{d}{dt}F(u) = \{H(u), F(u)\}. \quad (16)$$

Simple examples are:

1. For $u = (q_1, \dots, q_\nu, p_1, \dots, p_\nu)$, (15) reads as Hamilton's canonical equation with

$$H(u) = \frac{1}{2m} \sum_j p_j^2 + U(\mathbf{q}), \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

2. For $u = u(x, t)$, (15) reads as Schrödinger's equation with

$$H(u) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla u|^2 + U(x) \right) dx, \quad \mathcal{A} = -i/\hbar,$$

In what follows, we consider a nonlinear \mathcal{A} that may have a kernel (defining a topological defect). A functional $F(u)$ commuting with $H(u)$ (i.e., $\{H(u), F(u)\} = 0$) is a constant of motion. When \mathcal{A} has a kernel, there may exist a constant of motion originating from the Lie-Poisson bracket (independent to a specific choice of the Hamiltonian), i.e., $C(u)$ such as

$$\{G(u), C(u)\} = 0 \quad (\forall G(u)), \quad (17)$$

which we call a ‘‘Casimir invariant’’. Suppose that the system has Casimir invariants $C_\nu(u)$ ($\nu = 1, \dots, \nu$). Each Casimir invariant derives a (parameterized) transformation of the Hamiltonian:

$$G_\mu(u) = H(u) + \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j C_j(u), \quad (18)$$

which does not change the dynamics (16).

While the critical point (equilibrium point) of the Hamiltonian is often trivial, that of the transformed Hamiltonian (18) exhibits interesting structures. Let us analyze the variational principle

$$\delta G_\mu(u) = \delta \left(H(u) + \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j C_j(u) \right) = 0, \quad (19)$$

which yields a set of critical points parameterized by μ_1, \dots, μ_ν . We call the solutions to (19) as ‘‘Beltrami equilibria’’ [7]. Since each $C_j(u)$ may have different

¹We use the standard notations of the inner product (\cdot, \cdot) and the norm $\|\cdot\|$ of the L^2 Hilbert space.

scale (order of spacial derivatives), the combination (18) includes multi-scale structures (see Sec. 5).

The stability of a Beltrami equilibrium u_0 is shown by analyzing the Hessian of $G_\mu(u)$ [5, 9]. Writing $u(t) = u_0 + \tilde{u}(t)$, let us derive a conservation law for the perturbation $\tilde{u}(t)$. In the neighbourhood of u_0 , we observe

$$\frac{d}{dt}\tilde{u} = \mathcal{L}_0 \mathcal{G}_\mu \tilde{u}, \quad (20)$$

where \mathcal{L}_0 is the linear operator defined by evaluating \mathcal{L} at $u = u_0$. We note that the contribution from the perturbation $\mathcal{L}'\tilde{u}$ vanishes because of the Beltrami equilibrium condition ($\partial_u G_\mu(u_0) = 0$). The operator $\mathcal{G}_\mu \tilde{u}$ is the linearization of the $\partial G_\mu(u)$, i.e., the Hessian of $G_\mu(u)$.

The energy corresponding to the “linearized Hamiltonian” \mathcal{G}_μ is

$$\tilde{G}_\mu(\tilde{u}) = \frac{1}{2}(\mathcal{G}_\mu u, u), \quad (21)$$

which is a constant of motion governed by (20). This functional $\tilde{G}_\mu(\tilde{u})$ works as a Lyapunov function. A sufficient condition for the stability is the “coercivity”: [9]

$$\tilde{G}_\mu(\tilde{u}) \geq c\|\tilde{u}\|^2 \quad (\exists c > 0), \quad (22)$$

which is equivalent to the “convexity” of the transformed Hamiltonian:

$$G_\mu(u_0 + \delta) > G_\mu(u_0) \quad (\forall \delta \neq 0).$$

5 Beltrami Fields; multiscale flow-field couplings

As mentioned in Sec. 3, the “helicity” of fluid vorticity is a Casimir invariant. In a “plasma” consisting of ion (proton) and electron fluids, both helicities associated with the corresponding flows have distinct length scales, which yield multi-scale Beltrami equilibria [10].

Here, we assume incompressible condition for simplicity. By subscript $\ell = e$, we identify electrons, and, by $\ell = i$, ions. The (canonical) momentum equations, in an appropriate normalized unit, read as

$$\partial_t \mathbf{P}_\ell - \mathbf{V}_\ell \times (\nabla \times \mathbf{P}_\ell) = -\nabla \Phi_\ell \quad (\ell = e, i), \quad (23)$$

where $\mathbf{P}_\ell = m_\ell \mathbf{V}_\ell \mp \mathbf{A}$ (m_ℓ is the mass) and Φ_ℓ is the energy density of the fluid (sum of the electric, thermal and kinetic energies).

The scale hierarchies in plasmas are highlighted by “singular perturbations” [10]. Here, we show how the electron/ion mass ratio yields a singular perturbation; In the electron momentum \mathbf{P}_e , we may neglect the small mechanical momentum. Then, \mathbf{V}_e is no longer a dynamical variable, so we must determine it by another relation. We may write (normalizing the charge density=1) $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \mathbf{J}$ with the current density \mathbf{J} . Neglecting the displacement current, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$. In this singular limit, we have to take the curl of the electron equation of (23). Then, the Hamiltonian reduces into $H = (\|\mathbf{P}_i - \mathbf{A}\|^2/m_i + \|\mathbf{B}\|^2)/2$ and the evolution equation reads as

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla \times \mathbf{P}_i) \times \circ & 0 \\ 0 & -\nabla \times [\mathbf{B} \times (\nabla \times \circ)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{P}_i} H \\ \partial_{\mathbf{B}} H \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Two helicities (Casimir invariants) are $C_e = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ and $C_i = (\mathbf{P}_i, \nabla \times \mathbf{P}_i)$.

The ‘‘Beltrami equilibria’’ are given by $\delta(H + \mu_1 C_e + \mu_2 C_i) = 0$, whose Euler-Lagrange equations can be cast into the form of

$$(\text{curl} - \lambda_+)(\text{curl} - \lambda_-)\mathbf{u} = 0 \quad (\mathbf{u} = \mathbf{B}, \mathbf{V}_i), \quad (25)$$

where λ_{\pm} are constants related to μ_j [7]. Since two operators $(\text{curl} - \lambda_{\pm})$ commute, the general solution of (25) is given by a linear combination of two ‘‘Beltrami eigenfunctions’’ [11], i.e., $\mathbf{u} = c_+ \mathbf{G}_+ + c_- \mathbf{G}_-$, where

$$(\text{curl} - \lambda_{\pm})\mathbf{G}_{\pm} = 0, \quad (26)$$

and c_{\pm} are constants (to be determined by the ratios of H , C_e and C_i). Both eigenvalues λ_{\pm} represent the two distinct scales included in the Beltrami equilibria. This model gives the minimum (simplest) representation of the multi-scale flow-field coupling.

Acknowledgements

The author is grateful to Prof. Swadesh M. Mahajan and Dr. Makoto Hirota for useful comments and discussions.

References

- [1] J. Serrin, Mathematical principles of classical fluid mechanics, in *Encyclopedia of Physics*, (Springer-Verlag, 1959), 125.
- [2] C.C. Lin, in *Proc. Int. Sch. Phys. ‘‘Enrico Fermi’’ XXI*, (Academic Press, 1963), 93.
- [3] B.F. Schutz and R. Sorkin, *Ann. Phys.* **107**, 1 (1977).
- [4] R. Jackiw, *Lectures on Fluid Dynamics – a particle theorist’s view of supersymmetric, non-Abelian, noncommutative fluid mechanics and d-branes* (Springer, 2002).
- [5] V. Arnold and B. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- [6] P.J. Morrison and J.M. Greene, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 790 (1980).
- [7] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4863 (1998).
- [8] Z. Yoshida and S.M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 095001 (2002).
- [9] Z. Yoshida, S. Ohsaki, A. Ito and S.M. Mahajan, *J. Math. Phys.* **44**, 2168 (2003); Z. Yoshida, *Applied Functional Analysis*, Chap. 6 (Science-Sha, 2006) [in Japanese].
- [10] Z. Yoshida, S.M. Mahajan and S. Ohsaki, *Phys. Plasmas* **11**, 3660 (2004).
- [11] Z. Yoshida and Y. Giga, *Math. Z.* **204**, 235 (1990).

流れをもつ MHD 平衡における波のエネルギー

廣田 真 (九州大学大学院数理学研究院)

概要

流れをもつ理想 MHD 平衡の安定性解析ではエネルギー原理が適用できず、安定性条件を求めるのが困難になる。流れ場中では負のエネルギーをもった波が安定に存在し、それと正のエネルギーをもった波との相互作用によって不安定性が起こりうる。本稿では 1 次元 MHD 平衡における波のエネルギーを Alfvén 波などの連続スペクトルまでも含めて導出し、その符号を明らかにする。

1 序論

流れをもつ理想 MHD プラズマの安定性解析においては、従来用いられてきたエネルギー原理 [1] があまり有効ではない。そもそも、この手法は方程式を解かずに「安定であるための十分条件」、すなわち「アприオリ評価」を求めているにすぎない [2]。一般に、流れ場中では負のエネルギーをもった波が安定に存在し、摂動のエネルギーが正定値になる状況はごく稀である。実際、流れの安定性が主題である流体力学ではエネルギー原理はほとんど役に立っていない。それゆえに、方程式の固有値問題や初期値問題を具体的に解く必要があるのだが、線形方程式の非エルミート性 (あるいは非正規性) により、解析的にも数値的にも安定性の判別は困難になる。層流が不安定化して乱流へ遷移する間のプロセスをみても非常に複雑であり、現在も様々なアプローチから研究が行われている。

流れの安定性に対してアприオリ評価は得られないものの、波のエネルギーを求めることは依然として重要であり、不安定性を解析的に見つける、またはその力学的な描像を得る上でしばしば功を奏してきた [3, 4, 5]。それには流体の方程式がハミルトン形式をもつという背景がある。一般に、正準力学系では平衡点近傍の振動モードがもつエネルギーの符号、さらには作用 (action) の符号が重要であり、例えば異符号の作用をもつ二つの振動モードの周波数 (=固有値) が縮退すると線形不安定性が起こる (Krein の衝突などと呼ばれる [6, 7])。これと同様に、流体およびプラズマの様々な不安定性をハミルトン力学系の分岐として統一的にとらえれば、力学系に特有の解析手法が適用でき、不安定性の起こるメカニズムやその線形・非線形発展までも議論できる可能性がある。

ただし、流体やプラズマは無限自由度のハミルトン系であるために「連続スペクトル」が存在し、比較的良好に知られた固有値 (点スペクトル) とは取り扱いが本質的に異なる。本研究では波のエネルギーの概念をハミルトン力学系の観点から根本的に見直し、その定式化を行なった [8]。近年、Rayleigh 方程式の連続スペクトル (渦のミキシングを表す) に対して、Balmforth & Morrison [9] が波のエネルギーの計算に成功しているが、本研究では線形 MHD 方程式までも含めた一般論を展開し、その適用例として Ref. [9] の結果を再現した。本稿ではその一般論の概要を述べ、具体的な適用例としては流れをもつ 1 次元 MHD 平衡における波のエネルギーを導出する。

2 線形摂動のラグランジュ表示と波のエネルギー

Arnold はオイラー方程式が自由な剛体運動と同様なハミルトン形式をもつことを見出した [10, 11]。これらの力学系は非正準ハミルトン系であり、運動に拘束条件が課されているのが特徴である。オイラー方程式の場合、Kelvin の循環定理、すなわち渦度の保存則がそれに相当する。本来の正準系を与える正準変数は流体粒子の運動 (微分同相写像) であり、渦度場は流体粒子に凍りついたトポロジ

カルな変形しか許されない。よって、摂動のエネルギーや運動量といった量を求めるには流れ場や渦度場といったオイラー的描像からラグランジュ的描像へと翻訳することが鍵となる。Morrison & Greene [12] や Marsden *et al.* [13] はオイラー方程式に圧縮性およびエントロピー変化、さらには磁場の効果 (理想 MHD 方程式) まで含めた一般的なハミルトン形式を導いた。

理想 MHD 方程式において、(流れも含んだ) 任意の平衡状態を (v, B, ρ, s) とする。ここで、 v は流れ場、 B は磁場、 ρ は質量密度、 s はエントロピー密度である (圧力 p は状態方程式により ρ と s の関数 $p(\rho, s)$ として与えられる)。この平衡状態から運動学的に到達可能な変分とは

$$\tilde{v} = \xi \times (\nabla \times v) - \rho^{-1} B \times (\nabla \times \eta) - \nabla(\xi \cdot v + \alpha) + \beta \rho^{-1} \nabla s, \quad (1)$$

$$\tilde{B} = \nabla \times (\xi \times B), \quad (2)$$

$$\tilde{\rho} = -\nabla \cdot (\rho \xi), \quad (3)$$

$$\tilde{s} = -\xi \cdot \nabla s. \quad (4)$$

のように与えられる [14, 15]。これは Arnold [11, 16] が用いた isovortical variation $\tilde{v} = P[\xi \times (\nabla \times v)]$ (P は非圧縮ベクトル場への射影) の一般化であり、すべての保存則を自動的に満たすような変分である。この変分を線形摂動とみなすと $(\tilde{v}, \tilde{B}, \tilde{\rho}, \tilde{s})$ の時間発展は $(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ の時間発展に翻訳することができ、それらは互いに共役な発展方程式となっている [8]。

本研究では、この運動学的に到達可能な線形摂動のみに着目する。 ξ の発展方程式は、(1) を用いると、ラグランジュ変位場の定義としてよく知られた関係式 [17]

$$\partial_t \xi + (v \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) v = \tilde{v}, \quad (5)$$

と一致する。つまり、 ξ は流体粒子の軌道の変位という物理的意味を持っている。非圧縮流体の極限では $\tilde{v} = P[\xi \times (\nabla \times v)]$ であり、(5) は ξ だけの閉じた方程式となる [18]。MHD の場合は (η, α, β) を消去する事で、以下のような時間に関して二階の微分方程式に帰着される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_t^2 \xi + 2\rho(v \cdot \nabla) \partial_t \xi = \mathcal{F} \xi, \\ \partial_t \xi|_{t=0} = -2(v \cdot \nabla) \xi_0 - v \times (\nabla \times \xi_0) \\ \quad - \rho^{-1} B \times (\nabla \times \eta_0) - \nabla \alpha_0 + \rho^{-1} \beta_0 \nabla s, \\ \xi|_{t=0} = \xi_0, \end{array} \right. \quad (6)$$

この発展方程式はラグランジュ変位場の式 (5) を出発点にして Frieman & Rotenberg [2] が導出したものと同じであり、作用素 \mathcal{F} は Force operator として知られるエルミート作用素である。ただし、(6) では $\partial_t \xi$ の初期条件を自由に与えておらず、何らかの $(\xi_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0)$ で表されるようなものに制限している。この制限は実際にはそれ程強いものではないが、 \tilde{v} が保存則による拘束 (1) を満足するためには必要である。仮に、 $\partial_t \xi|_{t=0}$ を自由に与えると、(5) により $\tilde{v}|_{t=0}$ (すなわち $\nabla \times \tilde{v}|_{t=0}$) も自由な値をとり、この摂動は渦度の保存則やクロスヘリシティの不变性を破ってしまう。

摂動に制限を加えると、それだけ摂動のエネルギーは正定値になり易く、エネルギー原理はより改善される (必要十分条件に近くなる)。例えば、Arnold は Rayleigh の変曲点定理 (Kelvin-Helmholtz 不安定性が起きるための必要条件) を isovortical variation を用いて導いたが、これに相当する結果を得るには (1) の制限が不可欠となる。

方程式 (6) は流体粒子に対するニュートンの第二法則 (正準ハミルトン系) を表し、このラグランジュ変位場 ξ を解けば、(5) や (2)-(4) に代入することで摂動場はただちに求めることができる。摂動のエネルギーは Ref.[2] と同じく、

$$\delta^2 H = \int (\rho |\partial_t \xi|^2 - \xi \cdot \mathcal{F} \xi) d^3 x = \text{const.} \quad (7)$$

と書けるが、(6) の初期値に対する制限のもとで、この $\delta^2 H$ は確かにハミルトニアン H の第二変分と一致する。このように、摂動のエネルギーをハミルトン力学に基づいて正確に議論するには、摂動後の状態が摂動前の平衡状態から運動学的に (つまり、保存則を破らずに) 到達可能である必要がある。

ここで仮に、 ξ が $\xi(t) = \xi(t+T)$ を満たす周期 T の摂動だったとしよう。摂動のエネルギー (7) はそもそも時間に依らない定数だが、これの 0 から T までの平均をとると、以下のように書き直せる。

$$\frac{1}{T} \int_0^T \delta^2 H dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int 2\rho [\partial_t \xi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi] \cdot \partial_t \xi d^3 x dt. \quad (8)$$

よって、もし平衡流 \mathbf{v} が存在しなければ、周期的な摂動、つまり中立安定な波のエネルギーは常に正であることが一般にわかる。逆に言えば、 \mathbf{v} の存在によって、負のエネルギーをもつ波が現れる。

さらに、それぞれの MHD 波がもつエネルギーを詳細に調べるため、ラプラス変換を用いた解析 (スペクトル分解) を行う。 $\xi(t)$ のラプラス変換を $\Xi(\Omega)$ 、 $\Omega \in \mathbb{C}$ とすると、方程式 (6) は

$$\mathcal{E}(\Omega)\Xi(\Omega) = -\mathbf{m}_0(\Omega), \quad (9)$$

のように書ける。ここで、線形作用素 $\mathcal{E}_{\text{FR}}(\Omega)$ と右辺の初期値は

$$\mathcal{E}_{\text{FR}}(\Omega)\Xi(\Omega) := \Omega^2 \rho \Xi(\Omega) + 2i\Omega \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Xi(\Omega) + \mathcal{F}\Xi(\Omega), \quad (10)$$

$$\mathbf{m}_0(\Omega) := -i\Omega \rho \xi_0 - \rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \xi_0) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{\eta}_0) - \rho \nabla \alpha_0 + \beta_0 \nabla s, \quad (11)$$

で与えられる。この方程式に対して、

$$D(\Omega) = \int \overline{\Xi(\Omega)} \cdot \mathcal{E}(\Omega)\Xi(\Omega) d^3 x. \quad (12)$$

という Ω の関数を定義すると、波の作用 (wave action) を以下の公式によって求めることができる [8]。

$$\mu_n = \text{Res}_{\Omega=\omega_n} [D(\Omega)] \quad \text{for 点スペクトル (固有値) } \omega_n \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\mu(\omega) = \frac{i}{2\pi} [D(\omega + i0) - D(\omega - i0)] \quad \text{for 連続スペクトル } \omega \in \mathbb{R} \quad (14)$$

ここで、Res は留数を意味し、 $D(\omega \pm i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} D(\omega \pm i\epsilon)$ である。一般に、作用と周波数の積が固有モードのエネルギーであり、(13) や (14) にそれぞれ ω_n や ω をかけたものが波のエネルギーである (波数をかけると波の運動量になる)。

3 1次元 MHD 平衡への適用

デカルト座標系 xyz において、導体壁にはさまれた領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ の理想プラズマ平衡

$$\mathbf{v} = (0, v_y(x), v_z(x)), \quad \mathbf{B} = (0, B_y(x), B_z(x)), \quad \rho(x) \quad \text{and} \quad s(x) \quad (15)$$

を考える。簡単のため、重力などの外力は働いてないとし、圧力と磁気圧の和 $p_{\text{total}} = p(\rho, s) + B^2/2$ が $p'_{\text{total}}(x) = 0$ を満たすことが平衡条件である ($'$ は x に関する微分を表す)。

線形摂動に対しては y と z 方向にフーリエ変換

$$\xi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k(x, t; k_y, k_z) e^{ik_y y + ik_z z} dk_y dk_z. \quad (16)$$

を行い、 (k_y, k_z) を固定して解くのが慣例である。以降では ξ_k の添字 k は省いて再び ξ で表すが、フーリエ変換によってこの ξ は複素数になったことに注意しておく。流れをもつ平衡においては、波数ベクトル $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$ に関して平行成分と垂直成分を定義すると見通しがよい。

$$\xi_{\parallel} := \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}{k}, \quad \xi_{\perp} := \frac{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\xi}}{k}, \quad (17)$$

ここで、 $k = |k|$ 、 $e_x = (1, 0, 0)$ である。

(局所的な)Alfvén 速度を $b = B/\sqrt{\rho}$ 、音速を $c_s = \sqrt{\partial p/\partial \rho}$ とすると、MHD スペクトルにおいて特徴的な 4 つの周波数は、

$$\begin{aligned} \omega_A^2 &= k^2 b_{\parallel}^2 : \text{Alfvén frequency}, & \omega_S^2 &= k^2 \frac{b_{\parallel}^2 c_s^2}{b^2 + c_s^2} : \text{slow magneto-sonic frequency}, \\ \omega_{s,f}^2 &= \frac{k^2}{2} \left[(b^2 + c_s^2) \pm \sqrt{(b^2 + c_s^2)^2 - 4b_{\parallel}^2 c_s^2} \right] : \text{slow (-) and fast (+) turning point frequencies.} \end{aligned}$$

と書ける。

ラプラス変換された方程式 (9) は Ξ_{\parallel} と Ξ_{\perp} の消去によって、以下の常微分方程式に帰着する。

$$\mathcal{E}_I(\Omega)\Xi_x(\Omega) = -m_{0I}(\Omega), \quad (18)$$

ここで、 $\mathcal{E}_I(\Omega)$ は

$$\mathcal{E}_I \Xi_x := \rho \Pi_A \Xi_x + \partial_x \left[\rho \frac{\Pi_S \Pi_A}{\Pi_{sf}} \partial_x \Xi_x \right], \quad (19)$$

$$\Pi_v(x, \Omega) = [\Omega - kv_{\parallel}(x)]^2, \quad (20)$$

$$\Pi_A(x, \Omega) = \Pi_v(x, \Omega) - \omega_A^2(x), \quad (21)$$

$$\Pi_S(x, \Omega) = [b^2(x) + c_s^2(x)] [\Pi_v(x, \Omega) - \omega_S^2(x)], \quad (22)$$

$$\Pi_{sf}(x, \Omega) = [\Pi_v(x, \Omega) - \omega_s^2(x)] [\Pi_v(x, \Omega) - \omega_f^2(x)], \quad (23)$$

与えられ、Hain & Lüst [19] や Goedbloed [20] が導いた方程式を流れが存在する場合 (15) に拡張したものである。一方、(18) の右辺には

$$m_{0I} := m_{0x} - \left(\frac{M_0}{\Pi_{sf}} \right)', \quad (24)$$

のように初期値が含まれる ($M_0 = i\Pi_S k m_{0\parallel} - i\Pi_v k b_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_0$)。

方程式 (18) に対しても、 $D_I(\Omega)$ を

$$D_I(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} \overline{\Xi_x(\Omega)} \mathcal{E}_I(\Omega) \Xi_x(\Omega) dx \quad (25)$$

のように与えると、この $D_I(\Omega)$ と (12) で定義した $D(\Omega)$ との間には Ω の正則関数だけの違いしかないことが示せる [8]。したがって、 $D_I(\Omega)$ に対して公式 (13),(14) を適用しても波の作用を求めることができる。

ここでは外力が無いとしたため、点スペクトルとしては(速い&遅い)磁気音波のみが存在する。その固有値の一つを $\omega_n \in \mathbb{R}$ 、固有関数を $\hat{\xi}_x(\omega_n)$ とすると、波の作用は

$$\mu_n = \int_{x_1}^{x_2} \overline{\hat{\xi}_x(\omega_n)} \frac{\partial \mathcal{E}_I}{\partial \Omega}(\omega_n) \hat{\xi}_x(\omega_n) dx, \quad (26)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\rho(\omega_n - kv_{\parallel}) \left[|\hat{\xi}_x(\omega_n)|^2 + k^2 N(x, \omega_n) |\partial_x \hat{\xi}_x(\omega_n)|^2 \right] dx, \quad (27)$$

と表せる。ここで、

$$N(x, \omega_n) = \frac{b_{\parallel}^2 b_{\perp}^2 \Pi_v^2 + (\Pi_S - \Pi_v b_{\parallel}^2)^2}{\Pi_{sf}^2} \Bigg|_{\Omega=\omega_n} \geq 0 \quad (28)$$

であり、(27)の被積分関数は $(\omega_n - kv_{\parallel})$ を除いて常に正である。従って、波の位相速度 ω_n/k が、波数ベクトル方向の流速 $v_{\parallel}(x)$ よりも至る所で速い(or 遅い)ならば、波の作用は正(or 負)である。線形不安定性は正と負の作用をもつ二つの波の固有値が縮退(Kreinの衝突)することによって生じるので、不安定固有値 $\Im(\omega_n) > 0$ が現れるのは、区間 $\{kv_{\parallel}(x) \in \mathbb{R} : x \in [x_1, x_2]\}$ においてのみである。

実数の ω に対し、 $\Pi_A(x_0, \omega) = 0$ または $\Pi_S(x_0, \omega) = 0$ となるような x_0 が領域内に存在する場合、この x_0 は方程式(18)の確定特異点である。このような ω は連続スペクトルを表し、特異な固有関数が存在する。MHDでは以下の二種類の連続スペクトルが現れる。

$$\text{Alfvén continuous spectrum } \sigma_A = \{kv_{\parallel}(x) \pm \omega_A(x) \in \mathbb{R} : x \in [x_1, x_2]\}, \quad (29)$$

$$\text{Slow continuous spectrum } \sigma_S = \{kv_{\parallel}(x) \pm \omega_S(x) \in \mathbb{R} : x \in [x_1, x_2]\}, \quad (30)$$

一般に、これらは互いに重なりあっているが、 $b_{\parallel} = 0$ (すなわち Alfvén 共鳴面)でない限りは、独立なモードとして扱える。ちなみに、 $\Pi_{sf}(x_0, \omega) = 0$ による特異性は見かけのもの(apparent singularity)であり、連続スペクトルでないことが証明されている[21]。

これらの連続モードがもつエネルギーを計算するには(14)に従って、波の作用を求めればよいのだが、このまま $\Omega \rightarrow \omega \pm i0$ の極限をとるのは得策ではない。なぜなら、連続スペクトル(29)-(30)の周波数のうちいずれかを $\omega_c(x) = kv_{\parallel}(x) \pm \omega_{A,S}(x)$ と置くと、特異点近傍のFrobenius級数解 Ξ_x はLogで発散する。すなわち、

$$\Xi_x(\Omega) \sim \text{Log}(\Omega - \omega_c) \Rightarrow \Xi_x(\omega \pm i0) \sim \log|\omega - \omega_c|, Y(\omega - \omega_c) \quad (31)$$

のようにlogの発散やHeaviside関数(Y)による不連続性が現れる。(18)より、 $\mathcal{E}_1(\omega \pm i0)$ はこの発散をキャンセルするはずなので、それらで(14)を与えても間違いではないが、無限大とゼロの掛け算をしているような表現なので、あまり好ましくない(符号もこれではわからない)。

本研究ではこの対策として、特異性を滑らかにするような変数変換を行うことが重要であると考えている。今の場合は全圧力 $\tilde{p}_{\text{total}}(t) = (\tilde{p} + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{B}})(t)$ のラプラス変換を $P(\Omega)$ とし、扱う変数を Ξ_x から P へ変換する事がそれに相当する。確定特異点まわりの級数解は P でみると、

$$P(\Omega) \sim (\Omega - \omega_c)\text{Log}(\Omega - \omega_c) \Rightarrow P(\omega \pm i0) \sim (\omega - \omega_c)\log|\omega - \omega_c|, (\omega - \omega_c)Y(\omega - \omega_c) \quad (32)$$

となり、導関数の発散やジャンプは存在するものの、 $P(\omega \pm i0)$ は連続関数である。 $D_I(\Omega)$ を $P(\Omega)$ で表すと、

$$D_I(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{\partial_x P(\Omega)}{\rho \Pi_A} \frac{1}{\rho \Pi_A} \partial_x P(\Omega) + \overline{P(\Omega)} \frac{\Pi_{sf}}{\rho \Pi_S \Pi_A} P(\Omega) + \overline{m_{0x}} \frac{1}{\rho \Pi_A} m_{0x} - \frac{\overline{M_0}}{\Pi_{sf}} \frac{\Pi_{sf}}{\rho \Pi_S \Pi_A} \frac{M_0}{\Pi_{sf}} \right] dx, \quad (33)$$

となり、これに対して(14)の極限操作を行う。結果として、Alfvén連続スペクトル $\omega \in \sigma_A$ の波の作用は

$$\mu(\omega) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\pi^2}{2\rho\omega_A} [\delta(\omega - kv_{\parallel} - \omega_A) - \delta(\omega - kv_{\parallel} + \omega_A)] \frac{k^2 b_{\perp}^2}{b^2} (|\hat{p}(\omega)|^2 + |\hat{p}^{\dagger}(\omega)|^2) dx \quad (34)$$

という比較的シンプルな形で書ける。同様の手続きを遅い(slow)連続スペクトル $\omega \in \sigma_S$ に対しても行うと、こちらは

$$\mu(\omega) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\pi^2}{2\rho\omega_A} [\delta(\omega - kv_{\parallel} - \omega_S) - \delta(\omega - kv_{\parallel} + \omega_S)] \frac{k^2 b_{\parallel}^2 c_s^2}{b^2(b^2 + c_s^2)} (|\hat{p}(\omega)|^2 + |\hat{p}^{\dagger}(\omega)|^2) dx \quad (35)$$

となる。ただし、

$$\pi \hat{p}(\omega) = \frac{1}{2} [P(\omega + i0) - P(\omega - i0)], \quad (36)$$

$$\pi \hat{p}^{\dagger}(\omega) = \frac{1}{2} [P(\omega + i0) + P(\omega - i0)] - \frac{M_0(\omega)}{\Pi_{sf}(x, \omega)}, \quad (37)$$

と定義してあり、どちらも連続関数である (\dagger は Hilbert 変換に相当する)。積分はデルタ関数 $\delta(\cdot)$ を含むためただちに実行できるが、表記としては少々煩雑になるのでそのままにしてある。 $\mu(\omega)$ の符号は以下のように非常に明確である。ある $x = x_0$ の面 (i.e. 磁気面) には、

$$\omega = \{kv_{\parallel}(x_0) \pm \omega_A(x_0), kv_{\parallel}(x_0) \pm \omega_S(x_0)\} \quad (38)$$

という四つの周波数の波が局在しており、この内、「流れによるドップラー効果を差し引いた周波数」 $\omega - kv_{\parallel}(x_0)$ 、が $|\omega_A(x_0)|$ と $|\omega_S(x_0)|$ であるものは正の作用 $\mu(\omega) > 0$ を、 $-|\omega_A(x_0)|$ と $-|\omega_S(x_0)|$ であるものは負の作用 $\mu(\omega) < 0$ をもつことがわかる。波のエネルギーは $\omega\mu(\omega)$ なので、流れが存在しなければ確かに四つとも正エネルギーをもつ。

4 まとめと今後の展望

線形摂動のエネルギーをハミルトン力学に基づいて厳密に議論するためには、その摂動が保存則を破らないようなもの (運動学的に到達可能) である必要があり、そうでないような摂動 (例えば全質量を増減させるような摂動や磁力線のトポロジーを変えてしまうような摂動) に対しては、さらなる難しい摂動論 (KAM 理論など) を要すると思われる。ただし、理想 MHD においてよく知られた波や不安定モードはすべて運動学的に到達可能、すなわちプラズマの微少変位 ξ によって記述できるようなものばかりであり、まずはそれらが流れ場中でどのように振る舞うかを理解することが先決であろう。

摂動に対するこのような前提のもとで、「波のエネルギー」は常に「振動数」と「波の作用」の積の形で表される。本稿では、1次元 MHD 平衡において、点&連続スペクトルに対応する波のエネルギー及び作用を具体的に定式化した。流れをもつ MHD 平衡においては、負のエネルギーをもつ摂動が不安定であるとは限らず、正と負の作用をもつ波同士の相互作用を詳細に見る必要がある。よって、波の作用の符号は特に重要であるが、(27) や (34),(35) によってその絶対値を求めることも様々な局面で有用と思われる。波の作用はそのモードにとって断熱不変量であり、仮に平衡場がゆっくりと時間変化し、波の振幅や振動数が変わったとしても (27) や (34),(35) は一定量であり続ける。従って、波と平均場の相互作用や、モードの非線形時間発展の近似解法などに今後応用できるのではないかと考えられる。

流れをもつプラズマの不安定性を見つけるには固有値問題を数値計算によって解くのが直接的ではあるが、このようにハミルトン力学的な観点から解釈を与えておくことは、より複雑な問題を考える際の重要な手掛かりとなるであろう。

参考文献

- [1] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, Proc. Roy. Soc. London **A244**, 17 (1958).
- [2] E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
- [3] R. A. Cairns, J. Fluid Mech., **92**, 1 (1979).
- [4] R. S. MacKay and P. G. Saffman, Proc. R. Soc. Lond. A **406**, 115 (1986).
- [5] Y. Fukumoto, J. Fluid Mech. **493**, 287 (2003)
- [6] M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR A **73**, 445 (1950).
- [7] J. K. Moser, Comm. Pure Appl. Math. **11**, 81 (1958).

- [8] M. Hirota & Y. Fukumoto, *Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra*, submitted to J. Math. Phys. (MHF Preprint Series <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/coe/report/>)
- [9] N. J. Balmforth & P. Morrison, *Hamiltonian description of shear flow*. In *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics 2: Geometric Methods and Models*. Eds. J. Norbury & I. Roulstone, Cambridge University Press (2002).
- [10] V. Arnold, *Annales de l'Institut Fourier*, XVI, no. 1, 319 (1966).
- [11] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, Berlin (1978).
- [12] P. J. Morrison, J. M. Greene, *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 790 (1980).
- [13] J. E. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, *Trans. Am. Math. Soc.*, **281**, 147 (1984).
- [14] P. J. Morrison, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467 (1998).
- [15] E. Hameiri, *Phys. Plasmas* **10**, 2643 (2003).
- [16] V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*. Springer, New York (1998).
- [17] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, (Cambridge Univ., Cambridge, 1981).
- [18] V. F. Kop'ev & S. A. Chernyshev, *Physics-USpekhi*. **43**(7), 663 (2000).
- [19] K. Hain and R. Lüst, *Z. Naturforsch.* **13a**, 936 (1958).
- [20] J. P. Goedbloed, *Physica*, **53**, 412 (1971); *II. Linear pinch*, *Physica*, **53**, 501 (1971).
- [21] K. Appert, R. Gruber and J. Vaclavik, *Phys. Fluids*, **17**, 1471 (1974).

High- β axisymmetric equilibria with flow in reduced single-fluid and two-fluid models*

Atsushi Ito,¹ Jesús J. Ramos,² and Noriyoshi Nakaajima¹

¹*National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki 509-5292, Japan*

²*Plasma Science and Fusion Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 02139-4307*

Reduced single-fluid and two-fluid equations for axisymmetric toroidal equilibria of high- β plasmas with flow are derived by using asymptotic expansions in terms of the inverse aspect ratio. Two different orderings for the flow velocity, comparable to the poloidal Alfvén velocity and comparable to the poloidal sound velocity, are considered. For a poloidal-Alfvénic flow, the two-fluid equilibrium equations with hot ion effects are shown to have a singularity that is shifted by the gyroviscous cancellation from the Alfvén singularity found in single-fluid magnetohydrodynamics (MHD) when the poloidal flow velocity equals the poloidal Alfvén velocity. For a poloidal-sonic flow, a reduced single-fluid model is used to derive a set of equilibrium equations that includes higher-order terms. The singularity at a poloidal flow velocity equal to the poloidal sound velocity is recovered in the higher order equations.

I. INTRODUCTION

In improved confinement modes of magnetically confined plasmas where high- β is achieved, equilibrium flows play important roles like the suppression of instability and turbulent transport. At the sharp boundary of well-confined region, the scale lengths characteristic of microscopic effects not included in single-fluid magnetohydrodynamics (MHD) cannot be neglected. Small scale effects on flowing equilibria due to the Hall current have been studied with two-fluid or Hall MHD models [1–4]. However, these models are consistent with kinetic theory only for cold ions. In order to include the hot ion effects that are relevant to fusion plasmas, an extension of the model is necessary. A consistent treatment of hot ions in a two-fluid framework must include the ion gyroviscosity and other finite Larmor radius (FLR) effects. In the fluid formalism of collisionless magnetized plasmas, these effects are incorporated by means of asymptotic expansions in terms of the small parameter $\delta \sim \rho_i/a$, where ρ_i is the ion Larmor radius and a is the macroscopic scale length. With a slow dynamics ordering, $v \sim \delta v_{th}$ where v and v_{th} are the flow and thermal velocities respectively, the ion FLR terms [5, 6] are much simplified in the reduced models for large-aspect-ratio, high- β tokamaks [7, 8] after relating δ to the inverse aspect ratio expansion parameter $\epsilon \equiv a/R_0 \ll 1$, where a and R_0 are the characteristic scale lengths of the minor and major radii respectively.[9, 10].

In this paper, we derive reduced sets of equations for axisymmetric equilibria with flow. We shall study flow velocities in the orders of the poloidal Alfvén and the poloidal sound velocities. These are the characteristic velocities that bring singularities in the equilibrium equations. The poloidal-Alfvénic flow is of interest because the equations for axisymmetric equilibria in single-fluid MHD have a singularity when the poloidal flow velocity is equal to the poloidal Alfvén velocity, the so-called Alfvén singularity [3, 11]. This can be described by the reduced model with the relation $\delta^2 \sim \epsilon$ [9, 10]. The poloidal-sonic flow is of interest because the equilibria show a discontinuity at the point where the poloidal flow velocity crosses the poloidal sound velocity[12, 13]. This can be described by the reduced model with the relation $\delta \sim \epsilon$. While the poloidal-Alfvénic flow analysis follows the standard orderings of reduced MHD for high- β tokamaks, the poloidal-sonic flow analysis does not and higher-order terms must be taken into account. Since the formulation of higher-order equations is involved, here we restrict our analysis of the poloidal-sonic flow to the single-fluid case, planning to extend our present results with the inclusion of two-fluid, hot ion effects in future work.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we introduce the basic steady state equations for two-fluid MHD with hot ion effects, and the orderings for the reduced models. In Sec. III, we derive the equations for equilibria with flow velocity comparable to the poloidal Alfvén velocity in a model with two-fluid and hot ion effects, and discuss the modification of the Alfvén singularity by these effects. In Sec. IV, we derive the asymptotic equations for equilibria with flow velocity comparable to the poloidal sound

*Submitted to Plasma and Fusion Research

velocity in a single fluid model, to be extended to a two-fluid model with ion FLR in future work. A summary is given in Sec. V.

II. BASIC EQUATIONS

The equations for two-fluid collisionless equilibria to be considered in this work are

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla(p_i + p_e) - \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\lambda_e / ne) (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e), \quad (4)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p_i + \gamma p_i \nabla \cdot \mathbf{v} + (2/5) \lambda_i (\gamma \nabla \cdot \mathbf{q}_i) = 0, \quad (6)$$

$$(\mathbf{v} - \lambda_e \mathbf{j} / ne) \cdot \nabla p_e + \gamma p_e \nabla \cdot (\mathbf{v} - \lambda_e \mathbf{j} / ne) + (2/5) \lambda_e (\gamma \nabla \cdot \mathbf{q}_e) = 0, \quad (7)$$

where m_i is the ion mass, n is the density, \mathbf{v} is the ion flow velocity, \mathbf{E} and \mathbf{B} are the electric and magnetic fields, \mathbf{j} is the current density, p_i and p_e are the ion and electron pressures, Π_i^{gv} is the ion gyroviscous tensor, \mathbf{q}_i and \mathbf{q}_e are the ion and electron heat fluxes respectively, and $\gamma = 5/3$. The diagonal components of the pressure tensors are assumed to be isotropic. The electron mass $m_e \approx 0$ is neglected. The electron gyroviscosity is also neglected since $\rho_e \ll \rho_i$. We have introduced the artificial indices λ_i and λ_e that label the two-fluid, non-ideal terms in the ion and electron equations respectively: $(\lambda_i, \lambda_e) = (0, 0)$ for single-fluid (ideal) MHD, $(0, 1)$ for two-fluid MHD with electron diamagnetic effects but zero ion Larmor radius (Hall MHD) and $(1, 1)$ for two-fluids with finite ion Larmor radius. The divergence of the ion flow velocity is obtained from the projection of Faraday's law (2) along \mathbf{B} and the substitution of the generalized Ohm's law (4),

$$B^2(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla B^2 - \mathbf{v} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \mathbf{B} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{\lambda_e}{ne} \right) \times \nabla p_e + \mathbf{B} \left[\mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{\lambda_e}{ne} \right) \right] \right\} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{j} \left[\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\lambda_e}{ne} \right) \right] + \frac{\lambda_e}{ne} \nabla \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = 0 \quad (8)$$

Here we shall consider the corresponding toroidal axisymmetric equilibria, where, in cylindrical coordinates (R, φ, Z) , the magnetic field \mathbf{B} and the current density \mathbf{j} can be written as

$$\mathbf{B} = \nabla \psi(R, Z) \times \nabla \varphi + I(R, Z) \nabla \varphi \quad (9)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla I \times \nabla \varphi - \Delta^* \psi \nabla \varphi, \quad (10)$$

where ψ is the poloidal magnetic flux and $\Delta^* \equiv R^2 \nabla \cdot [R^{-2} \nabla]$. The projection of the momentum balance equation (3) along $\nabla \psi$, \mathbf{B} and \mathbf{B}_p yields

$$\mu_0 R^2 \nabla \psi \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) + |\nabla \psi|^2 \Delta^* \psi + I \nabla \psi \cdot \nabla I + \mu_0 R^2 \nabla \psi \cdot \nabla(p_i + p_e) = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{B} \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) + \{p_i + p_e, \psi\} = 0, \quad (12)$$

$$(\nabla \psi \times \nabla \varphi) \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) + \{p_i + p_e, \psi\} + (I / \mu_0 R^2) \{I, \psi\} = 0, \quad (13)$$

where $\{a, b\} \equiv (\nabla a \times \nabla b) \cdot \nabla \varphi$.

The asymptotic expansion is defined in terms of the inverse aspect ratio $\varepsilon \equiv a/R_0 \ll 1$ where a and R_0 are the characteristic scale lengths of the minor and major radii respectively. The following high- β tokamak orderings for compressible reduced MHD are applied,

$$B_p \sim \varepsilon B_0, \quad p_i \sim p_e \sim \varepsilon (B_0^2/\mu_0), \quad |\nabla| \sim 1/a. \quad (14)$$

The variables are expanded as

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots, \\ I &= I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + \dots, \\ p_i &= p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \dots, \\ p_e &= p_{e1} + p_{e2} + p_{e3} + \dots, \\ n &= n_0 + n_1 + \dots, \\ R &= R_0 + x, \end{aligned}$$

where $I_0 \equiv B_0 R_0$. We assume the slow dynamics ordering,

$$v \sim \delta v_{thi}, \quad (15)$$

$$m_i n v^2 \sim \|\Pi_i^{gv}\| \sim \delta^2 p_{i,e}, \quad (16)$$

$$q_i \sim v p_{i,e} \sim \delta v_{thi} p_{i,e}. \quad (17)$$

The leading order of Eq. (11) yields

$$p_{i1} + p_{e1} + \frac{B_0}{\mu_0 R_0} I_1 = \text{const.} \quad (18)$$

III. REDUCED TWO-FLUID EQUILIBRIA WITH POLOIDAL-ALFVÉNIC FLOW

Here, we consider the case of poloidal-Alfvénic flow $v \sim V_{Ap} \equiv B_p/(\mu_0 m_i n)^{1/2}$,

$$m_i n v^2 \sim \|\Pi_i^{gv}\| \sim \varepsilon p \sim \varepsilon^2 B_0^2/\mu_0, \quad (19)$$

and we assume

$$v \sim j/ne \sim \nabla p/ne B_0. \quad (20)$$

This requires second-order accuracy in the total energy. However, while second-order accuracy is needed in the sum of the pressures plus the magnetic energy, it follows from Eqs. (11)-(13) that the pressures and the magnetic energy by themselves are required only in the first-order. The ion gyroviscous force and heat fluxes are needed only their leading orders [5, 6],

$$\nabla \cdot \Pi_i^{gv} \simeq -\frac{m_i}{e B_0} (R_0 \nabla \varphi \times \nabla p_{i1}) \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla (\chi_v + \chi_q), \quad (21)$$

$$\mathbf{q}_i \simeq \mathbf{q}_{i\perp} \simeq \frac{5}{2} \frac{1}{e B^2} \mathbf{B} \times \left[p_i \nabla \left(\frac{p_i}{n} \right) \right], \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_e \simeq \mathbf{q}_{e\perp} \simeq -\frac{5}{2} \frac{1}{e B^2} \mathbf{B} \times \left[p_e \nabla \left(\frac{p_e}{n} \right) \right], \quad (23)$$

where $\mathbf{q}_{i\perp}$ and $\mathbf{q}_{e\perp}$ are the ion and electron diamagnetic perpendicular heat fluxes respectively and their divergences are

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_i \simeq \frac{5}{2} \frac{p_{i1} R_0}{e B_0} \{n_0^{-1}, p_{i1}\}, \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_e \simeq -\frac{5}{2} \frac{p_{e1} R_0}{e B_0} \{n_0^{-1}, p_{e1}\}. \quad (25)$$

The specific forms of χ_v and χ_q are found in Ref. [6] but are not needed in the present study. From Faraday's law (2), we obtain

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi, \quad (26)$$

and expand Φ as

$$\Phi = \Phi_1 + \dots$$

The generalized Ohm's law (4) is rewritten as

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\lambda_e}{ne} (\nabla p_i + m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}). \quad (27)$$

The ion flow velocity \mathbf{v} is defined from the leading order of Eq. (27) as

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_E + \lambda_e \mathbf{v}_{di} + v_{\parallel} R_0 \nabla \varphi, \quad (28)$$

$$\mathbf{v}_E \simeq -B_0^{-1} \nabla \Phi_1 \times (R_0 \nabla \varphi), \quad \mathbf{v}_{di} \simeq -\frac{1}{e B_0 n_0} \nabla p_{i1} \times (R_0 \nabla \varphi), \quad (29)$$

and its divergence is obtained from Eq. (8) using Eq. (18) as

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \simeq -\frac{\lambda_e R_0}{e B_0} \{n_0^{-1}, p_{i1}\}. \quad (30)$$

The leading order of the equation for continuity (1) is

$$-(R_0/B_0)\{n_0, \Phi_1\} = 0, \quad (31)$$

which yields

$$n_0 = n_0(\Phi_1). \quad (32)$$

Substituting Eqs. (24), (30) and (32) to Eq. (6), we obtain the leading order pressure equation

$$\frac{R_0}{B_0} \left[1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{n'_0(\Phi_1) \gamma p_{i1}}{2e B_0 n_0^2} \right] \{p_{i1}, \Phi_1\} = 0, \quad (33)$$

which yields

$$p_{i1} = p_{i1}(\Phi_1). \quad (34)$$

From Eqs. (10) and (18), we get

$$\mu_0 \mathbf{j} \simeq -\nabla \left[\frac{\mu_0 R_0}{B_0} (p_{i1} + p_{e1}) \right] \times \nabla \varphi - \Delta^* \psi \nabla \varphi. \quad (35)$$

Then, substituting Eqs. (25) and (35), the electron pressure equation (7) gives

$$p_{e1} = p_{e1}(\Phi_1), \quad (36)$$

The leading order of the \mathbf{B} -component of generalized Ohm's law (4) is

$$-\{\Phi_1, \psi_1\} + \frac{\lambda_e}{n_0 e} \{p_{e1}, \psi_1\} = 0. \quad (37)$$

Substituting Eq. (36) into Eq. (37), we obtain

$$-\left[1 - \frac{\lambda_e p'_e(\Phi_1)}{e n_0} \right] \{\Phi_1, \psi_1\} = 0, \quad (38)$$

which yields

$$\Phi_1 = \Phi_1(\psi_1). \quad (39)$$

Thus, we get

$$n_0 = n_0(\psi_1), \quad p_{i1} = p_{i1}(\psi_1), \quad p_{e1} = p_{e1}(\psi_1), \quad I_1 = I_1(\psi_1). \quad (40)$$

The convective derivative is written as

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \simeq \frac{1}{B_0^2} \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right)^2 \left[\nabla \left(\frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} \right) - \Delta_2 \psi_1 \nabla \psi_1 \right] - \frac{R_0^2}{B_0} \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \{v_{\parallel}, \psi_1\} \nabla \varphi, \quad (41)$$

where

$$\Delta_2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right).$$

The projections of the gyroviscous force (21) along $\nabla \psi$, $\nabla \varphi$ and $\nabla \psi \times \nabla \varphi$ are

$$\nabla \psi \cdot (\nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \simeq -\frac{m_i p'_{i1}}{e B_0^2} \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \left[\nabla \psi_1 \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} \right) - \Delta_2 \psi_1 |\nabla \psi_1|^2 \right] - \nabla \psi_1 \cdot \nabla (\chi_v + \chi_q), \quad (42)$$

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \simeq m_i n_0 R_0 \frac{p'_{i1}}{en_0} \{v_{\parallel}, \psi_1\}, \quad (43)$$

$$(\nabla \psi \times \nabla \varphi) \cdot (\nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \simeq \left\{ -\frac{m_i p'_{i1}}{e B_0^2} \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} + \chi_v + \chi_q, \psi_1 \right\}. \quad (44)$$

The components of the sum of the convective derivative and the gyroviscous force are

$$\begin{aligned} & \nabla \psi \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \\ & \simeq -\frac{m_i n_0}{B_0^2} \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \left[|\nabla \psi_1|^2 \Delta_2 \psi_1 - \nabla \psi_1 \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} \right) \right] \\ & \quad - \lambda_i \nabla \psi_1 \cdot \nabla (\chi_v + \chi_q), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\mathbf{B} \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \simeq -m_i n_0 R_0 \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \{v_{\parallel}, \psi_1\}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla \psi \times \nabla \varphi) \cdot (m_i n \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{gv}) \\ & \simeq \left\{ \frac{m_i n_0}{B_0^2} \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} - \lambda_i (\chi_v + \chi_q), \psi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

In the first square brackets of Eqs. (45) - (47), the contribution of ion diamagnetic drift disappears when $(\lambda_i, \lambda_e) = (1, 1)$. This is due to the finite Larmor effect on the convective terms, known as the gyroviscous cancellation [14]. Substituting Eqs. (45) - (47) into Eqs. (11) - (13), we obtain the first-order equations for momentum balance as

$$\begin{aligned} & |\nabla \psi_1|^2 \Delta_2 \psi_1 + 2\mu_0 R_0 x \nabla \psi_1 \cdot \nabla (p_{i1} + p_{e1}) + I_1 \nabla \psi_1 \cdot \nabla I_1 + \mu_0 R_0^2 \nabla \psi_1 \cdot \nabla \left(p_{i2} + p_{e2} + \frac{B_0}{\mu_0 R_0} I_2 \right) \\ & - \mu_0 R_0^2 m_i n_0 \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \left[|\nabla \psi_1|^2 \Delta_2 \psi_1 - \nabla \psi_1 \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} \right) \right] \\ & - \lambda_i \mu_0 R_0^2 \nabla \psi_1 \cdot \nabla (\chi_v + \chi_q) = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$-m_i n_0 \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \{v_{\parallel}, \psi_1\} = 0, \quad (50)$$

$$p_{i2} + p_{e2} + \frac{B_0}{\mu_0 R_0} I_2 + \frac{m_i n_0}{B_0^2} \left[\Phi'_1 + (\lambda_e - \lambda_i) \frac{p'_{i1}}{en_0} \right] \left(\Phi'_1 + \frac{\lambda_e p'_{i1}}{en_0} \right) \frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} - \lambda_i (\chi_v + \chi_q) \equiv g_*(\psi_1). \quad (51)$$

Equation (12) yields

$$v_{\parallel} = v_{\parallel}(\psi_1). \quad (52)$$

Substituting Eq. (51) to Eq. (49), we get the reduced Grad-Shafranov (GS) equation in the presence of flow, two-fluid and ion FLR effects,

$$\begin{aligned} & \left[1 - M_{Ap} \left(M_{Ap} - \lambda_i \frac{V_{di}}{V_{Ap}} \right) \right] \Delta_2 \psi_1 - \frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} \left[M_{Ap} \left(M_{Ap} - \lambda_i \frac{V_{di}}{V_{Ap}} \right) \right]' \\ &= -\mu_0 R_0^2 \left[\frac{2x}{R_0} (p_{i1} + p_{e1})' + g_*' \right] - \left(\frac{I_1^2}{2} \right)', \end{aligned} \quad (53)$$

where

$$M_{Ap} \equiv \frac{V_E + \lambda_e V_{di}}{V_{Ap}}, \quad (54)$$

is the poloidal Alfvén Mach number and

$$\frac{V_E}{V_{Ap}} \equiv -\sqrt{\mu_0 m_i n_0} \frac{R_0 \Phi_1'}{B_0}, \quad \frac{V_{di}}{V_{Ap}} \equiv -\sqrt{\mu_0 m_i n_0} \frac{R_0 p_{i1}'}{en_0 B_0}. \quad (55)$$

Equation (53) has a singularity where the first term of the left-hand side vanishes,

$$1 - M_{Ap} \left(M_{Ap} - \lambda_i \frac{V_{di}}{V_{Ap}} \right) = 0, \quad (56)$$

or

$$V_{Ap}^2 - (V_E + \lambda_e V_{di})[V_E + (\lambda_e - \lambda_i)V_{di}] = 0. \quad (57)$$

For single fluid MHD, $(\lambda_i, \lambda_e) = (0, 0)$, it is the Alfvén singularity that occurs when the poloidal flow velocity is equal to the poloidal Alfvén velocity,

$$M_{AP}^2 = 1. \quad (58)$$

For two-fluid MHD without ion FLR, $(\lambda_i, \lambda_e) = (0, 1)$, the condition is the same as Eq. (58) even though the two-fluid effects bring the ion diamagnetic drift into the definition of the poloidal flow. For the two-fluid model with ion FLR, $(\lambda_i, \lambda_e) = (1, 1)$, the singularity is shifted from the poloidal Alfvén velocity,

$$M_{Ap} = \frac{1}{2} \left[V_{di}/V_{Ap} \pm \sqrt{4 + (V_{di}/V_{Ap})^2} \right]. \quad (59)$$

From Eq. (57), this shift is understood as the effect of the gyroviscous cancellation on flowing equilibria.

It is noted that the present model does not reproduce the resolution of the Alfvén singularity, Eq. (58), by the Hall current as in non-reduced two-fluid models with $(\lambda_i, \lambda_e) = (0, 1)$ [3]. This difference arises because the convective term in the ion momentum balance equation (27) is neglected in the leading order. This convective term involves the second order derivative of the ion stream function and leads to an equilibrium system of two coupled generalized GS equations for the ion flow stream function and ψ , which does not have the Alfvén singularity [1, 3, 4, 15]. In order to describe the singular perturbation due to the Hall current in reduced models, the local region in the vicinity of the Alfvén singularity should be separately analysed by relaxing the ordering $B_p \sim \varepsilon B_0$ and connected to the bulk region described by Eq. (53). Equation (59) specifies the region where the singular perturbation analysis is necessary in the FLR two-fluid model.

IV. REDUCED SINGLE-FLUID EQUILIBRIA WITH POLOIDAL-SONIC FLOW

This section will deal with single-fluid equilibria, $(\lambda_i, \lambda_e) = (0, 0)$, with the flow velocity in the order of the poloidal sound speed $v \sim C_{sp} \equiv (B_p/B_0)(\gamma p/nm_i)^{1/2}$,

$$m_i n v^2 \sim \varepsilon^2 p \sim \varepsilon^3 (B_0^2/\mu_0).$$

This requires a third-order accuracy for the total energy like the reduced MHD equations for finite aspect ratio tokamaks [8]. However, like in the previous section, the pressures and the magnetic energy by themselves are required only up to the second order. From Eqs. (6) and (7), the total pressure $p = p_i + p_e$ is given by the adiabatic pressure equation,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (60)$$

The fast magnetosonic wave is eliminated from the reduced equations for equilibria, while the shear Alfvén and the slow magnetosonic waves are retained, by assuming

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \sim \varepsilon v/a. \quad (61)$$

From the requirements Eq. (61) and $\mathbf{v} \cdot \nabla p \sim \varepsilon^2 (B_0^2/\mu_0)(v/a)$ that is determined from Eq. (60) and satisfied by Eq. (8), the flow velocity \mathbf{v} can be written as [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv (1 + x/R_0) \nabla U \times (\mathbf{B}/B) + v_{\parallel} (\mathbf{B}/B) \\ &\equiv \mathbf{v}_p + v_{\varphi} R \nabla \varphi, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\mathbf{v}_p \equiv \left[\frac{v_{\parallel}}{B} \nabla \psi + \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{I}{B} \nabla U \right] \times \nabla \varphi, \quad (63)$$

$$v_{\varphi} R \equiv \frac{I v_{\parallel}}{B} - \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{\nabla \psi \cdot \nabla U}{B}. \quad (64)$$

The convective derivative terms are written as

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \nabla \left\{ \left(1 + \frac{x}{R_0} \right)^2 \left[|\nabla U|^2 - \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla U \right)^2 \right] + v_{\parallel}^2 \right\}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \left\{ \nabla \left[\frac{I}{B} v_{\parallel} - \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{\nabla \psi \cdot \nabla U}{B} \right] \times \nabla \varphi \right\} \cdot \left[\frac{v_{\parallel}}{B} \nabla \psi + \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{I}{B} \nabla U \right] \nabla \varphi \\ &+ \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{v_{\parallel}}{B} \Delta^* \psi + \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{I}{B} \Delta^* U + \nabla \left(\frac{v_{\parallel}}{B} \right) \cdot \nabla \psi \right. \\ &+ \nabla \left[\left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{I}{B} \right] \cdot \nabla U \left. \right\} \cdot \left[\frac{v_{\parallel}}{B} \nabla \psi + \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{I}{B} \nabla U \right] \\ &+ \frac{1}{2R^2} \nabla \left[\frac{I}{B} v_{\parallel} - \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \frac{\nabla \psi \cdot \nabla U}{B} \right]^2. \end{aligned} \quad (66)$$

The function U is expanded as

$$U = U_1 + U_2 + \dots$$

In the leading order, the flow velocity \mathbf{v} is written in the standard representation for incompressible flow

$$\mathbf{v} = R_0 (\nabla U_1 \times \nabla \varphi + v_{\parallel} \nabla \varphi) \quad (67)$$

The leading order of the φ -component of Ohm's law (4) yields

$$U_1 = U_1(\psi_1), \quad (68)$$

and its next order is

$$R_0 (\{U_2, \psi_1\} + \{U_1, \psi_2\}) = 0, \quad (69)$$

which yields

$$U_2 - U_1' \psi_2 \equiv U_{2*}(\psi_1), \quad (70)$$

where the prime denotes the derivative with respect to ψ_1 . The lowest order of $\nabla \cdot \mathbf{v}$ is obtained from the projection of Faraday's law (2) along \mathbf{B} as

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \simeq \left\{ \frac{v_{\parallel}}{B_0} + 2xU'_1, \psi_1 \right\}. \quad (71)$$

The second second term in the bracket of Eq. (71) represents the compressibility of the perpendicular ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$) flow \mathbf{v}_{\perp} due to toroidicity, that may give rise to the geodesic acoustic mode (GAM) [16],

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} = B^{-4}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla B^2. \quad (72)$$

The leading order of the pressure equation (60) is

$$R_0 U'_1 \{p_1, \psi_1\} = 0 \quad (73)$$

which yields

$$p_1 = p_1(\psi_1), \quad (74)$$

and the next order is

$$R_0(\{p_2, U_1\} + \{p_1, U_2\}) = -\gamma p_1(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (75)$$

Substituting Eq. (71) into Eq. (75), one obtains the equation for the second order pressure,

$$p_2 - p'_1 \psi_2 + \gamma p_1 \left(\frac{v_{\parallel}}{B_0 R_0 U'_1} + \frac{2x}{R_0} \right) \equiv p_{2*}(\psi_1). \quad (76)$$

Analogously, the continuity equation (1) gives the equations for the zeroth- and first-order density,

$$n_0 = n_0(\psi_1), \quad (77)$$

$$n_1 - n'_0 \psi_2 + \frac{n_0 v_{\parallel}}{B_0 R_0 U'_1} + \frac{2x}{R_0} n_0 \equiv n_*(\psi_1). \quad (78)$$

The first order of Eq. (12) is

$$\{m_i n_0 B_0 R_0 v_{\parallel}, U_1\} + \{p_2, \psi_1\} + \{p_1, \psi_2\} = 0 \quad (79)$$

which yields the equation for v_{\parallel} ,

$$B_0 R_0 m_i n_0 U'_1 v_{\parallel} + p_2 - p'_1 \psi_2 \equiv p_{3*}(\psi_1), \quad (80)$$

which is the Bernoulli law in the present system. Equations (76), (78) and (80) indicate the coupling of v_{\parallel} , p_2 and n_1 due to the slow magnetosonic wave which is lost in the cold ($p_1 \rightarrow 0$) or incompressible ($\gamma \rightarrow \infty$) limits, and yield

$$v_{\parallel} = -\frac{(2x/R_0)\gamma p_1 - (p_{2*} - p_{3*})}{(\beta_1 - M_{Ap}^2)(B_0^2/\mu_0)} M_{Ap} v_A, \quad (81)$$

$$p_2 = p'_1 \psi_2 + \frac{(2x/R_0)M_{Ap}^2 \gamma p_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} - \frac{M_{Ap}^2 p_{2*} - \beta_1 p_{3*}}{\beta_1 - M_{Ap}^2}, \quad (82)$$

$$n_1 = n'_0 \psi_2 + n_* + \frac{(2x/R_0)M_{Ap}^2}{\beta_1 - M_{Ap}^2} n_0 - \frac{p_{2*} - p_{3*}}{(\beta_1 - M_{Ap}^2)(B_0^2/\mu_0)} \rho_0, \quad (83)$$

where $\beta_1 \equiv \gamma p_1/(B_0^2/\mu_0)$ and $M_{Ap}(\psi_1) \equiv v_p/V_{Ap} \equiv (\mu_0 m_i n_0)^{1/2} R_0 U'_1$ is the poloidal Alfvén Mach number. The singularity appears when $\beta_1 = M_{Ap}^2$, i.e. when the poloidal flow velocity equals to the poloidal sound velocity. The first and second orders of Eq. (11) are

$$|\nabla \psi_1|^2 \Delta_2 \psi_1 + 2\mu_0 R_0 x \nabla \psi_1 \cdot \nabla p_1 + I_1 \nabla \psi_1 \cdot \nabla I_1 + \mu_0 R_0^2 \nabla \psi_1 \cdot \nabla p_2 + B_0 R_0 \nabla \psi_1 \cdot \nabla I_2 = 0, \quad (84)$$

and

$$\begin{aligned}
& |\nabla\psi_1|^2 \left(\Delta_2\psi_2 - \frac{1}{R} \frac{\partial\psi_1}{\partial R} \right) + 2 (\nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_2) \Delta_2\psi_1 + \mu_0 x^2 \nabla\psi_1 \cdot \nabla p_1 + \nabla\psi_2 \cdot \nabla (I_1^2/2) \\
& + \nabla\psi_2 \cdot \nabla (\mu_0 R_0^2 p_2 + B_0 R_0 I_2) + 2\mu_0 R_0 x (\nabla\psi_2 \cdot \nabla p_1 + \nabla\psi_1 \cdot \nabla p_2) \\
& + \nabla\psi_1 \cdot \nabla (\mu_0 R_0^2 p_3 + R_0 B_0 I_3 + I_1 I_2) - \mu_0 m_i n_0 R_0^2 (\nabla\psi_1 \cdot \nabla U_1) \Delta_2 U_1 \\
& + \mu_0 m_i n_0 R_0^2 \nabla\psi_1 \cdot \nabla (|\nabla U_1|^2/2) = 0.
\end{aligned} \tag{85}$$

The first order of Eq. (13) yields

$$p_2 + \frac{B_0}{\mu_0 R_0} I_2 \equiv g_*(\psi_1), \tag{86}$$

and the second order yields

$$p_3 + \frac{B_0 I_3}{\mu_0 R_0} + \frac{I_1}{\mu_0 R_0^2} (I_2 - I_1' \psi_2) + m_i n_0 U_1'^2 \frac{|\nabla\psi_1|^2}{2} + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 \frac{2M_{Ap}^2 \gamma p_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} - g_*' \psi_2 \equiv E_*(\psi_1). \tag{87}$$

Substituting Eqs. (86) and (87) into Eqs. (84) and (85), we obtain the expanded GS equation in the presence of poloidal-sonic flow,

$$\Delta_2\psi_1 = -\mu_0 R_0^2 \left(\frac{2x}{R_0} p_1' + g_*' \right) - \left(\frac{I_1^2}{2} \right)', \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_2\psi_2 + \left[\mu_0 R_0^2 \left(\frac{2x}{R_0} p_1'' + g_*'' \right) + \left(\frac{I_1^2}{2} \right)'' \right] \psi_2 \\
& = \frac{1}{R} \frac{\partial\psi_1}{\partial R} + M_{Ap}^2 \Delta_2\psi_1 + \frac{|\nabla\psi_1|^2}{2} (M_{Ap}^2)' \\
& - \mu_0 R_0^2 \left[E_*' + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 p_1' + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 \left(\frac{2M_{Ap}^2 \gamma p_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} \right)' - \frac{2x}{R_0} \left(\frac{M_{Ap}^2 p_{2*} - \beta_1 p_{3*}}{\beta_1 - M_{Ap}^2} \right)' \right].
\end{aligned} \tag{89}$$

The equation for ψ_1 (88) is same as for the static case while the equation for ψ_2 (89) is modified by the flow and has the singularity. In the cylindrical limit $x/R_0 \rightarrow 0$, the singularity can be removed when

$$p_{2*} = p_{3*} \equiv f_*(\psi_1) \gamma p_1(\psi_1), \quad \rho_*(\psi_1) \equiv f_*(\psi_1) \rho_0(\psi_1),$$

and

$$f_*(\psi_1) = f_*[U_1(\psi_1)] \quad \text{and} \quad f_*[U_1 = 0] = 0.$$

Then, the equations for v_{\parallel} , p_2 , ρ_1 and ψ_2 are rewritten as

$$v_{\parallel} = - \left(\frac{2x}{R_0} \right) \frac{\beta_1 M_{Ap} v_A}{\beta_1 - M_{Ap}^2}, \tag{90}$$

$$p_2 = p_1' \psi_2 - \frac{(f_* - 2x/R_0) M_{Ap}^2 - f_* \beta_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} \gamma p_1, \tag{91}$$

$$\rho_1 = \rho_0' \psi_2 - \frac{(f_* - 2x/R_0) M_{Ap}^2 - f_* \beta_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} \rho_0, \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_2\psi_2 + \left[\mu_0 R_0^2 \left(\frac{2x}{R_0} p_1'' + g_*'' \right) + \left(\frac{I_1^2}{2} \right)'' \right] \psi_2 \\
& = \frac{1}{R} \frac{\partial\psi_1}{\partial R} + M_{Ap}^2 \Delta_2\psi_1 + \frac{|\nabla\psi_1|^2}{2} (M_{Ap}^2)' \\
& - \mu_0 R_0^2 \left[E_*' + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 p_1' - \frac{2x}{R_0} (f_* \gamma p_1)' + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 \left(\frac{2M_{Ap}^2 \gamma p_1}{\beta_1 - M_{Ap}^2} \right)' \right].
\end{aligned} \tag{93}$$

Comparing with the analysis of the transonic flow for low- β tokamaks [13, 17], the singularity at the poloidal flow velocity equal to poloidal sound velocity in the density and pressure and its dependence on toroidicity have been reproduced as higher-order effects and the singularity in the higher order magnetic structure has been found in the present study. However, in order to reproduce the radial discontinuity of the density and the pressure found in the low- β analysis [13], a local analysis in the vicinity of the singularity where $\beta_1 - M_{Ap}^2 \sim \varepsilon M_{Ap}^2$ may be necessary. Finally, we note that the hyperbolic region between the cusp velocity and the poloidal velocity of the slow magnetosonic wave pointed out in Ref. [18] degenerates to the singularity in our present ordering, because the difference between its upper and lower bounds becomes of higher order.

V. SUMMARY

We have derived the equations for high- β axisymmetric equilibria with flow comparable to the poloidal Alfvén velocity in the reduced two-fluid model with FLR and flow comparable to the poloidal sound velocity in the single-fluid model, by using asymptotic expansions in terms of the inverse aspect ratio. We have shown that the Alfvén singularity is shifted by the gyroviscous cancellation. The singularity at the poloidal flow velocity equal to the poloidal sound velocity in the density and pressure and its dependence on toroidicity have been reproduced by our higher-order terms and the singularity in the higher-order magnetic structure has been found. The reduced single-fluid equations for equilibria with poloidal-sonic flow include higher-order quantities and hence can describe finite-aspect-ratio tokamak equilibria. The resulting equations can be easily solved numerically to yield flowing equilibria without singularity and their solutions can be used as initial states or for comparison with saturated states of reduced model nonlinear simulations.

Acknowledgements

This work was partially supported by the Ministry of Education, Culture, Sports and Technology of Japan, Grant-in-Aid No. 18740358, the National Institutes of Natural Sciences (NIFS06NPRX001), and the National Institute for Fusion Science (NIFS) Collaboration Research Program (NIFS07KKGL002).

-
- [1] A. Ishida, C. O. Harahap, L. C. Steinhauer, and Y.-K. M. Peng, *Phys. Plasmas* **11**, 5297 (2004).
 - [2] J. P. Goedbloed, *Phys. Plasmas* **11**, L81 (2004).
 - [3] J. Shiraishi, S. Ohsaki, and Z. Yoshida, *Phys. Plasmas* **12**, 092308 (2005).
 - [4] A. Ito, J. J. Ramos, and N. Nakajima, *Phys. Plasmas* **14**, 062501 (2007).
 - [5] J. J. Ramos, *Phys. Plasmas* **12**, 052102 (2005).
 - [6] J. J. Ramos, *Phys. Plasmas* **12**, 112301 (2005).
 - [7] H. R. Strauss, *Phys. Fluids* **20**, 1354 (1977).
 - [8] H. R. Strauss, *Nucl. Fusion* **23**, 649 (1983).
 - [9] R. D. Hazeltine, M. Kotschenreuther, and P. J. Morrison, *Phys. Fluids* **28**, 2466 (1985).
 - [10] J. J. Ramos, *Phys. Plasmas* **14**, 052506 (2007).
 - [11] E. Trussoni, C. Sauty, and K. Tsinganos, in *Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows*, edited by K. C. Tsinganos (Kluwer Academic, Dordrecht, 1996), p. 383.
 - [12] K. C. Shaing, R. D. Hazeltine, and H. Sanuki, *Phys. Fluids B* **4**, 404 (1992).
 - [13] R. Betti and J. P. Freidberg, *Phys. Plasmas* **7**, 2439 (2000).
 - [14] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison Wesley, Redwood City, CA, 1992).
 - [15] K. G. McClements and A. Thyagaraja, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **323**, 733 (2001).
 - [16] N. Winsor, J. L. Johnson, and J. M. Dawson, *Phys. Fluids* **11**, 2448 (1968).
 - [17] E. K. Maschke and H. J. Perrin, *Phys. Lett. A* **102**, 106 (1984).
 - [18] E. Hameiri, *Phys. Fluids* **26**, 230 (1983).

磁気降着円盤の時間変動と状態遷移

松元亮治 (千葉大学理学研究科)

ABSTRACT

降着円盤は $1/f$ ノイズ的変動、準周期振動、状態遷移等、様々なタイムスケールの時間変動を示す。これらの時間変動は降着円盤の角運動量輸送率、中心天体の質量、スピンを推定する手がかりを与えてくれる。円盤全体を計算領域に含めた大局的3次元磁気流体シミュレーションによってこれらの時間変動を再現した結果を報告する。

1. はじめに

物質が回転しながら天体に降着する際に形成される降着円盤は X 線連星、原始星、活動銀河中心核などで観測される様々な活動現象を駆動していると考えられている。エネルギー源は降着物質が解放する重力エネルギーである。降着物質が中心天体に向けて落下し、重力エネルギーを解放するためには角運動量を失う必要がある。降着天体の活動性を説明するために必要な角運動量輸送がどのようにして生じているのかは長年謎だった。降着円盤理論のブレークスルーになったのは、弱い磁場を持つ差動回転プラズマ中で成長する磁気回転不安定性(Magneto-Rotational Instability: MRI)の重要性が Balbus and Hawley (1991)によって指摘されたことである。円盤の一部を取り出した局所3次元磁気流体シミュレーション(Hawley et al. 1995)、円盤全体を計算領域に含めた大局的3次元磁気流体シミュレーション(Matsumoto 1999)の結果、磁気回転不安定性の非線形成長によって磁気乱流が生成、維持され、マクスウェルストレスとガス圧の比(従来の降着円盤理論にあらわれる角運動量輸送パラメータに相当)に換算して $\approx 0.01-0.1$ の輸送率が得られることが明らかになった。また、円盤内部の磁場の強さが $\approx P_{gas}/P_{mag}=10$ 程度に維持されることもわかった(e.g., Machida et al. 2000)。

図1に降着円盤における磁気流体现象の模式図を示す。円盤内部で強められた磁場は円盤表面にループ状に浮上する。磁気ループは両端をアンカーしている円盤の回転角速度の差によって捻られて膨張する。この膨張する磁気ループ中に電流シートが形成され、蓄積された磁気エネルギーが磁気リコネクションによって解放されてフレアを起こす。外側の磁気ループはさらに膨張を続け、円盤を貫く大局的なポロイダル磁場(降着円盤理論では回転軸を含む面をポロイダル面と定義する)を作る。この磁力線に沿って円盤プラズマが加速されて降着円盤風が噴出する。その一部が回転軸方向に収束(コリメート)し、ジェットとなる。図2に、以上の過程を再現した大局的な3次元磁気流体シミュレーション結果を示す(Kato et al. 2004)。

核融合プラズマと降着円盤の最大の違いは中心天体の重力にある。降着円盤では円盤プラズマが角運動量の一部を失うと中心天体の重力によって落下する。落下の際に角運動量が一定に保たれていれば、プラズマの角速度は重力中心からの動径半径の2乗に反比例して増大する。このため回転角速度はむしろ速くなる。円盤プラズマは、重力と遠心力、圧力勾配力のつりあいによって保持される。磁場はプラズマ保持にとって本質的ではなく、磁気圧がプラズマ圧より小さくても降着円盤は力学的平衡状態を維持することができる。

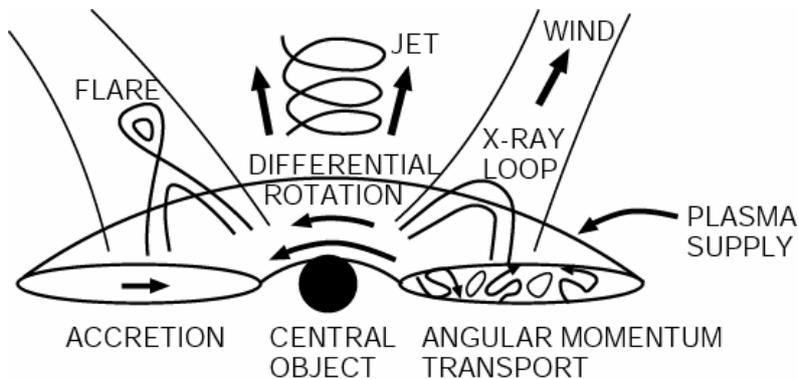


図1: 降着円盤における磁気流体過程の模式図。

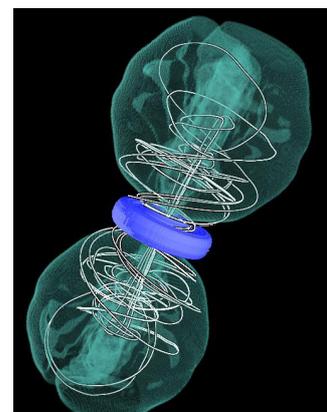


図2: 降着円盤の3次元MHDシミュレーション結果(Kato et al. 2004)。実線は磁力線。

2. 降着天体の時間変動

2.1 1/f ノイズ的変動

降着天体はさまざまな時間変動を示す。図3はブラックホール候補天体 Cyg X-1 の X 線光度曲線である (Negoro 1995)。横軸は時刻、たて軸は X 線強度をあらわす。X 線強度がミリ秒の時間スケールで変化していることがわかる。この観測結果は X 線放射領域のサイズが数百 km 程度しかないことを示唆している。図4に Cyg X-1 の時間変動のパワースペクトルを示す。振動数が 0.1Hz と 1Hz 付近にパワースペクトルの折れ曲がりが見られる。1Hz より振動数の高い成分は 1/f ノイズ的な時間変動を示す。振動周期が 1 秒より長い成分は図3において数秒間隔で発生している鋭いピークに対応している。これらは X 線ショットと呼ばれる。

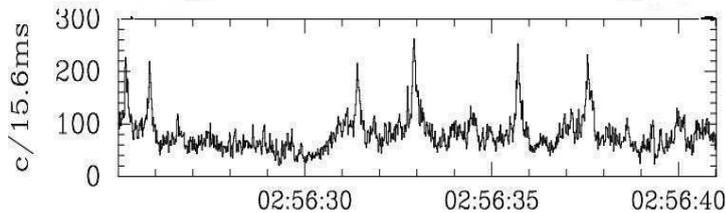


図3: ブラックホール候補天体 Cyg X-1 の X 線強度変動 (Negoro 1995)。横軸は時刻、縦軸は X 線強度。

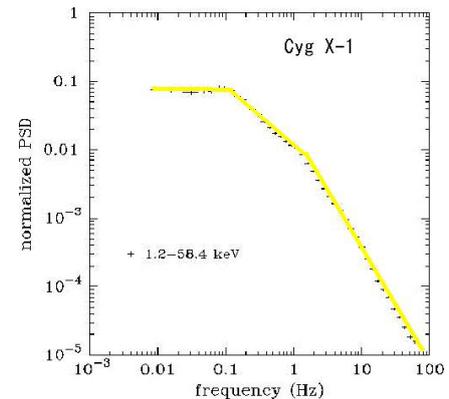


図4: Cyg X-1 の時間変動パワースペクトル。

自然界に見られる 1/f 揺らぎの成因を説明するため Bak ら (1987) は砂山モデルとして知られるセルオートマトンモデルを提唱した。砂山に砂粒を落としていくと時々、雪崩が発生する。この過程をモデル化するため、空間を格子に分割し、各セルと周囲のセルの高さの差が臨界値を越えるとそのセルから周囲のセルに砂粒を移動するという簡単な規則でシミュレーションを行った結果、雪崩で動いた砂粒の数 (雪崩れの規模) とその頻度の分布が 1/f ノイズ的になることがわかった。砂山の傾きは雪崩を起こす臨界値付近に自動的に落ち着く。このようなモデルは自己組織臨界 (Self-organized Criticality: SOC) モデルと呼ばれる。Lu and Hamilton (1991) は SOC モデルを太陽フレアの分布に適用した。砂粒に相当するのはプラズマ運動に伴って蓄積される磁気エネルギーであり、磁気エネルギー解放現象であるフレアが雪崩に対応する。Mineshige et al. (1994) は、SOC モデルを降着円盤に適用することにより降着天体で観測される 1/f ノイズ変動を説明した。

2.2 準周期振動 (Quasi-Periodic Oscillation: QPO)

電波パルサーや X 線パルサーから放射される電磁波には中性子星の回転に起因する正確な周期性が見られ、時間変動のパワースペクトルには鋭いピークがあらわれる。このような鋭いピークを持たない準周期的な時間変動がまず X 線連星中の中性子星で、ついでブラックホール候補天体でみつかった。図5にブラックホール候補 GX339-4 の時間変動のパワースペクトルを示す。5Hz 付近に広がったピークがみられる。このような準周期的変動 (Quasi-Periodic Oscillation) は QPO と呼ばれている。ブラックホール候補天体では 5Hz 程度と 100Hz 程度の 2 種類の QPO が観測されることがあり、前者を Low-frequency QPO、後者を High-frequency QPO と呼んでいる。高振動数 QPO では 2:3 の振動数比のふたつの QPO が観測されることが多い。ブラックホール候補天体における高振動数 QPO の成因として降着円盤の振動が有望視されている。その振動数はブラックホールの質量、スピンの依存するため QPO の成因を理解することにより、ブラックホールの質量、スピンを推定する手段を手にすることができる。

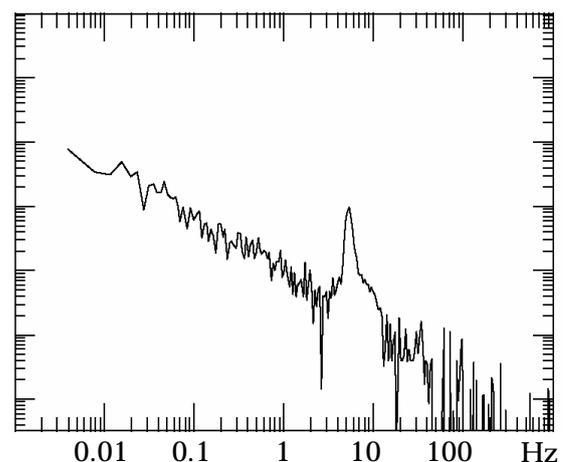


図5: ブラックホール候補天体 GX339-4 の時間変動のパワースペクトル (McClintock and Remillard 2004)

3. ブラックホール降着円盤の大局的3次元磁気流体シミュレーション

3.1 降着円盤の形成

図6にブラックホール降着円盤形成の3次元磁気流体シミュレーション結果を示す(Machida and Matsumoto 2003)。濃淡は密度分布、実線は磁力線をあらわす。一般相対論的な効果は擬ニュートンポテンシャル $\Phi = -GM/(r-r_s)$ を用いることによって近似した。ここで M はブラックホールの質量、 r_s はシュバルツシルト半径である。初期条件は方位角方向の弱い磁場に貫かれた角運動量一定のトーラスとした。初期磁場の強さはトーラス密度最大点でのガス圧と磁気圧の比 β によって指定した。図6の例ではトーラス密度最大点の半径は $50r_s$ 、 $\beta = 100$ とした。この回転トーラスの時間発展を円筒座標系3次元の散逸性磁気流体コードを用いてシミュレートした。電気抵抗としては電流密度とガス密度の比が臨界値を越えた領域でのみゼロでない値を取る異常抵抗を仮定した。また、この計算では円盤密度は十分小さいと仮定して輻射冷却を無視した。

磁気回転不安定性の成長に伴い円盤内部で磁気乱流が発達し、角運動量を失った物質が落下して降着円盤を形成する(図6b)。時間の単位は $t_0 = r_s/c = 10^{-5}(M/M_{\text{sun}})$ sec である。形成される円盤の温度はビリアル温度近くまで上昇し、 10^{11}K 程度になっている。図6cに中心領域の拡大図を示す。円盤物質はゆっくりとブラックホールに落下していく。Machida and Matsumoto (2003)はブラックホール近傍で発生する磁気リコネクションによって磁気エネルギーが解放され、図3に見られるようなX線フレア(X線ショット)を説明できることを示した。

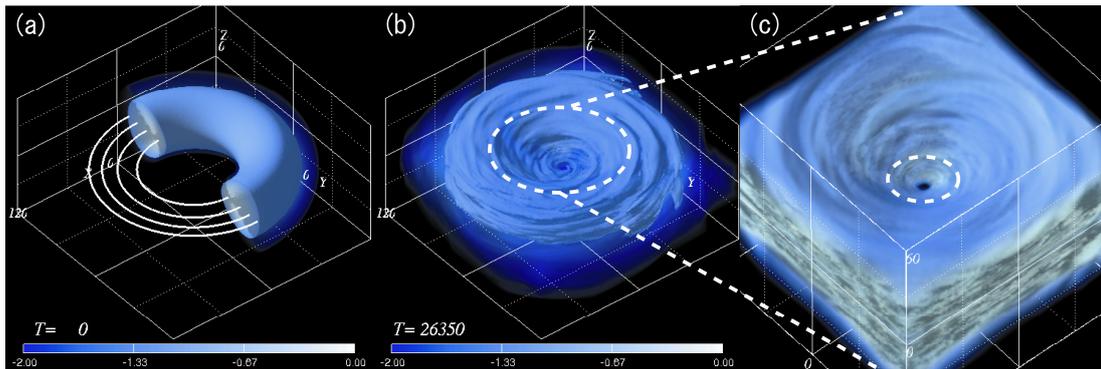


図6:降着円盤形成の大局的3次元磁気流体シミュレーション結果。濃淡は密度分布、実線は磁力線。

図7にシミュレーション結果から計算したマクスウェルストレスとガス圧の比の空間平均の時間変化を示す。この比の値は降着円盤理論で角運動量輸送パラメータとして導入されていた α の値に相当する。シミュレーションの結果、降着円盤が形成され、準定常状態に至った状態では $\alpha = 0.01 \sim 0.1$ であることがわかった。この値はモデルと観測を比較して推定されていた値に一致する。図8に降着率の時間変動のパワースペクトルを P とし、横軸を振動数 ν 、縦軸を $\nu P \nu$ としたグラフを示す。ブラックホールの質量は太陽質量の10倍とした。10Hz程度の領域では $P \propto 1/\nu$ という $1/f$ ノイズ型の時間変動が再現されている。

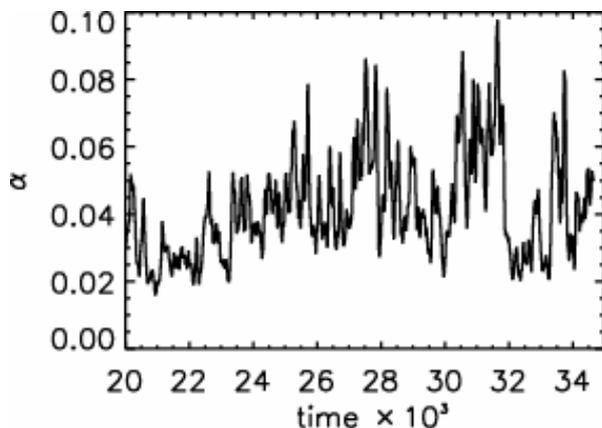


図7:角運動量輸送率 (マクスウェルストレスとガス圧の比の空間平均)の時間変化

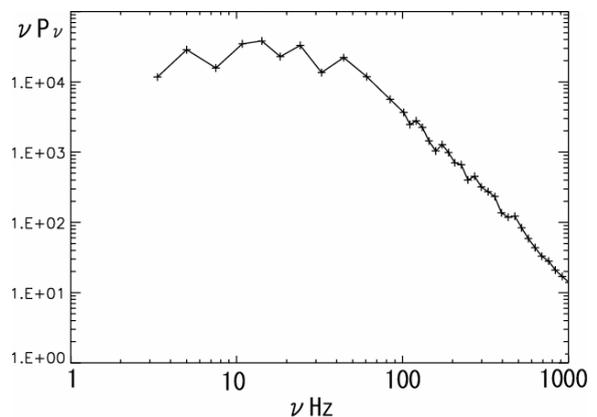


図8:降着率時間変動のパワースペクトル。縦軸はパワースペクトル密度 P と ν の積。

3.2 ブラックホール候補天体の状態遷移とそのシミュレーション

ブラックホール候補天体は硬 X 線が強い状態（ハードステート）と軟 X 線が強い状態（ソフトステート）の間の状態遷移を示す。この遷移はブラックホール候補天体が増光するアウトバーストと呼ばれる現象中に発生する。図 9a にアウトバースト中の色指数と光度の変化を示す。横軸が色指数をあらわし、右側ほど硬 X 線が強い状態、左側ほど軟 X 線が強い状態をあらわす。 L_{EDD} はエディントン光度と呼ばれる臨界光度である。この図は星の進化を理論的に理解する上で決定的な役割を果たした、星の色と光度（等級）の関係を示す HR 図に対応している。

ブラックホール候補天体のアウトバーストは硬 X 線が強いハードな状態の増光に始まる。光度がエディントン光度の 10% 程度に達すると軟 X 線が強いソフトステートに状態が遷移し、ゆっくり減光した後、ハードステートに戻ってさらに暗くなる。図 9b に理論モデルを示す。横軸は降着円盤の表面密度、縦軸は降着率、実線は加熱と冷却が釣り合う熱平衡曲線をあらわす (Abramowicz et al. 1995)。左側のブランチは光学的に薄いハードステートの円盤、右側のブランチは光学的に厚いソフトステートの円盤に対応する。ブラックホール候補天体のアウトバーストはブラックホールに向けて遠方から落下してくるガスの供給率が増加することによって発生する。アウトバースト開始時には円盤密度が低く、円盤は左側のブランチ（ハードステート）にある。質量降着率が増加して臨界値を越えると熱平衡解がなくなり、円盤は光学的に厚い状態に向けて遷移を起こす。これがハードステートからソフトステートへの遷移に対応する。

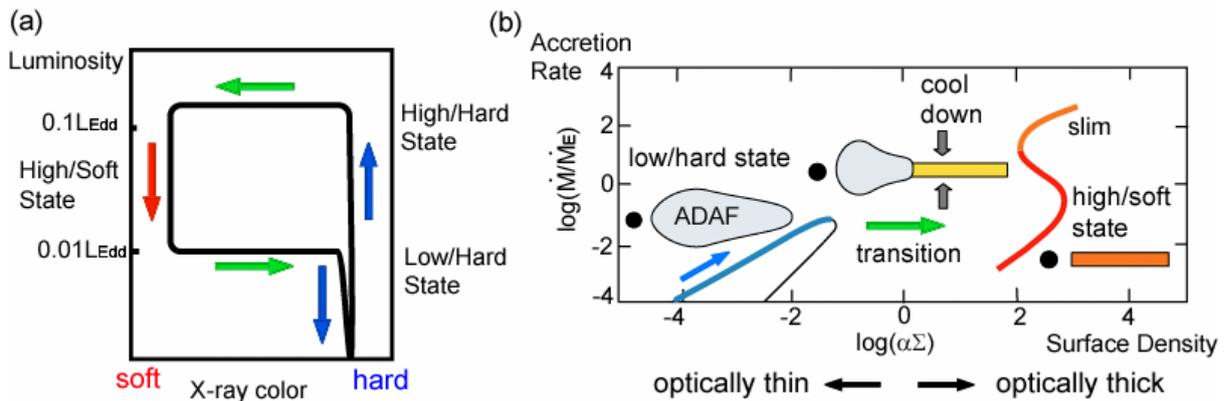


図9 (a) ブラックホール候補天体のアウトバースト時の色指数と光度の変化。(b)降着円盤の熱平衡曲線。横軸は表面密度、たて軸は降着率。降着率増加に伴い、降着円盤は光学的に薄いブランチ (low/hard state) から光学的に厚いブランチ (high/soft state) に遷移する。

ブラックホール候補天体のハードステートからソフトステートへの状態遷移過程を、輻射冷却を含めた 3 次元磁気流体シミュレーションによって調べた (Machida et al. 2006)。図 10 にシミュレーション結果を示す。円盤密度が臨界値を越え、冷却不安定性が発達すると円盤が鉛直方向に収縮するために磁場強度が増大し、円盤が磁気圧で支えられた状態に至ることがわかった。円盤が磁場で支えられるため、円盤は幾何学的に厚く、光学的に薄い状態が維持される。この状態の円盤はハードな X 線スペクトルを保ちつつ、エディントン光度の 10% 以上の光度に達することができる。この状態は、アウトバースト中に観測される明るいハードステートに対応する。光学的に厚いソフトステートへの遷移は、円盤を支えている磁場が流出あるいは散逸してはじめて可能になる。

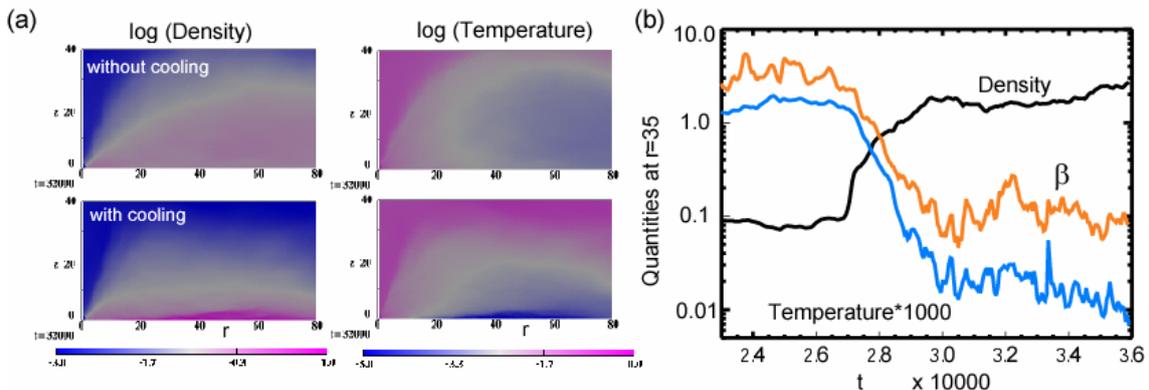


図10 (a) ブラックホール降着円盤の冷却不安定性の 3 次元磁気流体シミュレーション結果。下段が輻射冷却を考慮した場合。(b) 冷却不安定性に伴う円盤赤道面の密度、プラズマ β 、温度の変化。

3.3 降着円盤の鋸歯状振動と QPO

ブラックホール候補天体の準周期振動 (QPO) はハードステートからソフトステートへの遷移中、すなわち円盤が冷える過程で観測されることが多い。そこで初期トラスの温度を下げて 3 次元磁気流体シミュレーションを実施した。輻射冷却は無視した。図 11 に初期トラスが高温の場合と低温の場合のシミュレーション結果を示す (Machida et al. 2008)。濃淡は密度分布を示す。低温トラスを初期条件とした場合、シュバルツシルト半径の 10 倍より内側の領域に内側トラスが形成された。このような内側トラスが形成されたのは、円盤温度が下がり、角運動量輸送率が低下したためである。内側トラスでは角運動量がほぼ一定になっている。このようなトラスでは方位角方向のモード数 $m=1$ の非軸対称不安定性が成長する (Papaloizou and Pringle 1984)。この不安定性の非線形時間発展を 3 次元流体コードを用いてシミュレートした結果、磁場がない場合、三日月状の密度構造が維持されることが知られている (Hawley 1991)。

今回我々が実施した磁気流体シミュレーションの結果、磁場を考慮すると三日月構造の発達とともに磁場が強まること、磁気圧とガス圧が同程度になると磁気エネルギーが解放されて三日月構造が崩壊して円盤は軸対称に近づき、及び非軸対称構造が成長するというサイクルをくり返すことがわかった (図 12)。1 サイクルは円盤が 10 回転する程度の時間である。

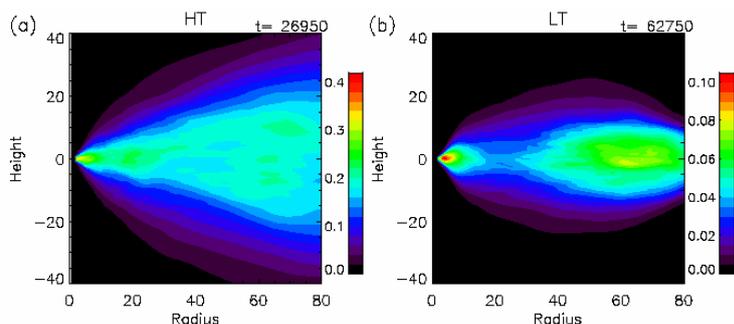


図 11: 初期トラス温度への依存性。濃淡は密度分布。(a) 高温トラスを初期条件とした 3 次元磁気流体シミュレーション結果。(b) 低温トラスを初期条件としたシミュレーション結果。内側トラスが形成された。

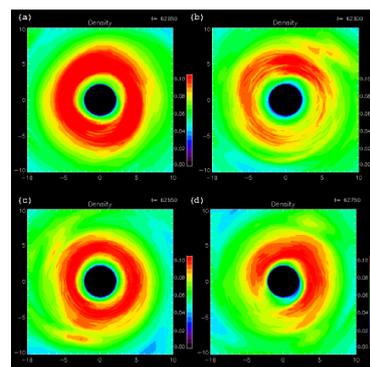


図 12: 赤道面密度分布の時間変化。三日月構造の成長と崩壊が繰り返される。

図 13 に磁気エネルギーとジュール加熱率の時間変化を示す。磁気エネルギーの増大と散逸が繰り返す鋸歯状振動が発生している。磁気エネルギーの増大と解放は三日月構造の発達、崩壊と同期している。降着率の時間変化のパワースペクトルを図 14 に示す。ブラックホールの質量は太陽質量の 10 倍とした。図 13 にあらわれている鋸歯状の振動は 6Hz 付近のピークに対応している。この低振動数の QPO に加えて、60-100Hz に二山のピークがあらわれている。ふたつのピークの振動数の比は 2:3 である。これらのピークは内側トラスに励起された円盤振動の固有振動数に対応していると考えられる。

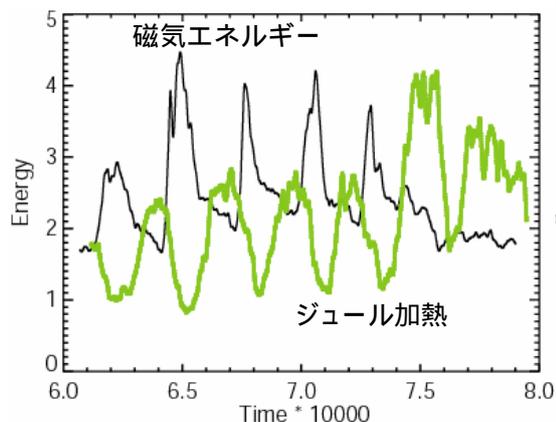


図 13: 低温トラスの場合のシミュレーション結果。磁気エネルギーとジュール加熱の時間変化。

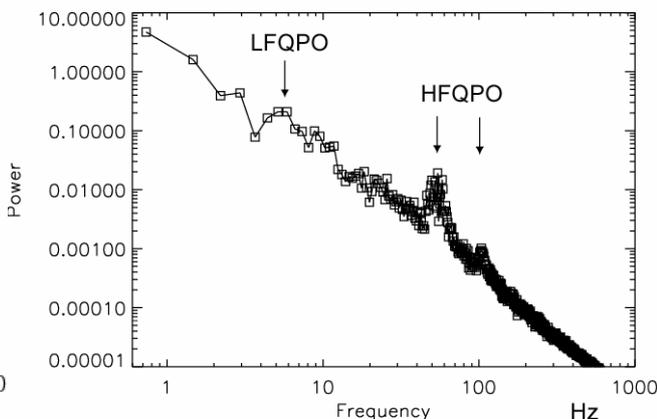


図 14: 低温トラスの場合の降着率時間変動のパワースペクトル。

4. まとめと議論

ブラックホール降着円盤の形成、進化を円筒座標系 3 次元の散逸性磁気流体コードを用いてシミュレートした結果、(1) 磁気回転不安定性に駆動される磁気乱流が発達し、従来の降着円盤モデルで仮定されていた $\approx 0.01 \sim 0.1$ に相当する角運動量輸送率が得られること、(2) 高温で光学的に薄いハードステート円盤では円盤内の随所で発生する磁気エネルギー解放によって $1/f$ ノイズ的な時間変動が生じること、(3) 円盤密度が増大してブラックホールから数十シュバルツシルト半径の領域の円盤温度が低下すると、シュバルツシルト半径の 10 倍以内の領域に内側トラスが形成され、回転周期の 10 倍程度の周期で磁気エネルギーが増減する鋸歯状振動が発生すること、(4) 磁気エネルギーの増減は三日月状の密度構造の形成、崩壊と連動していること、(5) この鋸歯状振動が 10Hz 前後の振動数を持低振動数 QPO の起源と考えられること、(6) この振動が励起する内側トラスの振動により、高振動数 QPO を説明できそうであることなどが明らかになった。

以上の計算は輻射冷却を無視していた。ハードステート円盤からソフトステート円盤への状態遷移過程を調べるため、輻射冷却を考慮した 3 次元磁気流体シミュレーションを実施した。その結果、降着率増加に伴って円盤密度が増加して輻射冷却率が増加し、臨界値を越えると冷却不安定性が成長すること、冷却により円盤が方位角方向の磁束を保ったまま鉛直方向に収縮すると磁場強度が高まり、円盤が磁気圧で支えられた状態に至ることなどが明らかになった。円盤を支えている磁場が磁気浮力によって円盤から流出したり、磁気リコネクションによって円盤内部で散逸したりすると円盤はさらに鉛直方向に収縮できるようになり、光学的に厚いソフトステートに遷移することが可能になる。この過程で磁気エネルギーが解放され、ジェットを噴出する可能性がある。ブラックホール候補天体のアウトバースト中の降着円盤の進化を図 15 に模式的に示す。ソフトステートへの遷移をシミュレートするためには光学的に厚い領域まで扱うことができるシミュレーションコードが必要になる。

シミュレーションには国立天文台の VPP5000 を使用した。

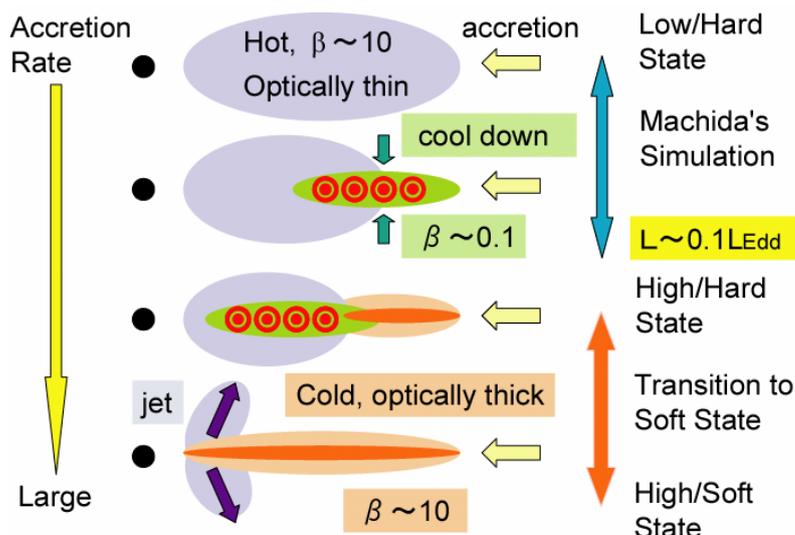


図 15: アウトバースト中の降着円盤の時間発展の模式図。

参考文献

- Abramowicz, M.A., Chen, X., Kato, S., Lasota, J.P., and Regev, O. 1995, ApJ 438, L37
 Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. 1987, Phys. Rev. Lett. 59, 381
 Balbus, S.A. and Hawley, J.F. 1991, ApJ 376, 214
 Hawley, J.F. 1991, ApJ 381, 496
 Hawley, J.F., Gammie, C.F., and Balbus, S.A. 1995, ApJ 440, 742
 Kato, Y., Mineshige, S., and Shibata, K., 2004, ApJ 605, 307
 Lu, E.T., and Hamilton, R.J. 1991, ApJ 380, L89
 Machida, M., Hayashi, M.R., and Matsumoto, R. 2000, ApJ 532, L67
 Machida, M., and Matsumoto, R. 2003, ApJ 585, 429
 Machida, M., Nakamura, K.E., and Matsumoto, R. 2006, PASJ 58, 193
 Machida, M. et al. 2008, PASJ in press
 Matsumoto, R. 1999, Proceedings of the International Conference on Numerical Astrophysics 1998 (NAP98), ed. Miyama, Tomisaka, and Hanawa, Kluwer Academic, p.195
 McClintock, J.E., and Remillard, R.A. 2004, in Compact Stellar X-ray Sources, ed. Lewin and Van der Klis, Cambridge University Press
 Mineshige, S., Ouchi, N.B., and Nishimori, H., 1994, PASJ 46, 97
 Negoro, H. 1995, PhD Thesis, Osaka University
 Papaloizou, J.C.B. and Pringle, J.E. 1984, MNRAS 208, 721

A model of interaction between magnetic island and drift wave turbulence

A. Ishizawa*

National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan.

P. H. Diamond

University of California San Diego, La Jolla, California 92093-0424, USA

A modified Rutherford equation of magnetic island is introduced. The island equation includes multi-scale interaction with drift wave turbulence and is coupled with turbulent wave energy equation. In this model, drift wave turbulence is prey and magnetic island corresponds to predator. The magnetic island suppresses the growth of turbulence by flattening temperature gradient because of the violation of magnetic surfaces. On the other hand, the turbulence affects perturbed neoclassical bootstrap current in the Rutherford equation through anomalous transport. In these interactions heat flux is fixed, and thus perpendicular thermal diffusion coefficient depends on the turbulence energy and the island width. A stabilizing effect of the turbulence on magnetic island growth is found and new critical island width of neo-classical tearing mode excitation is obtained.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

Recently, multi-scale interaction between micro-turbulence and macro-scale magnetohydrodynamic (MHD) instability has been studied extensively [1–3]. The interaction would play crucial role in the analysis of neoclassical tearing mode (NTM), which limits the beta of tokamak plasmas[4, 5]. The NTM is driven by perturbed neoclassical bootstrap current density inside the separatrix of magnetic island, and it is unstable in high beta tokamak plasma, even if the current density profile is linearly stable against tearing mode. Thus, NTM is a nonlinear instability and it starts to grow when the width of island caused by an external perturbation exceeds a threshold.

The excitation mechanism of NTM is an open problem that is divided into two parts: the threshold and the trigger. The threshold which is called critical island width is evaluated as follows. When magnetic island appears the pressure gradient is reduced inside the island because of strong heat conductivity along magnetic field. This flattening of pressure gradient reduces neoclassical bootstrap current inside the magnetic island and destabilizes the magnetic island. When the island width is very small the flattening is not completed because it is not able to overcome perpendicular transport. Hence, competition between parallel and perpendicular heat transport determines critical island width [6]. The critical island width is also affected by the polarization current [7, 8]. On the other hand, the trigger problem is the process of producing the seed magnetic island caused by external phenomena. Once the width of seed island exceeds the critical island width, then the island grows as NTM. The external phenomena can be MHD modes of different helicities such as sawteeth and edge localized

modes and induce the seed island through toroidal mode coupling [9, 10]. The external phenomena can also be micro-turbulence because the turbulence is able to produce seed island through nonlinear mode coupling [11].

The anomalous perpendicular transport due to drift wave turbulence should play crucial role in evaluating critical island width. In addition, magnetic island affects the turbulence simultaneously. We need a model which describes these mutual interaction between them. In this paper, we propose a simple model of interaction between drift wave turbulence and magnetic island. The point of our model is that we fix heat flux instead of thermal diffusivity coefficient when we evaluate temperature gradient. Then we introduce effects of drift wave turbulence on thermal diffusivity and introduce effect of magnetic island which reduces the growth of turbulence by flattening temperature gradient inside the island.

We present our model of interaction between magnetic island and the turbulence in Sec. 2. In Sec. 3 we evaluate critical island width by using the model. Finally we summarize results in Sec. 4.

II. MODEL OF INTERACTION BETWEEN MAGNETIC ISLAND AND DRIFT WAVE TURBULENCE

We present magnetic island equation which couples with drift wave turbulence energy equation. The modified Rutherford equation of magnetic island evolution is [4]

$$\frac{\tau_R}{r_s} \frac{dw}{dt} = r_s \Delta' + \frac{L_s r_s}{B_0 w} \delta J_{BS}, \quad (1)$$

where w , r_s , B_0 , τ_R , and L_s are island width, minor radius of resonant surface, uniform toroidal magnetic field, resistive diffusion time, and magnetic shear length, respectively. In this equation Δ' is the stability parameter of tearing mode and is negative so that it is stable against

*Electronic address: ishizawa@nifs.ac.jp

tearing mode. We remark that the island width is related to perturbed magnetic field as $\delta B = k_\theta B_0 w^2 / L_s$. Here we assume that density profile is uniform n_0 , then the perturbed bootstrap current is

$$\delta J_{BS} = \frac{\epsilon^{1/2} n_0}{B_\theta} \delta \left(\frac{dT_e}{dr} \right), \quad (2)$$

where ϵ , T_e , and B_θ are aspect ratio, electron temperature, and poloidal magnetic field, respectively. When we calculate temperature gradient

$$\frac{dT_e}{dr} = -\frac{Q_e}{\chi_\perp}, \quad (3)$$

we fix heat flux Q_e , and thus perpendicular heat diffusivity χ_\perp is variable. The heat diffusivity coefficient consists of diffusion due to perturbed magnetic field in the presence of magnetic island $\chi_{\perp island}$, anomalous transport by drift wave turbulence $\chi_{\perp turb}$, and neoclassical transport $\chi_{\perp neo}$ as,

$$\chi_\perp = \chi_{\perp turb} + \chi_{\perp island} + \chi_{neo}, \quad (4)$$

$$\chi_{\perp turb} = \chi_{\perp turb}(\epsilon) = \chi_0 \epsilon(w), \quad (5)$$

$$\chi_{\perp island} = \chi_\parallel \left(\frac{\delta B}{B_0} \right)^2 = \chi_\parallel \left(\frac{k_\theta}{L_s} w^2 \right)^2, \quad (6)$$

where $\chi_{\perp turb}$ is assumed to be proportional to turbulence energy ϵ , χ_\parallel is parallel thermal diffusivity, and k_θ is poloidal wave number. Then Eq. (3) is rewritten as,

$$\frac{dT_e}{dr} = \frac{-Q_e}{\chi_0 \epsilon(w) + \chi_\parallel (w^2 k_\theta / L_s)^2 + \chi_{neo}}. \quad (7)$$

By using Eqs. (7) and (2) the island equation (1) is written as,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}}{d\hat{t}} &= \hat{\Delta}' + \frac{\hat{\beta}_e}{\hat{w}} \hat{Q}_e \left(\frac{1}{\epsilon(0) + \hat{\chi}_{neo}} - \frac{1}{\epsilon(\hat{w}) + \hat{w}^4 / \hat{w}_d^4 + \hat{\chi}_{neo}} \right) \quad (8) \\ &= \hat{\Delta}' + \frac{\hat{\beta}_e}{\hat{w}} \frac{\hat{Q}_e}{\epsilon(0) + \hat{\chi}_{neo}} \left(1 - \frac{\hat{w}_d^4 (\epsilon(0) + \hat{\chi}_{neo})}{\hat{w}^4 + \hat{w}_d^4 (\epsilon(\hat{w}) + \hat{\chi}_{neo})} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

where $\hat{\chi}_\perp(\epsilon(\hat{w})) = \epsilon(\hat{w})$. Normalizations are $\hat{w} = w/r_s$, $\hat{t} = t/\tau_R$, $\hat{\chi}_\parallel = \chi_\parallel/\chi_0$, $\hat{\chi}_{neo} = \chi_{neo}/\chi_0$, $\hat{k}_\perp = k_\theta r_s^2 / L_s$, $\hat{L}_s = L_s / L_{T0}$, $\hat{B}_\theta = B_\theta / B_0$, $\hat{Q}_e = Q_e L_{T0} / T_e \chi_0$, $\hat{\beta}_e = \beta_e \epsilon^{1/2} \hat{L}_s / \hat{B}_\theta$, $\hat{w}_d = (\hat{\chi}_\parallel \hat{k}_\perp^2)^{-1/4}$.

In order to close interaction loop between magnetic island and the turbulence we need equation of turbulence wave energy[12]

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \gamma(\epsilon, w)\epsilon - \beta\epsilon^2, \quad (10)$$

where

$$\gamma(\epsilon, w) = \gamma_0 L_{T0} \left(\frac{1}{L_T(\epsilon, w)} - \frac{1}{L_{Tcr}} \right)_{>0}, \quad (11)$$

where $(f)_{>0}$ is zero if f is negative. In this equation we include feedback from magnetic island to the turbulence.

The strong parallel thermal diffusion flattens pressure gradient inside the separatrix of the island. This reduces growth rate γ by increasing length scale of temperature gradient

$$\frac{1}{L_T(\epsilon, w)} = \frac{-1}{T_e} \frac{dT_e}{dr} = \frac{1}{L_{T0}} \frac{\hat{Q}_e}{\hat{w}^4 + \hat{w}_d^4 (\epsilon(\hat{w}) + \hat{\chi}_{neo})} \quad (12)$$

When we calculate the temperature gradient we fix heat flux again. By substituting this equation to Eq. (11) we have equation of turbulence energy including the effect of magnetic island as,

$$\frac{1}{\tau_R \gamma_0} \frac{d\epsilon}{d\hat{t}} = \left(\frac{\hat{Q}_e}{\hat{w}^4 + \hat{w}_d^4 (\epsilon(\hat{w}) + \hat{\chi}_{neo})} - \frac{1}{\hat{L}_{Tcr}} \right)_{>0} \epsilon - \hat{\beta} \epsilon^2$$

where $\hat{L}_{Tcr} = L_{Tcr} / L_{T0}$ and $\hat{\beta} = \beta / \gamma_0$. Hence, we have obtained a closed set of equations of magnetic island and the turbulence Eqs. (9) and (13).

III. CRITICAL ISLAND WIDTH OF NTM

We have established a model which is able to evaluate critical island width of NTM. We consider a situation that the turbulence saturates because drift frequency time, which is characteristic time scale of drift wave turbulence, is much faster than the resistive diffusion time $\tau_R \gamma_0 \gg 1$, where $\gamma_0 \approx \omega_*$. Thus, we neglect left hand side of Eq. (13) and have the equation of turbulence energy as,

$$\epsilon(w) = \frac{-1}{\hat{\beta} \hat{L}_{cr}} + \frac{1}{2} \left(-F(\hat{w}) + \sqrt{F(\hat{w})^2 + 4\hat{Q}_e / \hat{\beta}} \right), \quad (14)$$

where $F(\hat{w}) = \hat{w}^4 / \hat{w}_d^4 + \hat{\chi}_{neo} - \frac{1}{\hat{\beta} \hat{L}_{cr}}$. Substituting this $\epsilon(w)$ into Eq. (9) we have the island equation of our model.

We show curves of island growth $d\hat{w}/d\hat{t}$ calculated by our model and by the standard model

$$\frac{d\hat{w}}{d\hat{t}} = \hat{\Delta}' + \frac{\hat{\beta}_e}{\hat{w}} \frac{\hat{w}^2}{\hat{w}^2 + \hat{w}_d^2} \quad (15)$$

in Fig. 1. Here we set parameters $\hat{\Delta}' = -1$, $\hat{\beta}_e = 0.2$, $\hat{\chi}_{neo} = 0.1$, $\hat{Q}_e = 2$, $\hat{\chi}_\parallel \hat{k}_\perp^2 = 10^9$, $\hat{\beta} = 0.6$, and $\hat{L}_{Tcr} = 0.5$. The critical island width $w_{critical}/r_s$ is given by $d\hat{w}/d\hat{t} = 0$. The critical island width of our model is larger than the standard model. Thus, the turbulence has a stabilizing effect on the excitation of NTM. Notice that we cannot apply our model to evaluate saturated island width because a large magnetic island strongly reduces turbulence energy and makes it negative in our model. For the above parameter set the turbulence energy ϵ is positive when $w/r_s < 0.00548$. Figure 2 shows curves of parallel diffusion coefficient χ_\parallel as a function of critical island width. Our model implies $w_{critical}/r_s \propto \hat{\chi}_\parallel^{-1/3}$,

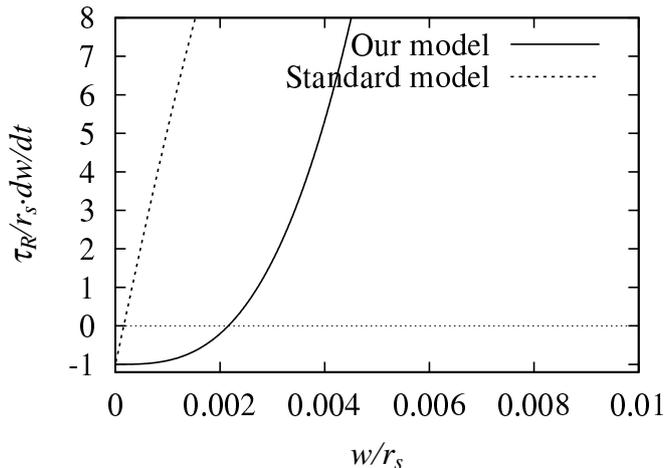


FIG. 1: Curves of island growth $d\hat{w}/dt$ as a function of island width w/r_s . Solid curve indicates our model and dashed curve indicates standard model.

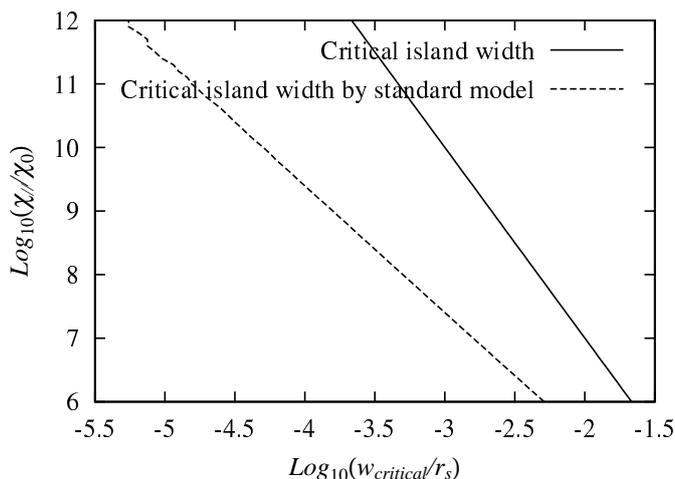


FIG. 2: Curves of parallel diffusion coefficient χ_{\parallel} as a function of critical island width. Solid curve indicates our model and dashed curve indicates standard model.

while the standard model implies $w_{critical}/r_s \propto \hat{\chi}_{\parallel}^{-1/2}$. Figure 3 shows curves of plasma beta β_e as a function of critical island width. Our model implies $w_{critical}/r_s \propto \hat{\beta}_e^{-1/3}$, while the standard model implies $w_{critical}/r_s \propto \hat{\beta}_e^{-1}$, and thus our model suggests weak dependence of

$w_{critical}$ on β_e compared to the standard model.

IV. SUMMARY AND DISCUSSION

We have obtained a predator-prey model of interaction between magnetic island and drift wave turbulence. The turbulence affects perturbed bootstrap current in the island equation of NTM through anomalous perpendicular transport. When we evaluate bootstrap current we fix

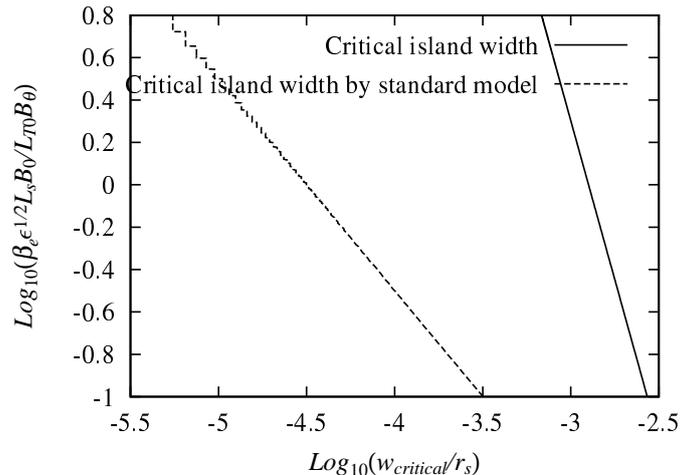


FIG. 3: Curves of plasma beta β_e as a function of critical island width. Solid curve indicates our model and dashed curve indicates standard model.

heat flux and make heat diffusivity depend on the turbulence and the island width. In order to close interaction loop between the magnetic island and the turbulence we introduce turbulence wave energy equation including effect of magnetic island. The magnetic island makes temperature gradient flatten inside it and reduces growth rate of the turbulence.

Our model predicts larger critical island width than the one by standard model. This implies that the drift wave turbulence has stabilizing effect on magnetic island excitation of NTM. In addition we found new β_e scaling of the critical island width of NTM $w_{critical}/r_s \propto \hat{\beta}_e^{-1/3}$. In order to compare our model with experimental observation we would include the polarization current effect in our future work.

[1] C. J. McDevitt and P. H. Diamond, Phys. Plasmas **13**, 032302 (2006).
 [2] M. Yagi, S. Yoshida, S.-I. Itoh, H. Naitou, H. Nagahara, J.-N. Leboeuf, K. Itoh, T. Matsumoto, S. Tokuda and M. Azumi, Nucl. Fusion **45**, 900 (2005).
 [3] A. Ishizawa and N. Nakajima, Phys. Plasmas **14**, 040702 (2007).

[4] R. J. La Haye, Phys. Plasmas **13**, 055501 (2006).
 [5] C. C. Hegna, Phys. Plasmas **5**, 1767 (1998).
 [6] R. Fitzpatrick, Phys. Plasmas **2**, 825 (1995).
 [7] J. W. Connor, F. L. Waelbroeck, and H. R. Wilson, Phys. Plasmas **8**, 2835 (2001).
 [8] R. Fitzpatrick and F. L. Waelbroeck, Phys. Plasmas **12**, 022307 (2005).

- [9] R. J. La Haye and O. Sauter, Nucl. Fusion **38**, 987 (1998).
- [10] C. C. Hegna, et al, Phys. Plasmas **6**, 130 (1999).
- [11] S.-I. Itoh, K. Itoh, and M. Yagi, Phys. Rev. Lett. **91**, 045003 (2003).
- [12] P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, Plasma Phys. Controlled Fusion **47**, R35 (2005).

Mercier Stability Improvement in Nonlinear Development of Heliotron Plasma

Katsuji ICHIGUCHI¹ and Benjamin A. CARRERAS²

National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki 509-5292, JAPAN¹

BACV Solutions Inc., 110 Mohawk, Oak Ridge, Tennessee 37831, USA²

Abstract

Improvement of linear stability due to the nonlinear saturation of interchange modes in the increase of the beta value is studied for the inward-shifted LHD plasma. For this study, a multi-scale numerical scheme is utilized. In this scheme, the beta value is increased by adding small pressure increment to the background pressure. We focus on the dependence of the Mercier stability on the profiles of the pressure increment. It is obtained that the pressure profile approaches to the marginally stable profile when fixed profiles are employed for the pressure increment.

1. Introduction

In the LHD experiments, good confinement of the plasma has been observed in the magnetic configuration with the vacuum magnetic axis located $R_{ax} = 3.6\text{m}$ [1]. However, linear ideal interchange modes or Mercier modes were predicted to be unstable in this configuration. In order to investigate the stabilizing mechanism of the modes, we developed a nonlinear MHD code, NORM, based on the reduced MHD equations[2, 3]. In such investigation, it is crucial to follow the continuous change of the pressure profile in the increase of the beta value. For this purpose, we have also developed a multi-scale simulation scheme[4] by utilizing the NORM code and the VMEC code[5]. This scheme treats both the equilibrium change in the long time scale and the nonlinear dynamics of the instability in the short time scale simultaneously.

In the multi-scale scheme, the beta value is increased by adding a small increment of pressure to the background pressure obtained as the results of the nonlinear dynamics. In this case, there is a freedom in the determination of the profile of the pressure increment. One choice for the profile is to use the shape similar to the background pressure profile obtained by the nonlinear evolution. In the original study[4], we applied this pressure increment to the study in the inward shifted configuration of LHD. We found a self-organization of the pressure profile which indicated a stable path to high beta regime.

On the other hand, the profiles of the heat deposition and the particle supply in experiments are usually fixed in the increase of beta. In order to take this situation into account, we consider to use a fixed profile for the increment of the pressure in the present study. We employ two types of increment profile and compare the results with that of the similar

increment profile. Particularly, we focus on how the Mercier stability is improved by the self-organization of the pressure profile due to the nonlinear saturation of the interchange mode.

2. Multi-scale scheme with fixed pressure increment

The multi-scale scheme used in the present analysis is explained in Ref.[4] precisely. Here we start from a brief review of the multi-scale scheme, and then, explain the choice of the pressure increment profile and the conditions in the calculation.

The scheme consists of iterative calculations of nonlinear dynamics of the perturbations by the NORM code and three-dimensional equilibrium by the VMEC code. In this case, we divide the whole calculation time into short time intervals. At $t = t^i$, the beginning of an interval, we calculate new equilibrium quantities at the higher beta value with the VMEC code as the values of $t = t^{i+1}$, the beginning of the next interval. In order to keep a smooth continuity of the perturbation, we also divide the interval between t^i and t^{i+1} into some sub-intervals and employ a linear interpolation of the equilibrium quantities by using the equilibrium quantities of $t = t^i$ and t^{i+1} . Then, the nonlinear dynamics is calculated for each sub-interval with the interpolated equilibrium quantities with the NORM code.

When we calculate the equilibrium with the VMEC code, we incorporate the pressure deformation due to the nonlinear dynamics into the pressure profile. At $t = t^i$, the total pressure is obtained as

$$P_{tot}^i = \langle P \rangle^i + \sum_{m \neq 0 \text{ or } n \neq 0} \tilde{P}_{mn}, \quad (1)$$

where the tilde means a perturbed quantity and m and n are the poloidal and the toroidal mode numbers. Here $\langle P \rangle^i$ denotes the average pressure which is given by

$$\langle P \rangle^i = P_{eq}^i + \tilde{P}_{00}^i. \quad (2)$$

The average pressure includes the effect of the nonlinear dynamics through \tilde{P}_{00}^i . We calculate P_{eq}^{i+1} by using $\langle P \rangle^i$ as

$$P_{eq}^{i+1} = \langle P \rangle^i + \Delta P^{i+1}. \quad (3)$$

Here ΔP^{i+1} denotes the increment of the pressure, which gives the increase of beta. In the original study[4], we employed a similar increment profile given by

$$\Delta P^{i+1} = \langle P \rangle^i \frac{\beta^{i+1} - \beta^i}{\beta^i}. \quad (4)$$

In the present study, we also consider two kinds of fixed profile for the increment given by

$$\Delta P^{i+1} = P_I(1 - \rho^2)(1 - \rho^8) \quad (5)$$

and

$$\Delta P^{i+1} = P_I(1 - \rho^2)^2, \quad (6)$$

where ρ denotes the square-root of normalized toroidal magnetic flux. The factor P_I is adjusted so as to give a given beta increment. Hereafter, we call the increments given by (4)-(6) ‘similar increment’, ‘parabolic increment’ and ‘parabola-squared increment’, respectively.

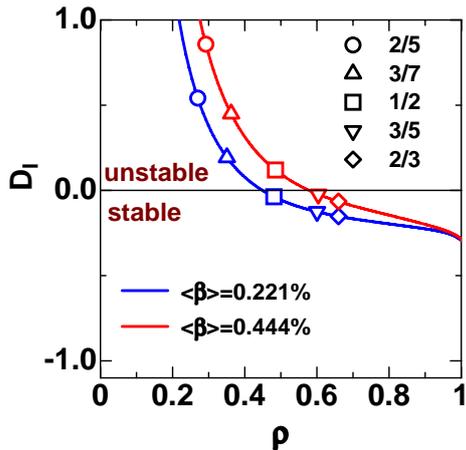


Fig.1 Profiles of D_I of the equilibrium for the pressure profile of $P_{eq} = P_0(1 - \rho^2)(1 - \rho^8)$ in the inward-shifted LHD plasma. Each symbol shows the value of D_I at the position of the resonant surface.

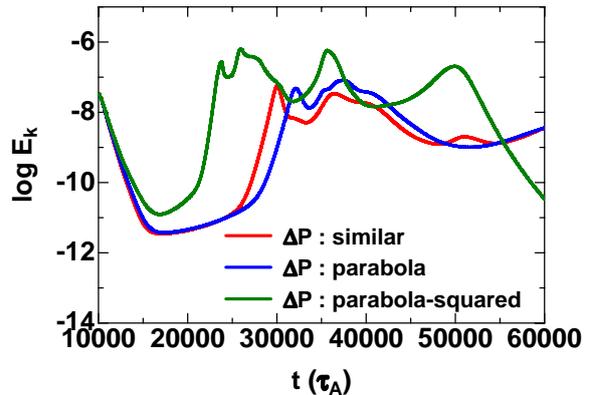


Fig.2 Time evolution of kinetic energy for each case of the pressure increment.

We apply the scheme to the LHD plasma for the three types of pressure increment under following numerical conditions. We choose the configuration with the vacuum magnetic axis located at $R_{ax} = 3.6\text{m}$. We assume the resistivity of $S = 10^6$, where S is the magnetic Reynolds number. We examine the evolution for $0.221\% \leq \langle\beta\rangle \leq 0.498\%$. One time interval is $2500\tau_A$, where τ_A is Alfvén time. We increase the beta value by $\Delta\langle\beta\rangle = 0.0138\%$ every time interval. In the equilibrium calculation with the VMEC code, we use the free boundary condition and the no net-current condition. The time interval is divided into 10 sub-intervals for the linear interpolation.

To give the initial state, we start from the equilibrium for $P_{eq} = P_0(1 - \rho^2)(1 - \rho^8)$ at $\langle\beta\rangle = 0.221\%$. As is shown in Fig.1, the core region of $\rho \leq 0.44$ of this equilibrium is Mercier unstable. The absolute value of D_I [6] decreases in the ρ direction. We follow the nonlinear evolution of the interchange mode for this equilibrium and obtain a saturation at $t = 10000\tau_A$. We employ the saturated state as the initial state of the multi-scale calculation and set $t = 10000\tau_A$ as the initial time. Then, the beta value reaches $\langle\beta\rangle = 0.498\%$ at $t = 60000\tau_A$.

3. Self-organization of pressure profile

We follow the evolution of the plasma for the three types of increment profile and compare the resultant pressure profile. Figure 2 shows the time evolution of the total kinetic energy for the three pressure increments. It is common that the kinetic energy varies smoothly compared with the time scale of sub-interval. This feature indicates the multi-scale approach works well also in the fixed increment cases. The evolution of the parabolic increment case is close to that of the similar increment case, while the evolution in the parabola-squared increment case is a little more active.

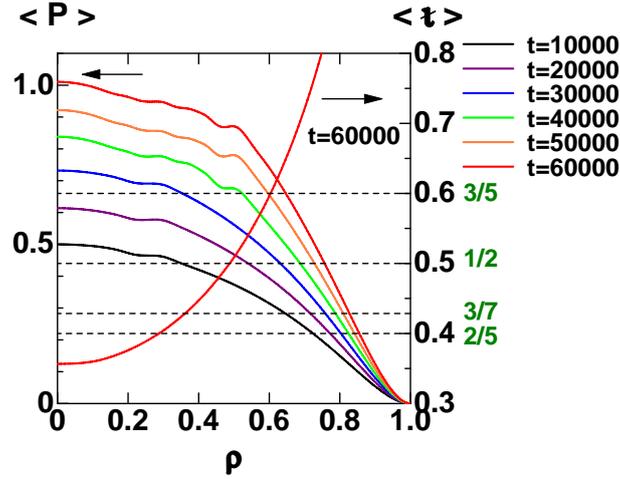


Fig.3 Time evolution of average pressure in the case of the parabolic increment.

Figure 3 shows the time evolution of the average pressure in the case of the parabolic increment. As in the case of the similar increment case[4], weak excitation and mild saturation of the interchange modes occur. The saturation generates locally flat structure at the resonant surfaces in the average pressure profile. Since the Mercier quantity D_I is a decreasing function of ρ as shown in Fig.1, the flat region is generated from inward to outward of the plasma as the beta increases. Similar tendency is observed in the parabola-squared increment case.

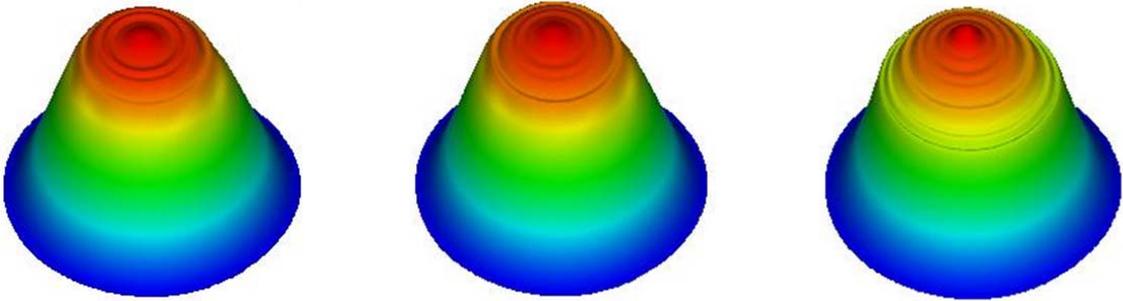


Fig.4 Bird's-eye view of total pressure at $t=60000\tau_A$ for similar increment (left), parabolic increment (center) and parabola-squared increment (right).

Figure 4 shows the bird's-eye view of the total pressure at the final time of $t = 60000\tau_A$. The deformation of the total pressure is almost θ independent for all increment cases. This implies that almost all of the resonant interchange modes are saturated in a low level without any significant excitation. In other words, in each increment profile, the total plasma pressure evolves so that fluctuations are suppressed in the increase of beta.

Remarkable difference between the three increment profiles is seen in the average pressure profile at the final state. Figure 5 shows the profile of the average pressure at $t = 60000\tau_A$. In the similar increment case, a global flat structure is generated in the core region of $\rho < 0.4$. In the parabolic increment case, the gradient of the pressure is recovered in the core region.

In the parabola-squared increment case, the gradient becomes larger. These differences are attributed to the gradient of the increment profile. In any case of the increment, the pressure profile is flattened in the core region once at low beta because $(m,n)=(5,2)$ and $(7,3)$ modes are saturated in the region. In the similar increment case, the average pressure is increased so that the shape should be maintained. Therefore, the local flat structure generated at low beta is kept even at high beta.

On the other hand, in the fixed increment cases, the gradient of the increment profile is always added to the total pressure. Therefore, the local flat structure of the average pressure tends to be smoothed out. Furthermore, the resonant mode can be excited again at the flattened region when the local pressure gradient enhanced by the increment exceeds a critical value. Since the driving force of the mode should be quite weak, it saturates immediately to generate a narrower flat region in the average pressure profile. Thus, the local pressure gradient approaches to the critical value through this process. The critical value can be measured in terms of D_I as explained in the next section.

In the parabolic increment case, the increment profile is the same as the equilibrium profile used in the initial state generation. Therefore, this process is limited in the core region. On the other hand, the more steep gradient is added in the parabola-squared increment case. The region of the process extends to the outer region including the surfaces resonant with the $(5,3)$ and the $(3,2)$ modes.

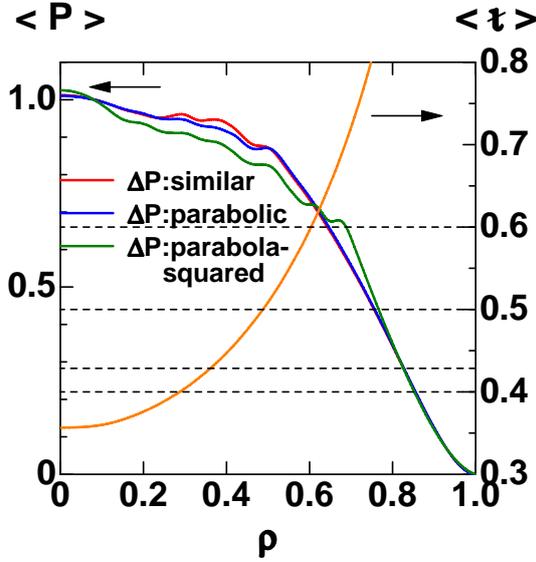


Fig.5 Average pressure profiles at $t = 60000\tau_A$.

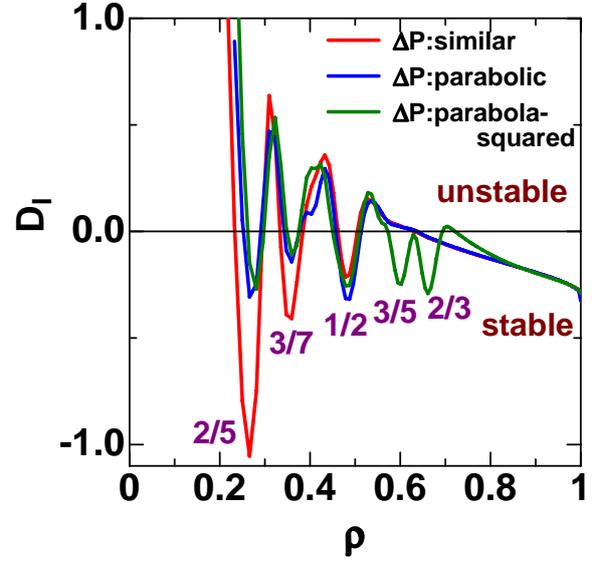


Fig.6 Profiles of D_I at $t = 60000\tau_A$.

4. Mercier stability improvement

The global feature of the D_I profile is common in all cases of the increment. Figure 1 (red line) shows the D_I profile for the equilibrium with the pressure profile of $P_{eq} = P_0(1 - \rho^2)(1 - \rho^8)$ at $\langle\beta\rangle = 0.444\%$. In this case, the wide region of $\rho \leq 0.60$ is Mercier unstable. On the other hand, D_I has negative values around the resonant surfaces as shown in Fig.6, which shows the D_I profiles at $t = 60000\tau_A$ ($\langle\beta\rangle = 0.498\%$) for the three cases of the

pressure increment. This comparison shows that the nonlinear saturation of the interchange mode stabilizes itself through the local pressure flattening.

The difference in the structure of the pressure profile is reflected to the precise structure of D_I profile. In the similar increment case, the improved values of D_I are -1.05, -0.49 and -0.21 at resonant surfaces with $\iota = 2/5, 3/7$ and $1/2$. There is a tendency that the absolute value is a decreasing function of ρ_s , where ρ_s is the position of the resonant surfaces. This tendency is related to the Mercier stability at the initial equilibrium. The profile of D_I at $\langle\beta\rangle = 0.221\%$ implies that the driving force of the interchange mode is also the decreasing function of ρ . Therefore, the local deformation at inner resonant surface is larger than that at outer surface. Since such structure is almost maintained during the beta increase, the resonant surface is more stabilized beyond the marginal stability.

On the contrary, the absolute value of D_I is limited in the level of -0.32 in the parabolic increment case. In this case, even once the pressure profile is locally flattened, the enhancement of the gradient of the pressure degrades the Mercier stability. Therefore, the value of D_I approaches to a marginal value in the increase of beta. This tendency is the same as in the case of the parabola-squared increment. In this case, the local improvement is observed also around the surfaces of $\iota = 3/5$ and $2/3$. Including these surfaces, the absolute value of D_I is limited in the level of -0.29. The enhancement of the pressure gradient brought by the parabola-squared increment is larger than that by the parabolic increment case. Nevertheless, the maximum value of D_I is in the similar level of $D_I \sim -0.3$. This result indicates that this value of D_I corresponds to the marginal pressure gradient independent of the increment profile, if a fixed increment profile is employed. It can be concluded that the local pressure gradient is determined in the increase of beta so that D_I at the resonant surface should achieve to the marginal value.

5. Conclusions

The local improvement of the Mercier stability in the nonlinear evolution of the interchange mode is studied in the inward-shifted LHD plasma. The beta increase effect is incorporated by employing the multi-scale numerical scheme. The plasma is Mercier unstable in a wide region if there is no deformation of the pressure profile. However, the nonlinear saturation of the interchange mode locally improves the Mercier stability around the resonant surface through the generation of the local flat structure in the pressure profile.

The absolute value of D_I in the stabilized region depends on the pressure increment profile. If we use the similar increment profile, the absolute value of negative D_I becomes much larger in the vicinity of the axis than that in the outer region. This is attributed to that the locally flat structure in the pressure profile is maintained in the beta increase. On the other hand, if we use a parabolic increment profile, the reduction of the pressure gradient is compensated by the increment pressure. Therefore, the absolute values of D_I at all resonant surfaces are in a small level. In the case of the parabola-squared increment profile, the improvement of the Mercier stability extends to the outer rational surfaces. Even in this case, the absolute values of D_I are also limited in a small level including the outer

rational surfaces. The level is almost the same as that in the parabolic increment case. These results indicate that the enhancement and the reduction of the pressure gradient is balanced so as to give a critical pressure gradient. The former is due to adding the increment pressure and the latter is due to the nonlinear saturation of the mode. In other words, in the case of the fixed profile of the pressure increment, the plasma is self-organized so that the pressure profile approaches to the marginally stable profile at the resonant surfaces with respect to the Mercier stability.

As a future plan, we consider to include an effect of the equilibrium diffusion. In this case, we can expect that the positive D_I values in the regions between the resonant surfaces also approach to marginal value.

Acknowledgments

This work is supported by NIFS cooperation programs NIFS07KLDD012 and NIFS07KNXN092. and also partly supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 17560736 of the Japan Society for the Promotion of Science.

References

- [1] Y. Takeiri, et al., Plasma and Fusion Research, **3** S1001 (2008).
- [2] K. Ichiguchi, et al., Nucl. Fusion **43**, 1101-1109 (2003).
- [3] K. Ichiguchi, et al., Fusion Science and Technology **46**, 34-43 (2004).
- [4] K. Ichiguchi B. A. Carreras, J. Plasma Phys. **72** (2006) 1117-1121.
- [5] Hirshman, S. P., et al., Comput. Phys. Commun. **43**, 143-155 (1986).
- [6] A. H. Glasser, J. M. Greene, J. L. Johnson, Phys. Fluids **18**, 875-888 (1975).

エネルギー汎関数法による抵抗性壁モード解析

徳田 伸二¹, 白石 淳也²

日本原子力研究開発機構¹, Oak Ridge Institute for Science and Education²

Abstract : 我々は現在、理想 MHD エネルギー原理を拡張したエネルギー汎関数法に基づき、抵抗性壁モード (RWM) の安定性を解析するコード RWMaC (Resistive Wall Mode analysis Code) の開発を行っているところである。エネルギー汎関数法では、薄シェル近似に基づいて軸対称配位での渦電流問題を固有値問題として解く必要がある。この固有値問題を有限要素法および WKB 法で解くコードを開発し、両者は良く一致することを確認した。

1 序論

高性能定常運転トカマク (JT-60SA 等) で問題となっている抵抗性壁モードを解析するコード (RWMaC: Resistive Wall Mode analysis Code) の開発を行っている。軸対称配位を仮定し、特に壁はプラズマを囲む薄いシェル (有限の電気抵抗率を持つ) であるとする。このとき、解くべき問題はプラズマ中に発生する MHD 擾動とシェルに誘起される渦電流との相互作用に関する連成問題となり、それを記述するエネルギー汎関数 (二次形式) は

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_{IV} + \delta W_{OV} + D_W \quad (1)$$

で与えられる [1]。ここで、変数はプラズマ表面におけるプラズマの変位およびシェル上における磁場の法線成分であり、

- 右辺第 1 項は MHD 擾動に対するプラズマのポテンシャルエネルギーを表し、擾動のプラズマ表面における値に関する二次形式で表現される。そして、この部分は MARG2D コードで計算される [2,3]。
- 右辺第 2 項はプラズマ表面とシェル間の真空領域 IV で誘起される磁場のエネルギーである。この部分は磁気スカラーポテンシャルに対する Laplace 方程式の境界値問題を有限要素法で解くことによって求めた。
- 右辺第 3 項はシェルの外の真空領域 OV における磁場エネルギーを表し、Laplace 方程式に関する Green 関数を用いた積分方程式法で求める。
- 右辺第 4 項は渦電流のエネルギーの減衰を表し、これを求めるためにはシェル上の渦電流の拡散方程式に対する固有値問題を解く必要がある。軸対称性と壁が薄いシェルである条件から、固有値問題はポロイダル角 θ を独立変数とする一次元問題となる。それを有限要素法および WKB 法で解くコードを開発した。

本稿では、シェル上での渦電流問題を解く方法として有限要素法および WKB 法について報告する。

2 抵抗性シェル上での電磁気学

シェルの抵抗率 (resistivity) η および透磁率 (permeability) μ は空間的に一様で時間的に一定であり、さらに μ は真空の透磁率 μ_0 に等しいと仮定する。抵抗率 ([ohm-m] の単位を持つ) は導体の幾何学的な形状には依存しない物質固有の定数であると仮定する (本稿では MKSA 単

位系を採用し、かつ $\mu_0 = 1$ に規格化する). 渦電流のダイナミクスは準定常 Maxwell 方程式で記述される. シェルの厚さ $\Delta_w(m)$ はシェルの実効的な長さ (あるいは現象の特性長) a_w より十分小さいと仮定する. この仮定を用いて、3次元空間で記述されている Maxwell 方程式を以下のようにシェル上の2次元的な方程式に帰着させる. $s = \text{const.}$ 面がシェル面に一致し、シェル上の位置を記述する2つの角変数を θ, ϕ とするとき、シェル上に流れる電流密度は

$$\mathbf{j}(s, \theta, \phi; t) = \nabla s \times \nabla[\kappa(\theta, \phi; t)\delta(s - s_w)] \quad (2)$$

と表せる (δ : デルタ関数). ここで、 κ は電流ポテンシャルと呼ばれ、単位は $[A]$ (アンペア) である. (2) 式で与えられる電流密度は $\text{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$ を満たすことに注意しよう. そして、軸対称性の仮定から

$$\kappa(\theta, \phi; t) = K(\theta; t) \exp(-in\phi) \quad (3)$$

と書くことが出来る. 整数 n は MHD 摂動のトロイダルモード数であり、以下 $n \neq 0$ を仮定する.

2.1 シェル上での Ampère's law

真空領域 IV、OV では $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ であるから、磁気スカラーポテンシャルを用いて

$$\mathbf{H} = \nabla \chi^{(-)}, \quad \text{in the region IV} \quad (4)$$

および

$$\mathbf{H} = \nabla \chi^{(+)}, \quad \text{in the region OV} \quad (5)$$

と表せる. つぎに Ampère's law の積分形

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (6)$$

をシェルを挟む $\phi = \text{const.}$ 面に適用する (C : 面を囲むループ) と、シェル上の Ampère's law として

$$\chi^{(w+)}(\theta, \phi, t) - \chi^{(w-)}(\theta, \phi, t) = \kappa(\theta, \phi, t) \quad (7)$$

を得る. ここで、 $(w+)$ ($w-$) は、領域 OV (IV) からシェルに近づいた場合の極限值を表す.

2.2 シェル上での Faraday's law

シェルの厚さを Δ_w (座標 s で測った厚さであることに注意) として、Faraday's law の積分形をシェルの内部で平均することにより、シェル上の Ohm の法則と Faraday の法則として

$$\partial_t B^{(w)} = -\eta_w \text{rot}(\nabla s \times \nabla \kappa) \cdot \nabla s \quad (8)$$

を得る. ここで

$$B^{(w)} := \mathbf{B} \cdot \nabla s, \quad \eta_w = \frac{\eta}{\Delta_w} \quad (9)$$

である. なお

$$\text{rot}(\nabla s \times \nabla \kappa) \cdot \nabla s = \text{div}[(\nabla s \times \nabla \kappa) \times \nabla s]$$

であるので、微分作用素として

$$\nabla_{\perp} \kappa := \nabla \kappa - \frac{\nabla \kappa \cdot \nabla s}{|\nabla s|^2} \nabla s \quad (10)$$

を定義すると、方程式 (8) は

$$\partial_t B^{(w)} = -\eta_w \operatorname{div}(|\nabla s|^2 \nabla_{\perp} \kappa) \quad (11)$$

と表される.

2.3 境界条件および解法の方針

境界条件はシェル上で磁束密度 \mathbf{B} の法線成分が連続なことである. したがって、シェルの内側と外側で、それぞれ

$$\begin{aligned} \nabla \chi^{(w-)} \cdot \nabla s &= B^{(w-)} \\ \nabla \chi^{(w+)} \cdot \nabla s &= B^{(w+)} \end{aligned}$$

次に導体壁が薄いシェルであるということの物理的な条件は、磁場が浸み込んでいて

$$B^{(w-)} = B^{(w+)}$$

が成立していると言うことで表される. これらを一つにまとめて、シェルに対する境界条件として次式を得る.

$$\nabla \chi^{(w-)} \cdot \nabla s = \nabla \chi^{(w+)} \cdot \nabla s = B^{(w)} \quad (12)$$

領域 IV、OV で χ は Laplace 方程式を満たすので、境界における磁場の法線成分 (すなわち $\nabla \chi \cdot \nabla s$) を与えると χ が一意的に ($n \neq 0$ の場合) 決定される. したがって、方程式 (7)、(8) においては、 χ および κ を $B^{(w)}$ について解くのが良いということが分かる. これを容易にする方法は、(8) 式右辺の微分作用素に対する固有関数を利用することである.

3 固有関数の方法

作用素 \mathcal{L} を

$$\mathcal{L}\kappa := -\operatorname{div}[(\nabla s \times \nabla \kappa) \times \nabla s] \quad (13)$$

とし、この作用素に関する固有値問題を

$$\mathcal{L}\kappa = \omega \kappa \quad (14)$$

とする. 以下の二つの定理は容易に証明できる.

命題 1 作用素 \mathcal{L} は正定値であり、それゆえ、固有値問題 (14) における固有値 ω は正の実数である ($\omega > 0$).

命題 2 相異なる固有値に属する二つの固有関数は \sqrt{g} を重み関数として直交する.

$$\int \kappa_m^* \kappa_l \sqrt{g} d\theta d\phi = 0 \quad (15)$$

以下、固有関数 κ は

$$\int |\kappa|^2 \sqrt{g} d\theta d\phi = 1 \quad (16)$$

と規格化されているとする. この固有値と固有関数の集合を

$$\{\omega_j\}_{j=1, Nk}, \{\kappa_j\}_{j=1, Nk}$$

とする。これらを用いて

$$B^w(\theta, \phi, t) = \sum_l a_l(t) \kappa_l(\theta, \phi) \quad (17)$$

とすると、Faraday の法則 (8) を $\kappa(\theta, \phi, t)$ について解くことができ

$$\kappa(\theta, \phi, t) = \frac{1}{\eta_w} \sum_l \frac{1}{\omega_l} \frac{da_l}{dt} \kappa_l(\theta, \phi) \quad (18)$$

を得る。次に、

$$\chi^{(w+)}(\theta, \phi, t) = \sum_l c_l^{(w+)}(t) \kappa_l(\theta, \phi) \quad (19)$$

$$\chi^{(w-)}(\theta, \phi, t) = \sum_l c_l^{(w-)}(t) \kappa_l(\theta, \phi) \quad (20)$$

と展開すると、Ampère's law (7) として

$$c_l^{(w+)}(t) - c_l^{(w-)}(t) = \frac{1}{\eta_w} \frac{1}{\omega_l} \frac{da_l}{dt} \quad (21)$$

を得る。次のステップとして $c_l^{(w+)}, c_l^{(w-)}$ を a_l で表すことが出来れば、渦電流解析問題（すなわち抵抗性壁モード問題）に対して閉じた方程式を得て、問題は解けたことになる。それを直接導く代わりに Ampère's law (7) に対する二次形式を導くことにする（そして、方程式は変分原理から導かれることが分かる）。

3.1 Ampère's law に対する二次形式

Ampère's law (7)

$$\chi^{(w+)} - \chi^{(w-)} = \kappa$$

の両辺に $(1/2)B^{(w)}\sqrt{g}d\theta d\phi$ をかけて積分する（すなわち、方程式の弱形式を作る）。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S_w} \chi^{(w+)} B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi &- \frac{1}{2} \int_{S_w} \chi^{(w-)} B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_w} \kappa B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi \end{aligned} \quad (22)$$

右辺について：(17,18) 式及び直交条件 (15) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S_w} \kappa B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi &= \frac{1}{2} \sum_{l,m} \frac{1}{\eta_w \omega_l} a_m \frac{da_l}{dt} \int_{S_w} \kappa_l \kappa_m \sqrt{g} d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \frac{1}{\eta_w \omega_l} a_l \frac{da_l}{dt} \end{aligned} \quad (23)$$

次に Laplace 方程式の解については $\text{div}(\chi \nabla \chi) = |\nabla \chi|^2$ であるので、それを領域 OV について体積積分することにより OV における摂動磁場エネルギーとして

$$\begin{aligned} W_{OV} &= \frac{1}{2} \int_{OV} |\nabla \chi|^2 d\tau = -\frac{1}{2} \int_{S_w} \chi^{(w+)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S_w} \chi^{(w+)} B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi \end{aligned} \quad (24)$$

を得る ($B^{(w)} = \mathbf{B} \cdot \nabla s$ で ∇s は領域 OV から見て内向きであるから) . 同様に、領域 IV における磁場エネルギーは

$$\begin{aligned} W_{IV} &= \frac{1}{2} \int_{IV} |\nabla \chi|^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_w} \chi^{(w-)} B^{(w)} \sqrt{g} d\theta d\phi - \frac{1}{2} \int_{S_p} \chi^{(p+)} \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (25)$$

である. ここで、 $\chi^{(p+)}$, \mathbf{Q}_e は、それぞれ領域 IV からプラズマ表面 S_p に近づいたときの S_p における磁気ポテンシャル、および摂動磁場を表す (\mathbf{n} は領域 IV から見て内向きの法線ベクトル). (23) および (24,25) 式を (22) 式に使うと、

$$\begin{aligned} W_r := W_{OV} + W_{IV} &- \frac{1}{2} \int_{S_p} \chi^{(p+)} \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{n} dS \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_w} \sum_l \frac{1}{\omega_l} a_l \frac{da_l}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

を得る. なお、プラズマ表面における表面積分 (右辺第 3 項) はプラズマの理想 MHD ポテンシャルエネルギーで表される.

3.2 軸対称シエルにおける Faraday's law

軸対称トーラスの場合、

$$\nu_{\theta\theta} := |\nabla s \times \nabla \theta|^2 = |\nabla s|^2 |\nabla \theta|^2 - (\nabla s \cdot \nabla \theta)^2 > 0 \quad (27)$$

を定義すると

$$\begin{aligned} \text{diva} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sqrt{g} \mathbf{a} \cdot \nabla \theta] + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \phi} [\sqrt{g} \mathbf{a} \cdot \nabla \phi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{g} \nu_{\theta\theta} \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \right] - n^2 \frac{|\nabla s|^2}{R^2} \kappa \end{aligned} \quad (28)$$

である. したがって、固有値問題 (14) は 2 階常微分方程式についての固有値問題

$$-\frac{d}{d\theta} \left[\sqrt{g} \nu_{\theta\theta} \frac{dK}{d\theta} \right] + n^2 \sqrt{g} \frac{|\nabla s|^2}{R^2} K = \omega \sqrt{g} K \quad (29)$$

に帰着することがわかる. 常微分方程式 (29) において $K(\theta)$ は θ について周期的 (周期は 2π) な複素数値関数である. 両辺に K^* を掛けて、独立変数 θ に関して 0 から 2π まで積分する. 部分積分

$$-\int_0^{2\pi} K^* \frac{d}{d\theta} \left[\sqrt{g} \nu_{\theta\theta} \frac{dK}{d\theta} \right] d\theta = - \left[\sqrt{g} \nu_{\theta\theta} K^* \frac{dK}{d\theta} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sqrt{g} \nu_{\theta\theta} \left| \frac{dK}{d\theta} \right|^2 d\theta$$

より、解 $K(\theta)$ が満たすべき積分関係式

$$W[K] := \int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta \left\{ \nu_{\theta\theta} \left| \frac{dK}{d\theta} \right|^2 + n^2 \frac{|\nabla s|^2}{R^2} |K|^2 \right\} = \omega \int_0^{2\pi} |K|^2 \sqrt{g} d\theta \quad (30)$$

を得る. また、 $K_l(\theta)$, $K_m(\theta)$ を固有値 ω_l , ω_m に属する固有関数の直交関係は

$$\int_0^{2\pi} K_l^* K_m \sqrt{g} d\theta = 0 \quad (31)$$

である。以下、固有関数の規格化は

$$\int_0^{2\pi} |K_l|^2 \sqrt{g} d\theta = 1 \quad (32)$$

とする。これは規格化条件 (16) と値が 2π だけ異なることに注意しよう。以上から、固有値問題 (29) に有限要素法を適用するための変分原理は次のように表される。

命題 3 制約条件

$$\int_0^{2\pi} |K|^2 \sqrt{g} d\theta = 1 \quad (33)$$

のもとで汎関数 $W[K]$ を停留にする関数 $K(\theta)$ が固有関数であり、そのときの $W[K]$ の値が固有値である。

また、任意の周期関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \sum_l f_l K_l(\theta) \quad (34)$$

と展開したとき、その展開係数 f_l は

$$f_l = \int_0^{2\pi} K_l^*(\theta) f(\theta) \sqrt{g} d\theta := (K_l | f) \quad (35)$$

で与えられる。

3.3 WKB 解の構成

微分方程式

$$-\frac{d}{d\theta} \left[f(\theta) \frac{dK}{d\theta} \right] + g(\theta) K = 0 \quad (36)$$

は Schrödinger 型微分方程式

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + Q(\theta) y = 0 \quad (37)$$

$$Q(\theta) = -\frac{g(\theta)}{f(\theta)} - \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{1}{2f} \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (38)$$

に変換される。固有値問題 (29) においては

$$f(\theta) = \sqrt{g} \nu_{\theta\theta} > 0 \quad (39)$$

および

$$g(\theta; \omega) = \sqrt{g} \left[n^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2} - \omega \right] \quad (40)$$

である。したがって、 $Q(\theta; \omega)$ は θ について周期的であり (周期 = 2π)、かつ

$$\text{固有値 } \omega \rightarrow +\infty \text{ のとき、} Q(\theta; \omega) \rightarrow +\infty$$

であるので、たしかに、方程式 (37) は振動解を持つ。この方程式の WKB 解のうち周期的境界条件 ($y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$ ($' = d/d\theta$)) を満たすものは

$$y(\theta) = \frac{c}{Q^{1/4}(\theta; \omega)} \exp \left[\pm i \int_0^\theta \sqrt{Q(\theta; \omega)} d\theta \right] \quad (41)$$

で表され、量子化条件は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{Q(\theta; \omega)} d\theta = \pm l, (l = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (42)$$

で与えられる。これが固有値 ω_l を陰的に決定する分散関係式を与える。

3.4 計算例

ここでは、トロイダルモード $n = 1$ 、ポロイダルモード $l = -32, \dots, 32$ 、アスペクト比 10 の場合について計算する。プラズマの断面は上下対称、楕円形 (楕円度 = 2) とする。また、抵抗壁はプラズマ半径の 2 倍のところにあるとする。

固有値に小さい方から k でインデックスを付ける。 $k = 1 \sim 25$ に対する固有値を表 1 に示す。また、 $k = 1 \sim 5$ に対応する固有関数を図 1 に示す。これらの結果から明らかなように、 k は単に固有値のインデックスであり、物理的な「モード数」ではない。実際には、 $k = 1$ は $l = 0$ 、 $k = 2, 3$ は $l = \pm 1$ 、 $k = 4, 5$ は $l = \pm 2$ (以下同様) のモード数に対応している。上下対称の場合、 $l = 0$ を除く各モードの固有関数は赤道面に関して偶奇のパリティをもち、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ のように振る舞う。この結果は、文献 [1] のものと一致する。

次に、WKB 解との比較を行う。WKB 解を再掲すると、

$$y(\theta) = \frac{c_+}{Q^{1/4}(\theta; \omega)} \exp \left[i \int_0^\theta \sqrt{Q(\theta; \omega)} d\theta \right] + \frac{c_-}{Q^{1/4}(\theta; \omega)} \exp \left[-i \int_0^\theta \sqrt{Q(\theta; \omega)} d\theta \right].$$

規格化条件だけでは、 c_\pm の間の関係は定まらない。そこで、ここで計算結果を受け、 $k = 2l$ のモードに関しては $y(0) = y(2\pi) = 0$ 、 $k = 2l + 1$ のモードに関しては $y'(0) = y'(2\pi) = 0$ なる境界条件を課した。これにより、

$$\begin{aligned} c_- &= -c_+ & (k = 2l) \\ c_- &= \frac{i\sqrt{Q(0; \omega_l)} - Q'(0; \omega_l)/4Q(0; \omega_l)}{i\sqrt{Q(0; \omega_l)} + Q'(0; \omega_l)/4Q(0; \omega_l)} c_+ & (k = 2l + 1) \end{aligned}$$

と c_- を消去することが出来る。 c_+ の絶対値は規格化条件から決定できるが、偏角は定まらない。そのため、ここでは絶対値のみを比較する。計算結果と WKB 解の固有値の比較を表 1 に、固有関数の絶対値の比較を図 2 に示す。固有値、固有関数の絶対値ともに良い一致を示す。 l が大きいほど WKB 近似が良くなっていることが確かめられる。

表 1: 上下対称, 楕円断面. $n = 1$

モード数 l	k	固有値の計算結果	WKB 固有値
0	1	0.00631024949377884	N/A
1	2	0.0667946258184354	0.0698576703557864
	3	0.07280446987224541	
2	4	0.25703048239690296	0.25715158675349775
	5	0.2572910661270794	
3	6	0.5696141359144238	0.5696156169752519
	7	0.5696201560592723	
4	8	1.0071035773647086	1.0071031720925179
	9	1.007103683840626	
5	10	1.569597619373383	1.5695974366661014
	11	1.5695976210071187	
6	12	2.257094415062445	2.257094327636578
	13	2.25709441508542	
7	14	3.0695925020525303	3.06959245519459
	15	3.069592502052829	
8	16	4.007091268133592	4.0070912407929535
	17	4.007091268133601	
9	18	5.069590425620109	5.069590408605133
	19	5.069590425620112	
10	20	6.257089824684959	6.257089813546447
	21	6.257089824684972	
11	22	7.569589380972974	7.569589373377796
	23	7.569589380972987	
12	24	9.007089044010579	9.007089038654605
	25	9.007089044010584	

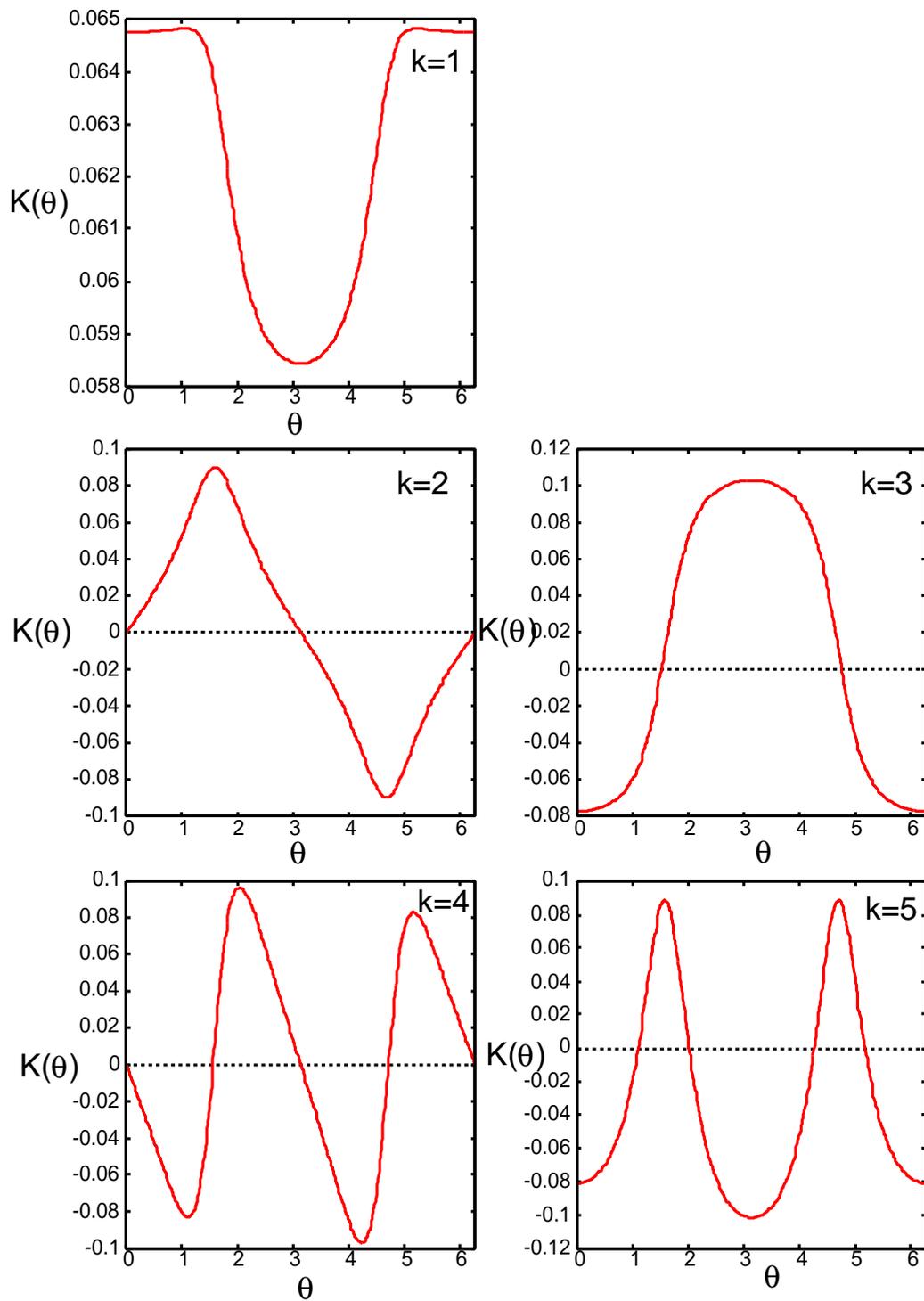


図 1: 渦電流解析における固有関数。上下対称、楕円断面、 $n = 1$ の場合。

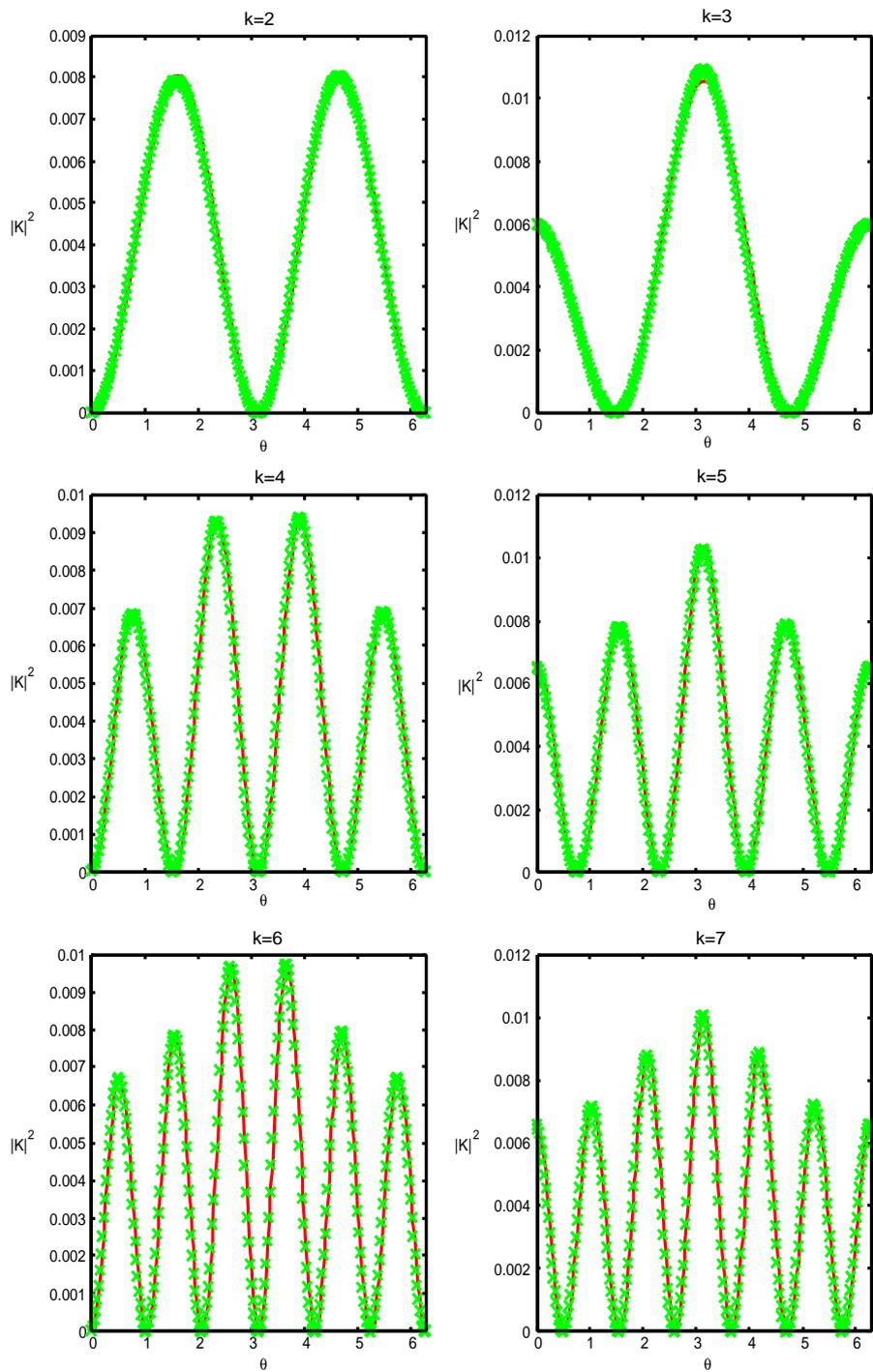


図 2: 上下対称、楕円断面、 $n = 1$ の場合。計算結果と WKB 解の固有関数の絶対値の比較。実線は計算結果、 \times は WKB 解。両者は良く一致する。

4 要約

コード開発の観点からすると、理想 MHD キンクモード解析と抵抗性壁モード解析との大きな差は、もちろん RWMaC では渦電流解析ルーチンが必要なことである。薄シェル近似のもとでの軸対称な渦電流問題は周期的境界条件の課せられた一次元固有値問題に帰着する。我々は、これを有限要素法及び WKB 法で解いた。(42) 式における番号 l が高い場合、両者は良く一致し、これによりコードの正しさを確認した。エネルギー汎関数 (1) 式において D_W 以外の 3 つの二次形式に関しては、理想 MHD キンクモード解析でそれに対応するものは開発済みであり、それを RWM 用に改変することは容易である。今後、その部分の改変に入り、RWM の安定性解析の報告は次回にできるものと予想している。

参考文献

- [1] M. S. Chu, M. S. Chance, A. H. Glasser and M. Okabayashi, Nucl. Fusion **43** (2003) 441.
- [2] S. Tokuda, T. Watanabe, Physics Plasmas **6** (1999) 3012.
- [3] 徳田伸二、渡邊朋子、MARG2D コードの開発 (1) 2 次元 Newcomb 方程式の固有値問題、JAERI-Data/Code 97-040 (1997).
- [4] N. Aiba, S. Tokuda, T. Ishizawa, M. Okamoto, Plasma Phys. Control Fusion **46** (2004) 1699.
- [5] M. S. Chance, M. S. Chu, M. Okabayashi, A. D. Turnbull, Nucl. Fusion **42** (2002) 295.

高 n 近似を用いた線形 MHD 安定性解析

相羽信行*、徳田伸二、小関隆久

日本原子力研究開発機構、茨城県那珂市向山 801-1, 311-0193

概要

周辺局在理想 MHD モードの安定性解析を行うために必要な計算コストを少なくするために、解析対象の MHD モードのトロイダルモード数 n が大きいことを利用して高 n 展開による物理モデルの簡略化を行った。静止理想 MHD 安定性解析コード MARG2D で採用している物理モデルに対する高 n 展開の適用は非常に有用であり、固有値問題・初期値問題各解法による周辺局在 MHD モードの安定性解析が可能であることを示した。また、理想 MHD モデルに対して高 n 展開を用いて簡略化した物理モデルでは、初期値問題による安定性解析において偽の解が現れてしまうことを明らかにした。簡単な考察の結果、この偽の解は高 n 展開を行うことによって現れた高階の時間微分項が原因で現れると予想されることを示した。

1 Introduction

国際熱核融合実験炉 (ITER) などの大型トカマクプラズマにおいては、プラズマの高性能化および閉じこめ時間の長時間化に伴い、高閉じこめ運転 (H-mode) においてしばしば発生するエッジローカライズモード (Edge Localized Mode, ELM) の原因の 1 つである周辺局在型の理想 MHD モードの重要性が指摘されている [1]。これは、ELM によって閉じこめ領域から放出されるエネルギーが多いとダイバータやプラズマ対抗壁に対して大きな熱負荷をかけてしまい、炉の寿命を縮めてしまうと考えられているためである。ITER の標準運転は ELM の発生する H-mode プラズマであるとされており、この ELM の安定化・小振幅化を 目指した物理機構の解明は理論・実験の両面において重要な課題となっている。

近年の ELM 研究の進展により、ELM の安定化・小振幅化に対してプラズマ回転が有効であることが JT-60U の実験結果から指摘されている [2]。しかしながら、この ELM に対するプラズマ回転の影響についての理論解析はほとんど行われていないのが現状である。ITER においてプラズマ回転による ELM の安定化・小振幅化が有効であるかを評価するためには、ELM の原因である周辺局在 MHD モードの安定性に対するプラズマ回転の影響についてその物理機構を実験的のみならず理論的にも明らかにするとともに、回転の影響を考慮した MHD 安定性解析を定量的に行うための解析手法の構築が不可欠である。

これまでに解析手法が確立している静止線形理想 MHD 安定性問題はエルミート問題であり固有値問題解法によって MHD モードの安定性・成長率を評価する解析手法・数値コードが開発されてきた [3, 4]。一方プラズマ回転を考慮した線形理想 MHD 安定性問題は非エルミート問題であり [5]、固有値問題解法による解析結果が十分な妥当性を持たない場合がある。このような問題を回避するためには初期値問題解法による安定性解析が求められる。しかし、初期値問題解法による数値安定性解析は一般に固有値問題解法よりも計算時間がかかること、またプラズマ周辺領域に局在した MHD モードの安定性を精度良く評価するためには十分な計算メッシュ数が必要となるため、初期値問題解法による周辺局在 MHD モードの安定性解析には膨大な計算コ

* e-mail: aiba.nobuyuki@jaea.go.jp

ストのかかる。そこで本研究では、この計算コストの削減を実現するために、高 n 展開を用いた物理モデルの簡略化により周辺局在 MHD 安定性の初期値問題による安定性解析手法を開発し、将来のプラズマ回転を考慮した安定性解析実現への布石とする。

2 高 n 展開を用いた物理モデルの簡略化

2.1 高 n 展開を適用する物理モデルについて

本研究ではまず、これまでに開発を進めてきた静止理想 MHD 安定性解析コード MARG2D[6] で採用している物理モデルに対して高 n 展開を適用する。同コードはプラズマを囲む真空磁場のポテンシャルエネルギーの計算精度を高めることで周辺局在理想 MHD モードの安定性解析を実現している [7]。このコードで用いている物理モデルでは、まず非圧縮仮定を用いるとともにポロイダル方向の変位 V を求める際には運動エネルギー \mathcal{K} を無視した Lagrangian、つまりポテンシャルエネルギー \mathcal{W}_p

$$\mathcal{W}_p = a |D_\theta(X)|^2 + b \left| mV + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX) + hX + r\beta_{r,\theta} D_\theta(X) \right|^2 + c \left| \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(rX) \right|^2 + e |X|^2, \quad (1)$$

$$D_\theta(X) = \frac{1}{q} \frac{\partial X}{\partial \theta} - mX, \quad (2)$$

の変分問題を考える。ここで X, V は ξ の成分であり

$$X = \xi \cdot \nabla r, \quad (3)$$

$$V = r \left(\xi \cdot \nabla \theta - \frac{1}{q} \xi \cdot \nabla \phi \right), \quad (4)$$

で定義され、また式 (1) の係数 a, b, c, h , および e はそれぞれ

$$a(r, \theta) = \left(\frac{F}{R} \right)^2 \frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{r}{R_0}, \quad (5)$$

$$b(r, \theta) = \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 |\nabla r|^2 \frac{r}{R_0}, \quad (6)$$

$$c(r) = \left(\frac{F}{R_0} \right)^2 \frac{R_0}{r}, \quad (7)$$

$$h(r, \theta) = -\frac{1}{q} \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_\perp |\nabla r|^2 + r \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_{r,\theta} \right), \quad (8)$$

および

$$e(r, \theta) = \frac{r}{R_0} \frac{dp}{dr} \partial_\perp R^2 + \frac{1}{R_0} \left(R^2 \frac{dp}{dr} + F \frac{dF}{dr} \right) \left(2 + \frac{r}{|\nabla r|^2} \partial_\perp |\nabla r|^2 + 2r \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_{r,\theta} \right), \quad (9)$$

である。なお、上記の表記では座標系 (r, θ, ϕ) を以下のように定義しており、

$$r^2(\psi) = 2R_0 \int_0^\psi \frac{q}{F} d\psi, \quad (10)$$

$$q(\psi) = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi}, \quad (11)$$

$$\sqrt{g(r, \theta)} = \frac{R^2}{R_0} r, \quad (12)$$

R_0 は円柱座標系 (R, Z, ϕ) における磁気軸の R 座標、 ψ はポロイダル磁束、 F はトロイダル磁場関数、 q は安全係数、 \sqrt{g} は Jacobian である。また、 r 座標はプラズマ表面においてプラズマ小半径と一致するように定義する。さらに、非直交座標系である (r, θ, ϕ) においては非直交度 $\beta_{r, \theta}$ を以下のように定義する。

$$\beta_{r, \theta}(r, \theta) = \frac{\nabla r \cdot \nabla \theta}{|\nabla r|^2}, \quad (13)$$

また、最後に微分オペレーター ∂_\perp を以下のように定義する。

$$\partial_\perp \equiv \frac{\nabla r \cdot \nabla}{|\nabla r|^2} = \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{r, \theta}(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (14)$$

式 (1) で表される \mathcal{W}_p の V についての変分をとることにより Euler-Lagrange 方程式を求める。この Euler-Lagrange 方程式はポロイダル角 θ 方向について Fourier 級数展開をすることにより V と X (および dX/dr) の代数方程式となる。この代数方程式を解いて求めた V を式 (1) に代入することで \mathcal{W}_p は X のみを用いて表すことができる。この \mathcal{W}_p の X についての変分をとることでもとまる Euler-Lagrange 方程式は Newcomb 方程式と呼ばれており [8]、この方程式に適切な重さ関数を用いることで随伴固有値問題

$$\sum_l \mathcal{N} \mathbf{X} = -\lambda_0 \mathcal{R}_l \mathbf{X}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_l &\propto \left(\frac{m}{q} - n \right) \dots (\text{for resonant mode, } l = m), \\ &\text{constant} \dots (\text{for off-resonant mode, } l \neq m), \end{aligned} \quad (16)$$

を導くことができる。ここで \mathcal{N} は Newcomb 演算子である。MARG2D コードはこの随伴固有値問題を解いてその固有値の符号を判定することで理想 MHD 安定性を評価する [6]。また、上記のように求めた V を \mathcal{W}_p のみならずこれまで無視していた運動エネルギー積分 \mathcal{K}

$$\mathcal{K} = \frac{rR^2}{|\nabla r|^2} \left| \frac{\partial X}{\partial t} \right|^2 + R^4 r |\nabla r|^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} (V - r\beta X) \right|^2, \quad (17)$$

に代入することにより Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{W}_p$ は X のみの関数 $\mathcal{L}(X)$ として表すことができる。非圧縮仮定を用いた線形成長率を求めるように拡張された MARG2D はこのようにして近似的に求められる運動方程式を固有値問題解法によって解いている [9]。この近似を用いて得られる線形成長率が近似なしの場合と良い一致を示すことは他コード (ERATOJ, ELITE) のとベンチマークテストによって確認されている。そこでまず、 \mathcal{W}_p に対して高 n 展開を適用して簡略化した物理モデルを求める。

2.2 ポテンシャルエネルギーに対する高 n 展開の適用

通常の高 n 展開では平衡量の径方向微分のオーダーは $O(1)$ 、摂動量 (プラズマ変位) の径方向微分のオーダーは $O(n)$ 、および式 (3) および (4) で示されているプラズマ変位の成分 X, V のそれぞれを n のオーダーで

分けた形で表し、式 (3) に適用することで各 n のオーダーごとに Lagrangian を求める [10]。この Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \dots$ を次数の低い順に解くことにより $(X_0, V_0), (X_1, V_1), \dots$ の順に解を求めていく。ここで下付添え字は $1/n$ の次数を表している。しかしながら、このような手続きは解析的な取り扱いには適しているが数値計算を行う場合には各オーダーでの Euler-Lagrange 方程式 (微分方程式) を数値的に解くことが必要となるため、高次まで考慮した解析を行うのは非現実的であるといえる。

そこで、前述のように最終的な運動方程式が X のみの微分方程式となることから、高 n 展開を適用する変数は V のみとして Lagrangian の簡略化を行うことを試みる。このようにすることで各オーダーの Lagrangian から求まる変数 V_0, V_1, V_2, \dots は X の関数として表され、これらを代入して求まる Lagrangian は X のみで表すことができるため、数値的に解く微分方程式は 1 つだけにできる。このような物理モデルの簡略化は言い換えると、前述の従来の MARG2D コードで採用していた物理モデルではポテンシャルエネルギーの V に関する Euler-Lagrange 方程式を直接解くことによって V を求めていたが、この V の導出を高 n 展開を用いて行ったことに相当する。このような手法による物理モデルの簡略化は、上述のようにポテンシャルエネルギーのみを考慮した Lagrangian に対して適用する場合には従来の物理モデルの導出法に対する利点はほとんどないが、後述のように運動エネルギーを考慮したいいわゆる通常の意味での Lagrangian についても同様の手法で V を導出することができる点が大きな利点となる。

本節では式 (1) で表されるポテンシャルエネルギー \mathcal{W}_p に対して式 (4) で定義される変位 V について高 n 展開を適用して簡略化されたポテンシャルエネルギーを求めるとともに、求めたポテンシャルエネルギーの Euler-Lagrange 方程式を解くことで求まる V をポテンシャルエネルギー \mathcal{W}_p および運動エネルギー \mathcal{K} に代入することで、変位 X のみで表される運動方程式を導く。まず、各オーダーごとに X および V の θ 方向の振る舞いについては、以下のように Fourier 級数展開

$$X(r, \theta) = X_0(r) + \sum X_m(r) \exp(im\theta), \quad (18)$$

$$V(r, \theta) = V_0(r) + \sum V_m(r) \exp(im\theta), \quad (19)$$

$$Dg(X) = qD_\theta(X) = i(m - nq), \quad (20)$$

を用いて表す。ただし、今回は周辺局在 MHD モードという比較的トロイダルモード数 n の大きい MHD モードを解析対象としているため、簡単のため $m = 0$ の変位 X_0, V_0 は無視して考えることとし、また以降は $X = X_m, V = V_m$ を表すものとする。

次に、 \mathcal{K} および \mathcal{W}_p について高 n 展開、つまり

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \dots, \\ \frac{\partial}{\partial r}(\text{摂動量}) &= O(n), \\ \frac{\partial}{\partial \theta}[X, V] &= im[X, V] = i(Dg + nq)[X, V] = O(1) + O(n), \end{aligned} \quad (21)$$

でそれ以外の量については $O(1)$ であると仮定して式 (1) および (17) を書き表す。このようにして得られる \mathcal{K} および \mathcal{W}_p は n のオーダーが小さいものから順番に満たされると考えることができるため、各オーダーでそれぞれ V_l についての変分をとることで V_l を X の関数として表す。その後、それらを式 (1) および (17) に代入することで \mathcal{L} を X のみを用いて表すことが最終的な目的となる。本節では簡単のために V のオーダーについて V_3 まで、つまり

$$V = V_0 + \frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \frac{1}{n^3}V_3, \quad (22)$$

と表せると仮定することとし、これを式 (1) および (17) に代入して

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p = & a \left| \frac{1}{q} \mathcal{D}g(X) \right|^2 \\ & + b \left| m(V_0 + \frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \frac{1}{n^3}V_3) + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX) + hX + \frac{r}{q} \beta_{r,\theta} \mathcal{D}g(X) \right|^2 \\ & + c \left| \iota(\mathcal{D}g + nq)(V_0 + \frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \frac{1}{n^3}V_3) + \frac{\partial}{\partial r}(rX) \right|^2 \\ & + e |X|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathcal{K} = \frac{rR^2}{|\nabla r|^2} \left| \frac{\partial X_m}{\partial t} \right|^2 + R^4 r |\nabla r|^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(V_0 + \frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 - r\beta X \right) \right|^2, \quad (24)$$

と表したこれらの $\mathcal{K}, \mathcal{W}_p$ を元に以降の計算を進める (なお、本章では V の導出には \mathcal{W}_p のみを用いる)。

式 (23) を n のオーダーに分けて考えると、 \mathcal{W}_p の最高次は $O(n^2)$ であること、さらにこの \mathcal{W}_p で $O(n^2)$ となる項は式 (23) の右辺第 2 項および第 3 項のみである。そこで、この 2 項から成るラグランジアン密度の V_0 についての変分をとると Euler 式

$$mb \left(mV_0 + \frac{1}{q} \frac{\partial X}{\partial r} \right) + mcq \left(mV_0 + r \frac{\partial X}{\partial r} \right) = 0, \quad (25)$$

が得られ、直ちに V_0 について

$$V_0 = \frac{\iota}{nq} r \frac{\partial X}{\partial r}, \quad (26)$$

であることがわかる。

次に $O(n)$ の \mathcal{W}_p をもとに Euler 式を立てる必要があるが、この Euler 式は V_0 が式 (26) で表されることで自動的に満たされることが直ちにわかる。そこで次のオーダーである $O(1)$ について考える。まず、式 (23) に式 (26) を代入する。これにより \mathcal{W}_p は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p = & a |D_\theta(X)|^2 \\ & + b \left| m \left(\frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \frac{1}{n^3}V_3 \right) - \frac{1}{q} r \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r}(rX) + hX + r\beta_{r,\theta} D_\theta(X) \right|^2 \\ & + c \left| \iota(\mathcal{D}g + nq) \left(\frac{1}{n}V_1 + \frac{1}{n^2}V_2 + \frac{1}{n^3}V_3 + \frac{\iota}{nq} r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r}(rX) \right|^2 \\ & + e |X|^2, \end{aligned} \quad (27)$$

となる。 $O(n^2)$ の場合と同様に上記の \mathcal{W}_p の V_1 についての変分をとることで V_1 は

$$V_1 = \frac{\iota}{q} X + \iota \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2 B^2} - \frac{\iota}{n} \frac{F^2}{q^2 R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) \quad (28)$$

となることが求まる。

次に $O(1/n)$ であるが、これは $O(n)$ の場合と同様に Euler 式は式 (28) となることで自動的に満たされる。

そのため次に考慮すべきオーダーは $O(1/n^2)$ となる。式 (27) に式 (28) を代入することで得られる \mathcal{W}_p は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p = & a |D_\theta(X)|^2 \\ & + b \left| \frac{F^2}{R^2 B^2} H(X) + \frac{1}{nq^2} \frac{F^2}{R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{i}{n} V_2 + \frac{i}{n^2} V_3 \right|^2 \\ & + c \left| \frac{1}{nq} \mathcal{D}g \left(\frac{\partial r X}{\partial r} \right) + q \frac{|\nabla\psi|^2}{R^2 B^2} - \frac{1}{nq} \frac{F^2}{R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{n} \mathcal{D}g \left(\frac{|\nabla\psi|^2}{R^2 B^2} H(X) \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{n^2 q^2} \mathcal{D}g \left(\frac{F^2}{R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) \right) - \frac{iq}{n} V_2 - \frac{i}{n^2} V_2 - \frac{iq}{n^2} V_3 - \frac{i}{n^3} V_3 \right|^2 \\ & + e |X|^2, \end{aligned} \quad (29)$$

となる。このポテンシャルエネルギーの V_2 についての変分をとることで求まる Euler 式を解くことで V_2 は

$$V_2 = \left\langle \frac{-iF^2}{q^2 R^2 B^2} \left[\mathcal{D}g(X) + q \mathcal{D}g \left(\frac{|\nabla\psi|^2}{R^2 B^2} H(X) \right) - \frac{1}{nq} \mathcal{D}g \left(\frac{F^2}{R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) \right) \right] \right\rangle \quad (30)$$

と求まる。ここで

$$|\nabla r|^2 = \frac{q^2 R_0^2}{r^2 F^2} |\nabla\psi|^2, \quad (31)$$

を用いている。

さらに高次の場合については、 $O(n^{-2l+1})$, $l = 2, 3, \dots$ の場合のポテンシャルエネルギーは自動的に最小化され、また $O(n^{-2l})$ の場合のポテンシャルエネルギーから求まる Euler-Lagrange 方程式を解くと

$$V_{l+1} = -\frac{F^2}{qR^2 B^2} \mathcal{D}g (\mathcal{D}g V_{l-1} + qV_l), \quad l = 2, 3, \dots, \quad (32)$$

と表すことができることが求まる。そのため、このようにポテンシャルエネルギーのみを最小化することから V を求めていく場合には、高次まで考慮した計算が容易に行うことができる。この特長を生かして、上記のように求めた高 n 展開を用いて求まる V (式 (26)、(28)、(30) および (32)) を式 (23) および (24) に代入することで MARG2D と同様に近似的な非圧縮仮定での線形成長率を求める。

2.3 固有値問題解法による安定性解析

この節ではまず、先に求めた V を代入して求まる Lagrangian $L(X) = \mathcal{K}(X) - \mathcal{W}_p(X)$ について、 $X \simeq \exp(i\omega t)$ と置くとともに X についての変分をとることで導かれる固有値問題を解くことで理想 MHD 安定性解析を行い、その結果を MARG2D コードの結果と比較する。

図 1 は安定性解析を行った平衡の磁気面形状と圧力分布 (p)、安全係数 (q) 分布である。図の通り、周辺局在 MHD モードを不安定化させるためにプラズマ周辺領域に強い圧力勾配 (ペDESTAL) を持つ平衡となっている。この平衡において、高 n 近似を用いていない従来の物理モデルに基づいた MARG2D コードを用いた安定性解析および高 n 展開を用いて簡略化した物理モデルを用いた安定性解析を行い、その結果を比較するとともに、 V について行った高 n 展開で何次の項まで含めれば $n \simeq 10$ 程度の周辺局在理想 MHD モードの安定性解析が精度良く行えるかを確認する。

図 2 は安定性解析を比較した結果を示す図であり、図 2(a) はトロイダルモード数が $5 \leq n \leq 30$ の MHD モードの安定性を式 (15) の重さ関数を用いた随伴固有値問題を解くことで評価した結果 (固有値 λ_0) である。

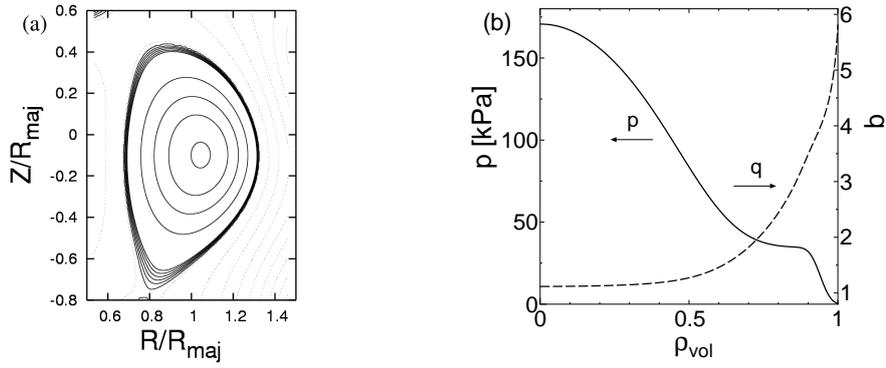


図1 (a) 安定性解析で用いた平衡の磁気面形状。(b) 安定性解析で用いた平衡の圧力分布 (実線) と安全係数 q 分布 (波線)。

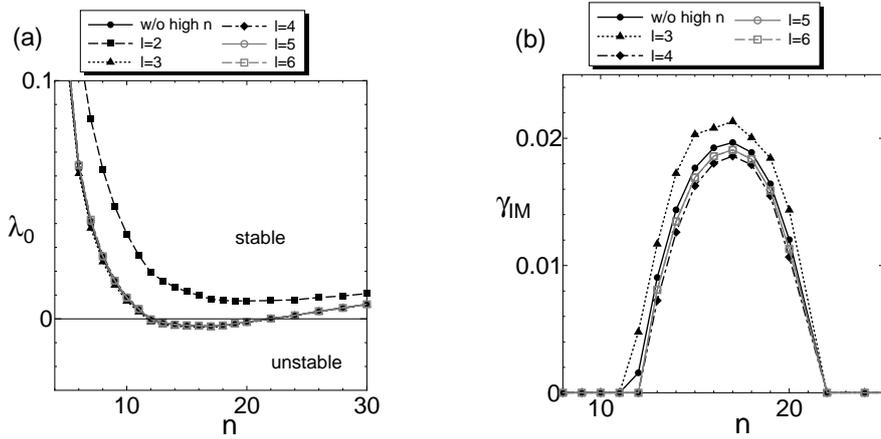


図2 (a) 式 (15) の重さ関数を用いて導出された固有値問題を解くことで得られる固有値 λ_0 のトロイダルモード数 n に対する依存性。 $5 \leq n \leq 30$ の範囲において安定性解析を行っている。ここでは近似無し MARG2D コードの結果および V_2 から V_6 までを考慮した場合の結果をそれぞれ示している。(b) 式 (17) で表される運動エネルギー K を用いて導出された固有値問題を解くことで得られる非圧縮仮定の線形成長率 γ_{IM} の n に対する依存性。 $8 \leq n \leq 25$ の範囲において解析を行っている。近似無し MARG2D コードの結果および V_3 から V_6 までを考慮した場合の結果を示している。

ここでは高 n 展開を用いない結果と、高 n 展開を用いて $V_2 \sim V_6$ まで考慮して解析した結果を比較している。また、図 2(b) は式 (24) に解析的に求めた V を代入して近似的な非圧縮仮定の線形成長率 γ_{IM} を $8 \leq n \leq 25$ の範囲で調べた結果を示している。ここでは高 n 展開を適用しない場合の結果と、高 $V_3 \sim V_6$ までを考慮した場合の結果を比較している。これらの結果から安定性解析は V_3 まで、線形成長率は V_4 まで考慮することで $n \approx 10$ 程度の周辺局在 MHD モードの安定性解析は十分な精度で解析可能であると考えられる。また図 3 は $n = 17$ の周辺局在理想 MHD モードの固有関数をそれぞれ (a) 高 n 展開を行わない場合、(b) V_3 まで考慮した場合に求めた結果であり、これらは非常によい一致をしていることがわかる。以上の結果から、高 n 展開を用いて簡略化したポテンシャルエネルギーを用いた物理モデルに基づいた安定性解析は周辺局在理想 MHD モードの解析に十分実用となるものであり、数値解析においては高 n 展開を行った V (式 (22)) のうち

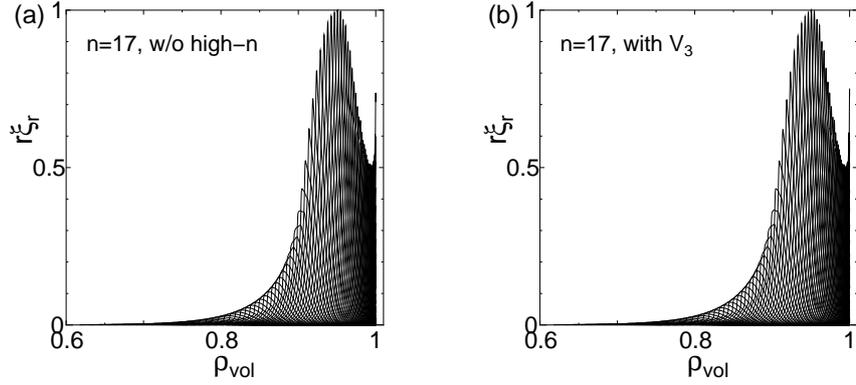


図3 (a) 高 n 展開による簡略化なしの計算で得られた $n = 17$ の理想 MHD モードの固有関数と、(b) V_3 まで考慮した場合の計算で得られた $n = 17$ の MHD モードの固有関数。

($1/n^3$) V_3 ないし ($1/n^4$) V_4 までを考慮して解析を行えば精度良い結果が得られることが確認できた。

2.4 初期値問題解法による安定性解析

次に、先に求めた V を代入して求まる Lagrangian $L(X) = \mathcal{K}(X) - \mathcal{W}_p(X)$ の X についての変分をとることで得られる運動方程式を初期値問題として取り扱うことで MHD モードの時間発展を数値的に解くことで理想 MHD 安定性を評価し、その結果を固有値問題の結果と比較する。初期値問題解法における時間積分法であるが、線形理想 MHD 安定性解析は空間方向に高い解像度を要求されるため、陽解法による時間積分はほぼ不可能である。そのため今回は完全陰解法を用いて時間積分を計算する。完全陰解法を適用した場合、線形理想 MHD 方程式は非同次項を持つ初期値・境界値問題として解くことができる。

$$(\mathbf{B} - (\Delta t)^2 \mathbf{A}) \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{B}(2\mathbf{X}^i - \mathbf{X}^{i-1}). \quad (33)$$

ここで上付き添え字 i は離散化された時間ステップ数であり、行列 \mathbf{A} および \mathbf{B} は

$$\mathcal{K}^{i+1} = \left\langle \frac{\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i}{\Delta t} \middle| \mathbf{B} \middle| \frac{\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i}{\Delta t} \right\rangle, \quad (34)$$

$$\mathcal{W}_p^{i+1} = \langle \mathbf{X}^{i+1} | \mathbf{A} | \mathbf{X}^{i+1} \rangle, \quad (35)$$

となる行列として定義している。本節では式 (33) を解くことで理想 MHD モードの時間発展を評価する。なお、安定性解析に用いた平衡は前節で用いたものと同様である。

図4はトロイダルモード数 n に対する式 (17) に解析的に求めた V を代入して近似的に非圧縮仮定の線形成長率を、 $8 \leq n \leq 25$ の範囲でそれぞれ固有値問題を解いた結果、初期値問題で Δt を $1.0\tau_A$ 、 $5.0\tau_A$ および $10.0\tau_A$ とした場合の結果である。ここで、 τ_A は磁気軸でのトロイダル Alfvén 時間である。図4(a)は高 n 展開を用いた近似を行わず MARG2D を用いて求めた結果、図4(b)は高 n 展開を行い V_3 までを考慮して簡略化した場合の結果、図4(c)は V_5 まで考慮して簡略化した結果である。これらの結果で特徴的なのは、 Δt を大きくした場合の結果（線形成長率）が、小さくした場合の結果よりも大きな線形成長率となっており、 Δt を小さくしていくことで固有値問題の結果に漸近していくことが見られる点である。この結果は高 n 展開を行ってなくても同様であり、理想 MHD 安定性問題の初期値問題を陰解法で解く際における特徴であると

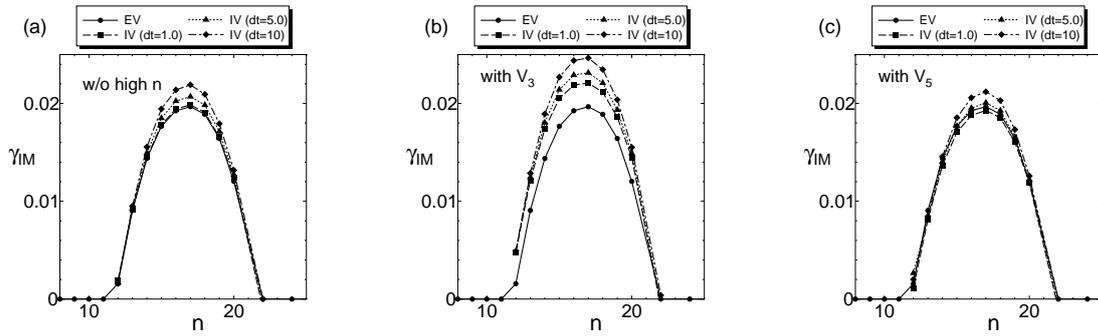


図4 非圧縮の線形成長率 γ_{IM} を $8 \leq n \leq 25$ の範囲で固有値問題 (実線)、 $\Delta t = 1.0\tau_A$ (破線)、 $5.0\tau_A$ (点線) および $10.0\tau_A$ (破点線) としての初期値問題を解いて求めた結果を (a) 高 n 展開なし、(b) V_3 まで、(c) V_5 までそれぞれ考慮した場合において調べた結果。

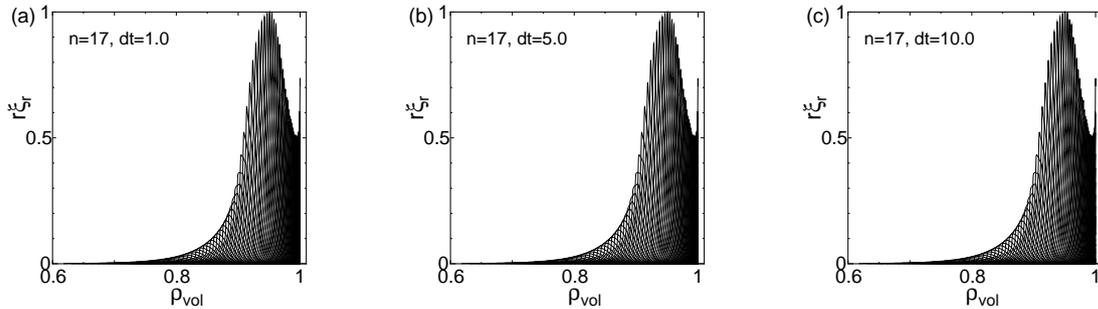


図5 V_3 まで考慮して安定性解析を行った際に得られた理想 MHD モードのモード構造。それぞれ (a) $\Delta t = 1.0\tau_A$ 、(b) $5.0\tau_A$ 、および (c) $10.0\tau_A$ とした場合のものである。

思われるが、現段階ではその原因は不明である。また、図5は V_3 まで考慮して簡略化した場合に得られた $n = 17$ の MHD モードのモード構造であり、それぞれ $\Delta t =$ (a) $1.0\tau_A$ 、(b) $5.0\tau_A$ および (c) $10.0\tau_A$ とした場合の結果を示している。これらの結果から、完全陰解法のような数値散逸の大きいスキームであっても、 Δt を $1 \sim 5\tau_A$ 程度にすることで安定性解析は十分可能であると考えられる。時刻幅は特に臨界安定近傍の MHD モードの安定性解析を行う際には (成長率が小さいため) 長時間の時間発展を計算する必要があるため、数 τ_A の時刻幅が許容されることは望ましい結果であるといえる。さらに精度の高い陰解法 (後退微分公式 (BDF) や陰的 Runge-Kutta 法など) を採用することでこの時刻幅はさらに長くとることができると考えられ、多くの空間メッシュが求められる周辺局在 MHD モードの解析であっても十分実用的な計算時間での安定性解析が可能であると思われる。

3 Lagrangian に対する高 n 展開の適用による物理モデルの簡略化

3.1 Lagrangian に対する高 n 展開の適用

前章で導出した物理モデルは、ポテンシャルエネルギー \mathcal{W}_p のみを最小化することで高 n 展開をした V を解析的に求めていくことで簡略化していった。静止理想 MHD 安定性を評価する場合にはこの物理モデルで

も十分に可能であるが、Introduction で述べたプラズマ回転を考慮した理想 MHD 安定性を考慮する場合、このような運動エネルギーを無視してポテンシャルエネルギーのみを最小化するように求めた V が解析に十分な精度をもつとは限らない。むしろ、回転の効果は移流項・遠心力（コリオリ力）などとして表れることからこのような近似は破綻していると考えべきである。そのため、前章で用いた近似を用いずに \mathcal{W}_p のみならず \mathcal{K} も考慮した Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{W}_p$ について高 n 展開を行うことで簡略化した物理モデルを導出する必要がある。本節では高 n 展開を行って簡略化した Lagrangian の導出を行う。

運動エネルギー式 (24) に表れる最低次の項は X および V_0 からなる $O(1)$ のものであるが、 V_0 は \mathcal{W}_p の $O(n^{-2})$ の項のみで表される \mathcal{L} から求まっている（これは式 (26) に一致する）。そのため \mathcal{L} の O^1 の項から V_1 を求める際には運動エネルギーの影響は受けず、 \mathcal{W}_p のみを最小化して求めた式 (28) がそのまま \mathcal{L} を最小化して求める V_1 となる。高 n 展開を行った Lagrangian の最小化を行う上で運動エネルギーの影響が表れるのは V_2 の導出からである。 V_2 は \mathcal{L} の $O(n^{-2})$ の項を最小化することで求まる。この $O(n^{-2})$ の \mathcal{K} の項は式 (26) および (28) を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & R^4 r |\nabla r|^2 \left| \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\iota}{nq} r \frac{\partial X}{\partial r} - r \beta X \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \left(\frac{\iota}{q} X + \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2 B^2} - \frac{\iota}{n} \frac{F^2}{q^2 R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (36)$$

と表される。式 (29) および (36) から求まる $O(n^{-2})$ の $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{W}_p$ が求めるべき高 n 近似を用いて簡略化された Lagrangian である。この Lagrangian の V_2 についての変分をとることで求まる代数方程式を解くことで、 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 = & \left\langle \frac{-\iota F^2}{q^2 R^2 B^2} \left[\mathcal{D}g(X) + q \mathcal{D}g \left(\frac{|\nabla \psi|^2}{R^2 B^2} H(X) \right) - \frac{1}{nq} \mathcal{D}g \left(\frac{F^2}{R^2 B^2} \mathcal{D}g \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) \right) \right] \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{R^2 R_0^3}{F^2 B^2} |\nabla \psi|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\iota}{nq} r \frac{\partial X}{\partial r} \right) - \beta \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

と求めることができる。この式 (37) 式で注意すべき点は、 X の時間微分が必要となる項を含む点である。これは、式 (37) を式 (23) および (24) に代入した場合、Lagrangian の X についての変分をとることで求まる Euler-Lagrange 方程式には最大で 6 階の時間微分が現れることを意味している。

最後に V_3 を求めるために $O(1/n^4)$ のラグランジアン V_3 についての変分をとるが、 \mathcal{K} には V_3 は含まれないため \mathcal{W}_p の V_3 についての変分のみをとればよい。そのため、 V_3 は式 (32) で $l = 2$ とした場合と一致する（ただし、 V_2 は運動エネルギーを考慮したことにより式 (30) から式 (37) に変わっている）。以上で求めたいオーダー (V_3) までの V を X の関数として表すことができた。

3.2 初期値問題解法による安定性解析

本節では、前節で求めた V_2 (式 (37)) および V_3 を用いて、2.4 節と同様に完全陰解法を用いて時間発展を数値的に解いた結果を以下に示す。

図 6(a) は $\Delta t = 5.0\tau_A, 8.0\tau_A, 10.0\tau_A$ および $12.0\tau_A$ とした場合の $n = 17$ の理想 MHD モードの線形成長率の時間変化を示した図である。この場合の線形成長率は固有値問題を解くことにより $\gamma_{IM} = 2.13 \times 10^{-2}$ であることがわかっている。この図から、 Δt をある程度 ($10\tau_A$) まで小さくしていくことで固有値問題による計算結果に漸近していくが、それよりも小さくしてしまうと計算が破綻し成長率の非常に大きいモードが現

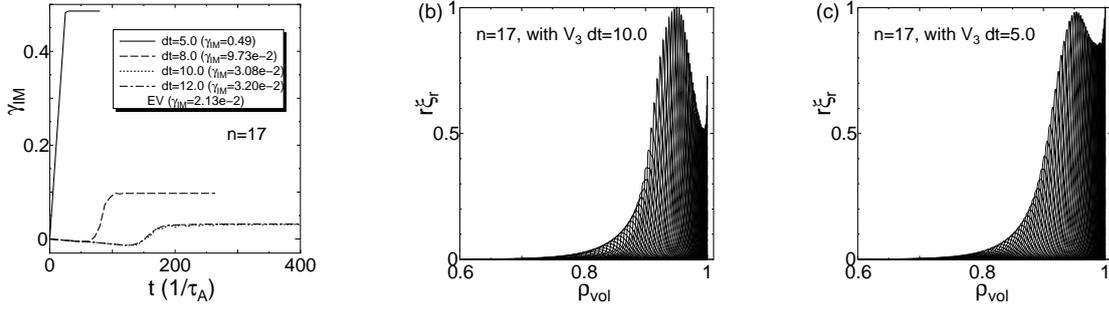


図6 Lagrangian に対して高 n 展開による簡略化を行った物理モデルから求まる初期値問題を解いた結果。(a) 初期値問題を解いた際の $n = 17$ の理想 MHD モードの成長率の時間発展。固有値問題を解いた際の結果は $\gamma_{IM} = 2.13 \times 10^{-2}$ であり、 $\Delta t = 12.0\tau_A$ (破点線) および $10.0\tau_A$ (点線) の結果はその値に比較的近い値となっているが、 $\Delta t = 5.0\tau_A$ (実線) および $8.0\tau_A$ (破線) の場合の結果はそれから大きく異なる結果を示している。また、(b) および (c) はそれぞれ $\Delta t = 10.0\tau_A$ 、 $5.0\tau_A$ として際の理想 MHD モードのモード構造を示しているが、 $\Delta t = 10.0\tau_A$ の結果は固有値問題の結果と良く一致しているが、 $5.0\tau_A$ の結果はそれとは異なるモード構造をしていることがわかる。

れていることがわかる。図 6(b) および (c) はそれぞれ $\Delta t = 10.0\tau_A$ および $5.0\tau_A$ として初期値問題を解いた場合の MHD モードの構造を示す。図 3(b) に示される固有値問題を解いた結果求まる固有関数と図 6(b) は非常によく似た構造を持つ MHD モードであるのに対して、図 6(c) は他の 2 つとは異なる構造を持っていることがわかる。しかしながら、この図 6(c) に示されるモードが物理的に不安定なものであるか数値的な問題で現れたものであるかについては、今回のように固有値問題を解くことによって最も不安定な解が明らかになっている場合にはある程度判断ができるが、本研究の目的である “プラズマ回転を考慮した理想 MHD 安定性のような初期値問題でしか解けない非エルミート問題” において同様の “数値的な問題と思われるモード” が現れた場合には、その判断は不可能なものとなる。そのため、本研究の目的である “周辺局在理想 MHD モードの安定性に対するプラズマ回転の影響を明らかにするために高 n 展開を用いて簡略化した物理モデルによる初期値問題解法を用いた安定性解析” を実現するためには、今回の計算で現れた数値的と思われる問題を引き起こす原因を明らかにし、かつこれを解決することが必要となる。

3.3 数値安定性に関する考察

前節で表れた “偽の” 解が表れる原因について、3.1 節で述べた “高 n 展開を行うことによって高階 (4 階、6 階) の時間微分が表れたことによる Euler-Lagrange 方程式の性質の変化に着目し、簡単な考察を以下で行う。

Lagrangian \mathcal{L} を V_3 まで考慮して導いた場合に求まる Euler-Lagrange 方程式は

$$\mathbf{E} \frac{\partial^6 X}{\partial t^6} + \mathbf{F} \frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \mathbf{G} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \mathbf{H} X = 0, \quad (38)$$

という形で表すことができる。このうち \mathbf{E} は \mathcal{K} の、 \mathbf{F} は \mathcal{W}_p および \mathcal{K} の V_2 および V_3 を含む項から現れ、これらが最高 2 階の時間微分で表されるべき運動方程式からのずれを生じさせていると考えられる。この式 (38) に現れる高階の時間微分の係数である \mathbf{E} および \mathbf{F} を仮想的にそれぞれ 0 とおいた微分方程式をたててそれらを解くと、前節で現れた偽の解は $\mathbf{F} \neq 0$ であることが原因で現れていることが予想される結果が得られ

た。そこで $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ とおき、また $X \propto \exp(\gamma t)$ と表されると仮定すると式 (38) は

$$\mathbf{F}\gamma^4 + \mathbf{G}\gamma^2 - \mathbf{H} = 0 \quad (39)$$

という γ^2 に関する 2 次方程式が得られる。この 2 次方程式に現れる係数行列 \mathbf{F} , \mathbf{G} および \mathbf{H} をスカラーであると見立てて 2 次方程式の解の公式を用いるとともに、前述の通り \mathbf{F} に相当する項は V_2 および V_3 から現れる項であるのに対して \mathbf{G} , \mathbf{H} は V_1 から現れる成分を含むことから $\mathbf{G} \ll \mathbf{F}$ であると仮定して

$$\gamma^2 \simeq \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{G}}, \quad \frac{-\mathbf{G}^2 - \mathbf{F}\mathbf{H}}{\mathbf{F}\mathbf{G}} \quad (40)$$

という 2 つの解が得られる。このうちの 1 つめの解は $\mathbf{G}\gamma^2 - \mathbf{H} = 0$ という (本来の) 運動方程式の解であり、もう一方は $\mathbf{F} \neq 0$ であることから現れる偽の解であると考えられる。この 2 つめの解は $\mathbf{F} \rightarrow +0$ で $-\infty$ 、 $\mathbf{F} \rightarrow -0$ で $+\infty$ となることから、 $\mathbf{F} \rightarrow -0$ の場合に $\gamma \rightarrow \infty$ という解を持つことが予想される。完全陰解法はスキームの持つ数値粘性により Δt を大きくとった場合に早い振動および早い成長を捉えることができないため $\gamma \ll 1$ の成長率を持つモードの成長を捉えられないが、 Δt を小さくしていくことによって γ が大きいモードも捉えることができるようになる。そのため、本節の簡単な考察から予想される”高 n 展開によって現れた高階の時間微分項によって、非常に大きな成長率を持つ偽の解が現れる”ことは、前節の” Δt を小さくすることにより非常に大きな成長率を持つ偽の解が現れる”という計算結果に矛盾しないものである。

4 まとめ

本研究では、プラズマ回転を考慮した周辺局在理想 MHD モードの安定性解析を少ない計算コストで実現することに応用可能な数値解析モデルを開発するために、高 n 展開を用いて簡略化した物理モデルを元に初期値問題による安定性解析手法の開発を行った。まず、運動エネルギーの影響を無視することによって簡略化された物理モデルに対して高 n 展開によるさらなる簡略化を行い、これを固有値問題解法および完全陰解法を用いた初期値問題解法によって数値解析を行った。その結果、高 n 展開による物理モデルの簡略化が周辺局在理想 MHD モードの安定性解析を行う上で問題のないことを確認した。

次に、運動エネルギーを考慮した従来の理想 MHD モデルに対して高 n 展開による簡略化を行い、これによって求めた物理モデルを元に初期値問題を導出した。この初期値問題を数値的に解くことによって安定性解析を行ったが、その結果時間発展の時間刻み幅を小さくした際に偽の解が現れてしまうことが明らかになった。この原因について簡単な考察を行った結果、この偽の解は高 n 展開を用いた簡略化を行うことによって現れた高階の時間微分項が原因で現れていると予想されることを示した。

このような高 n 展開により微分方程式の性質が変化してしまったことが偽の解を生み出している原因であると考えられる場合、回避する方法は時間方向に対する適切なスケール分離を行うことにより高階の時間微分項を消去することなどが考えられるが、これについては今後の課題として研究を進めていく予定である。

参考文献

- [1] E. J. Doyle et al., Nuclear Fusion **47**, S72 (2007).
- [2] N. Oyama et al., Plasma Phys. Control. Fusion **49**, 249 (2007).
- [3] R. Gruber and J. Rappaz, *Finite Elements Methods in Linear Ideal Magnetohydrodynamics*, Berlin: Springer, 1985.

- [4] R. C. Grimm, R. L. Dewar, and J. Manickam, *J. Comput. Phys.* **49**, 94 (1983).
- [5] E. Frieman and M. Rotenberg, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 898 (1960).
- [6] S. Tokuda and T. Watanabe, *Phys. Plasmas* **6**, 3012 (1999).
- [7] N. Aiba, S. Tokuda, T. Ishizawa, and M. Okamoto, *Comput. Phys. Commun.* **175**, 269 (2006).
- [8] W. A. Newcomb, *Ann. Phys.* **10**, 232 (1960).
- [9] N. Aiba et al., *J. Plasma Fusion Res.* **2**, 010 (2007).
- [10] J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 396 (1978).

誤差磁場による磁気島生成に対するプラズマ流の効果

古川勝, L. -J. Zheng¹⁾

東京大学大学院新領域創成科学研究科

¹⁾ テキサス大学オースチン校核融合研究所

概要

外部から与えられた静的な誤差磁場による磁気島の生成と消滅について、プラズマ回転を考慮して解析した。回転による周波数 Doppler シフトにより、Alfvén 共鳴位置が誤差磁場と共鳴する位置からずれる。この効果を考慮することにより、磁気島の非線形解析に使われる Rutherford 方程式において対流項と拡散項が釣り合う新たな磁気島解を見出した。また、回転によって磁気島幅は小さくなり、誤差磁場が小さい場合には完全に消滅することを見出した。

1. 研究背景および目的

これまでの理論・シミュレーションおよび実験研究によって、トカマクプラズマのトロイダル回転が抵抗性壁モード (Resistive Wall Mode, RWM) を安定化し得ることが明らかになっている。RWM の安定化に必要なトロイダル回転速度 (以下、臨界回転速度と呼ぶ) は、Alfvén 速度の数%とされてきた [1-4]。

しかし、最近のトカマク実験において、臨界回転速度がそれまでに考えられてきた値よりも約一桁小さいことが示された [5, 6]。DIII-D トカマクにおいては、これまで、まずトロイダル回転が十分大きく、RWM が安定化されている状態を作り、そこに誤差磁場を印加することで回転を減速させ、RWM が不安定になったときの回転速度を臨界回転速度として求めていた。これが Alfvén 速度の数%という数値である。一方で、誤差磁場は予め小さくなるよう調整しておき、中性粒子ビーム入射 (Neutral Beam Injection, NBI) がトロイダル方向に正味の運動量を供給しないようにしてトロイダル回転を減速させた場合には、臨界回転速度が一桁小さい値となった [6]。このことから、誤差磁場は、臨界回転速度を決める重要な要素の一つであることは明らかである。

これを説明するために現在使われているのは、トルクバランスに基づくバンドギャップ (forbidden frequency band) モデルが用いられている。バンドギャップモデル自体は、テアリング不安定性によって生じた、プラズマと共に回転する磁気島が、導体壁との間に働く電磁トルクによって回転が妨げられ、プラズマ回転と共に回ろうとするために働く粘性トルクとのバランスが失われた場合に突然導体壁にロックする現象を説明するために構築された [7]。その後、誤差磁場によって生成された磁気島が作る電磁トルクと、プラズマ回転との間に働く粘性トルクのバランスを用い、RWM の臨界回転速度を説明する試みがなされている [8, 9]。

上記のバンドギャップモデルに用いられている理論モデルは、文献 [10] に基づいている。この論文では、外的に与えられた誤差磁場に対するプラズマの応答、具体的には磁気島の生成および消滅について、線形および非線形解析が行われている。プラズマの抵抗や粘性、回転速度によってパラメタライズされた空間で、磁気島のある状態とない状態の間の分岐現象とそのヒステリシスについて述べられている。非線形解析では、特に、プラズマと共に回転していない磁気島の消滅について、磁気島の非線形時間発展を記述する、いわゆる Rutherford 方程式 [11-13] に基づいて研究している。しかし、この解析には、プラズマ回転によって周波数の Doppler シフトが起こり、誤差磁場に共鳴する "モード共鳴面" と波の周波数がゼロとなる "Alfvén 共鳴面" がずれる効果が考慮されていない。以下で明らかになるように、Alfvén 共鳴効果を考慮することによって、いわゆるテアリングモードパラメータ Δ' が著しく変更され、その結果磁気島の生成と消滅の様子も著しく変更される。

2. 各領域の独立解および接続条件

誤差磁場による磁気島生成に対する Alfvén 共鳴効果に着目するだけならば、1次元スラブプラズマでも十分だろうが、今後のトロイダル形状への拡張も念頭に置き、円柱プラズマを考える。プラズマ内には誤

差磁場に共鳴する有界面があり，プラズマの外には真空領域が広がっている．その真空領域には，薄い導体壁と，そのすぐ外に誤差磁場を作る薄い電流層があるとする．模式的に表したのが図 1 である．便宜上，磁気軸 $r = 0$ から磁気島の片方の端 $r = r_0 - w/2$ までを plasma-I 領域（ただし， $r = r_0$ はモード共鳴面，また w は磁気島の幅），磁気島のもう片方の端 $r = r_0 + w/2$ からプラズマ端 $r = a$ を plasma-II 領域，プラズマ端から導体壁 $r = b$ までを vacuum-I 領域，導体壁の厚さを δ ，誤差磁場を作る電流層の厚さを δ_2 とし， $r = b + \delta + \delta_2$ から無限遠を vacuum-II 領域と呼ぶ．これら 4 つの領域では，時間変化を落とした線形方程式を解き，それらの独立解をそれぞれの境界で接続していく．

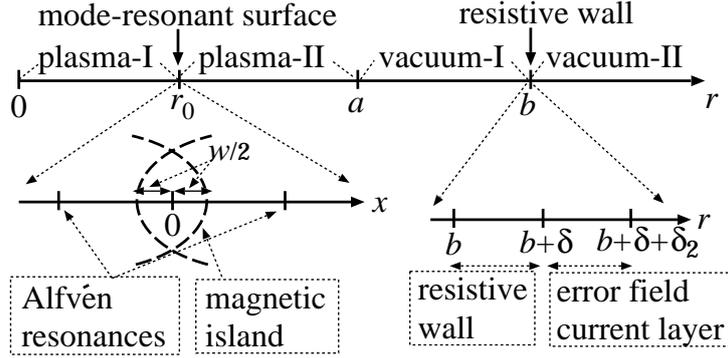


図 1: 配位の模式図．

2.1 各領域での独立解

■ plasma-I 領域

まず，plasma-I 領域では，慣性を落とした線形化 MHD 方程式，いわゆる Newcomb 方程式を用いる [14]．ただし，トロイダル回転による周波数 Doppler シフトの効果は残すのが特徴である：

$$\frac{d}{dr} \left[(\rho n^2 \Omega_0^2 - F^2) r \frac{d}{dr} (r \xi) \right] - \left[m^2 (\rho n^2 \Omega_0^2 - F^2) - r \frac{dF^2}{dr} \right] \xi = 0. \quad (1)$$

ここで， ξ はプラズマの r 方向変位， ρ は平衡質量密度， Ω_0 は平衡トロイダル回転角周波数， $F := \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}$ ， $\mathbf{k} := m \nabla \theta - (n/R_0) \nabla z$ は波数ベクトル， m と n はそれぞれポロイダルおよびトロイダルモード数， R_0 はプラズマ大半径である．また，円柱座標系 (r, θ, z) が用いられている． ρ と Ω_0 は，簡単のため，定数としているが， r に依存する分布を導入することは簡単である．トロイダル回転の効果は，式 (1) の中で， $\rho n^2 \Omega_0^2$ の項に現れている．これは， F^2 が非常に小さくなる有界面近傍以外では，無視できるので， Ω_0 を定数とすることは結果にほとんど影響しないと考えられる．モード共鳴面では $F = 0$ ，Alfvén 共鳴面では $F = \pm \sqrt{\rho} n \Omega_0$ となっている．

式 (1) を $r = 0$ から $r = r_0 - w/2$ まで積分する際に，モード共鳴面の両側に位置する Alfvén 共鳴面の 1 つに遭遇する．これは，人為的な非常に小さい成長率を加え， $n \Omega_0$ を $n \Omega_0 + i \gamma$ で置き換えることによって避けることができる．ただし， $0 < \gamma \ll n \Omega_0$ である．人為的な γ を変えることによって，得られる解が変わらないことは確認している．また，この方法は，既にトロイダル形状のプラズマにも適用されている [4]．

式 (1) は 2 階の常微分方程式なので，2 つの独立解をもつが， $r = 0$ での境界条件から，1 つに絞られる．これを $\xi^{\text{pI}}(r)$ と書く．添字 "pI" は，"plasma-I" 領域を意味する．以降，他の領域での解についても同様の記法を用いる．したがって，plasma-I 領域での $\xi(r)$ は，振幅を c^{pI} として，

$$\xi(r) = c^{\text{pI}} \xi^{\text{pI}}(r) \quad (2)$$

と書ける．

■ plasma-II 領域

Plasma-II 領域でも，plasma-I 領域と同様に式 (1) を解く．それら独立解を $\xi_1^{\text{pII}}(r)$ と $\xi_2^{\text{pII}}(r)$ とすると， $\xi(r)$ は

$$\xi(r) = c_1^{\text{pII}} \xi_1^{\text{pII}}(r) + c_2^{\text{pII}} \xi_2^{\text{pII}}(r) \quad (3)$$

と書ける． $r = a$ でのそれぞれの独立解に対する境界条件は， $c_1^{\text{pII}} = c_1^{\text{vI}}$ および $c_2^{\text{pII}} = c_2^{\text{vI}}$ となるように選ぶ．ただし， c_1^{vI} と c_2^{vI} は vacuum-I 領域で定義する振幅に関係した係数である．

■ vacuum-I 領域

次に，vacuum-I 領域では，摂動磁場を $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla\psi$ と表す． $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$ から， ψ は Laplace 方程式を満たす．2 つの独立解は，

$$\psi_1^{\text{vI}}(r) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{b}\right)^m + \left(\frac{r}{b}\right)^{-m} \right], \quad (4)$$

$$\psi_2^{\text{vI}}(r) = \left(\frac{r}{b}\right)^{-m} \quad (5)$$

と表すことができる． $\psi_1^{\text{vI}}(r)$ は，導体壁面 $r = b$ で r 微分がゼロ，つまり摂動磁場の r 成分がゼロになる解で，完全導体壁に対する解となっている．一方で， $\psi_2^{\text{vI}}(r)$ は，無限遠でゼロになっていく解で，壁なしの解である．したがって， $\psi(r)$ は，

$$\psi(r) = c_1^{\text{vI}} \psi_1^{\text{vI}}(r) + c_2^{\text{vI}} \psi_2^{\text{vI}}(r) \quad (6)$$

と表わされる． c_1^{vI} と c_2^{vI} は振幅に関係する係数である．

■ vacuum-II 領域

最後に，vacuum-II 領域でも，vacuum-I 領域と同様に ψ に対する Laplace 方程式を解き，その独立解を

$$\psi^{\text{vII}}(r) = \left(\frac{r}{b}\right)^{-m} \quad (7)$$

とする．無限遠での境界条件から，独立解は 1 つだけである． $\psi(r)$ は，

$$\psi(r) = c^{\text{vII}} \psi^{\text{vII}}(r) \quad (8)$$

と表わされる． $\psi^{\text{vII}}(r) = \psi_2^{\text{vI}}(r)$ と選ばれている．

2.2 独立解の接続条件

■ plasma-I 領域と plasma-II 領域

この境界は，間に磁気島があることを想定して接続する．まず 1 つ目の条件は，摂動磁場の r 成分が連続という条件，いわゆる constant- ψ 近似である．有理面からの距離を $x := r - r_0$ と定義すると，有理面近傍で

$$\tilde{B}_r = i F \xi \quad (9)$$

$$= -\frac{i n B_z S_0}{R_0 r_0} x \xi \quad (10)$$

と表される．ここで， B_z は平衡トロイダル磁場， S_0 は有理面での磁気シア $(r/q) dq/dr$ ， $q(r)$ は安全係数である．したがって，plasma-II 領域での独立解 $\xi_1^{\text{pII}}(r)$ および $\xi_2^{\text{pII}}(r)$ を， $-\xi^{\text{pI}}(-w/2) = \xi_1^{\text{pII}}(w/2) = \xi_2^{\text{pII}}(w/2)$ と規格化しておくと，摂動磁場の r 成分が連続という条件は

$$c^{\text{pI}} = c_1^{\text{pII}} + c_2^{\text{pII}} \quad (11)$$

と表すことができる．

もう1つの条件は，磁場の誘導方程式の r 成分から得られる：

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{B}_r = \mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{v}_r + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \tilde{B}_r. \quad (12)$$

ここで， η はプラズマの電気抵抗率， μ_0 は真空透磁率を表し，時間微分項は着目している現象では $\partial/\partial t \ll \mathbf{v} \cdot \nabla$ であることから落とされている．

運動方程式の r 成分から，

$$\rho(-i n \Omega) v_r \sim \mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{B}_r \quad (13)$$

と見積もることができるので，式 (12) の左辺と右辺第1項の大きさは

$$\frac{|\mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{v}_r|}{|\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{B}_r|} \sim \frac{S_0^2 (x/r)^2}{\Omega_0^2 \tau_A^2} \quad (14)$$

と比較される．磁気島幅が2枚の Alfvén 共鳴面の間の距離よりもずっと小さければ，式 (12) の右辺第1項は落とすことができる．

式 (12) を磁気島幅 w に亘って積分し，両辺を \tilde{B}_r で割って整理すると，

$$-i n \alpha \Omega_0 w = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta' \quad (15)$$

を得る．ここで，

$$\Delta' := \frac{\left. \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial r} \right|_{-w/2}^{w/2}}{\tilde{B}_r} \quad (16)$$

はいわゆるテアリングモードパラメータである． α は，磁気島外でのプラズマトロイダル回転周波数に対する，磁気島内での値の比である．

もし Alfvén 共鳴面がなければ， Δ' は実数である．したがって，式 (15) のようなバランスは実現しない．しかし，本研究では，Alfvén 共鳴面を考慮することによって Δ' が複素数となっているため，式 (15) を満たすことが可能となる．これは，新しい磁気島解である．

■ plasma-II 領域と vacuum-I 領域

この境界では，摂動磁場の r 成分および摂動全圧が連続という条件を課す [15]．

Plasma-II 領域では，

$$\xi(a) =: \xi_a = c_1^{\text{pII}} \xi_1^{\text{pII}}(a) + c_2^{\text{pII}} \xi_2^{\text{pII}}(a), \quad (17)$$

$$\frac{d\xi}{dr}(a) =: \xi'_a = c_1^{\text{pII}} \xi_1^{\text{pII}'}(a) + c_2^{\text{pII}} \xi_2^{\text{pII}'}(a) \quad (18)$$

と表される．したがって，上記2つの境界条件は，

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} i F_a \xi_1^{\text{pII}}(a) & i F_a \xi_2^{\text{pII}}(a) \\ -\frac{F_a}{a k_{0a}^2} (\hat{F}_a \xi_1^{\text{pII}}(a) + a F_a \xi_1^{\text{pII}'}(a)) & -\frac{F_a}{a k_{0a}^2} (\hat{F}_a \xi_2^{\text{pII}}(a) + a F_a \xi_2^{\text{pII}'}(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\text{pII}} \\ c_2^{\text{pII}} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \psi_1^{\text{vI}}(a) & \psi_2^{\text{vI}}(a) \\ i F_a \psi_1^{\text{vI}}(a) & i F_a \psi_2^{\text{vI}}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\text{vI}} \\ c_2^{\text{vI}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

と表される [15]．ここで， $F := \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = (m B_z / R_0)(1/q - n/m)$ ， $\hat{F} := -(m B_z / R_0)(1/q + n/m)$ ， $k_0^2 = (m/r)^2 + (n/R_0)^2$ であり，添字 a はプラズマ端 $r = a$ での値であることを意味する．右辺にある行列の逆行列を全体に左から掛けると，

$$\begin{pmatrix} c_1^{\text{vI}} \\ c_2^{\text{vI}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1^{\text{pII}} \\ c_2^{\text{pII}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

と表すことができる．ここで， A は $\xi_1^{\text{pII}}(a)$ ， $\xi_1^{\text{pII}'}(a)$ ， $\xi_2^{\text{pII}}(a)$ ， $\xi_2^{\text{pII}'}(a)$ ，および $\psi_1^{\text{vI}}(a)$ ， $\psi_1^{\text{vI}'}(a)$ ， $\psi_2^{\text{vI}}(a)$ ， $\psi_2^{\text{vI}'}(a)$ を含む 2×2 行列である．

$$\xi_1^{\text{pII}}(a) = -\frac{i\psi_1^{\text{vI}'}(a)}{F_a}, \quad (21)$$

$$\xi_1^{\text{pII}'}(a) = -\frac{i}{F_a} \left(k_{0a}^2 \psi_1^{\text{vI}}(a) - \frac{\hat{F}_a}{aF_a} \psi_1^{\text{vI}'}(a) \right), \quad (22)$$

$$\xi_2^{\text{pII}}(a) = -\frac{i\psi_2^{\text{vI}'}(a)}{F_a}, \quad (23)$$

$$\xi_2^{\text{pII}'}(a) = -\frac{i}{F_a} \left(k_{0a}^2 \psi_2^{\text{vI}}(a) - \frac{\hat{F}_a}{aF_a} \psi_2^{\text{vI}'}(a) \right) \quad (24)$$

と選べば，行列 A が単位行列となるので，

$$c_1^{\text{pII}} = c_1^{\text{vI}}, \quad (25)$$

$$c_2^{\text{pII}} = c_2^{\text{vI}} \quad (26)$$

とすることができる．したがって，plasma-II 領域で式 (1) を $r = a$ から積分するとき，上記を境界条件として課す．

■ vacuum-I 領域と vacuum-II 領域

導体壁と誤差磁場電流層は非常に薄いと仮定する．このとき，1 つ目の接続条件は，摂動磁場の r 成分が連続である． $\psi_1^{\text{vI}'}(b) = 0$ であり（ただしプライムは r 微分），また $\psi_2^{\text{vI}'}(b) = \psi^{\text{vII}'}(b)$ であることに注意すると，

$$c_2^{\text{vI}} = c^{\text{vII}} \quad (27)$$

が得られる．

もう 1 つの条件は，導体内での磁場の拡散方程式 r 成分から得られる：

$$\frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial t} = \frac{\eta_w}{\mu_0} \frac{\partial^2 \tilde{B}_r}{\partial r^2}. \quad (28)$$

ここで， η_w は導体壁の電気抵抗率である．これを導体壁の厚さに亘って積分すると，

$$\frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial t} = \frac{\eta_w}{\mu_0 \delta} \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial r} \Bigg|_b^{b+\delta} \quad (29)$$

$$= -\frac{\eta_w}{\mu_0 \delta} k_{0b}^2 (c_1^{\text{vI}} \psi_1^{\text{vI}}(b) + \psi_{\text{err}}). \quad (30)$$

が得られる．ここで， $k_{0b}^2 := (m/b)^2 + (n/R_0)^2$ であり， $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$ から

$$\frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial r} \simeq k_{0b}^2 \psi, \quad (31)$$

および

$$\psi_{\text{err}} = \frac{1}{k_{0b}^2} \left(\frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial r} \Bigg|_{b+\delta} - \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial r} \Bigg|_{b+\delta+\delta_2} \right) \quad (32)$$

を用いた． $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$ から， $\partial \tilde{B}_r / \partial r$ は誤差磁場電流層に沿った方向の磁場に比例していることがわかる．したがって， ψ_{err} は誤差磁場電流層に沿った方向の磁場の跳び，つまり誤差磁場を作っている電流の大きさを表していることになる．

定常状態を考えたいので， $\partial / \partial t$ を落とすと，

$$c_1^{\text{vI}} \psi_1^{\text{vI}}(b) + \psi_{\text{err}} = 0 \quad (33)$$

が得られる．ここで， $\psi_1^{\text{vI}}(b) = -\xi^{\text{pI}}(-w/2) / \xi_1^{\text{pII}}(w/2)$ である．

■ Δ' について

Plasma-II 領域の独立解は, $\xi_1^{\text{PII}}(r)$ は vacuum-I 領域での完全導体壁に対する解 $\psi_1^{\text{PI}}(r)$ に, $\xi_2^{\text{PII}}(r)$ は壁なしの解 $\psi_2^{\text{PI}}(r)$ に接続されている. したがって, 完全導体壁がある場合の解と壁なしの場合の解のそれぞれに対応する摂動磁場を用いて, Δ' を定義しておくのが良いと考えられる:

$$\Delta'_\infty := \frac{4}{w} + \frac{\xi_2^{\text{PII}}(w/2) + \xi^{\text{PI}}(-w/2)}{-\xi^{\text{PI}}(-w/2)}, \quad (34)$$

$$\Delta'_b := \frac{4}{w} + \frac{\xi_1^{\text{PII}}(w/2) + \xi^{\text{PI}}(-w/2)}{-\xi^{\text{PI}}(-w/2)}. \quad (35)$$

これらを用いると, Δ' は,

$$\Delta' = \Delta'_\infty - \frac{c_1^{\text{PII}}}{c_1^{\text{PI}}}(\Delta'_\infty - \Delta'_b). \quad (36)$$

と書ける. 磁気島幅 w が

$$w = 4 \left(\frac{rq|\tilde{B}_r|}{mq'B_\theta} \right)^{1/2} \quad (37)$$

と表されること [12], また $\tilde{B}_r = iF\xi$ であることを使うと,

$$\Delta' = \Delta'_\infty - \frac{8i w \xi^{\text{PI}}(-w/2) c_1^{\text{PII}}}{w^2} (\Delta'_\infty - \Delta'_b) \quad (38)$$

となる. これを使うと, 式 (15) は, 与えられた $|\psi_{\text{err}}|$ に対して, 磁気島の幅と誤差磁場の位相を決める式となる.

3. トロイダル回転による磁気島の抑制

この節以降で, 上記の定式化に基づいて求めた磁気島解やトルクについて示していく. 示される量は全て規格化されている. 規格化に用いたのは, 小半径 a , トロイダル磁場 B_z , Alfvén 速度 $v_A := B_z / \sqrt{\mu_0 \rho}$, 質量密度 ρ , Alfvén 時間 $\tau_A := a/v_A$ である. また, これ以降に示す数値解は, トロイダル電流密度が $j_t(r) = j_{t0}(1 - r^2)$ で, プラズマ端での安全係数が $q = 2.2$ となっている. $q = 2$ の有理面は, $r = 0.9487$ にある. また, 規格化されたプラズマ電気抵抗率は, $\eta/\alpha = 10^{-8}$ と選んだ. また, 導体壁は $r = b = 1.1$ にあるとした. 誤差磁場のモード数は $m = 2, n = 1$ であり, $q = 2$ 面がモード共鳴面である. Alfvén 共鳴面は, $r = 0.9292$ および $r = 0.9678$ にある.

まず, Δ' を構成する Δ'_∞ および $\Delta'_\infty - \Delta'_b$ が, Alfvén 共鳴効果によってどのように変わるかを図 2 および図 3 に示す. 両図の横軸は磁気島幅 w である. まず, Δ'_∞ の実部は, Alfvén 共鳴効果を取り込むことによって, 2桁程度大きくなっている. $\Omega_0 \neq 0$ の各線で, w が大きいところで線が切れているのは, 磁気島幅が Alfvén 共鳴面間の距離の半分になったところで計算を止めたからである. 虚部は, $\Omega_0 = 0$ つまり Alfvén 共鳴効果を考慮しない場合はゼロとなっているが, $\Omega_0 \neq 0$ の場合には有限値をとっている. また, $\Delta'_\infty - \Delta'_b$ の実部と虚部については, Δ'_∞ のように桁が変わるほどではないが, やはり Alfvén 共鳴効果で値が大幅に変わっている. これらの結果から, 磁気島の生成および抑制の様子も相当な影響を受けることが予想される.

図 4 には, 磁気島幅 $w = 10^{-2}$ に対して, Alfvén 共鳴効果を考慮していない場合 ($\Omega_0 = 0$) および考慮した場合 ($\Omega_0 = 10^{-2}$) の摂動磁場の振舞いを示す. Alfvén 共鳴面のところで鋭いスパイク状の振舞いが見える. このことから, 先ほど見た Δ' の変化は納得されるだろう.

次に, 誤差磁場の大きさを表す $|\psi_{\text{err}}|$ に対して, 生成される磁気島の幅 w をプロットしたものを図 5 に示す. 図 5(a) で, $\Omega_0 \neq 0$ の場合に曲線が w の大きい側で途切れているのは, 磁気島幅が 2 枚の Alfvén 共鳴面間の距離の半分に達したため計算を止めたからである. 図 5(b) では, Alfvén 共鳴効果を除いて Δ' を計算したのち, Ω_0 を有限値にして式 (15) を解いている. 図 5(a) から, Alfvén 共鳴効果によって, 特に

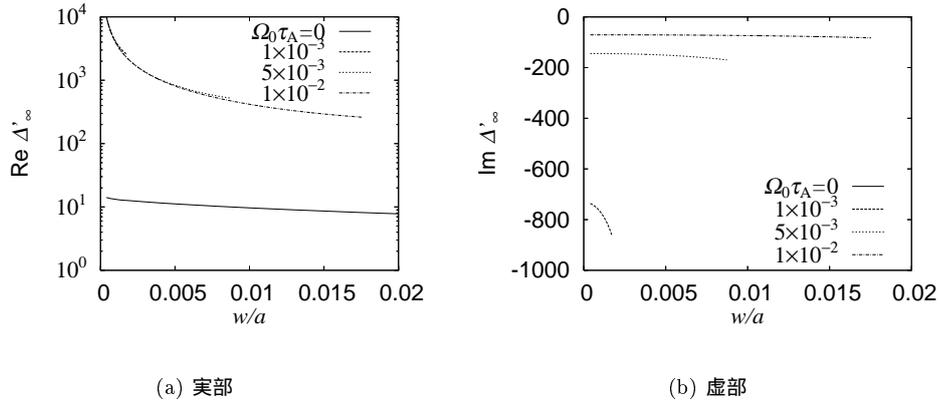


図 2: Δ'_∞ の実部および虚部 .

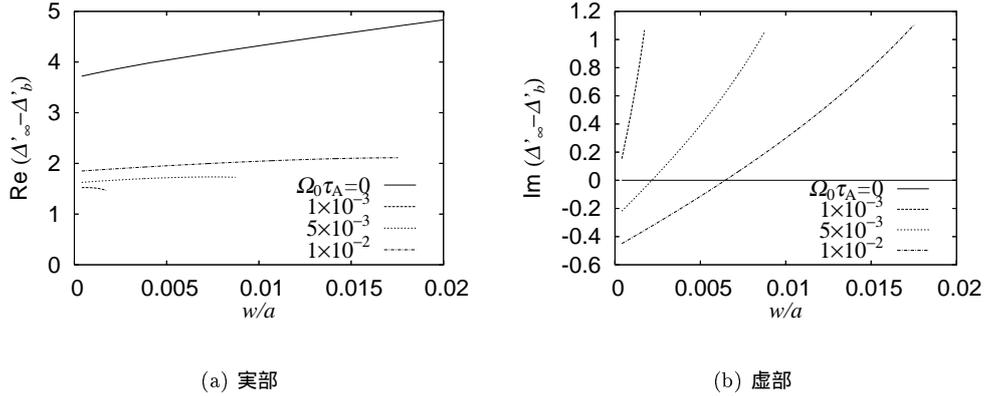


図 3: $\Delta'_\infty - \Delta'_b$ の実部および虚部 .

$|\psi_{\text{err}}|$ が小さい場合には、磁気島解がなくなることがわかる。つまり、本研究ではこれまでに考えられていなかった対流項と Δ' とのバランスで新しい磁気島解を発見しているが、そのメカニズムで生成された磁気島は、誤差磁場が小さければプラズマ回転によって完全に抑制されることが明らかになった。一方、図 5(b) では、誤差磁場が小さくても、常に磁気島は存在する。さらに、磁気島幅が比較的大きい場合には、Alfvén 共鳴効果によって、 w の $|\psi_{\text{err}}|$ に対する依存性が $w \propto |\psi_{\text{err}}|^{1/3}$ から $w \propto |\psi_{\text{err}}|^{4/7}$ に変わることがわかった。

また、図 5 と同じことではあるが、トロイダル回転角周波数 Ω_0 を横軸にとって磁気島幅 w をプロットしたものを図 6 に示す。先と同様に、図 6(a) では Ω_0 が小さく、かつ w が大きいところは計算していないので、データが示されていない。図中の”sep. Alf. res.” は、2 枚の Alfvén 共鳴面間の距離である。 Ω_0 に比例して、この距離は大きくなる。また、図 6(b) では、Alfvén 共鳴なしで Δ' を計算し、 $\Omega_0 \neq 0$ とした式 (15) を解いている。同じ回転 Ω_0 、同じ $|\psi_{\text{err}}|$ で比較すると、磁気島幅は Alfvén 共鳴効果によって小さくなっている。また、 Ω_0 に対する依存性は、 $w \propto \Omega_0^{-1/3}$ から $w \propto \Omega_0^{-1}$ に変更される。

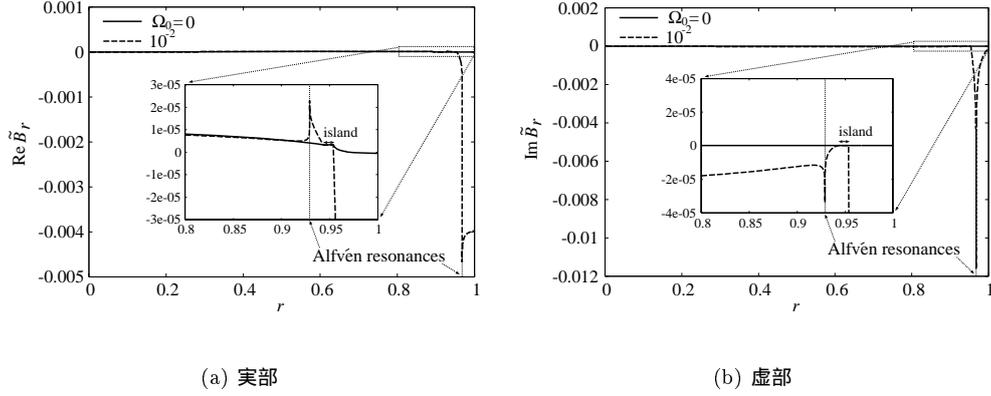


図 4: \tilde{B}_r の実部および虚部 .

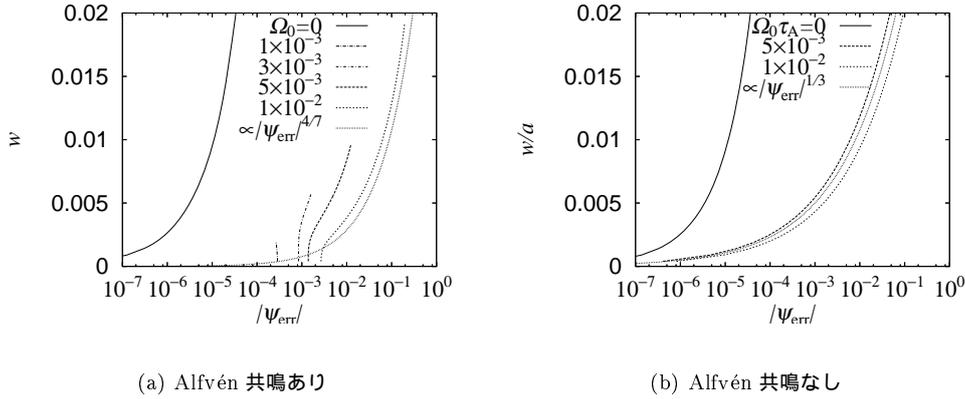


図 5: 誤差磁場の大きさに対する磁気島幅 .

4. トロイダルトルク

この小節では、本研究の定式化に従って計算した磁気島によって、どのような電磁トルクが生じるかを示す．軸対称領域におけるトロイダル電磁トルクは、以下のように表すことができる [10, 16] :

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= \int dV R \hat{\varphi} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}^*) \times \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \Re \int R \tilde{B}_\varphi^* \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 $\hat{\varphi}$ はトロイダル方向の単位ベクトル、 φ はトロイダル角、 \mathbf{S} は考えている軸対称領域の境界から外へ向かう面素ベクトルである．

この軸対称領域を、誤差磁場を作る電流層にとると、

$$\tau_{\varphi, \text{err}} = -i \pi^2 R_0^2 b k (\psi_{\text{err}} \psi'^*(b) - \psi_{\text{err}}^* \psi'(b)). \quad (40)$$

と表すことができる．これは、プラズマに掛かる電磁トルクと同じ大きさで、逆の向きをもつ．

図 7 は、数値解から求めたトルクを示す．先と同様に、図 7(a) で Ω_0 が小さいところは、Alfvén 共鳴面間の距離が縮まったため、計算をしていない．また、図 7(b) は、Alfvén 共鳴なしで Δ' を計算し、 $\Omega_0 \neq 0$ で式 (15) を解いた場合である．まず、トルクは Alfvén 共鳴を考慮することで非常に大きくなっている．また、 Ω_0 と共に大きくなることもわかる．バンドギャップモデルにおいて、高速回転側のトルクバランスは、

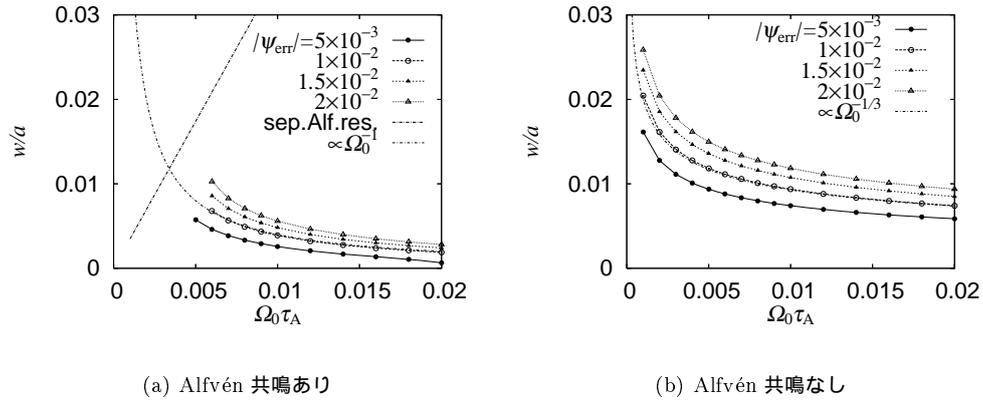


図 6: トロイダル回転角周波数に対する磁気島幅 .

図 7(b) のような $\tau_\phi \propto \Omega_0^{-2/3}$ の分布に基づいている . したがって , バンドギャップモデル自体を見直す必要がある .

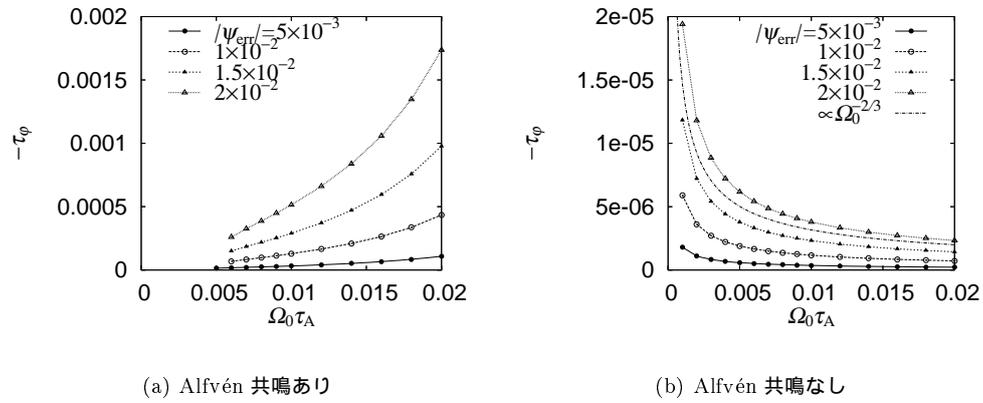


図 7: トロイダル回転角周波数に対するトロイダルトルク .

5. 結論

誤差磁場による磁気島の生成に対して , Alfvén 共鳴効果を取り込んだ解析を行った . トロイダル回転によってモード周波数の Doppler シフトが生じ , 誤差磁場に共鳴するモード共鳴面と , Alfvén 共鳴面がずれる . Alfvén 共鳴効果により , テアリングモードパラメータ Δ' が著しく変更され , その結果 , 磁気島のでき方も著しく影響される . Δ' は , Alfvén 共鳴効果によって複素化しており , Rutherford 方程式において , 対流項と Δ' がバランスする新たな磁気島解を発見している . また , このバランスに基づくと , トロイダル回転によって磁気島幅が小さくなる , また誤差磁場が小さい場合には完全に抑制されることが明らかになった . 磁気島幅は , 誤差磁場の $4/7$ 乗 , トロイダル回転角周波数の -1 乗に比例する . また , トロイダルトルクはかなり大きくなり , またトロイダル回転角周波数と共に増大する . その結果 , 現在実験結果を説明するために使われているバンドギャップモデルは , 再考の必要がある .

参考文献

- [1] E. J. Strait *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2483 (1995).
- [2] A. Bondeson and D. J. Ward, Phys. Rev. Lett. **72**, 2709 (1994).
- [3] D. J. Ward and A. Bondeson, Phys. Plasmas **2**, 1570 (1995).
- [4] L. -J. Zheng, M. Kotschenreuther, and M. S. Chu, Phys. Rev. Lett. **95**, 255003 (2005).
- [5] M. Takechi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 055002 (2007).
- [6] H. Reimerdes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 055001 (2007).
- [7] D. A. Gates and T. C. Hender, Nucl. Fusion **36**, 273 (1996).
- [8] E. J. Strait, A. M. Garofalo, G. L. Jackson *et al.*, Phys. Plasmas **14**, 056101 (2007).
- [9] A. M. Garofalo, G. L. Jackson, R. J. La Haye *et al.*, Nucl. Fusion **47**, 1121 (2007).
- [10] R. Fitzpatrick, Phys. Plasmas **5**, 3325 (1998).
- [11] P. H. Rutherford, Phys. Fluids **16**, 1903 (1973).
- [12] J. Wesson, *Tokamaks* (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [13] D. Biskamp, *Nonlinear magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [14] W. A. Newcomb, Ann. Phys. **10**, 232 (1960).
- [15] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum Press, New York, 1987).
- [16] A. H. Boozer, Phys. Plasmas **10**, 1458 (2003).

Magnetic Island Evolution by an External Perturbation in Rotating Plasmas

Y.Ishii and A.Smolyakov*
Japan Atomic Energy Agency
(Dated: May 28, 2008)

The Alfvén resonance effects on the magnetic island evolution driven by the externally applied perturbation are investigated for the rotating plasmas. The simulation results show the importance of the Alfvén resonance for a perturbed current profile and to estimate a critical value of the external perturbation, beyond which the magnetic island grows rapidly. The nonlinear evolution of the externally driven magnetic island is also investigated. It is shown that the transition phase accompanying the secondary reconnection at the initial X-point in the driven magnetic island evolution occurs in the low resistivity and viscosity plasma.

I. INTRODUCTION

In order to achieve the high performance tokamak plasma, there are several issues related to the magnetohydrodynamics (MHD) activities to be resolved. The neoclassical tearing mode (NTM), which severely affects the performance of the fusion reactor[1], is one of these issues. Hence, the suppression and control of the magnetic island is the urgent subject in a tokamak fusion research. One of the mechanisms of magnetic island formation is the unstable tearing modes driven by the gradient of the equilibrium current and/or by the pressure gradient. Another important mechanism of the magnetic reconnection is the drive by externally applied perturbations such as the residual error fields in the magnetic coils or due to MHD activities. The latter process is considered to be a possible candidate to form the seed island for NTM, where the MHD event such as the sawtooth oscillation acts as the external perturbation for the target mode through the toroidal mode coupling.

In tokamak plasmas, the plasma rotation is excited by the external momentum input like as the neutral beam injection (NBI), the self organization of the plasma flow by the plasma turbulence and so on. The plasma rotation affects the stability and the evolution process of MHD modes. Spontaneous and externally driven magnetic islands are also affected by the plasma rotation. In this study, we focus on the effects of the plasma rotation on the externally driven magnetic island. An externally driven magnetic island can be suppressed by a plasma rotation for external perturbation amplitude lower than some threshold value, which has been extensively studied by earlier [2]. When an external perturbation becomes larger than a critical value and the plasma rotation becomes low around the magnetic neutral surface, where $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, a driven magnetic island begins to grow rapidly. For rotation damping around the magnetic neutral surface, a perturbed current and the perturbed magnetic field profiles are important. In the rotating plasma, the perturbed current is formed around the Alfvén resonance surface [3–5]. The radial position of the Alfvén resonance deviates from that of the magnetic neutral surface. Some theoretical works [6, 7] show the steady state solution with and without the magnetic island including the Alfvén resonance effect. However, a dynamical process by which the Alfvén resonance current causes a driven magnetic island has not been studied. Hence, it is important to study the process by which the perturbed current sheet formed at the Alfvén resonance surface drives the magnetic island evolution. The former theoretical studies are based on the asymptotic matching method; which divides the plasma region in two regions, one is the inner non-ideal region and the other one is the outer ideal region. Hence, these theoretical works can be applied only for a small magnetic island compared with the inner layer width. Another important assumption is the steady state, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. About the importance of the non-steady state on the rapid onset condition of the externally driven magnetic island is already reported [8]. In this study, we will investigate the Alfvén resonance effects on the driven magnetic island formation in the rotating plasma.

In addition, the long term behavior of a driven magnetic island is important for the magnetically confined plasma performance. Some important features of this long term evolution of an externally driven magnetic island are already reported [8]. One of these is the appearance of the transition phase, which becomes more clear and long as the resistivity becomes low[8]. In this study, we will investigate the viscosity effects on the long term evolution of the externally driven magnetic island. As shown in the previous work[8], a critical external magnetic perturbation depends very weakly on the viscosity in the low one regime, $\nu \leq 10^{-6}$. On the other hand, in the high viscosity regime, $\nu \geq 10^{-6}$, a critical external magnetic perturbation depends on the viscosity. Hence, in this study, we use the parameter of $\nu = 10^{-7}$ as a typical low viscosity and the parameter of $\nu = 10^{-4}$ as a typical high viscosity.

*Electronic address: ishii.yasutomo@jaea.go.jp

II. BASIC EQUATIONS

In order to investigate the time evolution of the magnetic island caused by the externally applied magnetic flux perturbation in a rotating plasma, the resistive reduced magnetohydrodynamics (MHD) equations are used in the cylindrical geometry $(r, \theta, \varphi = z/R_0)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{1}{r} [\Psi, \phi] + \frac{B_0}{R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi + \eta J - E \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U = \frac{1}{r} [U, \phi] + \frac{1}{r} [\Psi, J] + \frac{B_0}{R_0} \frac{\partial J}{\partial \varphi} + \nu \nabla_{\perp}^2 (U - U_0) \quad (2)$$

$$J = \nabla_{\perp}^2 \Psi, \quad U = \nabla_{\perp}^2 \phi.$$

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi} \times \nabla \Psi, \quad \mathbf{V} = \mathbf{e}_{\varphi} \times \nabla \phi$$

Here, Ψ is the azimuthal (poloidal) magnetic flux function, ϕ is the flow potential, J is the plasma current, U is the vorticity, B_0 is the axial (toroidal) magnetic field at the magnetic axis, $2\pi R_0$ is the periodicity in the axial direction, where R_0/a corresponds to the aspect ratio of a tokamak, which is set to 10 in the following simulations. The safety factor $q(r)$ in equilibrium is given by $q^{EQ}(r) = rB_0/R_0(d\Psi^{EQ}(r)/dr)$. η and ν are the plasma resistivity and the viscosity, respectively. U_0 is the vorticity corresponding to the plasma poloidal rotation and the last term in eq.(2) is added such that the plasma rotation is maintained in steady state. Also the operator ∇_{\perp} expresses the differentiation in the (r, θ) coordinate. Parameters in these equations are normalized by the plasma minor radius a , the poloidal Alfvén time $\tau_{pa} = \sqrt{\rho a}/B_{\theta}(a)$, where the plasma mass density ρ has been set to 1. Then the resistivity η and the viscosity ν are normalized such that $\eta = \tau_{pa}/\tau_{\eta}$ and $\nu = \tau_{pa}/\tau_{\nu}$, respectively, where τ_{η} is the plasma skin time and τ_{ν} is the viscous diffusion time. In order to solve eqs.(1) and (2), the finite differential method is used in the radial discretization and the Fourier decomposition in the poloidal and toroidal directions. In this study, up to the 1600 radial grids and 20 harmonics are used. The time step is advanced by the predictor corrector time integration scheme with typical time step of $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$.

In the following, we consider the plasma with the $q=2$ resonant surface, which is stable against the tearing mode, $\Delta' < 0$, and we study the MHD modes with single helicity of $m/n = 2/1$ for simplicity, where (m, n) is the poloidal and toroidal mode numbers. Also, we consider the rigid rotation of plasma in the following, which corresponds to the stream function of $\phi_{0/0}(r) = (V_{\theta a}/2a)r^2$ and the vorticity of $U_{0/0} = 2V_{\theta a}/a$, where $V_{\theta a}$ is the poloidal flow velocity at the wall. In the following, we set $V_{\theta a} = \frac{2\pi a}{100}$, which correspond to the normalized plasma rotation frequency of 10^{-2} . The external magnetic perturbation Ψ^{ext} is added at the plasma surface as the linearly increasing poloidal flux function, $\Psi_{2/1}(r = a) = \Psi^{ext}(t) = \frac{d\Psi^{ext}}{dt} \cdot (t - t_0)$. In this study, t_0 is set to 10 in order to confirm numerically the state is stationary without the external perturbation. Here, $\frac{d\Psi^{ext}}{dt}$ is the increasing rate of the external perturbation.

III. CURRENT SHEET FORMED BY THE ALFVEN RESONANCE

The magnetic island is usually formed by a current sheet at the resonant surface (magnetic neutral surface), where $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$. When background rotation does not exist, a current sheet caused by externally applied perturbation is formed at the magnetic neutral surface. When background rotation exists, however, such a current sheet is formed at the both sides of the magnetic neutral surface. This difference of radial positions between a current sheet and a magnetic neutral surface is originated from the Alfvén resonance condition. The Alfvén resonance condition for the reduced MHD model is obtained from the linear ideal reduced MHD eqs..

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = B_0 \mathbf{e}_z \cdot \nabla \phi - \mathbf{v}_{\theta 0} \cdot \nabla_{\perp} \psi \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp}^2 \psi + \mathbf{v}_{\theta 0} \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \psi = B_0 \mathbf{e}_z \cdot \nabla \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (4)$$

By assuming the form $f = \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}$ for ψ and ϕ , the Alfvén resonance condition is obtained for $\omega = 0$.

$$(m\Omega_{\theta 0/0})^2 = (k_{\parallel} B_0)^2 \quad (5)$$

Hence, in the case of the finite rotation, $v_{\theta 0} \neq 0$, the Alfvén resonance condition is satisfied at the both sides of the magnetic neutral surface, $k_{\parallel} B_0 = 0$. Figure 1 shows radial profile of the perturbed current drawn along the line through the maximum of the perturbed current around the magnetic neutral surface, where the safety factor $q = 2$,

obtained numerically for $\eta = 10^{-6}$ and $\nu = 10^{-7}$. As shown in fig.1, when the rotation frequency is enough large, there appear two positive peaks of a perturbed current at the both sides of the magnetic neutral surface and the perturbed current becomes negative at the magnetic neutral surface. As the rotation frequency decreases, the radial position of the current peaks approaches to the magnetic neutral surface. When the rotation frequency becomes low enough, two positive peaks of the perturbed current are merged to become one. Figure 2 shows the 2D contour of the perturbed current in the radial and the poloidal directions for $\Omega_{\theta 0/0} = 2.0 \times 10^{-2}\pi$, $\eta = 10^{-6}$ and $\nu = 10^{-7}$. As shown in fig.2, two pairs of the maximum and minimum of the perturbed current are formed in the poloidal direction, because the safety factor at the magnetic neutral surface is $q = 2$. The perturbed current forms the current sheet, which cross the magnetic neutral surface with the angle less than 90 degree. This is because of the finite background rotation. In the vicinity of the magnetic neutral surface, the perturbed current is very small. Figure 3 shows the time evolution of the radial position of the Alfvén resonance, which is estimated from eq.(5), and the maximum and minimum of the perturbed current. As shown in the fig.3, the radial position of the Alfvén resonance moves to the magnetic neutral surface. This is because that the background flow is damped by the appearance of the magnetic island, which operates torque on the plasma. As shown in fig.1, the peaks of the perturbed current approaches to the magnetic neutral surface as the rotation frequency becomes small. In the rotating plasma, the magnetic island driven by the externally applied perturbation grows slowly while the rotation frequency is enough larger. When the rotation frequency becomes lower than a critical value, the driven magnetic island grows rapidly [2]. Hence, just before the rapid onset of the magnetic island, the radial position of the Alfvén resonance is almost the same position of the magnetic neutral surface. At this time, two maximum and minimum peaks of the perturbed current become one peaks. This is the first result showing how the current sheet by the Alfvén resonance triggers the rapid onset of the magnetic island.

In the former theoretical works, effects of the Alfvén resonance are not taken into account and the perturbed current is assumed to be localized at the magnetic neutral surface. Hence, the plasma region is divided into the external ideal region and the inner non-ideal one. The distance between the radial position of the Alfvén resonance current sheet and the magnetic neutral surface depends on the magnetic shear and the rotation frequency. In the low collisionality plasma, as shown in this section, there is a possibility that the width of the inner non-ideal region is small compared with this distance. In such a case, hence, the Alfvén resonance current sheet exists in the external ideal region. This suggests that in order to derive the analytical formula of the driven magnetic island evolution in the rotating plasma during the flow-suppressed growth phase, new analytical theory including the effects of the Alfvén resonance current sheet is needed.

IV. NONLINEAR EVOLUTION OF THE DRIVEN MAGNETIC ISLAND

Figure 3 shows the time evolution of the magnetic island width for the different η in the range of $\eta = 5 \times 10^{-5} \sim 10^{-7}$. For all cases, the viscosity is $\nu = 10^{-7}$, the plasma rotation frequency $\Omega = 10^{-2}$ and the flux input rate $d\Psi^{ext}/dt = 10^{-6}$, respectively. In the high resistivity case of $\eta \geq 5 \times 10^{-6}$, we can clearly identify the three phases in the time evolution of the magnetic island width; that is, the flow-suppressed growth phase (phase A), the rapid growth phase (phase B) and the Rutherford-like growth phase (phase C). In the flow-suppressed growth phase, which is from $t = 0$ to $t \simeq 1600$ for the $\eta = 10^{-5}$ case in Fig.3, the growth of the magnetic island is well suppressed by the plasma rotation and the width of magnetic island remains at relatively low level. The evolution of the island shows the clear dependence on the resistivity in the same way as the onset condition, as described in the previous section. After the width of magnetic island exceeds some critical value, the evolution of magnetic island enters the rapid growth phase. These general features of the driven magnetic island evolution in the rotating plasma are almost the same as that described in the previous theoretical and simulation studies [2?]. The quite interesting point is that the spontaneous growth rate of this phase is almost independent on the resistivity. In this sense, this phase resembles the bifurcation process, which connects two steady states[2? ?]. In our case, the flow suppressed and fully reconnected states are characterized as quasi-steady states. The transition between these two states occurs via fast growth phase. After this phase, the magnetic island enters the slow growth (Rutherford-like) phase, which corresponds from $t \simeq 2500$ for the $\eta = 10^{-5}$ case. The dependence of island width on the resistivity in this phase is also very weak and the island evolves as in the case without the plasma rotation.

In the lower resistivity regime, $\eta \leq 10^{-6}$, however, the rapid growth phase (phase B) is clearly divided into two phases: the rapid growth phase (phase B-1), which is essentially the same as the phase B in the high resistivity case, and the transition phase (phase B-2). In the newly found transition phase B-2, the spontaneous growth rate of magnetic island width is reduced with η and also the evolution of magnetic island shows the small oscillation. The resistivity effect is also clear in the Rutherford-like phase, where the magnetic island width is reduced with decreasing η , though the increasing rate seems not to depend on η .

V. SUMMARY

In this study, we showed the Alfvén resonance effects on the magnetic island evolution by an externally applied perturbation in rotating plasma. In the low viscosity regime, a perturbed current sheet is formed at the Alfvén resonance surfaces, which are different from the radial position of the magnetic neutral surface. In this case, a perturbed current sheet exists outside the inner non-ideal layer defined for the non-rotating plasma. According to this perturbed current sheet profile, the total torque, which affects the plasma, extends wider than the radial position of the Alfvén resonance. These features are inconsistent to the former theoretical assumption, which enables to use the asymptotic matching method to estimate the force balance and the critical value of the external perturbation, beyond which the driven magnetic island grows rapidly. In this study, we also showed a long term evolution process of a driven magnetic island. In low resistivity and viscosity regime, there appears a transition phase between a rapid growth phase and a Rutherford-like one. In a transition phase, the secondary magnetic reconnection occurs around the initial X-point by a magnetic island deformation in the poloidal direction. This secondary magnetic island formation will affect a driven magnetic island evolution through the redistribution of the bootstrap current around the magnetic island.

-
- [1] A. Isayama et al., Nucl. Fusion **43**, 1272 (2003).
 - [2] R. Fitzpatrick, Phys. Plasmas **5**, 3325 (1998).
 - [3] A. Hasegawa and L. Chen, Phys. Rev. Lett. **32**, 454 (1974).
 - [4] X. Wang et al., Phys. Plasmas **5**, 2291 (1998).
 - [5] Z. W. Ma et al., Phys. Fluids **3**, 2427 (1996).
 - [6] O. A. Hurricane et al., Phys. Plasmas **2**, 1976 (1995).
 - [7] A. Boozer, Phys. Plasmas **3**, 4620 (1996).
 - [8] Y. Ishii et al., Nucl. Fusion **47**, 1024 (2007).

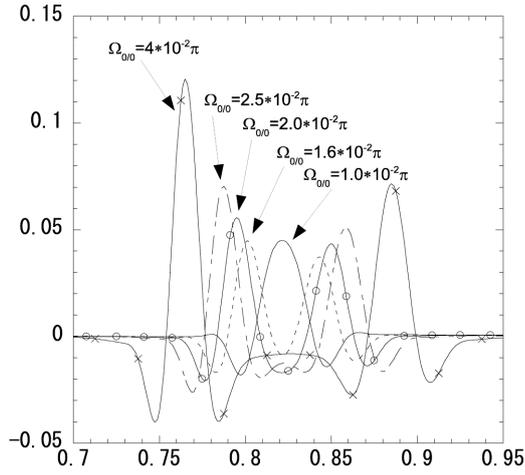


FIG. 1: Radial profile of the perturbed current formed around the magnetic neutral surface by the externally applied perturbation. The resistivity η is 10^{-6} and the viscosity ν is 10^{-7} . As the rotation frequency becomes high, the distance between the magnetic neutral surface and the perturbed current peak becomes large.

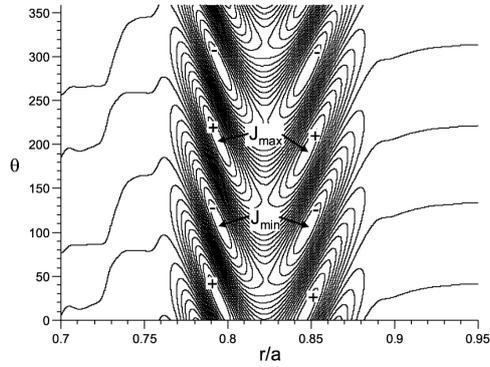


FIG. 2: 2-dimensional profile of the perturbed current obtained for the rotation frequency $\Omega_{0/0} = 2.0^{-2} \pi$, the resistivity $\eta = 10^{-6}$ and the viscosity $\nu = 10^{-7}$. There appear two sets of the positive and negative current sheets in the poloidal direction.

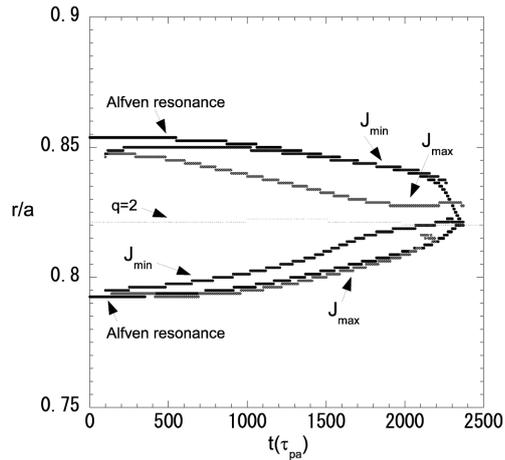


FIG. 3: Time evolution of the radial position of the Alfvén resonance and the maximum and minimum of the perturbed current for the rotation frequency $\Omega_{0/0} = 2.0^{-2} \pi$, the resistivity $\eta = 10^{-6}$ and the viscosity $\nu = 10^{-7}$. In the initial phase, the maximum and minimum peaks of the perturbed current moves following the Alfvén resonance surface.

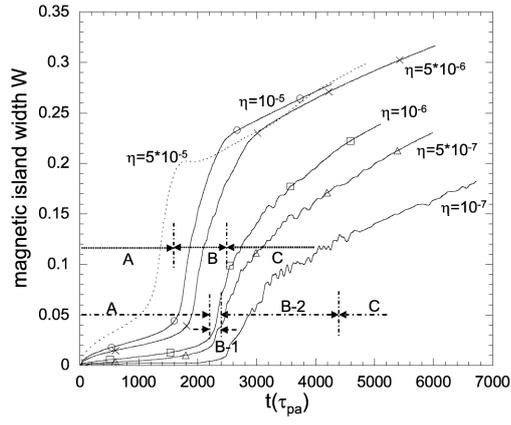


FIG. 4: Time evolution of the magnetic island width is shown for the different resistivity η and the viscosity $\nu = 10^{-7}$. Three and four phases of the magnetic island evolution are shown for $\eta = 10^{-5}$ and $\eta = 10^{-6}$ case respectively. Phase A is the flow-suppressed growth phase, phase B is the rapid growth phase and phase C is the Rutherford-like phase for $\eta = 10^{-5}$. Phase A is the flow-suppressed growth phase, phase B-1 is the rapid growth phase, phase B-2 is the transition phase and phase C is the Rutherford-like phase for $\eta = 10^{-6}$.

簡約化 MHD 方程式を用いた抵抗型不安定性解析

京都大学大学院 エネルギー科学研究科 山田豪史

概要

電流が中心部に集中するような低温の LHD プラズマに対して、抵抗型簡約化 MHD 方程式を用いて線形不安定性解析を行い、電流駆動型のモードやダブルテアリングモードについて調べた。流れる電流値が大きいときは、回転変換が中心で 1 を超えるために比較的成長率の大きい電流駆動型のモードが発生することなどが分かった。

トカマク型の装置とは違ってヘリオトロン型の装置では、プラズマの閉じ込めにトロイダル電流は不必要である。しかし、最近の LHD の実験ではかなりの量のトロイダル電流が観察されている。[1] このようなプラズマでは、電流駆動型のモードやダブルテアリングモードが発生する可能性がある。本研究では、回転変換が単調増加型ではなく、中心で 1 を超えるような平衡とそうでない平衡の不安定性について調べる。

LHD のヘリカルコイルは 3 層のコイルで構成されているが、コイルに流す電流を内側から外側にするにつれて回転変換は小さくなる。ここでは、真中の層にのみ電流を流した場合に対応する平衡の不安定性を考察する。

低 の LHD プラズマでは、局所トロイダル電流の動径方向分布とそれに対応する回転変換の動径方向分布は、図 1 のようになる。(I)は無電流の場合、(II)は通常の電流分布の場合、(III)は電流が中心部で大きく流れている場合に相当する。(III)の場合は中心部でトロイダル磁場が強まるために、回転変換の値がそこで大きく上昇し、回転変換の分布が単調増加型ではなくなる。

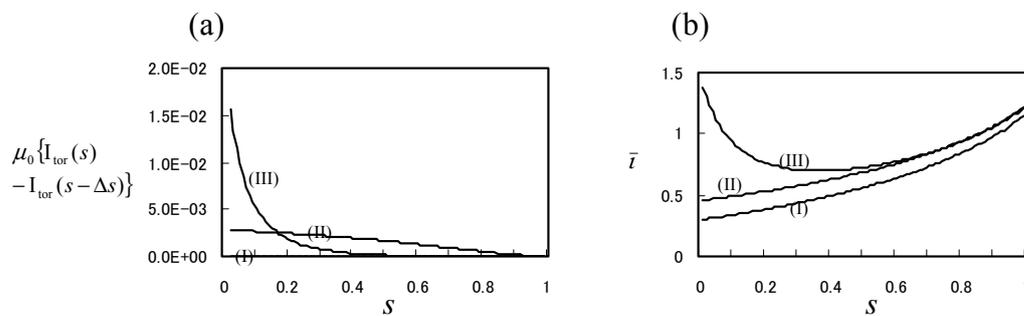


図 1 (a) 局所トロイダル電流と(b)回転変換の動径方向分布。 s は最外殻磁気面で 1 となるように規格化したトロイダルフラックスで、 $I_{\text{tor}}(s)$ は s でラベルされた磁気面内を流れるトロイダル電流である。また、 $\Delta s = 0.01$ である。

解析に用いる簡約化 MHD 方程式は次のようなものである。[2]

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp}^2 \phi) &= [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] + [\nabla_{\perp}^2 \psi, \psi] + f_* \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\perp}^2 \psi) + [\Omega, p] \\
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= [\phi, \psi] + f_* \frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \nabla_{\perp}^2 \psi \\
\frac{\partial p}{\partial t} &= [\phi, p] \\
\nabla_{\perp}^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad [f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1}$$

ρ_0 、 η はそれぞれ質量密度、抵抗で、一定値である。 f_* 、 Ω はそれぞれトロイダル磁場、曲率ポテンシャルで、時間的に一定である。 ψ 、 p 、 ϕ はポロイダルフラックス、圧力、流れ関数である。

次式を満たす平衡量 $\psi_{\text{eq}}, J_{\text{eq}}, p_{\text{eq}}$ をもとにして

$$\begin{aligned}
J_{\text{eq}} &= -\nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{eq}} \\
-[J_{\text{eq}}, \psi_{\text{eq}}] + [\Omega, p_{\text{eq}}] &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

式(1)を線形化すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp}^2 \tilde{\phi}) &= -[J_{\text{eq}}, \tilde{\psi}] + [\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}, \psi_{\text{eq}}] + f_* \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi}) + [\Omega, \tilde{p}] \\
\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= [\tilde{\phi}, \psi_{\text{eq}}] + f_* \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \eta \nabla_{\perp}^2 \tilde{\psi} \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} &= [\tilde{\phi}, p_{\text{eq}}]
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、ティルダが付してある量は摂動量である。本研究では、 D_{pol} をポロイダル断面对応する 2 次元領域として、 z 方向の長さが $2\pi R_0$ であるような領域 $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{\text{pol}}, z \in [0, 2\pi R_0]\}$ の上で、 z 方向に一様であり y 方向について対称な平衡をもとに、トロイダルモード数 n を適当に決めて、解は次のような形をとるものとして、

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \sum_m \tilde{\psi}_m(\rho) \sin(m\theta - n \frac{z}{R_0}) \\
\tilde{p} &= \sum_m \tilde{p}_m(\rho) \sin(m\theta - n \frac{z}{R_0}) \\
\tilde{\phi} &= \sum_m \tilde{\phi}_m(\rho) \cos(m\theta - n \frac{z}{R_0})
\end{aligned} \tag{4}$$

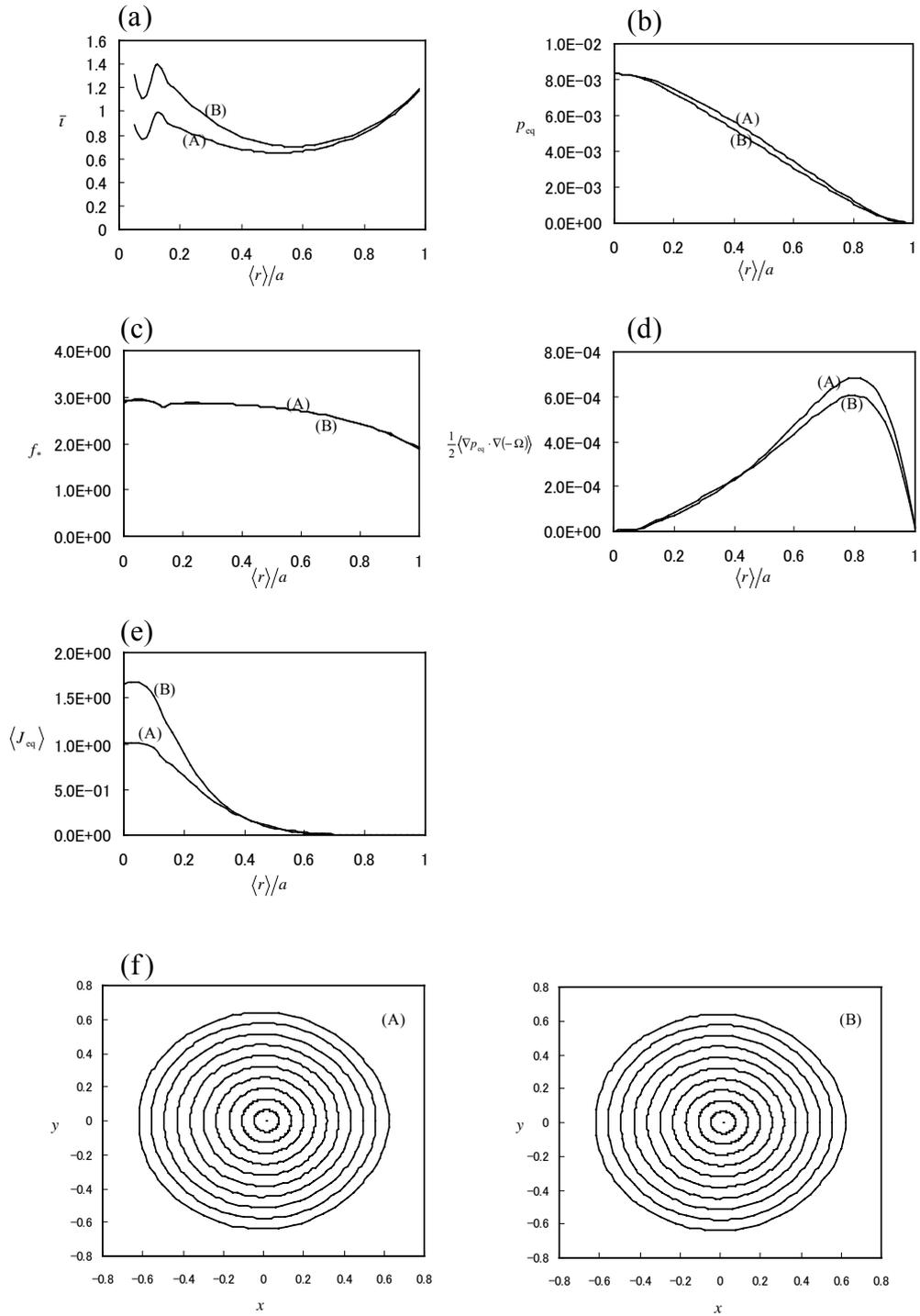


図2 (a)回転変換、(b)圧力、(c)トロイダル磁場、(d)圧力勾配と曲率ベクトルとの内積値の磁気面平均値、(e)トロイダル電流の磁気面平均値の動径方向分布と(f)磁気面の形状。 a は最外殻磁気面の平均半径である。

(3)を解く。ここで、 ρ, θ はそれぞれ動径方向、ポロイダル角方向にとった独立変数である。

LHD の 3 層のヘリカルコイルのうち、真中の層にのみ電流を流した場合に対応する平衡から得られる簡約化 MHD の平衡について不安定性解析を行う。なお、圧力とトロイダル電流は、 s を最外殻磁気面で 1 となるように規格化されたポロイダルフラックスとして、

$$\begin{aligned} p_{\text{eq}} &= p_0(1-s)^2, \\ I_{\text{tor}} &= I_{\text{tor},0} \left\{ 1 - (1-s)^8 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

の分布をとるものとする。ここでは、全トロイダル電流が 95kA と 120kA であるような 2 つの平衡 (A)、(B) を考える。これらの平衡についての諸量を図 2 に示す。ここで、任意の物理量 f に対して、

$$\langle f \rangle = \oint \frac{f}{B} dl \bigg/ \oint \frac{dl}{B} \quad (6)$$

と定義する。また、大半径に対応する R_0 は 3.75 である。

計算結果として、図 3 に成長率の磁気レイノルズ数依存性を示す。また、図 4、5 に流速の径方向成分のフーリエモード関数の支配的な成分を示す。平衡(A)については、 $n=1$ のモードは不安定にならなかった。平衡(B)の場合は中心で回轉變換が 1 を超えているので、 $n=1$ のモードにキンクモードが現れている。これは成長率の磁気レイノルズ数依存性から、理想モードであると推測される。このモードは中心近傍で大きな値をとっているが、このような振る舞いが起きるのは回轉變換が元の LHD 平衡と正確に対応していないためである。 $n=1$ 以外の場合についてみると、対応する共鳴有理面での回轉變換値が最も小さいモードが支配的になっているが、これらのモードの共鳴点での磁気シアが小さいためにこの

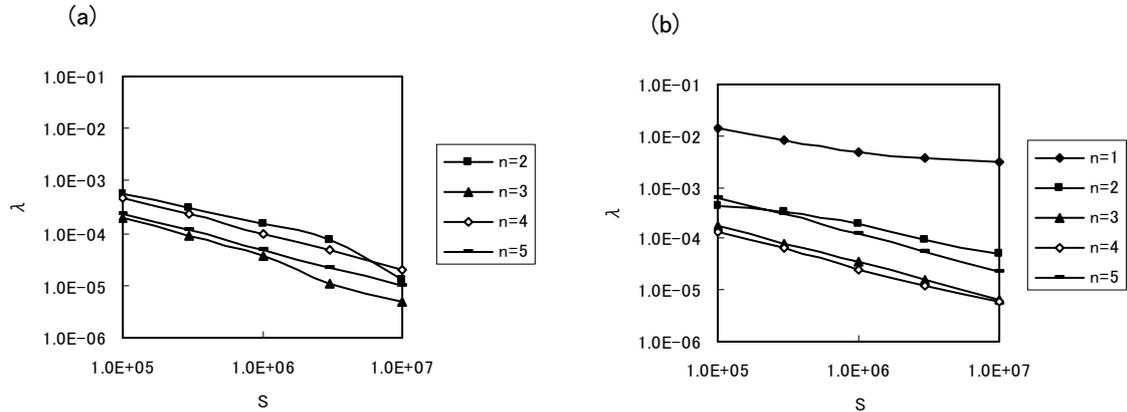


図 3 成長率の磁気レイノルズ数依存性。(a) 平衡(A)、(b) 平衡(B) についての計算結果。

成長率はアルフベン時間 $\tau_H = \sqrt{\rho_0 R_0^2 / B_0^2}$ で規格化した値である。 B_0 は磁気軸上でのトロイダル磁場の値である。また、磁気レイノルズ数は $S = \tau_R / \tau_H$, $\tau_R = a^2 / \eta$ で定義する。

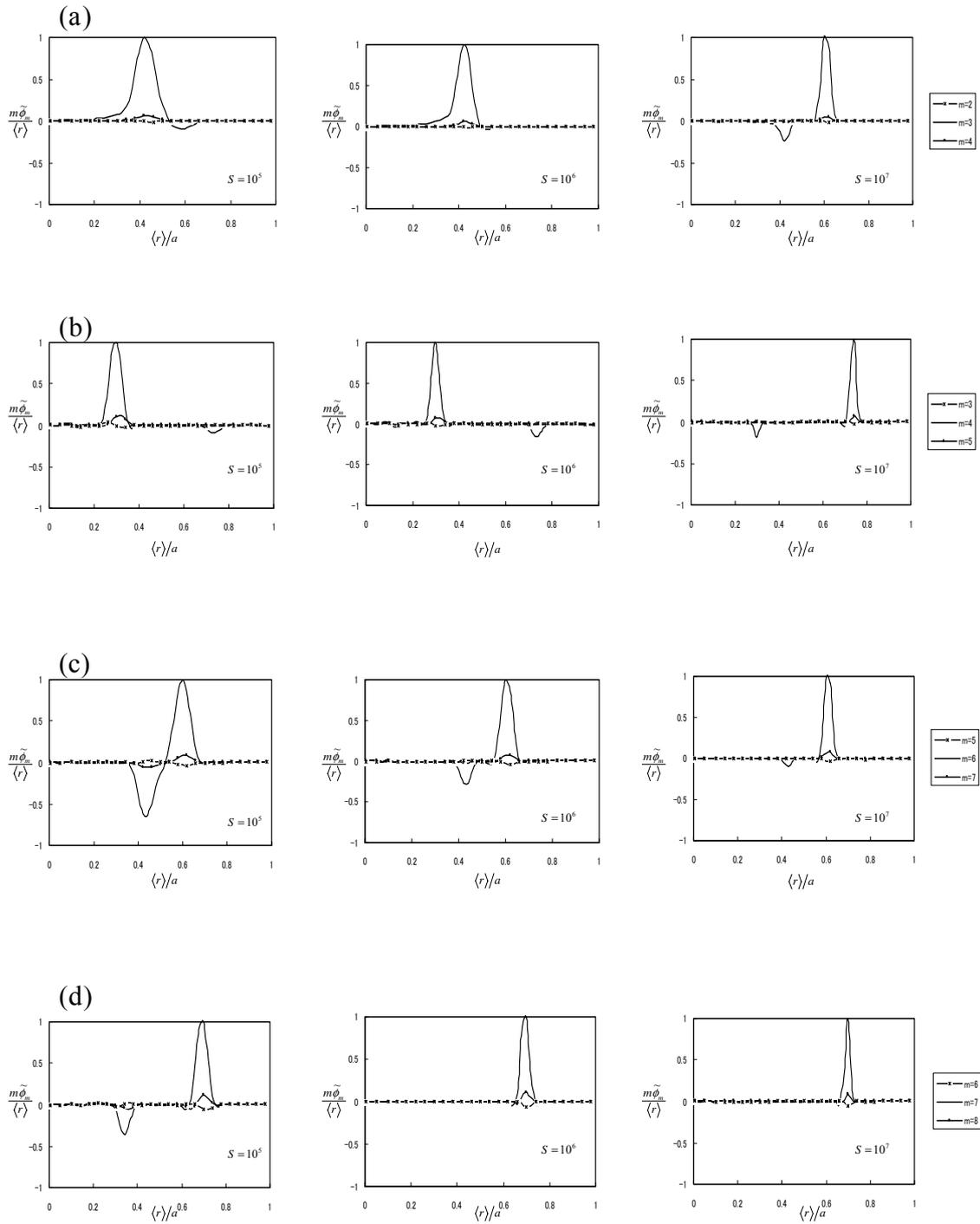


図 4 平衡(A)を用いて計算したときに得られる流速の径方向成分の動径方向分布。(a) $n=2$ 、(b) $n=3$ 、(c) $n=4$ 、(d) $n=5$ に対する計算結果。

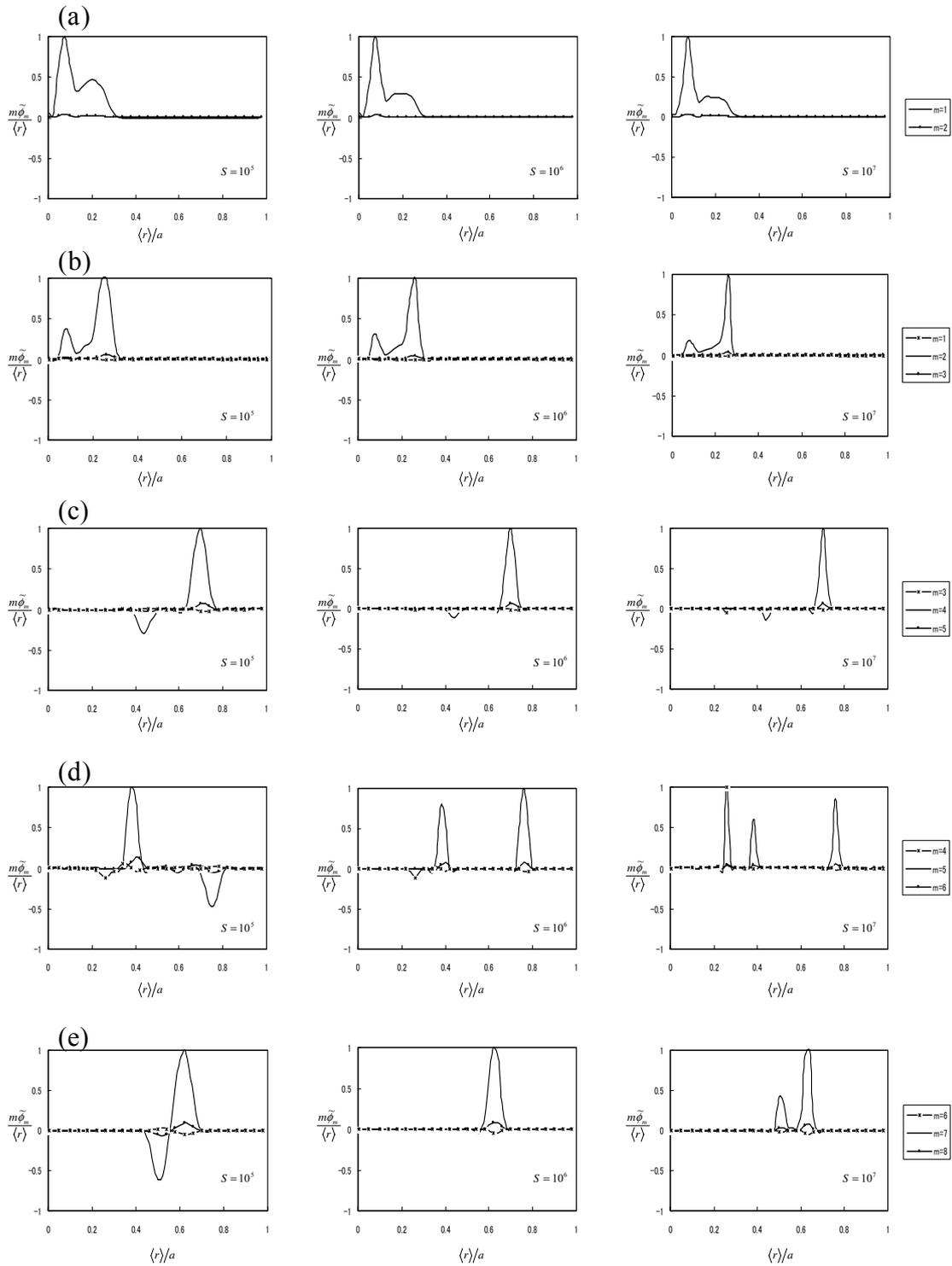


図 5 平衡(B)を用いて計算したときに得られる流速の径方向成分の動径方向分布。(a) $n=1$ 、(b) $n=2$ 、(c) $n=3$ 、(d) $n=4$ 、(e) $n=5$ に対する計算結果。

ような傾向が現れると考えられる。平衡(A)についての計算結果をみると、 S が小さいときは固有関数 $\tilde{\phi}_m$ は内側の有理面で大きな値をとるが、 S が大きくなっていくに従って外側の有理面で大きな値をとるようになることが分かる。 $n = 2, 3$ の場合を見てみると分かるように、 $\tilde{\phi}_m$ の形が変化する点を境にして成長率は S が小さいときの方が比較的大きくなっている。

最後に要約として述べると、中心部で電流が大きく流れる低 β の LHD プラズマの不安定性について調べたが、このようなプラズマは回転変換が動径方向に下に凸の関数になるためダブルテアリングモードが現れることが分かった。回転変換が 1 を超えるような場合はキルクモードが現れるが、このモードは比較的成長率が大きいので、中心部に流れる電流があまり大きくならないようにする必要があると思われる。

参考文献

- [1] K. Y. Watanabe *et al.* and LHD Experimental Group, ECA (*Proc. 27th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, 12-16 June 2000, Budapest, Hungary) **24B** 1316 (2000).
- [2] H. R. Strauss, *Plasma Physics* **22** 733 (1980).

ヘリカルプラズマにおけるプラズモイドの運動

石 崎 龍 一

核融合科学研究所 シミュレーション科学研究部

ペレット溶発により生じたプラズモイドの運動をトカマク、および直線ヘリカルにおいて評価し、タイヤチューブ力等によって低磁場方向にドリフトすることを示した。低磁場方向へのドリフトは従来から指摘されていたが、タイヤチューブ力によることを示したのは初めてである。また直線ヘリカルにおいては、磁気軸よりも高磁場側にプラズモイドが位置している場合、磁気軸方向にドリフトした後、反転して高磁場方向にドリフトすることが明らかになった。このことは LHD においてペレットの入射位置による依存性が小さいという実験事実を再現している。

1. はじめに

燃料補給のためペレットをトーラスプラズマに入射すると、溶発により低温高密度のプラズモイドが形成される。このプラズモイドは急速に磁力線方向に膨張すると同時に、低磁場方向にドリフトすることがトカマク実験で確かめられている。従って、トカマクではその特徴を利用してトーラス内側の高磁場側からペレットを入射することによって、プラズモイドをコアに近づけ、密度を制御することに成功している。一方で、LHD では入射位置を変えても、プラズモイドは周辺に排出されてしまい、コアに近づけることに成功していない。このトカマクとの相違点を明らかにし、効率的なペレット入射法を提言することは、超高密度プラズマを目指す上で重要である。

2. トーラスプラズマにおけるプラズモイドの運動

ペレット溶発により生じた低温高密度のプラズモイドの、トーラスプラズマ中における運動を評価するために、背景プラズマからの加熱モデル[1]を MHD 方程式に導入し、溶発過程を直接取り扱えるコードを開発した。数値スキームとしては CIP 法、計算格子としてはトカマクの場合は円柱座標、ヘリカルプラズマの場合は回転ヘリカル座標を用いている[2-4]。

背景プラズマの 1000 倍の密度をもつプラズモイドが加熱を受け溶発すると、その溶発圧力は背景プラズマの 100 倍以上にも達するため、プラズモイドは磁力線方向に急速に膨張する。その結果、トーラスの内側と外側の径の差により力は外側に働く。これがタイヤチューブ力である。トロイダル磁場は、ほぼ $1/R$ の依存性をもっているため、磁気圧による同様な力（磁場の $1/R$ 力）も働く。この考え方は、 ∇B ドリフトによる電荷分離によりプラズモイド中に電場が生じ、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトが誘発されるという従来の考え方とは異なる。一般にプラズモイドは磁気面上にあるため、電荷分離が生じても高温の電子が磁力線に沿って 10^7 m/s の速度で打ち消そうとする。従って、電荷分離の大部分は打ち消されていると考える方が妥当である。一方でタイヤチューブ力、および $1/R$ 力は

磁場に湾曲があると必ず生じる。図1はトカマクにおけるプラズモイドの運動を示しており、低磁場方向にドリフトしていることが分かる。このことをもう少し定量的に評価するために、磁場は $1/R$ で減少する真空トロイダル磁場のみを考え、背景プラズマの圧力は一様であるとする。また、プラズモイドは圧力擾乱 Δp 、磁場擾乱 ΔB^2 をもち、トラス方向に一様、つまりリング状であるとする。このようなプラズモイドに働く加速度を評価すると、 Δp に比例する項（タイヤチューブ力）と ΔB^2 に比例する項（ $1/R$ 力）の和になる。図2は求められた理論式といくつかのシミュレーション結果を示しており、両者が非常によく一致していることが分かる。しかし擾乱が小さい場合だけはドリフトは起こらず振動していることが分かる。ここでの背景プラズマは安定平衡であるため、小擾乱は振動することは線形理論から明らかである。一方、溶発によって生じるプラズモイドは大擾乱であるため力のバランスは崩れ、もはや安定平衡ではない。従って、線形理論は適用できなくなり、異なる結果が生じる。

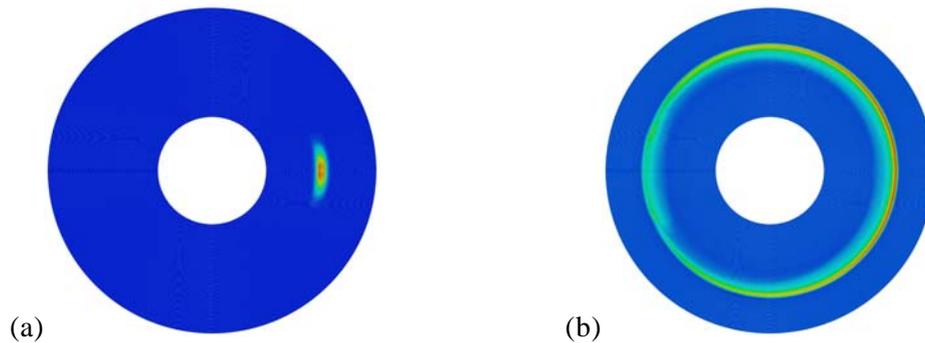


図1. トカマクの赤道面におけるプラズモイドの密度分布。(a) $t = 1.0\tau_A$ (b) $t = 6.0\tau_A$

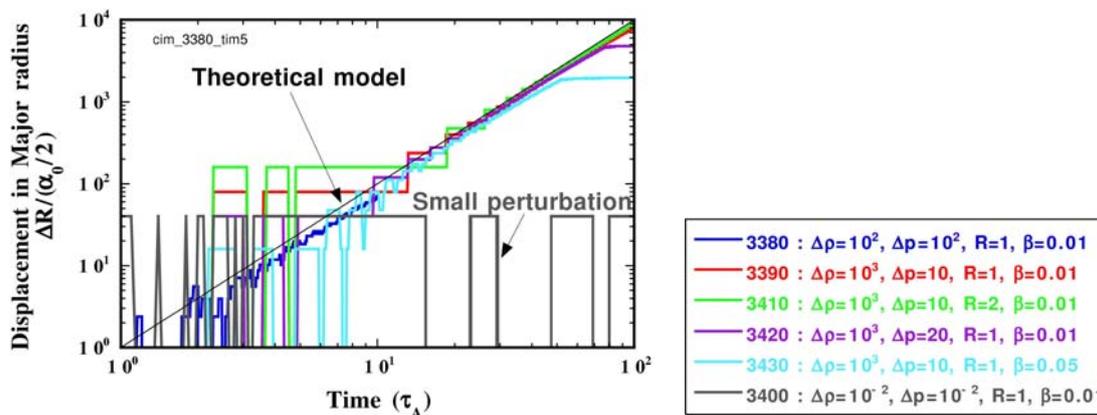


図2. プラズモイドとして初期擾乱を与えたときの大半径方向の変位の時間発展。 $\Delta\rho$ は密度擾乱、 Δp は圧力擾乱、 R は初期位置、 β は背景プラズマのプラズマベータを示す。

次に、直線ヘリカルにおけるプラズモイドの運動を評価した。図3 (a)(b)はプラズモイドの初期位置（丸印）を示している。(a)はポロイダル面、(b)は磁気面を示しており、

この場合のプラズモイドは磁気軸に対して低磁場側に位置している。(b)において磁気圧がトロイダル方向に一様であるのは、回転ヘリカル座標を用いているためである。(c)(d)は(b)の磁気面を通過する質量流速を示しており、磁力線方向に急速に膨張すると同時に、低磁場方向にドリフトしていることが分かる。次に、初期プラズモイドが磁気軸に比べ高磁場側に位置している場合の結果を図4に示す。(c)においては図3と同様、低磁場方向にドリフトするが、その後(d)においては、反転していることが分かる。つまり高磁場方向にドリフトしている。プラズモイドのプラズマベータは1以上であり、そのため局所的に大きな磁気擾乱が生じる。これが影響しているものと考えられる。結果として、プラズモイドの初期位置が低磁場側、高磁場側いずれに位置していても、最終的には周辺領域に向かってドリフトすることが明らかになった。この結果はLHDにおいてペレット入射位置の依存性が小さいという実験結果を説明するものである。

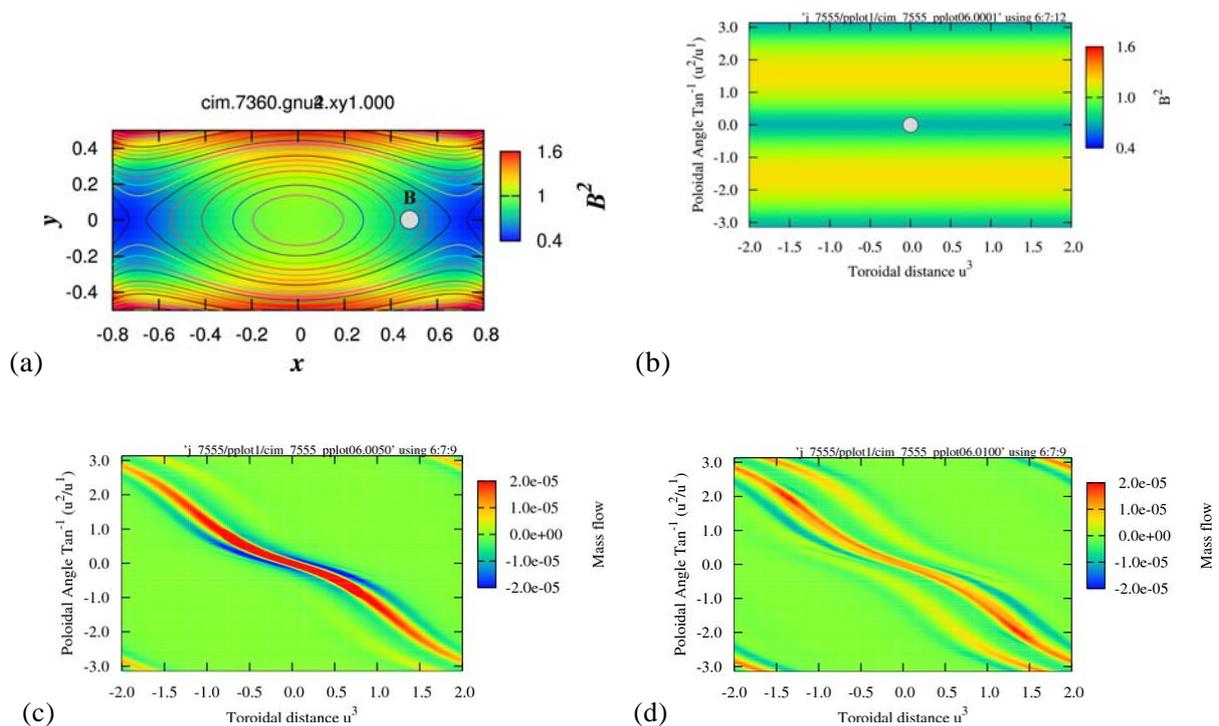


図3. 直線ヘリカルにおいて初期プラズモイドが磁気軸に比べ低磁場側に位置している場合。(a)はポロイダル面、(b)は磁気面を示し、丸印はプラズモイドを示す。カラーは磁気圧、(a)の等高線は磁気面を示している。(c)(d)は $t = 5.0\tau_A$ および $t = 10.0\tau_A$ における、(b)の磁気面を通過する質量流速を示す。

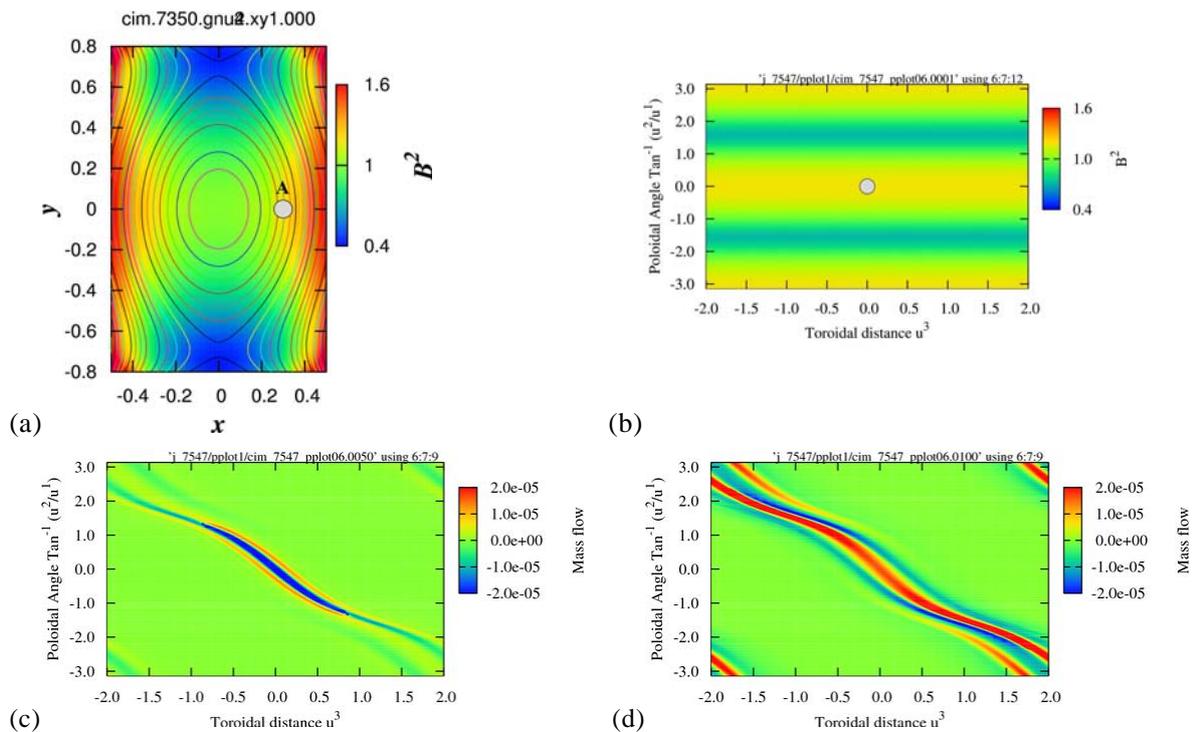


図4. 直線ヘリカルにおいて初期プラズモイドが磁気軸に比べ高磁場側に位置している場合。(a)はポロイダル面、(b)は磁気面を示し、丸印はプラズモイドを示す。カラーは磁気圧、(a)の等高線は磁気面を示している。(c)(d)は $t = 5.0\tau_A$ および $t = 10.0\tau_A$ における、(b)の磁気面を通過する質量流速を示す。

3. まとめ

トカマクにおけるプラズモイドの運動はタイヤチューブ力によることが明らかになった。このことはシミュレーションおよび理論モデルによって確かめられた。また、直線ヘリカルにおいて、その運動を評価したところ、プラズモイドの初期位置が低磁場側、および高磁場側いずれに位置していても、最終的には周辺領域にドリフトすることが明らかになった。この結果は LHD の実験結果を説明するものである。直線ヘリカルにはトロイダル効果が入っていないため、今後は LHD 配位において運動の評価を行い、プラズモイドの初期位置による依存性について明らかにする。

参考文献

- [1] R.Ishizaki, P.B.Parks, N.Nakajima, M.Okamoto, Physics of Plasmas **11**, 4064 (2004).
- [2] P.B.Parks, L.R.Baylor, R.Ishizaki, S.C.Jardin, R.Samtaney, IAEA-CN-116/TH/P3-9 (2004).
- [3] R.Ishizaki, N.Nakajima, M.Okamoto, P.B.Parks, Journal of Plasma Physics **72**, 1159 (2006).
- [4] R.Ishizaki, N.Nakajima, M.Okamoto, IAEA-CN-149/TH/P3-6 (2006).

ヘリカル系における崩壊現象の非線形シミュレーション

核融合科学研究所 水口直紀

1. 概要

LHD の高密度コア(SDC)状態[1]においては、その密度(ベータ値)上昇過程において、しばしばコア密度崩壊(CDC)と呼ばれる中心密度の崩壊現象が観測されている[2]。これは閉じ込め配位を破壊してしまうような激しい崩壊ではないものの、部分的に、過渡的に閉じ込めを悪化させるため、避けるべき現象である。そこで、本研究では現実的な配位を用いて MHD モデルに基づく数値シミュレーションを行ない、CDC を計算機上で再現することにより、その発生ダイナミクスを探ることを目的とする。

2. 方法

LHD 実験においては CDC の崩壊過程は、おおよそ数百 μ sec 程度の MHD 時間スケールで観測されるため、ここでは MHD モデルを基本としたモデルを設定する。基礎式は非線形 MHD 方程式、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mu (\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - (\gamma - 1) \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (\gamma - 1) \eta \mathbf{j}^2, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j}, \quad (6)$$

で、圧縮性、抵抗性の効果を含む。式(1)-(6)を用い、密度 ρ 、流速 \mathbf{v} 、磁場 \mathbf{B} 、圧力 p についての時間発展を解く。計算体系はトーラス全周にわたる 3 次元体系で、HINT コードで採用されたヘリカル座標系を用いている。即ち、トロイダル方向は幾何学的なトロイダル角をとり、ポロイダル断面は、ヘリカルピッチに伴って回転する矩形格子とする。式(1)-(6)は 4 次の中心差分法により離散化し、4 次の Runge-Kutta 法により時間積分を実行する。差分化に伴い必然的に生じる数値粘性および数値抵抗が、式(1)-(6)に現れる粘性 μ および抵抗 η より充分小さくなるよう、 μ および η を与えて解く。

シミュレーションの初期値は、HINT コードを用いて得られた数値平衡解[3]を用いる。各パラメータや最外殻磁気面の形状、プロファイルは、LHD 実験における SDC プラズマを模擬したもので、特に CDC 崩壊現象が観測される直前のデータを元にしてしている。簡単のため密度 ρ は初期に一樣とし、 μ および η についても一樣定数を与える。この平衡解の速度成分に微小な擾乱を白色雑音として与えてシミュレーションを開始し、長時間にわたる擾乱の自発的時間発展の様子を見る。

3. 結果

約 600 τ_A に及ぶ時間発展を追跡した。図 1 は系全体の運動エネルギーの時間発展をプロットしたものである。このように 3 度のピークを経た後にエネルギー緩和していることが分かる。この間の横長ポ

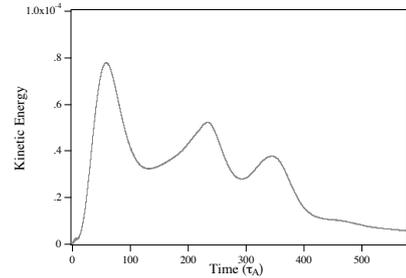


図 1 プラズマの運動エネルギーの時間発展

ロイダル断面内の形状変化を圧力のカラー等高線表示で示したものが図 2 である。図を見れば分かるように、はじめ中間ポロイダル波数(m)が支配的となって不安定性が成長し、やがて変位がある程度大きくなると、プラズマ塊は細かく崩れて表面から剥離し、周辺部へと掃き出されている。

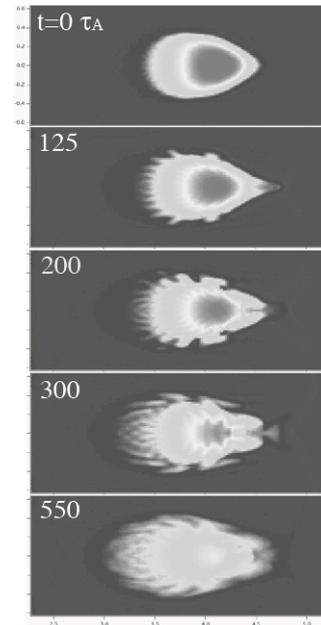


図 2 横長ポロイダル断面内の圧力分布の時間発展

図 3 は同じく横長断面内で圧力の大半径方向プロファイルの時間発展の様子をプロットしたものである。これを見れば分かるように、最初、トーラス外側の圧力勾配の急な部分(バリア領域)で生じた不安定性が、バリア領域の構造を崩壊させている ($t = 200 \tau_A$)。その結果、バリア領域の圧力勾配がより急峻となると同時に、掃き出された圧力が周辺部へと漏れ出す。このとき、もとの圧力分布よりも全体的に細ったプロファイルが過渡的に形成されるが、やがて中心部の圧力が対流運動に伴って初期値の 30~40%程度にまで減少し、緩和する ($t = 550 \tau_A$)。最終的に得られた圧力分布は、初期値と比べてよりブロードなものとなっている。このように、概ねバリア領域で発生した不安定性が、その非線形成長過程において、中心圧力を低下させ、周辺部の圧力を増加させることにより分布の平坦化が起きることが

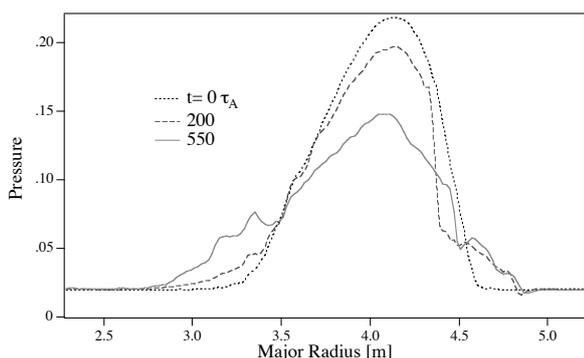


図3 圧力の系方向分布の時間発展
横長断面、大半径方向プロファイルを表す。

分かる。なお、図2及び図3において、擾乱はほとんど低トロイダル波数(n)成分を含まないため、それぞれ圧力は10箇所存在する横長断面の平均をとったものでプロットしている。

不安定性の3次元構造は図4に示される。トーラス外側で長波長・大振幅の、内側で短波長・小振幅の構造が現れており、詳細な検討は今後進めてゆく必要があるものの、バルーニングモードの特徴が現れているように推察される。

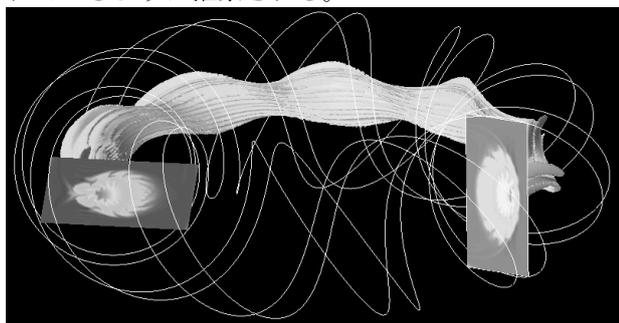


図4 不安定性成長時の圧力の3次元構造

4. 議論

・実験との比較

計算結果をLHDにおける実験結果と比較する。本シミュレーション計算の初期値は実験配位を元にしてしているため、ある程度直接的な比較が可能である。しかし、散逸係数や内部の詳細構造については現実と相違もあるため、配位の詳細な安定性に関する議論は本稿の対象外となる。ここでは、CDCの崩壊相にのみ着目し、そのダイナミクスを定性的に比較する。まず時間スケールに関しては、本計算におけるAlfvén時間($1\tau_A$)はおおよそLHD実験における $1\mu\text{sec}$ に相当するため、CDCの崩壊相の時間スケール(～数百 μsec)と概ね一致している。空間構造については、バリア～周辺部における揺動の増加と、それに続くコア部の密度(圧力)の減少の様子が計算結果とよく一致している。さらに、大半径外側でとくに顕著に揺動が現れる点においても、本計算結果のバルーニング様の構造と比較しうる。

・不安定性について

CDCの発生機構として、これまで(1)MHD不安定性および(2)MHD平衡限界が挙げられ、それぞれ

実験、理論の両面から検討されてきた。本稿の議論は、前者の立場に立ったものである。バルーニング様の不安定性の自発的非線形時間発展のみで、前項のごとく実験で観測される種々の時空間構造を説明できることは、CDCの発生機構が不安定性に寄るものであることを示唆する。なお、本計算でもオーム加熱や抵抗性拡散による平衡の零次成分の変動も含まれるため、長時間にわたる時間発展の中で平衡が存在しなくなる上記(2)のケースが現れていることも有りうるが、本結果は不安定性によるものであることは以下の検証により結論づけられる。即ち、式(1)～(6)を線形化した方程式を用いて、同じ初期値から計算を行なうと、同様のモードの線形成長が確認された。不安定性の性質について、より明らかにするためには、今後、より詳細な検証を行なう必要がある。

・トカマクとの比較

筆者がこれまでにこなってきた球状トカマクにおけるシミュレーション結果[4]と比較する。この計算は、本稿の計算と同様にバルーニングモードの非線形ダイナミクスを球状トカマク配位について調べたものである。計算に用いた球状トカマク配位のベータ値は、中心で20%程度と、ヘリカル配位のそれ(～8%)と比べて高い。そのため、磁場構造はプラズマの運動に伴い大きく変化を受け、より大規模な崩壊過程となる。周辺部から順次崩壊することにより、2段階の緩和を示す点は、本稿の結果と似ているが、1回毎の圧力損失量の割合は、ヘリカルの方が小さく、より穏やかな崩壊過程を示す。トカマクの場合は、たとえ線形モード構造がごく小さなものであっても、それがバルーニングモードであれば、飽和レベルは高く、非線形段階において大きく崩壊することが示されたが、本稿の結果では比較的飽和レベルが低く、細かな崩壊を繰り返すに止まっているようである。この差が何に起因するのかは今後検討してゆく必要がある。

5. まとめと今後

非線形MHDシミュレーションを行ない、ヘリカル配位におけるバルーニングモード様の不安定性の時間発展を調べた。結果をLHD-SDCプラズマのCDC崩壊現象と比較すると、いくつかの点で一致が見られた。従って、CDCの発生機構として不安定性の非線形成長による説明が可能であることが示された。今後、結果の詳細な解析と、パラメータ依存性を調べることにより、CDCの発生条件を整理することが必要である。また、それらの不安定性の除去が、実験的にCDCを避ける方策の一つとして示唆される。

参考文献

- [1] N. Ohya, *et al*, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 55002
- [2] R. Sakamoto, *et al*. submitted to Plasma Fus. Res.
- [3] Y. Suzuki, *et al.*, Nucl. Fusion 46 (2006) L19
- [4] N. Mizuguchi, *et al.*, Nucl. Fusion 47 (2007) 579

Analysis of MHD stability in high- β plasmas in LHD

Noriyoshi NAKAJIMA¹⁾, Satoru SAKAKIBARA¹⁾, Kiyomasa WATANABE¹⁾, Stuart HADOSON²⁾,
and Cris HEGNA³⁾

¹⁾National Institute for Fusion Science, 322-6 Oroshi-cho, Toki 509-5292, Japan

²⁾Princeton Plasma Physics Laboratory, PO Box 451, Princeton, NJ 08543, USA

³⁾Department of Engineering University of Wisconsin-Madison, WI 53706, USA

()

Up to now, theoretically idealized MHD equilibria reflecting experimental conditions have been used in order to examine the ideal MHD stability. This approach has been useful from the aspect of investigating general properties of the ideal MHD stability. Since the properties of a three dimensional MHD equilibrium with large Shafranov shift significantly change by the pressure profile, the current profile, and the boundary condition, however, ideal MHD stability analysis based on theoretically idealized MHD equilibria is considered not to be enough to investigate the proper MHD stability of experimentally obtained MHD equilibria. Indeed, it is shown that ideal MHD stability based on the realistic reconstructed MHD equilibrium with fine structures is different from that based on the theoretically idealized MHD equilibrium. Especially, it is firstly reported that high- n ballooning modes are destabilized in the magnetic well region with tokamak-like magnetic shear.

Keywords: high- n ballooning modes, LHD

DOI: 10.1585/pfr.1.001

1 Introduction

In three-dimensional configurations, the confinement region is surrounded by the stochastic magnetic field lines related to magnetic islands or separatrix, leading to the fact that the plasma-vacuum boundary is not so definite compared with tokamaks that the various modulations of the plasma-vacuum boundary will be induced around the stochastic region by synergetic effects between a transport around the stochastic region and a large Shafranov shift of the whole plasma or a large Pfirsch-Schluter current, in especially high- β operations.

To examine such modulation effects of the plasma boundary on MHD instabilities, high- β plasmas allowing a large Shafranov shift or a large Pfirsch-Schluter current are considered in the inward-shifted LHD configurations with the vacuum magnetic axis R_{ax} of 3.6 m, so that it has been found that the free boundary motion of MHD equilibrium or the whole plasma outward-shift due to a large Pfirsch-Schluter current has significant stabilizing effects on ideal MHD instabilities, leading to partially resolving the discrepancy on MHD stability between experimental results and theoretical analyses [1].

Although experimental aspects on the boundary, the pressure profile, and the current condition are included in the equilibria used in Ref.[1], such equilibria are still theoretically idealized judging from the experimental point of view [2]. Thus, it is needed to use equilibria which are more relevant to the experimental conditions, in order to more clarify MHD stability in planar axis Heliotron configuration with a large Shafranov shift like LHD. The pur-

pose of the present research is to clarify MHD stability especially in IDB-SDC plasma or high- β plasma of LHD by comparing between theoretically idealized MHD equilibria and experimentally reconstructed MHD equilibria. For such a purpose, especially, high- n ballooning local mode stability analysis is performed, because such local mode analysis does not need whole information of MHD equilibrium. The precise information of MHD equilibrium near the plasma periphery is not needed, once the core MHD equilibrium is consistently reconstructed to experimental conditions. This research might lead to more deeper understanding of MHD equilibrium and stability in the planar axis Heliotron configuration with a large Shafranov shift like LHD.

2 in theoretically idealized MHD equilibria

In order to clarify dependence of the stability properties of the ideal high- n ballooning on MHD equilibrium, firstly, high- n ballooning stability analyses are performed for theoretically idealized MHD equilibria in the inward-shifted vacuum configuration with $R_{ax} = 3.75$ m.

2.1 in currentless MHD equilibria with peaked pressure profile

The properties of currentless MHD equilibria with a peaked pressure profile; $P(s) = P_0(1^s)^2$, under the fixed boundary condition are shown in Fig.1, where s is the normalized toroidal flux. As β increases by using P_0 ,

tokamak-like magnetic shear is created near the magnetic axis. Although the magnetic hill still remains near the plasma periphery, the Mercier stability in the magnetic hill region is improved as β increases. Boundary between magnetic well and hill exists in helical-like magnetic shear region. The corresponding normalized growth rates of high- n ballooning modes are shown in Fig.2. High- n ballooning modes are destabilized in the peripheral magnetic hill region with helical-like magnetic shear. As β increases, properties of the high- n ballooning modes change from helical-like ones with strong magnetic field line dependence to tokamak-like ones with weak magnetic field line dependence. Helical-like high- n ballooning modes become unstable only near the magnetic field line with $\alpha = \zeta - q\theta = 0$ where the local magnetic curvature is baddest. On the other hand, tokamak-like high- n ballooning modes become unstable independent of the magnetic field line, even in the magnetic field line with $\alpha = \pi/M$ (M is the toroidal field period of the MHD equilibrium) where the local magnetic curvature is locally good.

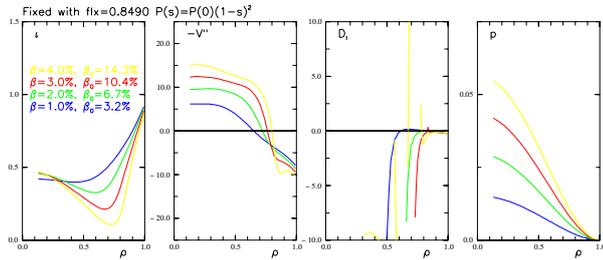


Fig. 1 β -dependences of the rotational transform , magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in currentless MHD equilibria with the peaked pressure profile under the fixed boundary condition.

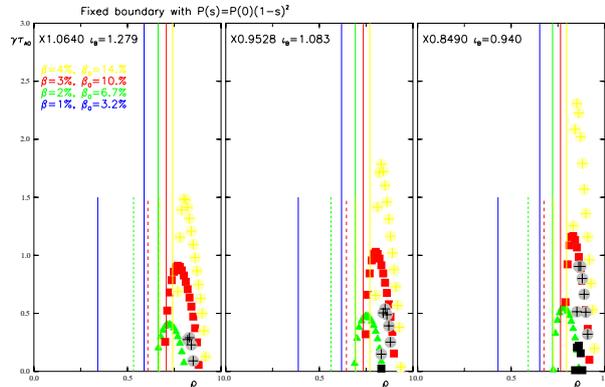


Fig. 2 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma_{T_{A0}}$ for three different plasma volumes. The most right column corresponds to 1

In order to investigate effects of the boundary condition, the MHD equilibria are created under the free boundary condition. In Fig.3, the properties of currentless MHD equilibria under the free boundary condition is shown. Although the β -dependences of the magnetic shear, magnetic well, and Mercier stability in free boundary equilibria are

qualitatively similar to those in fixed boundary equilibria, change of iota in free boundary equilibrium is more significant than that in fixed boundary equilibrium, and formation of magnetic islands is suggested in shearless region judging from the spikes of D_I . The spike comes from the divergence of the Pfirsch-Sch"ueller current indicating existence of the magnetic island. The corresponding normalized growth rates of high- n ballooning modes are shown in Fig.4. Most significant differences between fixed boundary equilibria and free boundary equilibria are that helical-like ballooning modes destabilized in the magnetic hill region with helical-like magnetic shear extend to the magnetic well region with tokamak-like magnetic shear. Since ballooning formalism breaks near shearless region, the global mode analysis might be needed for precise stability.

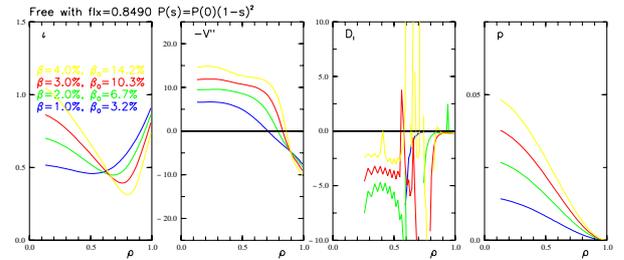


Fig. 3 β -dependences of the rotational transform , magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in currentless MHD equilibria with the peaked pressure profile under the free boundary condition.

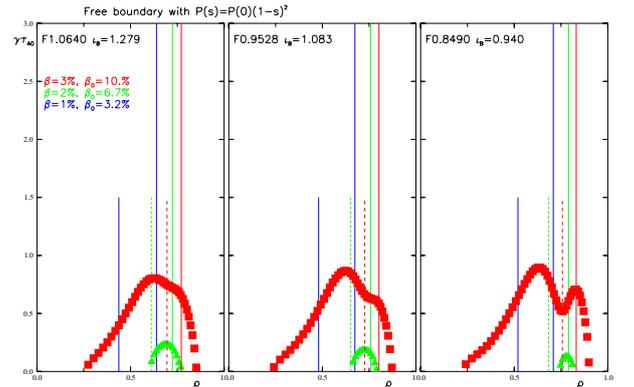


Fig. 4 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma_{T_{A0}}$ for three different plasma volumes. The most right column corresponds to 3

2.2 in currentless MHD equilibria with broad pressure profile

In order to investigate effects of the pressure profile, the currentless MHD equilibria are made with a broad pressure profile; $P(s) = P_0(1 - s^2)^5$. In Fig.5, the properties of the currentless MHD equilibrium with the broad pressure profile under the fixed boundary is shown. The steep pressure gradient near the plasma periphery coming from the broad pressure profile makes magnetic hill region narrow.

The corresponding normalized growth rates are indicated in Fig.6. As well as the MHD equilibria with peaked pressure profile, high- n ballooning modes are destabilized in the peripheral magnetic hill region with helical-like magnetic shear. As β increases, properties of the high- n ballooning modes change from helical-like ones with strong magnetic field line dependence to tokamak-like ones with weak magnetic field line dependence.

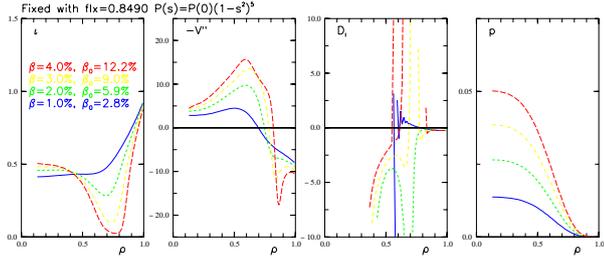


Fig. 5 β -dependences of the rotational transform , magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in currentless MHD equilibria with the broad pressure profile under the fixed boundary condition.

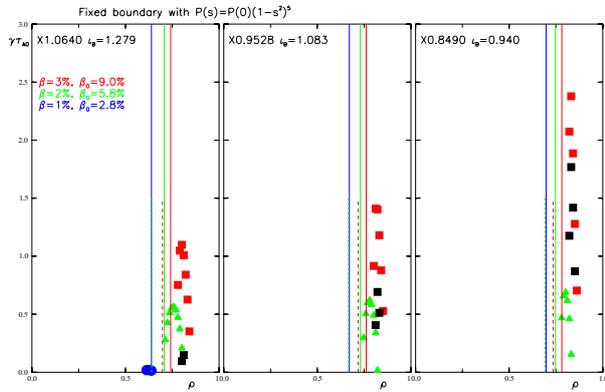


Fig. 6 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$ for three different plasma volumes. The most right column corresponds to 5

The effects of the free boundary are shown in Figs.7 and 8 for currentless MHD equilibria with a broad pressure profile. The differences between fixed boundary and free boundary are same as the case of currentless MHD equilibria with peaked pressure profile.

3 in reconstructed MHD equilibria

In this section. the stability of high- n ballooning modes is investigated in the reconstructed MHD equilibria.

The Fig.9 denotes the properties of both the reconstructed MHD equilibrium and the variations corresponding to IDB-SDC plasma in the standard configuraion with $R_{ax} = 3.75m$. The corresponding normalized growth rates are shown in Fig.10. The behaviors of all quantities of equilibrium and stability are similar to those in the theoretically idealized MHD equilibria.

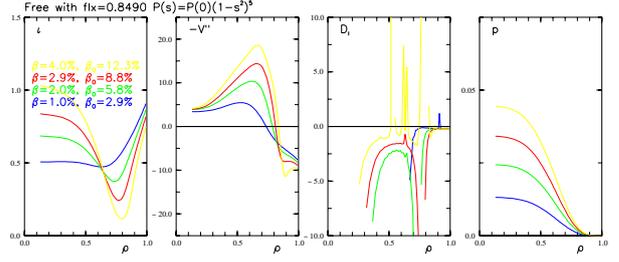


Fig. 7 β -dependences of the rotational transform , magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in currentless MHD equilibria with the broad pressure profile under the free boundary condition.

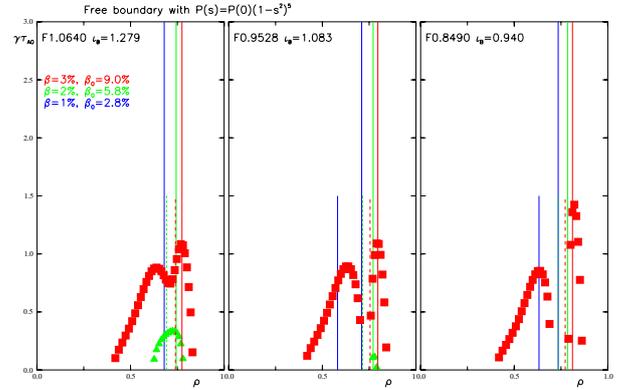


Fig. 8 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$ for three different plasma volumes. The most right column corresponds to 7

The properties of the reconstructed MHD equilibrium corresponding to IDB-SDC plasma in the outward-shifted vacuum configuraion with $R_{ax} = 3.85m$ are denoted in the upper row of Fig.11. The corresponding normalized growth rate is shown in the left column of Fig.???. The most significant feature of stability of the high- n ballooning modes is that helical-like ballooning modes appear in the both magnetic hill region with helical-like magnetic shear and magnetic well region with tokamak-like magnetic shear. Moreover, high- n ballooning modes in the magnetic well region with tokamak-like magnetic shear are more tokamak-like ballooning modes than those in the magnetic hill region with helical-like magnetic shear, because the magnetic field lines where the mode is unstable are wider in the magnetic well region with tokamak-like magnetic shear than in the magnetic hill region with helical-like magnetic shear. As is understood from the pressure profile shown in upper row of Fig.11, the reconstructed pressure profile has fine structures, namely, slight stair-case like structures. Although those fine structures are not so significant, it is considered that such fine structure changes the stability criterion of the high- n ballooning modes through the balance between stabilization effect due to the local magnetic shear and destabilization effect due to the local magnetic curvature. High- n ballooning modes in the magnetic well region with tokamak-like shear might

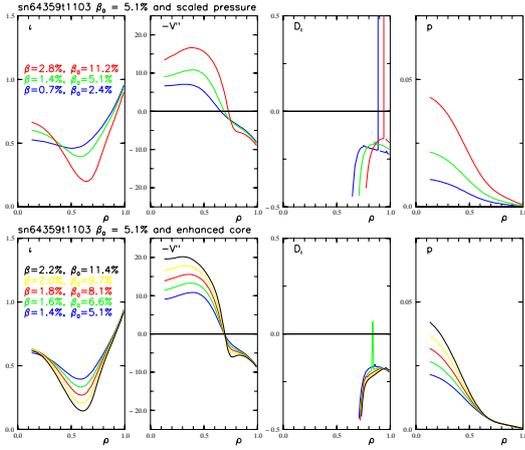


Fig. 9 β -dependences of the rotational transform, magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in reconstructed MHD equilibria and the variations in the standard vacuum configuration with $R_{ax} = 3.75$. The upper (lower) row includes the β -variations of whole (core) region.

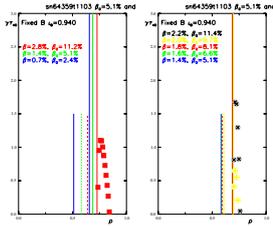


Fig. 10 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$ for three different plasma volumes. The left (right) column includes the β -variations of whole (core) region.

lead to core density collapse experimentally reported.

The properties of the reconstructed MHD equilibrium corresponding to high- β plasma in the inward-shifted vacuum configuration with $R_{ax} = 3.60\text{m}$ are denoted in the lower row of Fig.11. The corresponding normalized growth rate is shown in the right column of Fig.???. As well as the above case of IDB-SDC, fine structures of the pressure profile makes the significant change in the Mercier criterion, leading to the non-monotonic change in the normalized growth rate as shown in the right column of Fig.???

4 Summary

Up to now, theoretically idealized MHD equilibria reflecting experimental conditions have been used in order to examine the ideal MHD stability. This approach has been useful from the aspect of investigating general properties of the ideal MHD stability. As is well known, however, the properties of a three dimensional MHD equilibrium with large Shafranov shift significantly change by the pressure profile, the current profile, and the boundary condition. Indeed, high- n ballooning stability is completely different

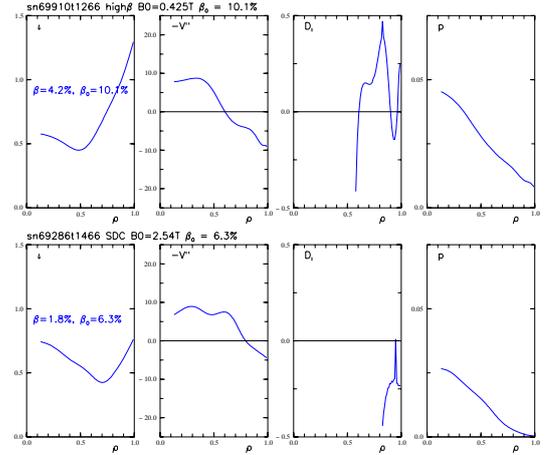


Fig. 11 β -dependences of the rotational transform, magnetic well and hill $-V''$, and Mercier criterion D_I with pressure profile P in reconstructed MHD equilibria. The upper (lower) row corresponds to the reconstructed equilibrium in the outward-shifted (inward-shifted) vacuum configuration with $R_{ax} = 3.85$ (3.60) m.

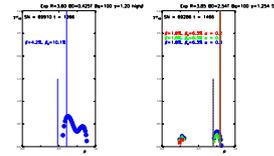


Fig. 12 β -dependence of the normalized growth rates $\gamma\tau_{A0}$. The left (right) column corresponds to the reconstructed equilibrium in the outward-shifted (inward-shifted) vacuum configuration with $R_{ax} = 3.85$ (3.60) m.

between equilibria under fixed boundary and those under free boundary. Although free boundary equilibria are more stable than fixed boundary ones in the inward-shifted vacuum configuration with $R_{ax} = 3.60\text{m}$, free boundary equilibria are more unstable than fixed boundary ones in the standard vacuum configuration with $R_{ax} = 3.75\text{m}$. Moreover, it is shown that ideal MHD stability based on the realistic reconstructed MHD equilibrium with fine structures is different from that based on the theoretically idealized MHD equilibrium. Especially, it is firstly shown that high- n ballooning modes are destabilized in the magnetic well region with tokamak-like magnetic shear, which means that high- n ballooning stability is quite sensitive to MHD equilibrium. Stability analyses based on idealized MHD equilibria might not be enough to interpret experimental results on MHD stability. More extensive stability analyses based on reconstructed MHD equilibria will be needed.

[1] N. Nakajima, et al., Nucl. Fusion **46** (2006) pp.177-199.
 [2] K.Y. Watanabe, et al., Plasma Phys. Control. Fusion, **49** (2007) pp.605-618.